3. Una aventura por el infinito

Por Juan Pablo Rossetti

3.1. ¿Qué es el infinito?

- Bueno Clara, esto no es fácil de contestar porque no es fácil saberlo. Los seres humanos llevan siglos pensándolo. Muchas personas brillantes dedicaron a este tema buena parte de su vida, y aún así, todavía queda mucho por conocer.

- ¿Pero entonces, nunca vamos a entenderlo?

- No lo sé -contestó el Maestro, algo ruborizado porque no podía satisfacer la curiosidad de la niña, que siempre le hacía muchas preguntas, y generalmente se quedaba muy contenta con sus respuestas-. Pero quizás te pueda contar algunas cosas que van a gustarte.

- ¡Qué suerte! Pensé que me estaba diciendo que no valía la pena pensar en el infinito, que no podríamos comprenderlo.

- En verdad, quizá no podamos entenderlo bien. Pero ¿acaso alguien en este mundo comprende algo totalmente? A veces creemos que comprendemos algo porque ya oímos hablar sobre ese tema, o podemos decir algo sobre él o, a lo sumo, nos acostumbramos a eso. Y así, nos quedamos tranquilos, creyendo que lo entendemos, aunque en realidad no sea tan así. De cualquier modo, creo que sería muy bueno que escucharas lo que te quiero contar sobre el infinito. Te aseguro que podríamos aprender cosas muy interesantes.

Clara se quedó mirando al Maestro con curiosidad sobre esta nueva lección y con grandes expectativas. Ya había tenido muchas lecciones durante éste, su primer año en el colegio secundario, y le habían gustado.

El Maestro comenzó:
- Pensá en algunos conjuntos que ya conocemos, como por ejemplo, en **N**, el conjunto de los números naturales; en **Z**, el de los números enteros; **Q**, los números fraccionarios, también llamados racionales; o **R**, los números reales. Acordate que podemos escribir estos conjuntos así:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$$
$$\mathbf{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

No es fácil describir al conjunto **R**, pero sabemos que consta de los números racionales y los irracionales. Estos últimos son los que tienen una expresión decimal que no termina nunca, ni es periódica. Pero no nos preocupemos por eso ahora.
¿Estos conjuntos tienen algo en común? ¿Qué opinás?

- No estoy segura. ¿Será que son todos conjuntos de números? -preguntó la niña, transformando su inseguro tono de voz al comienzo en una alegre sonrisa, al ir descubriendo que estaba en lo cierto.

- Sí, así es, Clara. Ahora, decime algo acerca de la cantidad de elementos de estos conjuntos.

- Perdón. ¿Qué quiere decir con eso, Maestro?

- Es sencillo. Por ejemplo, el conjunto {1, 2, 3} tiene tres elementos, el 1, el 2 y el 3, nada más. El conjunto {-1, 0, 1} también tiene tres elementos. El conjunto formado por los meses de un año tiene 12 elementos. Esto es simple. Ahora pensemos en el conjunto de los números naturales, que denotamos con **N**, o lo que es lo mismo, el conjunto {1, 2, 3, 4, 5,...}. Fijate que los puntos suspensivos indican que los números siguen, y lo hacen indefinidamente. Ahora te hago una pregunta: ¿Cuántos elementos tiene **N**? O lo mismo, ¿cuántos números naturales hay?

- Me acuerdo que una vez aprendimos que no hay un número que sea mayor que todos los demás.

- Así es, Clara. Si proponés un número natural M muy grande como el mayor de todos, por más grande que sea M, ocurre que el siguiente, o sea $M+1$, es otro número natural que, obviamente, es mayor que M. Por consiguiente, no existe un número natural mayor que todos los demás.

- ¡Fue exactamente así como me mostró que los números no se terminaban nunca!

- Bien. Y si no se terminan, entonces ¿cuántos hay?

- ¿Infinitos?

- ¡Por supuesto! Hay infinitos números naturales. También podemos expresar esto mismo diciendo que “(el conjunto) **N** es infinito”.

- Esta última forma me resulta un poco más difícil, Maestro, pero no importa.

- No es difícil, Clara, te acostumbrarás. Solamente estamos diciendo que si un conjunto tiene infinitos elementos, entonces lo llamaremos *conjunto infinito*, y además, antes hemos asumido que si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que M, para todo número natural M, entonces tiene infinitos elementos.

- Creo que lo estoy entendiendo.

- Bien. Sigamos que ahora comienza lo más interesante:
¿Cómo son los conjuntos que mencionamos recién, **N, Z**, **Q** y **R**? Me refiero a la cantidad de elementos que tienen.

- Bueno…(Clara pensaba, muy concentrada)… **Z** es más grande que **N**. **Q** también…. y **R** más grande aún. Aunque no conozco tan bien el conjunto **R** como los otros.

- Está bien Clara. Pero quiero que me digas cuántos elementos tienen. ¿Son conjuntos finitos o infinitos?

- ¡Son conjuntos infinitos! -contestó Clara contenta.

- Correcto. Ahora me gustaría ver si podemos contar mejor cuántos elementos hay en cada uno de estos conjuntos. Me refiero a algo más profundo e importante que simplemente decir si es infinito o no. ¿Podrías ayudarme?

Ella se quedó pensando un rato antes de contestar. Estaba un poco sorprendida por esto de "*contar la cantidad de elementos*" de un conjunto infinito. Ya el infinito le parecía algo raro, y ahora esto era más raro aún. Luego dijo:

- Maestro, si estos conjuntos son infinitos, entonces no hay nada más para contar en ellos... ¡¿o sí ?!

El rostro de la niña cambió súbitamente al pronunciar estas palabras. Siempre había pensado que al tratarse de algo *infinito* no había más nada que contar, es decir, la respuesta *infinito* le parecía más que suficiente. Pero confiaba en la sabiduría del Maestro, y entonces, al ver que él indagaba más profundamente sobre esto, por primera vez en su vida pensó que quizá podrían existir "distintos infinitos". ¿Sería posible? Aunque no lo comprendía bien esto la estremeció. Por unos instantes sintió un tironeo interno entre su curiosidad y entusiasmo, que la invitaban a continuar, y sus intenciones de no complicarse que le decían que se olvidara del infinito. En medio de estos pensamientos, oyó que el Maestro continuaba:

- Clara, ésta es, justamente, una de las cuestiones interesantes que quiero que pensemos juntos. Tendremos que dilucidar, por ejemplo, si por ser dos conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos o no. ¿Me acompañás en esta *aventura por el infinito*?

Clara pensó un momento más. ¿Se podría realmente responder bien estas preguntas? ¿Sería ella capaz de hacerlo? Su entusiasmo e inquietud vencieron cualquier duda o pereza mental, y respondió:
- Sí, Maestro. ¡Me gustaría explorar el infinito! He escuchado hablar otras veces sobre el infinito y pienso que el tema le interesa a mucha gente, ¿verdad? Pero nunca he sabido ni siquiera por dónde empezar a pensar si escucho *infinito*. Siento que allí se acaba todo.

- Así suele suceder, Clara. Parece mentira, pero justamente al hablar de infinito, se nos suele terminar todo porque no sabemos cómo continuar, no imaginamos qué más se puede analizar. ¡Me alegro mucho que hayas decidido acompañarme! En este mismo momento podemos plantearnos una pregunta concreta muy interesante: ¿Es la cantidad de elementos de **Z** mayor que la de **N**? No creas que es una pregunta fácil, al contrario. Es algo que tendremos que pensar bastante para poder responder, incluso debemos ponernos de acuerdo en algunas cosas básicas desde dónde partir.

- Mmhhh... -Clara ya se había puesto a pensar. Vacilaba, hasta que dijo- No sé, me confundo un poco. Primero pienso que **N** es más pequeño que **Z**. Pero después pienso que los dos son infinitos, y entonces deben tener la misma cantidad de elementos.

- Ajá -dijo el Maestro, sin decirle si estaba en lo cierto o no-. Dijiste cosas interesantes, aunque debemos elaborarlas mejor. Precisamente a este punto quería llegar. Aunque pueda parecer contradictorio, si lo analizamos desde un punto de vista es verdad que **Z** tiene todos los elementos de **N** y otros más, es decir, **Z** *contiene propiamente* a **N**. Sin embargo, si lo miramos desde otro punto de vista, también va a ser verdadero que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos; aunque no por ser ambos infinitos, sino por una razón más sutil que veremos enseguida. Para entenderlo bien, conviene que avancemos con cierto cuidado.

En símbolos: sabemos que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, que significa que **N** está contenido y es distinto a **Z**, y veremos que card **N**= card **Z**, que significa que los cardinales o cantidad de elementos de los dos conjuntos es la misma.

- Realmente me intriga saber bien cómo es -dijo Clara-. Y hay una cosa que no entiendo. Usted me dijo una vez que *el todo es mayor que la parte*, o algo parecido. ¿Con **Z** y **N** como sería? ¿No hay una contradicción?

- Como sabemos, **Z** son todos los enteros, en este caso es *el todo*, y **N** es *la parte*, pues existe una correspondencia entre **N** y $\mathbf{Z}^+$. Pero fijate, Clara, que no decimos que **Z** y **N** sean iguales, sino sólo que veremos que la cantidad de elementos que tienen uno y otro es la misma, que es una afirmación distinta que decir que **Z** y **N** son iguales.

- Entonces, ¿me está diciendo que veremos que hay conjuntos con la misma cantidad de elementos, pero que uno es una parte del otro?

- ¡Sí, Clara! ¡Es asombroso! Sucede que estamos acostumbrados a contar conjuntos *finitos*, y eso nunca podría suceder entre ellos, está totalmente vedada esta posibilidad. Pero tratándose de un conjunto *infinito*, en efecto, el todo puede tener la misma cantidad de elementos que una parte del mismo. Es más, esta propiedad podría ser la mismísima definición de lo que significa que un conjunto sea infinito [1].

El Maestro prosiguió:
- Si un conjunto finito **A** contiene a otro conjunto finito **B**, y además **A** es distinto de **B**, entonces sabemos que la cantidad de elementos de **A** es mayor que la de **B**. ¿Esto es sencillo, verdad? El caso finito no nos da ningún problema. Pero nosotros pensaremos ahora en el caso más interesante: ¡el infinito!

[1] Ésta es la definición de conjunto infinito propuesta por el matemático alemán J. W. Richard Dedekind, en el siglo XIX, y es equivalente (aceptando ciertos axiomas) a la definición usual de conjunto infinito que asumimos más arriba.

- Estoy sorprendida, Maestro. Creo que estoy comenzando a entender algo, pero a su vez me parece que algunas cosas me quedan en el aire.

