

# Energía

## en sistemas gravitatorios relativistas

### 10.1. Partículas de prueba en relatividad general

#### 10.1.1. Introducción a la relatividad general, principio de equivalencia (global)

Un concepto fundamental en la mecánica desarrollada por Newton, es el de punto material o partícula. Cada punto material está caracterizado, en principio, por un número que describe sus propiedades inerciales; a este número se le llama masa inercial. Ésta es la constante que figura en la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m_I \vec{a}, \quad (10.1)$$

que aparece multiplicando a la aceleración de la partícula.

Cuando las partículas están sujetas a las interacciones gravitatorias, en principio, se necesitaría otra constante asociada al punto material para caracterizar sus propiedades dinámicas; dado que la fuerza gravitatoria tiene la forma:

$$\vec{F} = m_G \vec{g}, \quad (10.2)$$

donde  $m_G$  es la masa gravitacional y  $\vec{g}$  el campo de aceleración gravitatorio.

Se deduce de las observaciones de Galileo que existe una relación constante entre las masas inerciales y gravitacionales para diferentes objetos. Esta propiedad ha sido verificada por otros experimentos; pero es particularmente célebre el experimento de Roland von Eötvös, quien mostró que la relación  $m_G/m_I$  no varía en más de  $10^{-9}$  de una sustancia a otra. Es así que se identifica la masa inercial y la masa gravitatoria y uno se refiere simplemente a la masa de una partícula. Es notorio que esta identificación estuvo ya incluida en la ley de la gravitación para puntos materiales sugerida por Newton; quien propuso la siguiente ecuación de movimiento para un conjunto de partículas sujetas a interacciones gravitatorias:

$$m_i \frac{d^2 \vec{X}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j m_i (\vec{X}_j - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_j - \vec{X}_i|^3}, \quad (10.3)$$

donde  $m_i$  es simplemente la masa de la partícula  $i$  y  $\vec{X}_i$  sus coordenadas cartesianas. Estas ecuaciones son invariantes ante el llamado grupo galileano; que es el grupo de transformaciones entre sistemas inerciales.

Cuando la electrodinámica fue comprendida y James Clerk Maxwell (1831-1879) presentó las ecuaciones que la describen, se reconoció que estas ecuaciones no son invariantes ante transformaciones de Galileo. En aquella época se pensó que tal vez las ecuaciones de Maxwell eran válidas sólo en una clase particular de sistemas de referencia. Es así que el propio Maxwell introdujo la idea de un éter que sería identificado con el espacio absoluto de Newton y de esta manera proveería de una salida

a este problema de la invariancia de las ecuaciones.

Por un momento la introducción del éter de Maxwell pareció resolver el problema; pero los experimentos de Michelson y Morley (1887) demolieron la idea alrededor de la introducción de un éter. Más aún, se halló que las ecuaciones de Maxwell eran invariantes ante un grupo distinto de transformaciones, las llamadas transformaciones de Poincaré.

Una clarificación importante de la nueva mecánica implicada por estas transformaciones se debe a Albert Einstein (1879-1955), quien desarrolló lo que hoy se conoce como la teoría de la relatividad especial. Uno de los pilares fundamentales de esta teoría es el principio que establece que las leyes de la física deben ser invariantes ante transformaciones lineales entre sistemas inerciales. Luego, como las ecuaciones de Maxwell son leyes de la física, estas transformaciones lineales deben ser las transformaciones de Poincaré.

El grupo de Poincaré está constituido por las transformaciones de Lorentz y las cuatro posibles traslaciones.

Vale la pena enfatizar que la diferencia fundamental entre la mecánica newtoniana y la visión de la relatividad especial de la estructura del espaciotiempo es que, mientras en la imagen newtoniana todas las perturbaciones son instantáneamente detectadas por el resto del Universo, en la visión de la relatividad especial aparece una velocidad máxima para la transmisión de información.

En relación con esto hemos probado, anteriormente, que las transformaciones de Lorentz se pueden deducir del principio de la relatividad y de la suposición de una velocidad máxima finita para la propagación de información.

La situación era, entonces que la cinemática de partículas y la electrodinámica eran invariantes ante la acción del grupo de Poincaré, pero la teoría de la gravitación newtoniana no lo era. Por lo tanto era clara la necesidad de una nueva teoría de la gravitación que no contradijese el resto de las ideas físicas.

La teoría de la relatividad general es la teoría de la gravitación que resolvió este dilema y contiene un cambio dramático en la noción del espaciotiempo con respecto al punto de vista proveniente de la mecánica newtoniana y aún de la relatividad especial.

Para tener una idea clara de la naturaleza de los nuevos conceptos que fueron introducidos, es conveniente evocar algunos de los pensamientos originales que dieron nacimiento a esta teoría.

En 1911, cinco años antes de la presentación de la teoría de la relatividad general, A. Einstein publicó un artículo con el título: “*Sobre la influencia de la gravitación en la propagación de la luz*” [Ein52]. En este artículo él explica una hipótesis sobre la naturaleza física del campo gravitatorio; para cuyo propósito la siguiente situación física fue considerada. Asumamos un campo gravitatorio homogéneo, con aceleración de la gravedad  $g$ ; donde uno puede definir un sistema de coordenadas estacionario  $K$  de tal forma que la aceleración gravitatoria apunta en la dirección negativa del eje  $z$ . Consideremos otra situación en la cual no hay campo gravitatorio y un sistema  $K'$  se está moviendo con aceleración uniforme  $g$  en la dirección positiva del eje  $z$  de un sistema inercial. Las trayectorias de los puntos materiales en los sistemas  $K$  y  $K'$  estarán determinadas por las ecuaciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g. \quad (10.4)$$

Es importante enfatizar que estas ecuaciones se aplican a situaciones físicas que aparentan ser diferentes. Sin embargo, uno obtiene una explicación satisfactoria del experimento de Galileo, correspondiente a la igual caída de distintos objetos en el campo gravitatorio, si se asume que los sistemas  $K$  y  $K'$  son físicamente equivalentes; en otras palabras, si la aceleración gravitatoria  $g$  se entiende equivalentemente como producida por la aceleración del sistema  $K$ . Bajo estas consideraciones uno debe permitir ahora la posibilidad de aceleraciones arbitrarias entre sistemas de referencia; en contraste con el principio de relatividad restringida que sólo permite velocidades constantes arbitrarias entre sistemas de referencia.