- Está bien, Clara. En realidad todavía no hemos *demostrado* nada, sólo mencionamos lo que sucederá: ¡**N** y **Z** tienen la misma cantidad de elementos! Voy a explicártelo mejor, y vos misma serás capaz de hacer razonamientos con las herramientas que aprenderemos. Primero, nos viene bien revisar algunas cosas del caso *fácil*, cuando todo es finito. Veamos. El *cardinal* de un conjunto es la cantidad de elementos que tiene el conjunto. Por ejemplo, en tu curso son 28 compañeros en total, entonces podríamos decir que el conjunto formado por los alumnos de 1.^er^ año B de este colegio tiene 28 elementos; o equivalentemente, que el cardinal de este conjunto es 28.

- Entiendo. Pero disculpe, Maestro, ¿no he pasado a ser un simple elemento de un conjunto, no?

- (risas)… ¡No! Bueno, sí y no. Sigues siendo Clara, sólo que además, puedes formar parte de este conjunto que te estoy proponiendo. Es un conjunto muy sencillo. ¿Y cuántos alumnos hay en 1.^er^ año A?

- Hay 30. Ellos son dos más, pero en la mayoría de las competencias entre los dos cursos hemos ganado nosotros.

- Te felicito, pero olvidá eso. Sólo digamos que, como 30 es mayor que 28, el conjunto de alumnos de 1.º A es mayor que el de 1.º B. En otras palabras, si **A** y **B** denotan estos dos conjuntos, entonces el cardinal de **A** es mayor que el cardinal de **B**. En símbolos escribimos $\mathrm{card}(\mathbf{A}) > \mathrm{card}(\mathbf{B})$.

- Esto ha sido muy fácil.

- Seguro. Ahora decime, por favor, cuántos alumnos son en 2.º año, que hay una sola división.

- Son 30 también.

- ¡Qué bien! Esto nos servirá. Si llamamos **C** al conjunto de alumnos de 2.º año, entonces el cardinal es 30, es decir $\mathrm{card}(\mathbf{C}) = 30$. Como ya sabíamos que $\mathrm{card}(\mathbf{A}) = 30$, entonces podemos decir que

$$\mathrm{card}(\mathbf{C}) = \mathrm{card}(\mathbf{A})$$

- Esto también ha sido muy fácil.

- Sí, claro. Veamos ahora si me seguís en esto. En tu último cumpleaños, invitaste a todos los niños de 1.º A y de 1.º B, ¿verdad? Y también a tus primos, a tus vecinos, y a algunos niños y niñas más. En uno de los juegos -el que yo te propuse que hicieras- todos tuvieron que quitarse los zapatos. Ahora bien, no se sabía exactamente cuántos niños eran, ¿verdad? De modo que no sabemos cuántos zapatos había. Tampoco cuántos zapatos izquierdos y cuántos derechos había. Sin embargo, es claro que la cantidad de zapatos izquierdos era igual a la cantidad de zapatos derechos. ¿Estás de acuerdo?

- Sí. Todos habían traído sus dos zapatos y se los quitaron.

- Bien. Si denotamos con **ZI** y con **ZD** los conjuntos de zapatos izquierdos y derechos respectivamente, entonces, lo que hemos dicho es que:

$$\text{card}(\mathbf{ZI}) = \text{card}(\mathbf{ZD}).$$

- Esto también ha sido sencillo, Maestro.

- Pronto entenderás a dónde quiero llegar. Aunque no parezca, lo de los zapatos es algo muy importante. Disculpame que te lo remarque, pero posiblemente todavía no vislumbres su valor: ¡podemos afirmar que estos dos conjuntos tienen el mismo cardinal aún sin saber cuántos elementos tienen estos conjuntos!

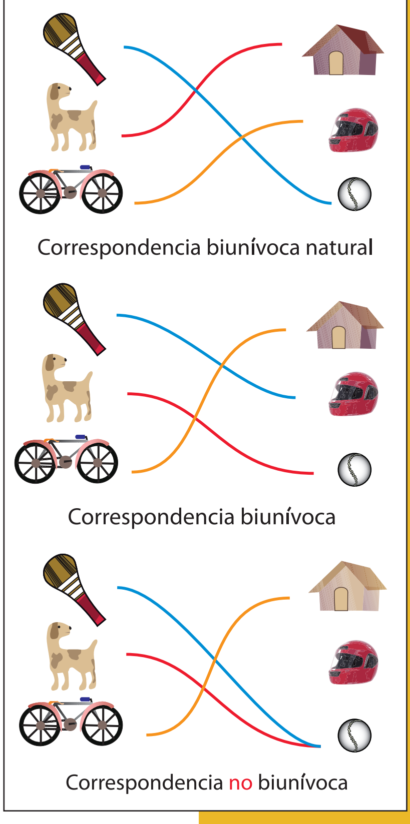
- Sí Maestro, estoy de acuerdo, sólo que me parece que de algún modo ya sabía esto.

- Bueno, tanto mejor. Entonces estás bien preparada para lo que sigue. Concentrate por favor, que no es tan sencillo. Pensemos en los números naturales y en los números naturales pares. Ahora veamos la correspondencia que asigna a cada número natural n el doble del mismo, es decir, al número n le asigna el número $2n$. Esto se puede expresar como $n \mapsto 2n$ donde n varía entre los elementos de **N**. Es decir, a la izquierda, van apareciendo todos los números naturales, y a la derecha sólo los de la forma $2n$, o sea, los números naturales pares (que denotaremos, como conjunto, con **NP** por naturales pares). El número par que le corresponde al 1 es el 2 x 1 = 2; el que le corresponde al 2, no es el 2, sino el 2 x 2 = 4; al 5 le corresponde el 2 x 5 = 10, etc. Pensemos que ésta es una correspondencia entre los conjuntos **N** y **NP**. A este tipo de correspondencia, la llamaremos *correspondencia biunívoca* entre **N** y **NP** porque a cada elemento de **N** le corresponde uno, y solo uno, de **NP**, y viceversa. Si tomamos un número par cualquiera, por ejemplo el 42, entonces sabemos que hay un único número natural que le corresponde, que es el 21, porque 42 = 2 x 21. Conviene que denotemos esto por:

$$\begin{gathered}\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{NP} \\ n \mapsto 2n\end{gathered}$$

y que recordemos su nombre. ¿Cómo era, Clara?

- Usted dijo "correspondencia biunívoca". Ahora creo recordar que una vez vimos esto, con un dibujo así: →



Correspondencia biunívoca natural

Correspondencia biunívoca

Correspondencia no biunívoca

Teníamos que unir con líneas las cosas que se correspondían. Unimos el perro con su cucha, la bicicleta con el casco y la paleta con la pelota. ¿Esto es una correspondencia biunívoca? -preguntó Clara, con cierto orgullo.

- Sí, eso es. Ahora debés tener en cuenta que si nos piden unir con líneas los objetos que se corresponden tendemos a recurrir al sentido común, a la lógica. Sin embargo, uno bien podría unir el perro con la pelota, la bicicleta con la cucha, y la paleta con el casco, y eso sería *otra* correspondencia biunívoca, distinta de la anterior. ¿Lo entendés? En cambio, si dibujáramos tres líneas, una que sale de la paleta y llega a la pelota, otra desde el perro a la pelota y otra desde la bicicleta a la cucha, entonces, no sería una correspondencia biunívoca.

Para resolver

Problema 3.1. Ayudar a Clara a responder las siguientes preguntas (las respuestas y soluciones se encuentran en el Capítulo 6).

Enumerar todas las correspondencias biunívocas que hay entre el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el $\{A, B, C\}$.

¿Cuántas correspondencias biunívocas hay entre los conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{A, B, C, D\}$?

El Maestro prosiguió:
- Cuando hay una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, podemos identificar los elementos de un conjunto con los del otro, justamente a través de dicha correspondencia. En ese caso, ¿qué sucede con la cantidad de elementos de ambos conjuntos?

- Creo que son iguales -respondió Clara.

- Por supuesto. Exactamente esto es lo que sucedía en el ejemplo de los zapatos izquierdos y derechos. Había una correspondencia biunívoca entre esos conjuntos que llamábamos **ZI** y **ZD**, por lo tanto, sus cardinales eran iguales.
Veamos más ejemplos, Clara. Te voy a decir una correspondencia de la vida real, a ver si podés responder si es biunívoca o no: cada persona tiene un nombre, un primer nombre de pila. Podemos pensar esto como una asignación:

$$\text{persona} \mapsto \text{nombre de pila de la persona}$$

- ¿Tengo que contestar si es una correspondencia biunívoca?

- Así es. ¿Qué te parece?

- ¿Puede haber personas con el mismo primer nombre?

- Seguro. Éste es un ejemplo de la vida real.

- Entonces, esta asignación no es biunívoca porque hay personas distintas que tienen el mismo nombre.

- ¡Muy bien! Lo estás entendiendo. Hagamos un ejemplo más. Pensemos que a cada país le asignamos su ciudad con mayor cantidad de habitantes, es decir:

$$\text{país} \mapsto \text{ciudad más populosa del país}$$

¿Esta asignación es una correspondencia biunívoca?

- Creo que sí, pero no estoy tan segura.

- Bien, Clara. Analicemos esto porque al no decir claramente cuáles son los conjuntos de salida y de llegada de la asignación pueden crearse confusiones. Si pensamos que va desde el conjunto de los países al conjunto de todas las ciudades del mundo, entonces no es biunívoca porque quedarían ciudades sin nombrar. Ahora, si consideramos que la asignación va del conjunto de países al conjunto de las ciudades más populosas de cada país, entonces sí es una correspondencia biunívoca. Por consiguiente, para decidir si una asignación o correspondencia es biunívoca o no, es fundamental decir cuál es el conjunto de llegada de la asignación.

- Está bien. Ya no es tan sencillo, pero lo he seguido.

- ¿Serías capaz de decir qué ciudad se le asigna a Brasil?

- Sí, creo que es San Pablo -dijo Clara bastante segura, porque conocía algo sobre Brasil.

- ¿Y a Colombia?

- No estoy segura, pero arriesgaría Bogotá porque es la capital.

- Correcto. Ahora, asumamos que en el año 2010 hay 198 países. Si quisieras memorizar esta asignación para los 198 países, yo te diría el país y tú deberías responder con su ciudad más populosa. ¿Cuántas ciudades deberías saber?

- Creo que 198.

- ¡Por supuesto! Esto es así porque la correspondencia es biunívoca. Claro que para responder bien no alcanza con saber los nombres de las ciudades, pero al menos hay que saberlos.

-Y el Maestro prosiguió-
Ahora que tenés claro este ejemplo y los anteriores, estás lista para lo siguiente: ¿No te parece que cuando hay una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, es natural pensar que esos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos?

- Sí, yo creo que sí.