La equivalencia entre los sistemas  $K$  y  $K'$  es, ciertamente, válida si uno se restringe a procesos, puramente mecánicos donde es aplicable la descripción newtoniana. Sin embargo, uno arriba a la formulación de un nuevo principio, el llamado *principio de equivalencia* (global), si se asume la equivalencia física de los sistemas  $K$  y  $K'$  con respecto a todos los procesos físicos. Este principio es muy poderoso y elaboraremos seguidamente algunas de sus consecuencias sugeridas en 1911; pero en la sección que sigue formularemos al principio de equivalencia de una manera más precisa, como es empleado en la relatividad general. Antes de proseguir conviene enfatizar que este principio no debe ser considerado como afirmaciones que gobiernan la trayectoria de partículas con respecto a sistemas Galileanos; sino que el sistema  $K'$  debe ser considerado como acelerado respecto de un sistema inercial en el contexto de la relatividad especial. Este es el punto de vista que se adoptará en el tratamiento de los ejemplos siguientes.

### 10.1.2. Relación entre la energía y la masa gravitatoria

Consideremos dos sistemas materiales  $S_1$  y  $S_2$  que están localizados sobre el eje  $z$  del sistema  $K$  con una distancia  $h$  entre ellos; de tal forma que el potencial gravitatorio en el sistema  $S_2$  es mayor, por una cantidad

$$\Delta\Phi = gh \quad (10.5)$$

que el correspondiente al sistema  $S_1$  cuando la radiación es emitida desde  $S_2$ . Si se desconoce un comportamiento definido de la radiación bajo la influencia del campo gravitatorio, es difícil formular alguna afirmación acerca de la energía que será medida por  $S_1$  debido a la emisión de radiación desde  $S_2$ . Es muy útil en esta situación hacer uso del principio de equivalencia entre los sistemas  $K$  y  $K'$ ; de tal manera que uno puede estudiar este proceso en un sistema inercial  $K_0$  donde no aparecen aceleraciones gravitatorias. Supongamos que al tiempo de emisión la velocidad relativa de  $K'$  respecto de  $K_0$  es cero; o en otras palabras que  $S_1$  y  $S_2$ , que se asumen acelerados en la dirección positiva del eje  $z$  en  $K_0$ , están en reposo al tiempo de emisión. Al momento en que la radiación arriba a  $S_1$ , la velocidad de  $S_1$  respecto de  $K_0$  será en primera aproximación

$$v = g \frac{h}{c}; \quad (10.6)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Luego la radiación medida por  $S_1$  tendrá, en primera aproximación, la energía dada por la ecuación (7.14); esto es

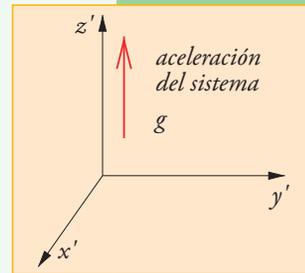
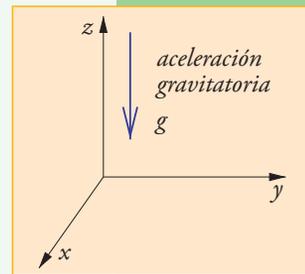


Figura 10.1. El campo gravitatorio del sistema  $K$  provoca fenómenos equivalentes a los fenómenos observados en el sistema  $K'$  que está acelerado.

$$E_1 = E \left( 1 + \frac{v}{c} \right) = E \left( 1 + g \frac{h}{c^2} \right). \quad (10.7)$$

Debido al principio de equivalencia la misma relación matemática vale en el sistema  $K$ , que tiene la aceleración gravitatoria  $g$ . Reemplazando  $gh$  por  $\Delta\Phi$  en las ecuaciones anteriores, se obtiene para  $K$  la relación:

$$E_1 = E + \frac{E}{c^2} \Delta\Phi; \quad (10.8)$$

de donde se observa que la cantidad  $\frac{E}{c^2}$  se comporta como una masa gravitacional. Esto, a su vez, puede ser entendido como la equivalencia entre la masa inercial y gravitatoria; dado que uno sabe que a una cantidad de energía  $E$  le corresponde una masa inercial,  $\frac{E}{c^2}$  como se desprende del estudio de la cinemática en el contexto de la relatividad especial.

### 10.1.3. Mediciones del tiempo en presencia de un campo gravitatorio homogéneo

Supongamos que la radiación emitida desde  $S_2$  tiene frecuencia  $\nu$  relativa a un reloj en  $S_2$ ; luego uno espera que la frecuencia medida en  $S_1$  sea mayor. En efecto, refiriéndonos al sistema  $K_0$ , se puede ver fácilmente que si al tiempo de emisión  $S_1$  y  $S_2$  estaban en reposo, al tiempo de absorción  $S_1$  medirá una frecuencia diferente debido al efecto Doppler; dado que  $S_1$  se estará moviendo hacia  $S_2$  con velocidad  $v$ . Por lo tanto se tiene

$$\nu_1 = \nu \left( 1 + g \frac{h}{c^2} \right). \quad (10.9)$$

Debido a la equivalencia de los sistemas  $K$  y  $K'$  se deduce que la relación entre las frecuencias de absorción y emisión de la radiación estará dada por

$$\frac{\nu_1}{\nu} = 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}, \quad (10.10)$$

donde  $\Delta\Phi$  es la diferencia de potencial gravitatorio entre los sistemas. Pero esto conduce a la siguiente cuestión: la medida de frecuencias se puede asociar al conteo de valles y crestas del paquete de onda bajo estudio; luego como las medidas de frecuencias son diferentes se debe concluir que los relojes marchan a distinto ritmo. Claramente la relación entre los ritmos de los relojes está dada por el factor  $\left( 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right)$ . Más precisamente, pensemos en que la medida de frecuencia es equivalente a contar  $n$  crestas de la onda; luego se tiene

$$\nu_1 = \frac{n}{\Delta t_1} \quad y \quad \nu = \frac{n}{\Delta t_2}; \quad (10.11)$$

por lo que se tiene

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (10.12)$$

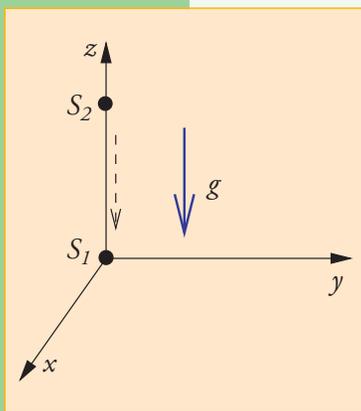


Figura 10.2.

Debido a la equivalencia entre un sistema con un campo gravitatorio con otro que se acelera; se deduce que los relojes del sistema  $S_2$  y del sistema  $S_1$  no se pueden sincronizar en presencia de un campo gravitatorio.

**Ejercicio 10.1** Un buen día el mellizo Alberto decide retirarse a meditar en la soledad de las alturas del cerro Champaquí, que está a 2.790 m sobre el nivel del mar (snm). Pone su reloj atómico a cero y parte desde la puerta oeste de FaMAF, que está a 440 m snm.

Jaimito, el otro mellizo, para no ser menos, decide retirarse a meditar en la soledad de las alturas del cerro Aconcagua, que está a 6.960 m snm. Jaimito también pone a cero su reloj atómico al mismo tiempo que Alberto y también parte en ese instante desde el mismo lugar.

Otro reloj atómico es dejado en FaMAF, con la misma sincronización del cero.

Al cabo de un año, según el reloj dejado en FaMAF, se reúnen los mellizos en el lugar de partida.

a) ¿Qué tiempo marca el reloj de Alberto?

b) ¿Qué tiempo marca el reloj de Jaimito?

#### 10.1.4. Curvatura de los rayos luminosos en presencia de campo gravitatorio

Asumamos que un rayo luminoso es emitido de  $S_2$  perpendicular al eje  $z$  con respecto al sistema  $K_0$  en el momento que  $S_1$  se encuentra en el origen de coordenadas y  $S_2$  se halla a una distancia  $h$  en la dirección positiva del eje  $z$ . Al momento de emisión tanto  $S_1$  como  $S_2$  se encuentran en reposo. Imaginemos que en el plano  $z = 0$  hay copias del sistema  $S_1$  uniformemente distribuidas las cuales están sujetas a trayectorias aceleradas como las del sistema  $S_1$ . Luego un poco más tarde, al tiempo  $\Delta t$ , algunos de estos sistemas interceptará el rayo luminoso. A este tiempo  $\Delta t$  las copias del sistema  $S_1$  se mueven con velocidad  $v = g t$ .

Está claro que a un tiempo  $\Delta t'$  del sistema  $K'$  el rayo luminoso alcanza al plano  $z' = 0$  a un determinado ángulo  $\Delta\alpha$ . Despreciando términos de orden  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  se tiene  $\Delta t' = \Delta t$  y luego

$$\Delta\alpha = -\frac{v}{c} = -\frac{1}{c} g \Delta t. \quad (10.13)$$

Debido a la equivalencia de los sistemas  $K$  y  $K'$  se deduce que los rayos luminosos se curvan en presencia de campos gravitatorios.

El fenómeno de la curvatura de los rayos de luz cuando pasan cerca de grandes distribuciones de masa, genera los efectos de lentes gravitacionales. En la figura 10.4 se muestra una foto astronómica de un ejemplo de lente gravitacional.

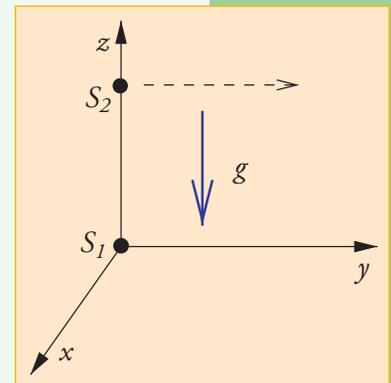
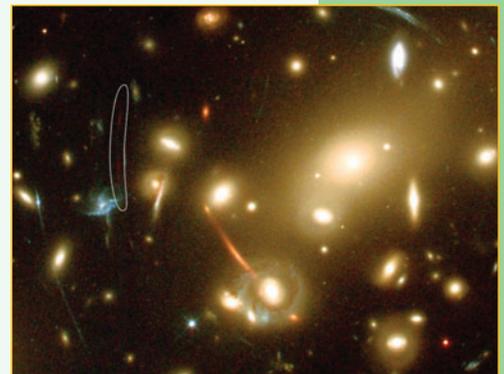


Figura 10.3. Debido a la equivalencia entre un sistema con un campo gravitatorio con otro que se acelera; se deduce que un rayo de luz se curvará en presencia de un campo gravitatorio.

Figura 10.4.

Foto de lente gravitacional tomada por el telescopio espacial Hubble. La fotografía muestra aspectos del cúmulo de galaxias Abell 2218; donde se ven varias imágenes deformadas en forma de arco de galaxias que están detrás del cúmulo. El cúmulo es tan masivo y compacto que ejerce su influencia sobre los rayos luminosos que provienen de objetos detrás del mismo. En algunos casos, no sólo distorsiona la imagen sino que también puede provocar un aumento de luminosidad aparente, lo que permite detectar objetos distantes que de otra forma serían invisibles al instrumento. Tal es el caso de los objetos encerrados en los lazos de línea blanca, que señala la detección de galaxias extremadamente distantes.