- Me alegro. Porque esto nos servirá ¡para el caso infinito! Si revisamos todo lo que hemos dicho verás que no necesitamos que los conjuntos sean finitos para hablar de correspondencia biunívoca. Y que es natural pensar que cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, estos tienen la misma cantidad de elementos. Tomaremos esto como punto de partida, como *definición* de lo que significará para nosotros que dos conjuntos infinitos tengan la misma cantidad de elementos. A partir de ahora, Clara, al oír "infinito" no te quedarás paralizada, sino que vas a poder pensar en las correspondencias biunívocas.

Ahora, Clara comprendía mejor porqué el Maestro había usado los países y sus ciudades más habitadas, y los zapatos izquierdos y derechos. Estaba preparando el terreno para el caso infinito, aunque éste fuera totalmente distinto. Ahora podía imaginarse mejor las cosas. Estaba sumida en esos pensamientos cuando el Maestro continuó.

Definición: Dos conjuntos (infinitos) tienen la misma cantidad de elementos si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos. En símbolos, card **A** = card **B** si existe una correspondencia biunívoca **A** ↔ **B**. En este caso, se dice que los conjuntos **A** y **B** son **coordinables**.

- Para hacer más cortos nuestros enunciados, te propongo que en lugar de decir que entre un conjunto y otro hay una correspondencia biunívoca, digamos que esos dos conjuntos son **coordinables**. ¿Qué te parece?

- No hay problema. Sólo me tengo que acordar de esta palabra, **coordinable**, que es nueva para mí.

- Así es. La repetiremos varias veces, te la vas a acordarte bien. También, tenés que recordar que llamábamos **cardinal** a la cantidad de elementos de un conjunto. O sea que ahora, si dos conjuntos son coordinables, estamos diciendo que **tienen el mismo cardinal**. No importa que no sepamos bien cuál es su cardinal, como en el caso de los conjuntos infinitos, pero igual podemos decir que tienen el mismo cardinal si hay una correspondencia biunívoca entre ellos. Ahora volvamos al comienzo. ¿Te acordás de la pregunta sobre la cantidad de elementos de **N** y de **Z**?

- Creo que sí. Era, si tenían la misma cantidad de elementos, o si el cardinal de **N** era menor que el de **Z**.

- Correcto. Ahora también podemos enunciarla preguntando ¿son **N** y **Z** coordinables? Me gusta enunciar las cosas de una manera sencilla. Si ya nos hemos puesto de acuerdo en lo que significa "ser coordinable a", entonces el enunciado se simplifica.

- Ahora, me gustaría saber la respuesta, Maestro, entenderla.

-¿Son **N** y **Z** coordinables? ¿O no lo son? Si no lo fueran, entonces el cardinal de **Z** debería ser mayor que el de **N**. En símbolos: card **Z** > card **N**. ¿Te parece que lo podrás resolver, Clara?

- Tal vez sí. Ahora tengo más elementos para pensarlo. Espero poder hacer algo.

- Sí. Confío que vas a poder porque te gusta pensar, y eso es todo lo que se necesita: interés, curiosidad, un poco de concentración. Clara, cada vez que te veo pensando siento que la llama de la curiosidad intelectual está viva en los niños y jóvenes del siglo XXI.

- Maestro, estoy recordando lo que me explicó sobre los números naturales y los números naturales pares. Son coordinables, ¿verdad?

- ¿Estás segura?

- Creo que sí. Usted mismo me mostró la correspondencia $n \mapsto 2n$. Es biunívoca, por lo tanto ¡los números naturales y los números naturales pares son coordinables!

- Así es. Por un lado, esto ha sido sencillo porque la correspondencia $n \mapsto 2n$ lo es. Sin embargo, como ya dijimos, la conclusión de que una parte propia de **N** sea coordinable a **N** podría resultar inquietante. Alguien podría confundirse y creer que esto significa que el todo es igual a la parte. No queremos tener problemas con los filósofos. En verdad, **no podemos** tenerlos porque lo que hacemos es matemática. En este sentido no hay ningún problema. Repitamos: no decimos que **N** es igual a **NP** sino que son coordinables, que no es lo mismo. En matemática debemos ser cuidadosos. Los detalles cuentan. A veces hay diferencias sutiles.

- Me parece sutil, pero creo que lo entendí. Sí, ahora lo veo bien: **N** y **NP** no son iguales, obvio, pero sí son coordinables.

- Absolutamente. Ahora, esto sólo puede ocurrir entre conjuntos infinitos y no entre conjuntos finitos. ¿Podrías decir, Clara, qué es un conjunto finito?

- Bueno, ya lo vimos, pero igual me parece difícil. Para mí, es cuando cuento sus elementos y en algún momento termino de contarlos.

- Bien. En otras palabras, estás diciendo que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto dado y alguno de los conjuntos {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, etc. ¿Y cuándo un conjunto es infinito?

- Cuando no paro de contar sus elementos.

- Está bien. También podemos decir que es infinito cuando no es finito, o sea, cuando no es coordinable a ninguno de los conjuntos {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, etc. Lo que estamos haciendo es dar una **definición formal** de lo que significa conjunto infinito.
Pero dejemos ahora la definición, y volvamos a la pregunta interesante. Estabas por responder sobre **N** versus **Z**.

Definición. Un conjunto es **finito** cuando es el conjunto vacío o es coordinable con alguno de los siguientes conjuntos: {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, ... en general, el {1, 2, 3, 4,..., n}, donde n es algún número natural. Un conjunto es **infinito** cuando no es finito.

Clara se concentró durante unos minutos. El Maestro también pensaba, aunque no sabemos si en este problema o en otras cosas. Hasta que Clara respondió:

- Estoy lista. Ahora que comprendí el caso **N** versus **NP**, me da toda la impresión que esto es igual. Todavía no puedo escribir la correspondencia completa, pero estoy segura que **N** y **Z** son coordinables.

- Bien. Has dado un buen paso, Clara. Pudiste comenzar a escribir una correspondencia, ¿verdad? Me gustaría ver si te puedo ayudar. Una forma de estar completamente seguros de que son coordinables es poder escribir la correspondencia biunívoca.

- Eh, bueno, esto es lo que escribí:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	...

Y me gustaba como iba, salvo que al 0 del conjunto **Z** de los enteros no sé cómo ponerlo para que se corresponda con uno de los números naturales de arriba.

- Clara, afortunadamente puedo ayudarte en esto. Hay muchas formas de incorporar el cero. Un viejo y sencillo truco consiste en correr todo un lugar para la derecha en la segunda fila, y entonces queda el primer lugar libre y podés poner el cero allí. Si lo escribimos a tu manera, nos queda de la siguiente forma:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Z	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...

Fijate que sólo agregamos el 0 al comienzo de tu lista de números enteros, y los demás se corrieron un lugar.

- ¡Ese truco fue muy bueno! -dijo Clara entusiasmada, al ver que el Maestro había podido completar la correspondencia que ella había iniciado-. De modo que ¡**N** y **Z** son coordinables!

- Así es. Me alegro que hayamos respondido la pregunta inicial. Apuesto a que nunca oíste hablar del Hotel Hilbert.

- No Maestro. ¿Tiene algo que ver con esto?

- Sí, en particular con el truco que hicimos. Es un Hotel peculiar, muy interesante. Pero la semana que viene hablaremos sobre él. Hoy ya hemos tenido suficiente, ¿no crees?

- Sí. Todavía me queda tiempo para la merienda y más tarde tengo mis prácticas de vóley. Aunque me quedo con la intriga de saber el porqué un hotel puede ser tan especial para la matemática. Gracias Maestro. ¡Hasta la próxima clase!

- Adiós, Clara. Hasta la semana que viene. Que disfrutes de tu partido de vóley.

El Maestro se quedó pensando: "Esta niña me da mucha alegría. A veces me preocupa un poco ver que a los alumnos les cuesta sentarse a pensar con profundidad. Pero Clara lo hace. Le encantó pensar sobre el infinito. Quiere entender. ¡Le gusta aprender y superarse! ¿No es acaso el pensamiento abstracto y profundo algo que nos distingue de los demás seres vivientes de La Tierra? ¿No es acaso, el pensamiento matemático, algo maravillosamente profundo?

Para resolver

Problema 3.2. Ayudar a Clara a:

- Hallar una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los números naturales impares. Denotaremos al conjunto que forman estos últimos con **NI**, es decir, **NI** = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}. De modo que en este problema se demostrará que los conjuntos **N** y **NI** son coordinables.

- Hallar una correspondencia biunívoca entre los números naturales pares, **NP**, y los **cuadrados perfectos**, es decir aquellos números de la forma $n^2 = n \cdot n$, donde n es un número natural. Si denotamos este conjunto por **CP**, entonces:

CP = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...}.

3.2. Hotel Hilbert

- Maestro. ¿Me contaría sobre el hotel que mencionó la clase pasada?

- Por supuesto. Es un hotel muy sencillo, en algún sentido - aunque el Maestro sonreía mientras decía esto, como si escondiera una sorpresa detrás de sus palabras-. No tiene cosas especiales como pileta, cancha de tenis, gimnasio y todo eso que se estila en los grandes hoteles. Pero tiene una característica particular, sólo una: los números de sus habitaciones son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…

- ¿Quiere decir usted que sólo tiene una planta? ¿Que no tiene varios pisos? Una vez que estuve en un hotel así me tocó la habitación 22. Me gustaba porque ¡era un número capicúa!

- Clara, si te fijás bien en lo que dije, notarás que los números de las habitaciones son 1, 2, 3, 4, 5,…., y continúan, indefinidamente, es decir, ¡TODOS los números naturales! Sí, es un hotel con ¡una cantidad infinita de habitaciones! Tantas, como números naturales hay.

- Uaaauuuu. No me lo esperaba. Pero... ¿es posible?

- ¡Sí... en nuestra imaginación!

- Claro. Voy a empezar a imaginármelo.

Clara continuó:
- Pienso en un hotel que tiene sus habitaciones en una línea muy larga, como un tren, pero que no termina…

- Está bien, podés imaginarlo así, quizá te ayude para lo que viene.

- Estoy preparada para escucharlo, Maestro, me interesa.

- Muy bien, Clara. Lo que me gusta del Hotel Hilbert es que siempre encuentro lugar allí.

- Ah, claro, siempre hay habitaciones vacías, al ser infinitas -pensó Clara en voz alta.

- No exactamente. Un día llegué al hotel y estaba lleno. Todas las habitaciones estaban ocupadas. Yo no tenía otro lugar a donde ir y ya era de noche. Además, llovía. Pero el conserje fue muy amable conmigo. Levantó el teléfono y enseguida me dijo que yo disponía de la habitación número 1. Me quedé boquiabierto, era la primera vez que me sucedía una cosa así. ¿Te podés imaginar cómo me consiguió ese lugar?

- No. ¿Alguien dejó el hotel justo en ese momento?

- No, Clara. Nadie dejó el hotel, ni tampoco puso a dos pasajeros que estaban separados en una misma habitación. ¡Pero consiguió un lugar! Digamos que se trata de un "truco matemático". Pensalo un rato, a ver qué se te ocurre.

El Maestro la instó a que intentara hallar una solución antes de escuchar la respuesta. Clara se concentró mucho pensando en el problema. Y los dos estuvieron un rato en silencio. Ella pensaba en el problema y el Maestro en la existencia del infinito. Más tarde el Maestro explicó:
- Lo que hizo el conserje fue pedirle a los pasajeros que se mudaran a la habitación siguiente de la que estaban; es decir, quien estaba en la habitación número 1 debía cambiarse a la número 2; quien ocupaba la 2 a la 3; el de la 3 a la 4; y así sucesivamente. Como en este mundo imaginario todos eran muy amables accedieron gentilmente a mudarse, y así, enseguida se liberó la habitación número 1, que el conserje me ofreció. Como ves, ¡nadie se quedó sin habitación!

- ¡Qué bárbaro! Estaba lleno, pero le hicieron lugar. ¡Cuesta creerlo!

- Así es, Clara. Nuestra intuición está acostumbrada a *hoteles finitos*, es decir, con una cantidad finita de habitaciones. Por eso, esto nos sorprende tanto. Fijate que si además de llegar yo, esa noche llegaban varias personas, el conserje podía acomodarlas a todas. Simplemente, le pedía a los pasajeros que en lugar de moverse de una habitación a la siguiente, o sea, de la número n a la n+1, lo hicieran de la número n a la $n+k$, donde k es el número de personas que llegaron. De ese modo, quedaban las primeras k habitaciones libres para ser ocupadas por los nuevos pasajeros.

- ¡Increíble! Es un hotel fascinante. Usted dijo que sólo tenía una particularidad, pero es una muy especial.

- Es verdad... (risas). Ahora, Clara, ¿sabés cómo se relaciona esto con el 0 de **Z** en la correspondencia con **N**?

- Mmhh… déjeme pensarlo un poco, Maestro.

El Maestro nuevamente le dio tiempo a Clara para que piense sola el problema, antes de darle alguna explicación.

- Ya está -dijo Clara- lo entendí.

- Muy bien. ¡Contame lo que pensaste!

Y Clara dio una excelente explicación que alegró y asombró al Maestro en partes iguales. Entonces el Maestro agregó:

- ¡Excelente, Clara! Voy a repetir lo que dijiste, desde mi punto de vista: El 0 sería yo, que llegué al hotel donde ya estaban alojados todos los demás números enteros que serían los pasajeros. Como ves me hicieron lugar, simplemente corriendo a todos un lugar más adelante, y poniéndome a mí primero. Es lo mismo que hicimos con tu correspondencia biunívoca. Habías apareado los enteros distintos de cero con los naturales. Pero luego pusimos el cero al principio, corriendo todos los otros enteros un lugar hacia la derecha. Es como haberle hecho un lugarcito al cero en la habitación número 1 del hotel.

- ¡Por supuesto! Ahora veo que podría haberme dado cuenta de todo apenas comenzó a plantear el problema.

- Hay una cosa más en el Hotel Hilbert que te asombrará. Si aquella noche que llegué solo hubiera llegado un contingente de infinitas personas, numeradas 1, 2, 3, 4, 5,…., ¡el conserje también las habría alojado!

- ¡¿A infinitas, también?!

- Sí. En ese caso les habría dicho a los pasajeros que se corrieran de su habitación número n a la habitación número $2n$, y así, todas las habitaciones impares habrían quedado libres. ¿Me seguís? De este modo ubicaba a la persona número 1 en la habitación número 1, que estaba libre, a la persona 2 en la habitación 3, que también estaba libre, por ser impar, a la persona 3 en la habitación 5, a la 4 en la 7, la 5 en la 9, etc. En general, habría ubicado a la persona número k en la habitación número $2k$-1. ¡Esto es posible en nuestro gran Hotel Hilbert!

Para resolver

Problema 3.3. Si llegan al Hotel Hilbert dos contingentes, A y B, de infinitas personas cada uno, a las que podemos enumerar como $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, \ldots$ ¿Podrá el conserje ubicar a todas estas personas, cada una en una habitación distinta?

Aclaración: el hotel ya está lleno, no se puede echar a ningún pasajero, ni juntarlo con otro en una misma habitación, pero sí se puede reubicar (es decir, mover de una habitación a otra) a los pasajeros que el conserje considere necesario, y no se debe dejar ninguna habitación vacía.

Problema 3.4. Si llegan al Hotel Hilbert infinitos contingentes $A^1; A^2; A^3; A^4; A^5; A^6; A^7$... de infinitas personas cada uno, a las que podemos denotar de la siguiente manera:

a las del contingente A^1 con $a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1, a_6^1, a_7^1, a_8^1, \ldots$
a las del contingente A^2 con $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2, a_6^2, a_7^2, a_8^2, \ldots$
a las del contingente A^3 con $a_1^3, a_2^3, a_3^3, a_4^3, a_5^3, a_6^3, a_7^3, a_8^3, \ldots$; etc.

¿Podrá el conserje ubicar a todas estas personas, cada una en una habitación distinta?

3.3. La paradoja de Aquiles y la tortuga

- Maestro, ¿se acuerda que un día dijo: ¿"eso es filosofía"?

- Sí, Clara. La filosofía es la madre de las ciencias, de algún modo las engloba a todas.

- Aquel día me gustó mucho la clase. ¿Podría enseñarme un poco más?

- Disculpame, Clara, es que yo no sé mucho de filosofía. Sólo sé algo de matemática. Pero aprovechemos que estás interesada para contarte algo que ocurrió de verdad, y forma parte de la historia de la filosofía. Lo más interesante para nosotros será la parte matemática del asunto porque ayuda a comprender y resolver un problema filosófico.

- Suena superinteresante, Maestro.

- ¡Lo es! ¡Ya verás!
Hacia el siglo V a.C., los griegos hacían grandes progresos en casi todo, especialmente en filosofía. Parece mentira que un pueblo “antiguo” haya hecho avances tan profundos. Fue algo maravilloso. Seguramente habrás oído alguna vez sobre los tres grandes filósofos griegos: Sócrates, Platón y Aristóteles, ¿verdad?

- Sí, pero muy poco. Me gustaría saber más.

- Sólo para mencionar la importancia que daba a la matemática Platón -uno de los más célebres pensadores de la historia de la humanidad- hay que saber que se le atribuye haber tenido en la entrada de su gran escuela un cartel que decía: *no entre a esta escuela quien no sepa geometría*.

El Maestro hizo una pausa, y sus palabras quedaron resonando en la cabeza de Clara. Prosiguió.

- Conmovedor, ¿no te parece? Pero dejemos a Platón y pasemos a Zenón de Elea, filósofo griego también, apenas anterior a él. Zenón hizo una serie de razonamientos interesantes, elaborados inteligentemente, que llevaban a la conclusión de que ¡el movimiento no era posible!

- ¡¿Cómo?! ¿En serio? –preguntó Clara asombrada.

- Así es. Bueno, se trata de una paradoja.

- ¿Qué es una paradoja, Maestro?

- Es una afirmación que suena absurda. Es opuesta a lo que piensan casi todos, pero se presenta en forma lógica, e induce a pensar que es verdadera. Para mí, una buena paradoja es algo que si lo pensás de un modo, sacás una conclusión, y si lo pensás de otro modo, sacás otra que es contradictoria con la anterior. Por consiguiente, alguna de las formas en que estás pensando es errónea, no es válida. ¿Entendés?

- Creo que sí, pero no sé si conozco alguna.

- Bueno, te voy a contar una que planteó Zenón de Elea. Se llama la paradoja de **Aquiles y la tortuga.**

- Ah, ¡conozco a Aquiles porque leí la Ilíada para niños! -dijo Clara.

- Muy bien, es ese mismo Aquiles. Cuando se lo menciona en la Ilíada original, frecuentemente su nombre va acompañado por un adjetivo en griego que significa **el de los pies ligeros**. El fue un héroe de la guerra de Troya, historia que cuenta magistralmente Homero. Pero Aquiles también era muy veloz y por eso es el protagonista de esto que te voy a contar. En la antigua Grecia se celebraban los juegos olímpicos (los actuales están hechos a semejanza de aquéllos). Ah, ¡qué pueblo fantástico el griego! -y el Maestro hizo una pausa, se quedó un rato mirando hacia el infinito con cara de admiración, seguramente pensando en los griegos. Luego retomó.

- Perdón por distraerme. Volvamos a la paradoja. Zenón imaginó una carrera entre Aquiles, el de los pies ligeros, y una tortuga. ¿Quién creés que ganaría semejante carrera?

- Aquiles, obvio. Aunque en la fábula de la liebre y la tortuga, ¡pierde la liebre! En esta carrera, ¿pasa algo raro también?

- No, Clara -dijo el Maestro sonriendo-. Aquiles no se tiraría a dormir en medio de una carrera. Aquí, el único problema menor que él tiene es que debe darle una pequeña ventaja inicial a la tortuga. Es poca ventaja, así que todos asumen que la descontará en los primeros momentos, y luego ganará la carrera con total comodidad.

- ¿Y qué pasó? ¿Ganó Aquiles?

- Bueno, aquí viene lo interesante. ¡Aquiles no puede pasar a la tortuga!

- Pero ¿por qué? ¿No corre mucho más rápido?

- Sí, pero lo que Zenón plantea es que desde un punto de vista puramente abstracto y racional, Aquiles no podrá ni siquiera alcanzarla. Podríamos poner así el razonamiento: para superar a la tortuga, Aquiles, primero deberá llegar al lugar donde se encuentra la tortuga al instante de inicio de la carrera, ¿estás de acuerdo?

- Sí, claro.

- Eso le tomará un cierto tiempo. Durante ese tiempo, la tortuga también avanzó, y dejó atrás ese lugar. De modo que la tortuga sigue estando delante de Aquiles.

- Sí. Pero todavía no veo cuál es el problema.

- Paciencia, Clara, no estamos lejos. Nuevamente, para superar a la tortuga, Aquiles, primero deberá llegar al lugar donde ella se encuentra. Esto le tomará un cierto tiempo. Es el segundo intervalo de tiempo que se ha consumido. Pero nuevamente, la tortuga avanzó durante ese segundo intervalo de tiempo, y entonces, continúa delante de Aquiles.