---

## 10.2. Observaciones locales

---

### 10.2.1. El principio de equivalencia

Las consideraciones anteriores se refieren a un campo gravitatorio estático y uniforme; que corresponde a una idealización extrema de un sistema gravitatorio. Sin embargo, todo campo gravitatorio regular cuando es observado en una vecindad muy pequeña de un punto en el espaciotiempo se asemejará cada vez más a un campo gravitatorio estático y uniforme. Es por ello que se espera que las consideraciones anteriores sean aplicables a una región muy pequeña en un campo gravitatorio arbitrario.

Para formular estas ideas en una manera más precisa introduzcamos la noción de *sistemas inerciales locales* y *observaciones locales* respecto de un punto  $p$  del espaciotiempo.

#### P 10.1 Principio de existencia de los sistemas inerciales locales

Existe un conjunto de sistemas de coordenadas, definidos alrededor del punto  $p$ , para los cuales las trayectorias de partículas de prueba son líneas rectas hasta el segundo orden en la separación de las coordenadas al punto  $p$ . A estos sistemas se los denomina *sistemas inerciales locales*.

Cuando una observación depende linealmente de las coordenadas rectangulares de un sistema inercial local que tiene como origen un cierto punto  $p$ , diremos que la *observación es local*. Cualquier otra observación se llamará no local.

Formularemos el Principio de equivalencia de la siguiente manera:

#### P 10.2 Principio de equivalencia

No se puede distinguir por medio de observaciones locales entre un sistema de referencia en presencia de un campo gravitatorio y un sistema de referencia que está apropiadamente acelerado con respecto a un sistema inercial local.

Es importante reconocer algunos de los puntos implicados por estos principios. Para comenzar, se asume la posibilidad de construir sistemas inerciales locales alrededor de cualquier punto del espaciotiempo. Nos preguntamos, entonces ¿cuál es la estructura implicada por esta posibilidad? De la definición de sistemas inerciales locales se tiene que las ecuaciones de las líneas rectas deben ser invariantes en los primeros dos órdenes en la separación de las coordenadas del punto  $p$ , bajo transformaciones entre sistemas inerciales locales. Luego se deduce que las transformaciones permitidas entre sistemas inerciales locales, alrededor del mismo punto  $p$ , deben ser homogéneas y lineales; además, como estas transformaciones deben ser compatibles con la estructura de las ecuaciones de Maxwell, estas transformaciones tienen que ser las transformaciones de Lorentz. Más precisamente, si  $y^a$  son las coordenadas de un sistema inercial local, donde el índice  $a$  denota ordenadamente las cuatro coordenadas, y si  $y'^a$  son las coordenadas de otro sistema inercial local alrededor del mismo punto  $p$ , entonces se tiene:

$$y'^a - y'^a_p = \Lambda^a_b (y^b - y^b_p) + 0 + O\left((y^a - y^a_p)^3\right); \quad (10.14)$$

donde estamos usando la notación usual relativista por la cual se sobreentiende que índices repetidos se suman,  $\Lambda^a_b$  es una transformación de Lorentz, el símbolo de orden  $O(x^n)$  significa que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^{n+1})}{x^n} = 0$ , y donde se ha enfatizado que no hay un término correspondiente al segundo orden en la separación de las coordenadas. Esto significa que en cada punto  $p$  se tiene la estructura de la relatividad especial en los primeros dos órdenes en la separación de las coordenadas.

Por lo tanto se podría decir que el principio 10.1 implica que el espaciotiempo se construye con una colección de espaciotiempos de la relatividad especial locales (en primer y segundo orden). Este nuevo espaciotiempo tiene en general una nueva característica que se llama *curvatura*.

Los fenómenos de curvatura implican que las leyes de la geometría plana, como la de Euclides, sólo valen en un sentido local. Esto es análogo a lo que ocurre cuando uno observa una región local de una superficie esférica. En una región muy pequeña, por ejemplo la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ . En vez en una región grande, esto no es cierto; como indica la figura 10.5.

Se puede deducir también que la ecuación de movimiento de una partícula de prueba respecto de un sistema de coordenadas arbitrario. Comencemos por notar que en un sistema inercial local la trayectoria de las partículas de prueba es gobernada por la afirmación que la aceleración instantánea debe ser cero; o sea, por las ecuaciones:

$$\left. \frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} \right|_p = 0, \quad (10.15)$$

donde  $\lambda$  es una parametrización apropiada de la trayectoria. Sea ahora  $x^a$  un sistema de coordenadas arbitrario, que puede ser curvilíneo y acelerado, luego uno puede expresar las funciones  $y^a$  en término de las coordenadas  $x^a$ , y las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0. \quad (10.16)$$

Se observa entonces que, en un sistema de coordenadas arbitrario, las trayectorias de las partículas de prueba están determinadas por las cantidades  $\Gamma^a_{bc}$ .

No estudiaremos en esta ocasión cuál es la relación que las cantidades  $\Gamma^a_{bc}$  tienen con la estructura del espaciotiempo; pero sí diremos que estas ecuaciones son las llamadas *ecuación de geodésica* que son las que determinan las trayectorias *más rectas posibles* en un espacio curvo.

**Resumiendo, entonces vemos que los principios antes expuestos implican:**

- I) La gravedad es un fenómeno geométrico que se manifiesta en la estructura del espaciotiempo. El espaciotiempo es una variedad lorentziana que en general es curva.
- II) Las líneas mundo de las partículas de prueba son geodésicas del espaciotiempo.

Se suele hacer la distinción entre principio de equivalencia débil, que es esencialmente la afirmación II), y el principio de equivalencia fuerte, que es el que hemos introducido y se aplica a todos los procesos físicos. La versión fuerte es también llamada el principio de Einstein. Se conoce como la conjetura de Schiff la afirmación que dice: toda teoría de la gravitación completa auto-consistente que contiene al principio de equivalencia débil necesariamente contiene al principio de equivalencia fuerte.