Clara prestaba mucha atención a esta explicación. El Maestro continuó:

- Bien. Ahora la situación se repite por tercera vez. Aquiles debe llegar primero donde se encuentra la tortuga, y esto le toma un cierto tiempo, que es el tercer intervalo de tiempo que ha transcurrido. Pero mientras tanto, la tortuga avanzo nuevamente. Y así, la misma situación se repite, es decir, la tortuga está delante de Aquiles, y ya van tres intervalos de tiempo consumidos. Y así sucesivamente, esto se repite, y se repite, ¡indefinidamente!

- Creo que lo estoy siguiendo, Maestro.

- Si bien Aquiles y la tortuga están cada vez más cerca entre sí, Aquiles siempre está detrás. Y lo importante, es que ya se ha tomado muchos tiempos para acercarse, muchísimos. En verdad, ¡necesitaría infinitos tiempos para alcanzarla! Entonces, aquí viene la importante conclusión: si Aquiles necesita infinitos tiempos para alcanzar a la tortuga, es imposible que lo consiga. Por consiguiente, desde un punto de vista puramente racional ¡el movimiento no puede existir! Zenón de Elea continúa con su argumento, diciendo que quizás el movimiento esté sólo en nuestra imaginación. De acuerdo con este razonamiento, el movimiento no es posible, ya que se necesitaría tiempo infinito para lograr moverse. ¿Qué te parece?

- ¡Asombroso! -respondió Clara, desconcertada e intrigada.

- Zenón pensaba que quizá todo estuviera en nuestra mente. Que tal vez el mundo exterior no existía, sino en nuestra imaginación. El filósofo continuaba haciendo implicaciones, consistentes con su razonamiento, donde "*demostraba*" que el movimiento era imposible.

- ¿Y usted qué opina?

El Maestro sonrió y continuó sin responder la pregunta.

- Hay otras paradojas similares que planteó Zenón. Por ejemplo, una muy conocida dice que para llegar a un lugar, primero debes recorrer la mitad de la distancia, pero antes, debes recorrer la mitad de la mitad, y antes de esto, la mitad de la mitad de la mitad, y así sucesivamente, de modo que nunca puedes comenzar. Si bien los argumentos y las situaciones en sus paradojas son aparentemente distintos, los filósofos dicen que son esencialmente iguales, de manera que podemos quedarnos con la de Aquiles y la tortuga, y pensar sólo en ella.

- ¿Y qué sucedió con estas paradojas?

- Por empezar, algunos pensadores y filósofos quedaron asombrados con la paradoja de Zenón. Tal vez quedaron un poco desorientados.

En ese momento, Clara razonó así:

- Si Aquiles necesita infinitos tiempos para pasar a la tortuga, no entiendo cómo puede pasarla. Y yo creo que la pasa, ¡estoy segura que la pasa! Quiero decir, que el movimiento tiene que ser de verdad, no puede ser sólo una película en mi cabeza.

- Te entiendo, Clara. En aquel tiempo, un rey, dijo: "*el movimiento se demuestra andando*", y entonces salió de su palacio con gran pompa, hizo un paseo por las calles principales de la ciudad, y regresó muy satisfecho de sí mismo, creyendo que había acabado con la paradoja, y que todos podían olvidarse de ella. ¿Qué te parece?

- No sé, no me parece muy inteligente lo del rey, ¿no?

- Ciertamente no aportó nada para "desentrañar" la paradoja. Todos podemos movernos, o creer que lo hacemos -el Maestro rió al decir estas palabras- y que los demás coincidan con nosotros en esto. Pero de lo que se trata este problema es de encontrar cuál es el error en el razonamiento planteado. Por otra parte, si todo fuera un sueño, o una película en nuestra mente, ¿podríamos distinguirlo? ¿Cómo? Lo que los pensadores querían entender -y supongo que ahora vos también- era, desde el punto de vista racional, qué estaba sucediendo con el razonamiento de Zenón.

- ¿Y lo lograron?

- No en aquel momento. Bueno, no por muchísimos años, ¡por siglos! Como te dije, en parte fue la matemática la que proveyó argumentos para dar por tierra definitivamente con la paradoja. Como ves, Clara, aquí el infinito aparece como elemento fundamental. Y quizá la falta de comprensión del mismo, fue lo que llevó a no poder resolverla bien durante tanto tiempo.
Pero vayamos ahora al argumento matemático. Zenón dijo que el problema era la suma de infinitos tiempos, ¿verdad?

- Sí, eso dijo… o al menos, eso dijo usted que él había dicho -respondió Clara riéndose.

- No es momento para chistes -bromeó también el Maestro-. ¡Mejor será que te concentres! Zenón asumió que al tener que realizar una acción en infinitos tiempos, eso significaba que le tomaría tiempo infinito, y por lo tanto no sería posible. Pasándolo a términos matemáticos, sería que al sumar infinitos tiempos, el resultado de la suma da una cantidad infinita de tiempo, y por eso resultaba imposible el movimiento. Sin embargo… ¡no es así!

- ¿Qué cosa no es así?

- La suma de infinitos intervalos de tiempo, ¡puede ser finita! No tiene por qué ser infinita. ¿Te sorprende?

- Sí, por supuesto. Creo que yo me imaginaba que si siempre seguía sumando, y sumando, entonces la suma se iba haciendo más y más grande, y no podía parar.

- Sí. Se va haciendo más y más grande, es verdad. Pero eso no significa que se haga ¡tan grande como uno quiera! Es decir, no significa que la suma deba ser infinita. Dicho en otras palabras, si los números a considerar se van haciendo muy pequeños, entonces la suma de infinitos números puede dar resultado finito. Es el caso de la suma de uno, más un medio, más un cuarto, más un octavo, etc. Lo que no debemos hacer es confundir *números* con *números naturales*. En nuestro caso, no estamos sumando números naturales, sino *números fraccionarios* o *números reales*, que pueden hacerse verdaderamente muy pequeños.

La suma de infinitos números (reales, o fraccionarios) positivos puede ser finita. Por lo tanto, la suma de infinitos tiempos, no tiene porqué ser infinita, puede ser finita.

- Entonces, cuando Aquiles necesitaba "infinitos tiempos" para pasar a la tortuga, en realidad no necesitaba "tiempo infinito". O sea que ¡¿la puede pasar sin problema?!

- Correcto. En la clase que viene, podríamos aprender bien las sumas infinitas, si te interesa. Hasta ahora, sólo te lo he dicho, pero podemos entenderlo bien, convencernos, *¡demostrarlo*!

- Sí, Maestro, me gustaría. –dijo Clara verdaderamente interesada en aprender sobre *sumas de infinitos términos*.

- En el tiempo que nos queda hoy, veamos un ejemplo interesante, donde sumamos infinitos términos y, sin embargo, la suma es finita. Los términos a sumar son, como dijimos, simplemente los inversos de las potencias de 2, o sea, números de la forma $\frac{1}{2^k}$, donde k es un número natural o el cero. Entonces, realizamos las siguientes sumas: primero sólo el 1, en segundo lugar hacemos $1+\frac{1}{2}$, luego $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, seguimos con $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, y continuamos haciendo sumas. La quinta suma es: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, y así seguimos. Por ejemplo, la décima suma es: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}$. Y continuamos, nunca paramos. ¿Cuánto dará la suma total?

- Lo estoy pensando, Maestro.

- Más que saber cuánto da la suma total, lo que me gustaría saber, es si se va haciendo muy grande o no. ¿Qué creés?

Y Clara comenzó a escribir los resultados de las sumas anteriores.

- Maestro, las sumas van dando $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \dots$

-Y estos números, ¿se van haciendo tan grandes como uno quiera, o no? El resultado de la suma total ¿será infinito?

- Parece que no se hacen muy grandes, Maestro. Hasta ahora, son todas fracciones menores que 2.

- ¡Muy bien! Te diré el resultado, para que vos pienses el porqué. Esta suma infinita da 2. Exactamente 2. Con este ejemplo, podemos comprender bien el porqué la paradoja provenía de haber asumido, erróneamente, que el resultado de sumar infinitos tiempos, o números positivos, era infinito.

Dicho esto, Clara y el Maestro se despidieron. Ella se fue pensando en la última suma, aunque a mitad de camino, ya con ganas de llegar de vuelta a su casa, pensó que era una suerte que el movimiento fuera posible, y que lo de Zenón no fuera correcto. Había sido una clase muy provechosa.

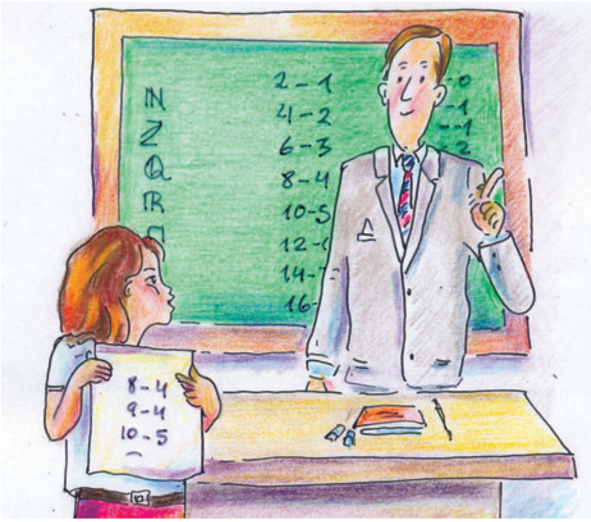
Problema 3.5. Ayudar a Clara a calcular la suma infinita anterior:

Para resolver

Se puede usar calculadora o computadora (aunque no es necesario). Para cada número natural n, consideremos las *sumas parciales* S_n de los primeros n términos, es decir, $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}$.

Calcular S_{10}, S_{20} y S_{100}. Más adelante, veremos que esta suma infinita es una *serie geométrica* y, por lo tanto, no hace falta sumar para obtener los resultados, porque se cumple que $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. Probar esta igualdad, sacando común denominador en la expresión de S_n recordando que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Observar que esa identidad muestra que $S_n < 2$ para todo n, y en consecuencia la suma infinita no es mayor que 2. Por otra parte, las sumas parciales S_n calculadas para $n = 10$, 20 y 100 muestran que al crecer n, las S_n se acercan tanto como uno quiera a 2.

□ 3.4. Sumas infinitas



Aquel día, el Maestro y Clara, se hallaban enfrascados en la cautivadora y difícil tarea de sumar infinitos números. A Clara le costaba entender lo que esto significaba. El Maestro le mostraba nuevos ejemplos para que ella comprendiera mejor las cosas. Si bien no estaba del todo convencida, lo aceptaba de buen grado. En ese momento, Clara le dijo al Maestro:

- ¿Me lo podría explicar de nuevo, por favor?

- Por supuesto, con todo gusto. Antes, quiero hacerte notar que estamos aprovechando la conversación que tuvimos sobre la paradoja de Aquiles y la tortuga para adentrarnos en un mundo apasionante, el de las "sumas infinitas", donde aparecen conceptos que los matemáticos han llamado *sucesiones, series, límites,…* ah las series infinitas.... qué interesante, ¡qué interesante!