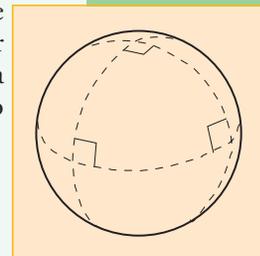


Figura 10.5. Los teoremas de la geometría euclidiana no valen en espacios curvos. Por ejemplo: la suma de los ángulos de un triángulo deja de ser  $180^\circ$ .

### 10.2.2. Medición de la energía de un rayo luminoso por dos observadores estacionarios en un campo gravitatorio central

La energía  $E$  de los fotones está relacionada con su frecuencia  $\nu$  por medio de la relación  $E = h\nu$ ; por lo que es equivalente medir energías o frecuencias de rayos luminosos.

Sea un cuerpo estacionario con simetría esférica que es fuente de los campos gravitacionales en su alrededor; y que por lo tanto determina la estructura del espaciotiempo.

Supongamos que en el punto  $p_1$  del espaciotiempo el observador estacionario 1 emite un rayo de luz con frecuencia  $\nu_1$ ; y que otro observador estacionario 2 detecta el rayo en el punto  $p_2$  con frecuencia  $\nu_2$ .

Sin entrar en detalles de cuál es la estructura global y local del espaciotiempo, diremos que las frecuencias están relacionadas por

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}}; \quad (10.17)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las posiciones de los observadores respecto de la coordenada radial  $r$  que caracteriza las superficies con simetría esférica que rodean al cuerpo central. En particular la superficie  $A(r)$  de una esfera denotada por la coordenada  $r$  está dada por la ecuación habitual  $A(r) = 4\pi r^2$ . La constante  $G$  es la constante de la gravitación universal y el parámetro  $m$  representa la masa del cuerpo central.

Esta ecuación también da la relación entre las medidas de tiempo entre uno y otro observador. Si llamamos  $\Delta\tau_1$  y  $\Delta\tau_2$  los intervalos de tiempo entre crestas de la onda medidos por un y otro observador; se tiene que

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 \sqrt{\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}}; \quad (10.18)$$

luego si  $r_1 < r_2$  se tiene  $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$ ; por lo que el reloj del observador 1 parecería funcionar más lento que idéntico reloj portado por el observador 2.

Debido a esto, si dos observadores estaban inicialmente juntos en la posición 1 y luego el observador 2 va 'rápidamente' a la posición espacial 2; donde permanece un 'largo' lapso de tiempo y luego regresa a la posición 1; la diferencia de los lapsos de tiempo estará determinada por la ecuación (10.18).

**Ejercicio 10.2** Usando las aproximaciones para  $x$  mucho menor que 1 ( $x \ll 1$ ):

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x, \quad (10.19)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad (10.20)$$

probar la ecuación (10.12) usando (10.18) con  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ .

### 10.3. Agujeros negros

Consideremos el problema de estimar la velocidad de escape de un objeto del campo gravitatorio terrestre. Desde el punto de vista newtoniano es conveniente considerar la ecuación que da la energía de un pequeño objeto respecto de otro muy masivo; que es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r_f}. \quad (10.21)$$

Para que el objeto escape es necesario que pueda alcanzar distancias muy grandes; por lo que se pretende que  $r$  pueda tender a infinito; para lo cual es necesario que la energía sea cero o positiva. Si el radio de la Tierra es  $R_T$  y su masa  $M_T$ , se tiene la ecuación para la velocidad de escape  $v_e$  de la condición  $E = 0$ ; esto es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}. \quad (10.22)$$

Si en vez de la Tierra consideramos otro astro de masa  $M$  y radio  $R$  se tiene

$$\frac{v_e}{c} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2 R}}. \quad (10.23)$$

Vemos entonces que es posible que exista una combinación de masa y radio que haría que la velocidad de escape fuese mayor que la velocidad de la luz; esto indica que en un astro de estas características la luz no podría escapar del mismo, debido a que nada puede viajar más rápido que la velocidad máxima de las interacciones. Esta condición para el radio está dada por

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}; \quad (10.24)$$

y se lo llama radio de Schwarzschild.

Si bien de un agujero negro no puede escapar ni siquiera la luz, los objetos que caen a un agujero negro pueden emitir radiación electromagnética en este proceso. Es de esta forma que normalmente se detectan candidatos de cuerpos astrofísicos que tienen los parámetros característicos de un agujero negro.

En el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, se encuentra un agujero negro supermasivo. Se denomina de esta forma a cuerpos de esta clase que tienen una masa mucho mayor que la masa solar. En efecto, el agujero negro en el centro de nuestra galaxia tiene aproximadamente 2,6 millones de masas solares.

La figura 10.8 muestra sobre el lado derecho, el gráfico de la órbita de una estrella alrededor del agujero negro supermasivo; datos del European Southern Observatory (ESO).

Al presente, en la página <http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/index.php?lang=en> del Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik, se pueden obtener videos donde se muestra el movimiento de estrellas alrededor del agujero negro súper masivo en el centro de la galaxia.

Figura 10.7.  
Agujero negro rodeado por disco de polvo.

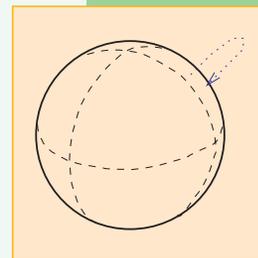


Figura 10.6.  
Se tira un objeto con una velocidad inicial alcanzando una distancia máxima desde el centro de la Tierra.

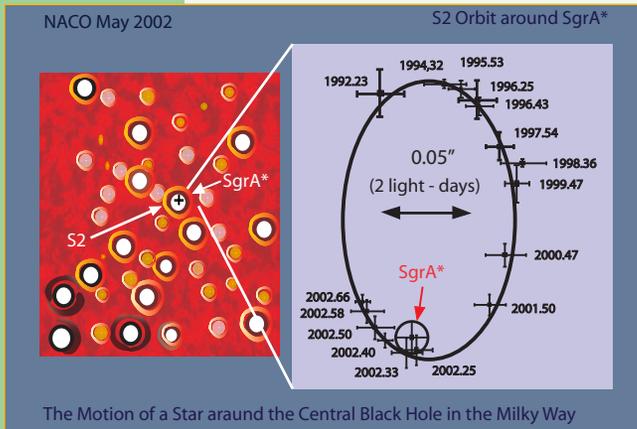


Figura 10.8.  
Agujero negro súper masivo en el centro de nuestra galaxia.

## 10.4. Relación entre: energía de fotones, frecuencia de fotones y tiempo propio

### 10.4.1. Comparación de tiempo propio de distintos observadores

Hemos señalado anteriormente que la energía  $E$  de un fotón está relacionada con su frecuencia  $\nu$  por la ecuación  $E = h\nu$ . Por otro lado un observador mide las frecuencias en término de  $\frac{\text{ciclos}}{\Delta\tau}$ ; esto es, calcula la relación entre el número de ciclos medidos dividido por el intervalo de tiempo propio  $\Delta\tau$ .

Esto nos permite encontrar una manera de comparar los tiempos propios medidos por observadores que están en un espaciotiempo curvo. Para ello deben medir la frecuencia de un mismo rayo de luz, o de una señal electromagnética.

En lo que sigue aplicaremos esto a una breve descripción del funcionamiento del sistema de posicionamiento global.

Figura 10.9.  
Esquema de las órbitas de los satélites que conforman el sistema GPS.

### 10.4.2. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

#### Equipamiento básico del sistema GPS



El Sistema de Posicionamiento Global usa una constelación de al menos 24 satélites operacionales.

El sistema de la fuerza aérea de los Estados Unidos está operacional desde el 27 de abril de 1995.

Cada satélite lleva consigo relojes atómicos. Cada satélite emite señales que están sincronizadas con los relojes que porta.

Cada emisión se puede considerar como un evento en el espaciotiempo influido por la distribución de masa de la Tierra.

La constelación de satélites es controlada por estaciones sobre la superficie de la Tierra que chequean la sincronización de los relojes como los parámetros de la órbita de cada uno de ellos.

Los satélites se encuentran en órbita unos 20.000 km sobre la superficie de la Tierra, con una inclinación de unos  $55^\circ$  con res-

**Ejercicio 10.3** Si compactásemos los siguientes objetos a esferas de radios  $r$ , ¿qué radios deberían tener para formar un agujero negro?

- Un barco de 100.000 toneladas.
- La Tierra.
- El Sol.
- 2,6 millones de soles.

pecto al plano ecuatorial, como se indica en la figura 10.9.

Los satélites transmiten en dos bandas; la L1 de 1575,42 Mhz, equivalente a una longitud de onda de 19,0294 cm y la L2 de 1227,6 Mhz, equivalente a una longitud de onda de 24,4210 cm.

Los receptores GPS de uso civil sólo reciben en la banda L1.

Los relojes que llevan los satélites tienen una precisión de 5 partes en  $10^{14}$ ; o equivalentemente en un día una precisión de 4 nanosegundos.

### **Relación entre tiempo propio de un satélite del GPS y el tiempo propio de un reloj en la Tierra**

Los receptores que poseen los usuarios del sistema GPS son pequeños dispositivos que reciben las señales de los satélites en órbita.

Los satélites están como a unos 20.000 km sobre la superficie de la Tierra; lo que implica que hay una diferencia en el potencial gravitatorio entre los emisores de los satélites y los receptores de los usuarios.

Además se debe agregar que por estar en órbita, estos satélites tienen una velocidad considerable comparada con la velocidad usual de un usuario sobre la superficie de la Tierra. Esto implica que se deben tener en cuenta también las diferencias en frecuencias provocadas por el efecto Doppler.

La gran precisión de sistema GPS se logra sólo si se tienen en cuenta todos los efectos que contribuyen a que las frecuencias de los emisores y receptores sean distintas.

Los aparatos receptores tienen incluidos algoritmos que permiten tomar en cuenta estas diferencias; con lo que se logra la precisión deseada.

#### **10.4.3. Sincronización de relojes sobre la superficie de la Tierra**

Pensemos en un conjunto de observadores, cada uno con su reloj, que están distribuidos sobre la superficie de la Tierra. Debido a que la Tierra rota, debemos entender los efectos que pueden surgir en el proceso de sincronizado de los relojes. Para simplificar supongamos que la superficie de la Tierra es esférica y consideremos primeramente los efectos debido a la relatividad espacial; o sea, despreciando los efectos gravitatorios por el momento.

#### **Despreciando los efectos gravitatorios**

Asumamos que disponemos de un sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  para determinar puntos en el espacio; de tal manera que el sistema inercial completo consta de las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , con el que definimos el sistema  $K$ .

Supongamos que otro grupo de observadores se ha puesto de acuerdo para realizar una rotación con velocidad angular constante alrededor del eje  $z$  original, o sea incrementando la coordenada  $\varphi$ ; de tal manera que usan un sistema no inercial de coordenadas que se relaciona con el primero por medio de:

$$t = t', \quad r = r', \quad \varphi = \varphi' + \omega t', \quad \theta = \theta'; \quad (10.25)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de rotación.

Si denotamos con  $\tau$  el tiempo propio de cada uno de los observadores que está en

el sistema rotante, entonces la relación entre tiempo propio y coordenada temporal  $t'$  está dada por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r'^2 \text{sen}^2(\theta')}{c^2}\right) dt'^2. \quad (10.26)$$

Si  $a$  y  $b$  son dos observadores del sistema rotante; denotaremos sus tiempos propios con  $\tau_a$  y  $\tau_b$  respectivamente. Si se desea sincronizar los relojes de estos observadores, se debe tener que

$$d\tau_a = d\tau_b; \quad (10.27)$$

por definición de sincronización.