- Mmmhh, veremos.

- ¡Ya vas a ver! Ahora, comencemos con una sucesión infinita de números, una bien sencilla, por ejemplo la de los números naturales impares. Escribamos la *sucesión* de este modo, Clara, que así se la ve muy bien:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$$

- No termina nunca, ¿verdad, Maestro?

- Así es. Los puntos suspensivos al final significan eso. Es una tira de números que sigue y sigue, no termina. Tiene comienzo, pero no tiene fin. En este caso sabemos cómo continúa. Por ejemplo, si te pido que me digas cuál es el décimo término de esta sucesión, ¿qué contestás?

- A ver... el 19.

- Bien. ¿Y el término ubicado en el lugar número 100?

Clara comenzó a hacer unos garabatos en su libretita, y bastante rápidamente respondió:
- es el 199.

- Muy bien. Lo estás entendiendo. ¿Cómo lo calculaste? ¿A mano, o con alguna fórmula?

- No sé bien, Maestro; pero no fue difícil.

- ¿Sabrías reconocer una fórmula general para los términos de esta sucesión? Si te doy la fórmula $2n - 1$, con n variando en los números naturales, ¿podés reconocer ahí una sucesión?

El primer término es el $2 \times 1 - 1$, o sea, el 1. El segundo término es el $2 \times 2 - 1$, o sea el

3. Y si seguimos así, ¿qué tenemos?

- Es la misma sucesión que teníamos, la de los números impares -respondió Clara.

- ¡Por supuesto! La única diferencia es la forma de presentarla, pero es la misma sucesión. Por eso, si te pido el décimo término de la sucesión, basta con reemplazar n por 10 en la "fórmula" que tenemos, $2n - 1$, para obtener $2 \times 10 - 1 = 19$.

- Y para el término número 100, Maestro, también se puede hacer así, ¿no?, o sea $2 \times 100 - 1 = 199$, ¿está bien?

- Sí, muy bien. Ahora tenemos un modo de calcular fácilmente los términos de esta sucesión. Pero continuemos con la suma infinita, a la que también llamaremos *serie* o *serie infinita*. Vayamos sumando los términos, uno por uno. Comencemos con el primer término: tenemos 1. Sigamos, hagamos ahora el primero más el segundo, es decir, $1 + 3$, y el resultado que obtenemos es 4. Sumemos ahora los tres primeros términos de nuestra sucesión, es decir, $1 + 3 + 5$. Obtenemos 9. Ahora los cuatro primeros, $1 + 3 + 5 + 7$, ¿cuánto da? 16. Fijate, que para sumar los cuatro primeros términos, también podríamos sumar el cuarto término al resultado de la suma de los tres primeros, o sea hacer $9 + 7$, y llegaríamos igualmente a 16. Ahora, ¿cuánto da la suma de los primeros cinco términos?

- Es fácil. Da.... $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, o también podía hacer $16 + 9$ y llegar al 25.

- Perfecto. Esto es muy fácil. Pero ahora viene una pregunta diferente. ¿Qué sucede si sumamos *todos* los términos, en el orden en que lo venimos haciendo? ¿Cuánto dirías que da esta "suma", o mejor dicho, esta "serie"?

- Al ir sumando, se va haciendo algo demasiado grande, ¿verdad? A ver, dan 1, 4, 9, 16, 25, y luego 36, 49,... Las sumas se agrandan cada vez más, ¡y no van a parar!

- ¡Así es! Y si estas *sumas parciales* se van haciendo *tan grandes como uno quiera*, entonces vamos a decir que la suma total, o sea la serie, *tiende a infinito*.

- ¿Por qué se dice así? ¿No se podría decir que la suma total da infinito?

- Bueno, sí, sólo que hay que tener cierto cuidado. Te estás adelantando un poco, Clara, eso no es malo. Usamos la palabra "*tiende a*" porque pensamos en cómo van evolucionando las sumas parciales, en su tendencia. También se expresa esto diciendo que el *límite* (de las sumas parciales) es infinito. Aunque esto pueda sonarte un poco raro, te vas a acostumbrar apenas calcules el resultado de dos o tres series, como estamos haciendo. Ahora me gustaría que comparemos esta serie, con la anterior que vimos. ¿Te acordás? En ambas, siempre vas sumando cosas positivas, y por lo tanto las sumas parciales van creciendo cada vez más. Pero hay una diferencia esencial: mientras que aquéllas no superaban el 2, éstas crecen tanto como se quiera, y tienden a… -y el Maestro hizo una pausa para que Clara contestara.

- ¡Infinito!

- Muy bien. Entonces debemos ser rigurosos, ya que el sólo hecho que las sumas parciales vayan creciendo y creciendo no significa que tiendan a infinito.

- Creo que lo entiendo, Maestro, aunque me gustaría entender mejor qué significa lo de "tan grande como uno quiera".

- A ver, Clara decime un número grande.

- Mil –dijo Clara, con cierto temor a decepcionarse si el Maestro le hacía el chiste tonto de decirle "1.001, te gané". Afortunadamente, el Maestro la sorprendería con otra "gracia" mucho mejor.

- Bien. Sumemos los primeros 32 términos de nuestra sucesión. ¿Cuánto es, Clara?

Ella sacó su calculadora y comenzó a manipularla hábilmente. Al cabo de un rato dijo

- ¡Da 1.024!

Y al terminar de pronunciarlo, se asombró cuando se dio cuenta de que este número era apenas mayor que 1.000, el que ella había elegido.

- Ves, Clara. Dijiste un número, y nuestra serie, lo superó. No sólo eso, sino que si sumamos los primeros 33 términos también supera, o los primeros 100 también, o con mayor generalidad, si $k \geq 32$, entonces la suma parcial de los primeros k términos es mayor que 1.000. Además, si hubieras dicho otro número grande, distinto de 1.000, también podríamos haber descubierto cuántos términos necesitábamos para superar tu número. ¿Hacemos otra prueba?

- Bueno, digo 10.000.

- Entonces yo digo 101. Si hacemos la suma parcial de los primeros 101 términos, da 10.201, que es mayor que diez mil. ¿Querés hacer una prueba más?

- No, Maestro, le creo.

- Eso es lo que significa "tan grande como uno quiera", o lo mismo, "que tiende a infinito". ¿Qué ocurre, no se entiende? -preguntó el Maestro al ver a Clara algo desconcertada.

- No, no es eso. Entiendo que esta suma "tiende a infinito". Lo que no descubro aún, es cómo hizo para saber que la suma de los primeros 32 términos daba mayor que 1.000, sin calcularlo. Porque además, si sumamos los primeros 31 términos, da 961, que es menor que 1.000. O sea, que 32 es el menor número de términos que sumados superan al número 1.000. Y lo mismo pasa con el 101 y el diez mil ¡Estoy sorprendida!

- Bueno, Clara, el cálculo que hice se basa en un lindo truco. Si te acordás de cuánto daban las sumas parciales y pensas en ellas lo vas a descubrir.

- A ver, daban 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,.... ¡Ah! ¡Son los cuadrados perfectos! Entonces, cuando tenemos k términos, la suma parcial es k^2.

- Así es, ya estás muy cerca.

- Ahora tengo que ver qué número *k* al elevarlo al cuadrado da mayor que 1.000. Sé que 30 por 30 es 900, y con una cuentita más, llego a que el primer número que cumple esto es el 32.

- Muy bien, me alegro que lo hayas descubierto. Lo único que no hiciste fue demostrar que las sumas parciales dan realmente los cuadrados perfectos. Esto se logra, por ejemplo, verificando que si a la suma parcial de los primeros *k* términos le sumamos el siguiente término, que es $(2k+1)$, entonces se obtiene $(k+1)^2$, pues $k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$. Ahora estamos seguros que las sumas de los primeros números impares da siempre un cuadrado perfecto.

- Maestro, creo que me están empezando a gustar las series.

- Me alegro. ¡Veremos más!

□ 3.5. La serie geométrica y la serie armónica

- ¿Clara te acordás de la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$?

- Sí, la vimos hace poquito. Dijimos que “tiende a 2” ¿verdad?

- Así es. Vimos que sus valores se acercaban tanto a 2 como uno quería, por lo tanto, tiende a 2, o también, decimos que su límite es 2. Lo que quería contarte ahora, es que si bien esta serie nos ha resultado muy especial, porque nos ha mostrado por primera vez que la suma de infinitos números positivos puede ser finita, en realidad, desde otro punto de vista, no es rara, inclusive es un caso particular de algo más general.

Clara miraba intrigada. El Maestro continuó.

- Se trata de las series geométricas, donde se toma el parámetro r igual a un medio. En general, r puede ser cualquier número entre cero y uno. Se considera la suma de las potencias de r:

$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots$ la **serie geométrica** (de razón r) y se demuestra que tiende a $\frac{1}{1-r}$.

- Ah, ya veo, Maestro: si $r=\frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

- Bien. Ahora te propongo que me ayudes a *demostrar* que realmente la serie geométrica de razón r tiene límite finito igual a $\frac{1}{1-r}$. Será sólo una manipulación algebraica. ¡Manos a la obra! Escribimos $S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots + r^n$. Multiplicamos ambos miembros por r, ¿qué nos queda?

- Creo que $r \,.\, S_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + \dots + r^n + r^{n+1}$.

- Bien. Ahora restamos miembro a miembro la primera identidad de la segunda. Clara, ¿podés escribirlo?, por favor.

- A ver ..., se simplifica casi todo a la derecha del signo igual ¿no? Queda $r \,.\, S_n - S_n = r^{n+1} - 1$.

- Bien. Ahora sólo hay que despejar S_n de esta ecuación. ¿Podrás hacerlo?

- Sí. Me queda $(r-1)\,.\,S_n = r^{n+1} - 1$, y entonces $S_n = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$.

- Te quiero recordar que para hacer el último paso r - 1 debe ser distinto de cero, y esto es así porque habíamos tomado r menor que 1. También podemos escribir esto así: $S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$, y ahora sólo nos queda decir que cuando r satisface que $0 < r < 1$, entonces r^{n+1} se va haciendo cada vez más chico a medida que n crece, de modo que $\dfrac{r^{n+1}}{1-r}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Y así llegamos a que la serie tiende a $\dfrac{1}{1-r}$, como queríamos mostrar.

- Maestro, voy a escribir bien todo para poder revisarlo en mi casa.

- Muy bien. Quizá te gustaría calcular cuánto da la serie geométrica de razón un tercio, o sea $r = \dfrac{1}{3}$. Escribila, por favor.

Y Clara escribió $1 + \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 + \cdots$

Para resolver

Problema 3.6. Calcular cuánto da esta serie, es decir, el valor de la suma total.

- Qué lindo. Nunca pensé que en un ratito iba a poder calcular varias sumas infinitas.

- Bueno, justo éstas que hemos visto se pueden calcular bien, pero otras pueden ser extremadamente difíciles. Hasta ahora, mirando cuánto van dando las sumas parciales, pudimos intuir o vislumbrar si la seria tiende a infinito o no.

- ¿Y no siempre es así?

- No, Clara, para nada. Lo veremos ahora mismo. Analizaremos una serie que es bastante distinta de las anteriores, por lo que deberás estar muy atenta. En lugar de tomar los números naturales, tomemos sus inversos, y consideremos la sucesión que forman, que la escribimos así:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Como siempre, los puntos suspensivos indican que sigue indefinidamente. También se puede describir como la sucesión $\dfrac{1}{n}$ donde n varía en el conjunto de los números naturales. El primer término es $\dfrac{1}{1}$, el segundo, $\dfrac{1}{2}$, el tercero, $\dfrac{1}{3}$, y en general, el término n-ésimo es el número $\dfrac{1}{n}$, para cada número natural n. ¿Alguna pregunta?

- No, está clarito cuál es la sucesión.

- Bien. Ahora pensemos en la serie, conocida como serie armónica. Es decir:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$ ***la serie armónica***

Comencemos a calcular las llamadas sumas parciales de la serie, que van dando los siguientes números: primero el 1; segundo tenemos 1 + 1/2 = 3/2; luego hacemos 1 + 1/2 + 1/3, que da 11/6; continuamos con 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 25/12; etc. Apuntamos a saber si tiende a infinito o a algún número finito.

- Maestro, ¿se puede hacer alguna de las manipulaciones algebraicas de la clase pasada para tener una expresión de las sumas parciales?

- No, que yo sepa. Por eso, esto se presenta, a priori, como difícil. Primero vamos a analizar la serie *numéricamente*, es decir, calculando cuánto van dando aproximadamente las sumas parciales, y tratando de ver si crecen mucho o no.

- ¿Saco mi calculadora, Maestro?

- Sí, claro, la vamos a usar, y también necesitamos una computadora, aunque me temo que no serán suficientes- comentó el Maestro en voz apenas audible-. Comencemos, Clara. Al principio las sumas parciales van creciendo relativamente a buen ritmo a medida que sumamos los términos. Al comenzar, pasamos de 1 a 3/2, o sea, a 1,5, luego al $\frac{11}{6} \cong 1{,}833$, luego a $\frac{25}{12} \cong 2{,}0833$. Pero cuando ya hemos sumado muchos términos, al sumar el siguiente no logramos modificar mucho la suma. Por ejemplo, el término número 1.000 es 1/1.000, o sea, 0,001. De modo que sólo modificamos la suma en el tercer dígito después de la coma. Si pensás en el millonésimo término, el número a sumar será 1/1.000.000, o sea 0,000001, que es muy pequeño, y sólo modificarás el sexto dígito a la derecha de la coma, ¿estás de acuerdo?

- Sí. Se está complicando, pero creo que lo entiendo. Siga, Maestro, por favor.

- Si sumamos los diez primeros términos, tenemos 1+1/2+1/3+1/4+...+1/10. ¿Por favor, podés calcular su valor numérico aproximado?

Usando velozmente su calculadora, Clara respondió:

- Da 7.381/ 2.520, que es aproximadamente 2,928968254.

- Bien. Aumentó, pero no mucho. Si seguimos sumando, tantos términos como queramos, ¿hasta dónde podremos llegar? ¿Podremos superar cualquier número grande, por más grande que éste sea? Por ejemplo, ¿podremos alcanzar el 10? ¿Y el 100? ¿Qué te parece? Dicho de otro modo, la gran pregunta es si esta serie tiende a infinito o no.

- Parece muy interesante. Pero no lo sé. Esto es nuevo para mí.

- Es verdad. Tenés que tomarte tu tiempo para asimilarlo. Recordá que lo que tenemos es una tira muy larga de números, tan larga, que no termina, y que los debemos ir sumando, ordenadamente. Y tenemos que intentar deducir si esa suma puede llegar a superar el número 100 o no.

- Maestro, entiendo la pregunta. Pero tengo que hacer muchas cuentas para ver qué va sucediendo con esta serie.

- Clara, no es difícil escribir un programa que haga estas sumas. Sólo lleva unas pocas líneas. Por ejemplo:

> *n* := 10 (*n* representa la cantidad de términos que vamos a sumar)
> sum := 0
>
> Para *j* desde 1 hasta *n* hacer sum := sum + $\frac{1}{j}$
> mostrar el valor de “sum”
> mostrar el valor de “sum” en notación decimal.

Clara escribió el programa (de sólo cinco líneas) en su computadora.
- Hagamos correr el programita -dijo el Maestro.

- La respuesta en la pantalla es: 7.381/ 2.520 ≅ 2,928968254.

- Debemos interpretar el resultado así: los primeros diez términos de nuestra serie suman 7.381/ 2.520 que es igual, o aproximadamente igual, a 2,928968254. Ahora, simplemente cambiando el valor de *n* en la primera línea del programa, por ejemplo de 10 a 100, obtendremos el valor de la suma parcial de los primeros cien términos de la serie armónica. ¿Querés hacerlo Clara?

Clara puso *n*=100 y obtuvo la respuesta
14.466.636.279.520.351.160.221.518.043.104.131.447.711 /
/ 2.788.815.009.188.499.086.581.352.357.412.492.142.272 igual (aprox.) a 5,187377518

Luego, fueron calculando los valores aproximados de las sumas parciales para los primeros 1.000 términos, los primeros 10.000 y el primer millón de términos. Al principio, la computadora respondió rápidamente, pero luego empezó a demorarse bastante. Se dieron cuenta que tardaría mucho intentar con 10 millones. Escribieron los resultados en una tabla:

cantidad de términos	10	100	1.000	10.000	100.000	1millón
valor suma parcial	2,92896	5,18737	7,48547	9,78760	12,0901	14,3927

- Tarda mucho, Maestro. Y solo hemos logrado sumar algo menos que 15, con el primer millón de términos.... ¡Es poquísimo!

- Me alegro que hayamos escrito el programita y la tabla, Clara, aunque los resultados en este caso no nos permiten saber la respuesta, ni siquiera intuirla.

- Mirando la tabla no soy capaz de decir nada, porque le está costando muchísimo crecer. Superó el 10, pero está lejísimos del 100. Aunque la serie sigue creciendo un poco, creo que no vamos a poder contestar su pregunta Maestro.

- ¡Podremos Clara! Esta es otra maravilla de la matemática. Es capaz de mostrarte cosas que parecen muy difíciles, pero cuando encuentras un buen camino, se tornan sencillas. Como ves, en este caso el conocimiento de las primeras sumas parciales no nos ha servido de mucho. Seguimos desorientados. Pero una idea ingeniosa nos dará la respuesta de si la serie armónica tiende a infinito o no. ¿Qué crees que ocurre?

- Crece muy poco, parece que no va a tender a infinito, pero realmente no lo sé.

- Mirá, si sumamos el tercer término y el cuarto término, da algo que es mayor que $\frac{1}{2}$, pues $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, luego $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Hacemos lo mismo con los siguientes cuatro términos. Sabemos que $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, por lo tanto tenemos que $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. ¿Te das cuenta cómo va funcionando?

- Más o menos.

- Espero que el siguiente gráfico sea muy ilustrativo:

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}+\cdots$$

Si vas juntando los términos de a dos, de a cuatro, de a ocho, de a dieciséis,…, siempre se consigue sumar por lo menos un medio.

- Ahora lo entiendo ¡Qué bárbaro, Maestro! Entonces llega a 100!

- Sí. La suma supera el cien, y también el mil, y también el 10 mil, etc. Por lo tanto, esta serie tiende a infinito. Como vimos, lo hace muy lentamente, pero lo hace. ¿Te ha sorprendido la *demostración*?

- Sí, no me la esperaba. Ahora, ¿no es raro, Maestro, que sume tan poquito, y sin embargo se agrande tanto como queramos?

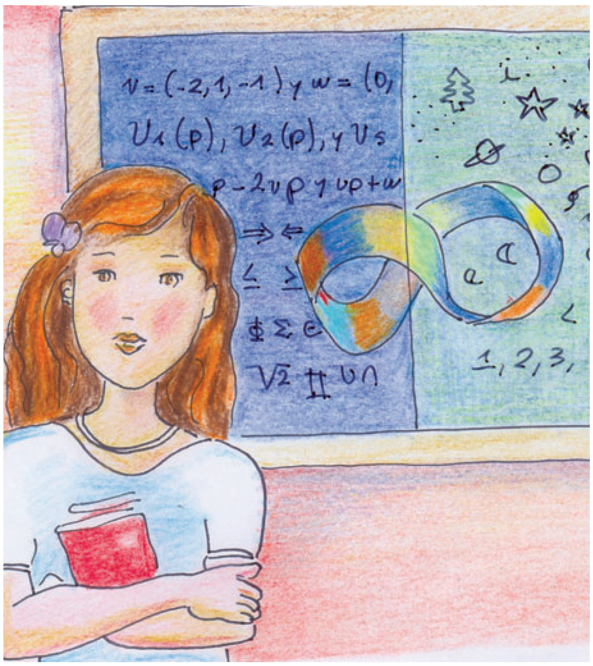
- Sí, es un caso bastante especial. Pero fijate que son infinitos términos. Si bien se van haciendo muy chiquitos, ellos alcanzan para sumar mucho, como vimos. Esta serie armónica es una de las series más interesantes que hay.

Problema 3.7. Hallar un número *n* tal que la suma de los primeros *n* términos de la serie armónica sea mayor que 25.

[Ayuda: juntar 50 pedacitos de la serie como en el dibujo, de modo que cada uno sume un medio o mayor que un medio.]

Para resolver

3.6. ¡Los números racionales son numerables! ... ¿y los reales?



- Antes de comenzar, Clara, te propongo que llamemos *numerable* a cualquier conjunto cuyos elementos se puedan numerar como primero, segundo, tercero, cuarto, quinto,…, y de ese modo se llegue a numerar o nombrar a todos sus elementos, es decir, un conjunto coordinable con el conjunto de los números naturales **N**. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros **Z** es numerable.

Definición. Un conjunto se dice numerable si es coordinable con **N**, es decir, si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números naturales y sus elementos

La palabra “numerable” tiene sentido para un conjunto coordinable a **N**, porque a través de la correspondencia biunívoca entre **N** y el conjunto, se puede hacer una lista con los elementos del conjunto, que comienza y no tiene fin, donde van apareciendo todos los elementos de dicho conjunto. Si alguien fuera leyendo en voz alta la lista, entonces estaría *nombrando* a todos los elementos del conjunto. ¿Se entiende? A ver, ¿podrías decir otro conjunto numerable que no sea **N** ni **Z**?