La ecuación (10.26) nos indica que no se podrán sincronizar dos relojes fijos a una superficie esférica en rotación para distintos ángulos polares  $\theta'$ ; esto es distintas latitudes. Pero por otro lado notamos que se podrían sincronizar relojes sobre una superficie tal que

$$\left(1 - \frac{\omega^2 r'^2 \text{sen}^2(\theta')}{c^2}\right) = \text{constante} \quad (10.28)$$

o sea, sobre las superficies de cilindros de radios  $r' \text{sen}(\theta')$ .

Pero además debemos notar que existe otro efecto. Aunque no entraremos en detalles, señalamos que no es lo mismo sincronizar relojes en la dirección de la rotación que en la dirección opuesta. Esto se conoce como el efecto Sagnac.

### Tomando en cuenta los efectos gravitatorios

Ahora supongamos que existe un cuerpo masivo estacionario central y que arreglamos para que un conjunto de observadores rote con velocidad angular constante; similarmente a lo explicado recién. En particular asumiremos nuevamente que la relación entre un sistema de coordenadas no rotante y rotante está dado por las ecuaciones (10.25). Debido a la existencia de un objeto central estaremos en presencia del potencial newtoniano  $\Phi$ . Para el caso de la Tierra el potencial está dado aproximadamente por

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \left(1 + J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos(\theta))\right); \quad (10.29)$$

donde  $J_2$  es la magnitud del momento cuadrupolar,  $a$  es el radio ecuatorial de la Tierra y  $P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$  es el polinomio de Legendre de grado dos.

Un reloj en reposo sobre la superficie de la Tierra midiendo un tiempo propio  $\tau$ , está relacionado con la coordenada temporal  $t'$  por la expresión

$$d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{\omega^2 r'^2 \text{sen}^2(\theta')}{c^2}\right) dt'^2. \quad (10.30)$$

Reproduciendo la discusión anterior sobre la sincronización de relojes, vemos que podremos sincronizar relojes sobre equipotenciales del potencial efectivo

$$U \equiv \Phi - \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \text{sen}^2(\theta'). \quad (10.31)$$

La superficie equipotencial  $U_0$  que pasa por el Ecuador se la llama geoide. El valor numérico de  $\frac{U_0}{c^2}$  está dado por

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{c^2} &= -\frac{GM}{c^2 a} - \frac{GM}{c^2 a} J_2 - \frac{\omega^2 a^2}{2c^2} \\ &= -6,95348 \times 10^{-10} - 3,764 \times 10^{-13} - 1.203 \times 10^{-12} \\ &= -6,96927 \times 10^{-10}. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Debido a que este valor es pequeño, vemos que la relación entre el tiempo de los relojes, sobre esta equipotencial, y la coordenada temporal  $t'$  se puede calcular de la expresión aproximada

$$d\tau = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) dt'. \tag{10.33}$$

La precisión de los relojes atómicos es del orden de  $10^{-14}$ ; por lo que este efecto es 10.000 veces mayor que la estabilidad fraccional de los relojes

## 10.5. Emisión de energía en forma de radiación gravitacional

Es bien conocido que cargas eléctricas aceleradas emiten radiación electromagnética. Análogamente, la teoría relativista de la gravitación predice que un sistema gravitatorio en general emitirá radiación gravitatoria. Esta radiación gravitatoria, implicará la pérdida de energía total del sistema, y el cambio de momento y momento angular.

Un ejemplo de sistema que puede emitir radiación gravitatoria es un sistema binario ligado, como indica la figura 10.10. Un sistema como este al ir perdiendo energía, iría cambiando su configuración haciendo que la distancia  $r$  entre los cuerpos fuese disminuyendo.

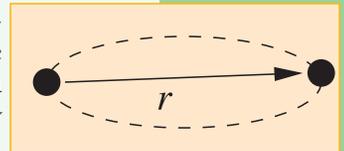


Figura 10.10. Sistema de dos partículas en órbitas circulares a distancia  $r$  una de otra.

### 10.5.1. El pulsar binario PSR B1913+16

Hace más de treinta años, en 1975, Hulse y Taylor descubrieron el pulsar binario [HT75] PSR B1913+16.

Un pulsar es una estrella de neutrones que es observada por los pulsos electromagnéticos que emite. Una estrella de neutrones tiene un poco más de la masa del Sol, pero tiene un radio de sólo unos 10 km. Es por esto que los campos gravitatorios cerca de una estrella de neutrones son muy altos.

El hecho de que el pulsar sea binario, significa que tiene una compañera, con la que está ligada gravitacionalmente.

En 1992, tuvimos la oportunidad de atender la charla [GKM93] de J. H. Taylor, cuando organizamos la conferencia GR13 en las sierras de Córdoba. En 1993, Russell Hulse y Joseph Taylor recibieron el Premio Nobel, por su descubrimiento.

Este sistema provee del primer caso en el cual se puede testear la pérdida de energía debido a la emisión de radiación gravitacional.

Similarmente al fenómeno de radiación electromagnética; cuando un sistema gravitante cambia con el tiempo, puede emitir ondas gravitacionales.

**Ejercicio 10.4** Considere una estrella de neutrones con una masa igual a 1,6 la masa del Sol y con un radio de 10 km.

a) Calcule la aceleración gravitatoria en la superficie de la estrella de neutrones.

b) ¿A qué velocidad se debería arrojar una bala para que pueda escapar de la estrella?

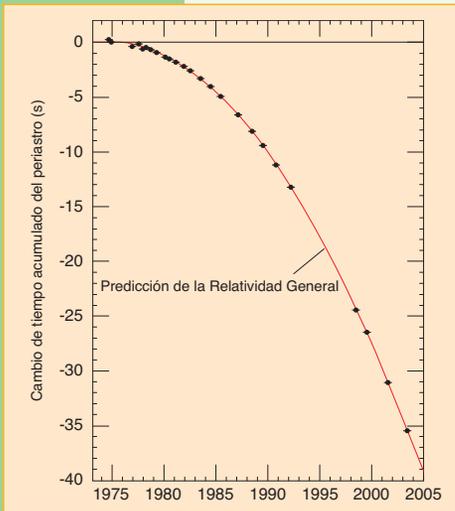


Figura 10.11. Decaimiento de la órbita del pulsar PSR B1913+16 como función del tiempo. Los puntos indican los datos de la época del periastro, o punto de mayor acercamiento, mientras que la línea continua es el cálculo teórico de la relatividad general, para un sistema binario que emite radiación gravitatoria.

**Ejercicio 10.5** Para un sistema binario cuyos cuerpos tienen la misma masa y que están en órbita circular, existe una relación que permite expresar la energía del sistema en términos del radio de la órbita.

- Expresar la energía en términos del radio de la órbita para este sistema.
- Assumiendo que en cada revolución se pierde una cantidad muy pequeña de energía  $\epsilon$  por radiación gravitacional, encuentre una relación entre la variación del radio  $\delta r$  y  $\epsilon$ .
- Assumiendo los datos del punto anterior encuentre una relación entre la variación del período de la órbita  $\delta T$  y  $\epsilon$ .

Para el sistema binario, la existencia de la radiación gravitatoria, significa que algunos parámetros de sus órbitas serán afectados.

La figura 10.11 muestra la variación del período de la órbita del sistema binario PSR B1913+16 como función del tiempo. Los puntos significan datos observacionales, mientras que la curva continua muestra la predicción teórica de la relatividad general; por lo que se tiene una excelente concordancia.

### 10.5.2. Efecto de las ondas gravitacionales

Supongamos tres objetos que están suspendidos del techo de una habitación como indica la figura 10.12. Al pasar una onda gravitacional en la dirección del eje vertical, producirá una variación relativa de la distancia entre los objetos; de tal forma que cuando un par de los objetos, sobre uno de los brazos, se acerca, el otro par de objetos, sobre el otro brazo, se alejan. Alternándose este movimiento entre un par y el otro.

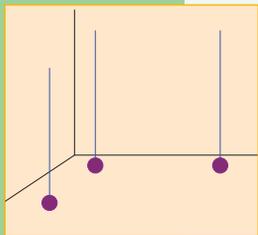


Figura 10.12. Esquema de tres objetos suspendidos, acomodados en los extremos de una L.

### 10.5.3. Detectores de ondas gravitacionales

Con el objeto de medir las ondas gravitacionales se han construido y están en construcción varios detectores en el mundo.

La idea en estos detectores, es medir las distancias entre espejos, por medio de técnicas interferométricas de láser que rebotan entre los mismos. La configuración usual es una construcción en forma de L, con espejos en los extremos y en el ángulo, como muestra la figura 10.13. Al combinar los haces de luz de los dos brazos se produce un patrón de interferencia con lo que se intenta medir la variación de la distancia relativa entre los espejos, provocada por el paso de una onda gravitacional. Al presente se han construido varios observatorios gravitacionales interferométricos que serían capaces de detectar *radiación gravitacional* proveniente de algunos sistemas astrofísicos particulares. Sin embargo, se debe aclarar que todavía no se

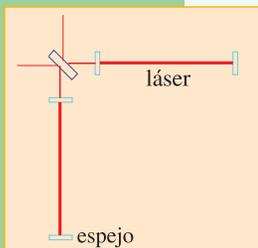


Figura 10.13. Esquema de un detector interferométrico. En los extremos de dos brazos en forma de L se suspenden espejos. Un láser es inyectado en el sistema que lo separa para que se refleje en los dos brazos de la construcción en forma de L. Por métodos de interferometría se desea medir las distancias relativas entre los espejos, comparando la longitud de los brazos.

ha realizado una observación directa de dicha radiación gravitatoria.

Hay varios detectores en el mundo, algunos de ellos en construcción. Entre los detectores interferométricos está el GEO que es un detector de 600 m de lado cerca de Hannover en Alemania y es una colaboración germano-británica, el LIGO que son dos detectores de 4 km de lado en Hanford y Livingston en Estados Unidos, el TAMA de 300 m de lado cerca de Tokyo en Japón, y el VIRGO de 3 km de lado cerca de Pisa en Italia y es una colaboración francés-italiana. Hay algunos detectores de barra en operación. También está el proyecto LISA para un interferómetro en el espacio.

El detector VIRGO está administrado por el European Gravitational Observatory, que es un consorcio ítalo-francés. En la figura 10.14 se muestra una vista aérea del detector VIRGO; mientras que en la figura 10.15 se muestra un detalle del interior de uno de sus brazos.

El Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) consiste de dos observatorios cuyos brazos miden 4 km. Uno de ellos está ubicado en el estado Louisiana y el otro en el estado Washington en Estados Unidos. En las figuras 10.16 y 10.17 se pueden ver fotografías aéreas del observatorio ubicado en Livingston, estado de Louisiana.

En nuestro grupo de investigación en FaMAF se estudia el problema de describir adecuadamente el perfil de las ondas gravitacionales que deberían medir estos detectores.



Figura 10.14.  
Vista aérea del detector VIRGO de 3 km de lado, cerca de Pisa, Italia.



Figura 10.15.  
Interior del detector VIRGO.



Figura 10.16.  
Fotografía aérea de las instalaciones del observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser LIGO, ubicado en Livingston, Louisiana, Estados Unidos.



Figura 10.17.  
Fotografía aérea de las instalaciones centrales del observatorio de ondas gravitacionales por interferometría láser LIGO, ubicado en Livingston, Louisiana, Estados Unidos.