- Eh… sí. Vimos que los naturales pares eran así, ¿no es cierto?

- Sí, así es. Hoy y la clase que viene me gustaría que conversáramos sobre algo verdaderamente nuevo para vos. Primero, quiero que nos introduzcamos en los números racionales (o fraccionarios), y que averigüemos si se los puede enumerar a todos. Luego, con cierta audacia, iremos por los números reales. Nos vamos a encontrar con que no es posible nombrar uno por uno a todos los números reales, o dicho en otras palabras, que el conjunto **R** *no es numerable*, lo que significa que no es coordinable con el conjunto **N**.

- Bien, Maestro. Ojalá pueda entender todo lo que ha dicho, que parece muy interesante.

- Estoy seguro que sí. No sólo eso, sino que tengo la esperanza de que termines maravillada por la importancia y la belleza de los resultados que veremos hoy.

Clara sonrió ante estas palabras. Si bien apreciaba mucho estas clases, le resultaba difícil creer que le podría pasar lo que el Maestro esperaba.

- ¿Le parece, Maestro, que estos resultados son *bellos*?

- ¡Por supuesto! Comencemos ahora mismo. Recordemos que los números fraccionarios son de la forma $\frac{m}{n}$ donde m y n son números enteros, y n es distinto de cero. También se los llama *números racionales*, y se denotan con una **Q**. Por ejemplo, tenemos $\frac{2}{3}, -\frac{24}{7}, \frac{7}{5}, \frac{6}{1}$, etc. Si tomamos $n = 1$, entonces $\frac{m}{n}$ no es otra cosa que un número entero. Esto nos muestra que los enteros son racionales, o equivalentemente, que el conjunto de los números enteros está contenido en el de los números racionales. En símbolos podemos escribir $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. De este modo, está claro que hay infinitos racionales, ¿verdad? Ahora, una pregunta muy interesante es si los números racionales son numerables o no. Es decir, si **Q** es un conjunto coordinable a **N** o, si por el contrario, no existe una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, en cuyo caso, resultaría ser mayor en cardinal, o sea, card **Q** > card **N**. Es la misma pregunta que nos planteamos hace tiempo entre **Z** y **N**, ¿te acordás?

- Sí me acuerdo, Maestro.

- Bien. Claro que el conjunto **Q** es muy distinto a los anteriores en algunos aspectos. Mientras que los números enteros están espaciados por intervalos de longitud uno, los racionales están por todas partes, son increíbles, se meten en todos los intervalos. Si realizamos la representación usual de los números reales en una recta, entonces no importa en qué punto de la recta te pares, tendrás números racionales tan cerca como quieras.

- La verdad es que **Q** parece mucho más grande que **N**. Si pienso, por ejemplo, solamente en los medios enteros, o sea 1/2, 2/2=1, 3/2, 4/2=2, 5/2,…, parece que se corresponden con los naturales, ¿no es así? Y solamente he usado los que tienen denominador igual a 2. Después, puedo pensar en los que tienen denominador igual a 3, luego los con denominador 4, etc. Pero creo que con esto todavía no voy a poder contestar su pregunta.

- Está muy bien tu observación, Clara. De modo que una parte de **Q** -los racionales con denominador igual a 2- es coordinable a todo **N**. Pero como señalaste, eso no contesta la pregunta, porque lo mismo sucedía con **Z**, que resultó ser numerable. Si me dejás que te ayude, te diría que intentaras *nombrar* a todos los números racionales. Es decir, que hagas una lista ¡donde vayan apareciendo todos!

- Me está diciendo que trate de ver que **Q** es numerable. ¡Es sorprendente!

- Así es. Lo que estamos diciendo, es que es posible dar una lista -infinita, por cierto- con todos los números racionales. Al principio, asombra que puedas poner tantos números en una lista, pero si se piensa mejor, no hay mucha diferencia con el Hotel Hilbert, donde el conserje era capaz de "meter" todos esos contingentes de infinitas personas en las habitaciones del hotel. Los contingentes serían como los números racionales, cada contingente un denominador distinto, y las habitaciones del hotel como los números naturales.

- Es un problema muy lindo, Maestro, y en este caso, me gustaría verlo bien, o como a usted le gusta decir, ver una "demostración".

- Excelente. Esa es la forma en que realmente vas a entenderlo. Antes de escribir la correspondencia biunívoca entre **N** y **Q**, sería mejor hacerla entre **N** y $\mathbf{Q}^+$, los números racionales positivos. Luego, veremos sin dificultad que $\mathbf{Q}^+$ y **Q** son coordinables, y de las dos cosas resultará que **N** y **Q** son coordinables. ¿Estás de acuerdo?

- Creo que sí.

- Bien. Entonces ayudame a hallar un modo de nombrar a todos los racionales positivos, uno por uno, sin que nos olvidemos de ninguno. Hagamos un cuadro bien grande, con filas y columnas. Primero ponemos los números 1, 2, 3, 4, … en la fila de arriba y también en la columna de la izquierda. Estos números serán los que encabezan las filas y columnas. Luego, en cada lugar del cuadro ponemos una fracción, cuyo numerador es el número que está encabezando la columna y el denominador el número que está encabezando la fila. Fijate, Clara, que en el cuadro van apareciendo todos los racionales positivos. Por ejemplo, el $\frac{7}{3}$ está en la tercera fila y séptima columna. Si te digo el $\frac{12}{2.009}$ ¿dónde estará?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	…
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	…
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	…
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	…
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	…
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	…
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	…
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	…
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Clara pensó un poco. Este número no aparecía en el cuadro que habían dibujado, porque no entraba en el pizarrón. Entonces dijo:

- El $\frac{12}{2.009}$ se encontraría en la decimosegunda columna y en la fila 2.009. Aunque no lo hayamos escrito, es como si estuviera ahí.

- ¡Bien! Dije $\frac{12}{2.009}$ pero podría haber dicho cualquier otro número racional positivo. De modo que todos ellos se encuentran en este cuadro infinito. Por supuesto que hay repeticiones. Por ejemplo, en la diagonal, encontramos siempre $\frac{m}{m} = 1$, son todos unos. Pero lo importante para nosotros no son estas repeticiones, sino que en el cuadro están todos los racionales positivos. Ahora, ¿habrá alguna forma de nombrarlos? Es decir, ¿cómo se podría organizar la tarea de ir nombrando a todos, uno por uno?

- A ver…. si voy nombrando los medios enteros, o sea, los de la segunda fila, creo que voy a estar en problemas, porque la fila no se termina nunca, y todavía no he empezado a nombrar los números de la tercera fila, o sea los "tercios", ni los "cuartos" de la cuarta fila, etc. Por eso, estoy pensando si lo puedo hacer de otra forma.

- Vas a poder. Lo que tenés que evitar es quedarte en una fila o en una columna.

- Quizás… si voy nombrando primero el $\frac{1}{1}$, después el $\frac{2}{1}$ y el $\frac{1}{2}$, luego $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ y $\frac{1}{3}$, y sigo así, ¿podría ser?

Clara marcó diagonales en el cuadro, unas iban desde abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha y otras en sentido opuesto. El maestro sonrió gratamente y dijo:
- Sí. Comenzás desde el primer lugar, luego pasás a la primera fila segunda columna y recorrés la diagonal que señalaste, luego vas a la tercera fila primera columna y subís por tu diagonal, y así seguimos. Cada vez que se termina una diagonal, continuamos por la siguiente, alternando el modo de recorrerla. ¡Ésta es una forma de ir nombrando todos los números del cuadro!

- ¡Qué lindo!

- Si no hubiera repeticiones, ya habríamos demostrado que $\mathbf{Q}^+$ es numerable.

- Pero ¿qué pasa con los repetidos? -preguntó Clara queriendo entender esto-. ¿Como sería la correspondencia biunívoca?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$\cdots$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\cdots$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\cdots$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\cdots$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\cdots$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$\frac{9}{8}$	$\cdots$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

- Bueno, los repetidos no son importantes, aunque molestan, es verdad. Pero vamos a sacárnoslos de encima. Una forma de establecer la correspondencia biunívoca que buscamos, es nombrar todos los racionales, por las diagonales, como lo estábamos haciendo, pero ahora *sin repetirlos*. Es decir, simplemente tenemos que saltear los que se repiten. Cada vez que llegamos a una casilla de nuestro cuadro con un número racional, antes de nombrarlo en voz alta, debemos verificar que no lo hayamos nombrado antes. Recuerda para este fin que

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$; también $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \ldots$, etc.,

de modo que si bien es una tarea fácil, no es inmediato decidir si un número ya apareció antes o no. Pero puede hacerse, y sólo requiere unas cuantas comparaciones. ¿Lo entendiste, verdad? ¿Podrías nombrar los primeros racionales de nuestra lista sin repeticiones?

- Sí. A ver. 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ahora no pongo el $\frac{2}{2}$ porque es 1, que ya está, así que sigo con 3, 4, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, (salteo el $\frac{2}{4}$, lo mismo que al $\frac{3}{3}$ y al $\frac{4}{2} = 2$) sigo con 5, 6, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, ¿sigo? Ya me estoy cansando.

- No es necesario que sigas. Ya hemos tenido una muestra, pequeña pero suficiente, de cómo se pueden ir nombrando todos los racionales positivos, eventualmente a cada número le llegará su turno.
Hay un gran teorema matemático, llamado *Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder*, que permite ahorrar inconvenientes como el de las repeticiones, y muchísimos más. Es de gran importancia y utilidad. Primero voy a tratar de mostrártelo intuitivamente, y luego lo podremos enunciar formalmente. Ahora, recordemos esto: si tenemos dos conjuntos A y B que satisfacen que A está contenido o es igual a B, y a su vez B está contenido o es igual a A, entonces, ¿cómo deben ser A y B ?

- A y B tienen que ser iguales -contestó Clara.

- Por supuesto. En símbolos, si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Lo que nos dice el teorema es una variación, más general y sutil, de lo anterior. En lugar de tener como hipótesis $A \subseteq B$, vamos a suponer que hay asignación de A en B que no repite elementos. Es decir, a cada elemento de A se le asigna (o se le hace corresponder) un elemento de B, y no se le puede asignar el mismo de B a dos elementos distintos de A. Es como estar "metiendo" el conjunto A en B, a través de dicha asignación ¿no te parece?

- Sí, pero todavía no sé qué dice el gran teorema.

- Paciencia, Clara. La otra hipótesis que cambiamos es la de $B \subseteq A$ por la de que haya una asignación de B en A que no repita elementos de A, es decir, a cada elemento de B se le asigna uno de A, y a elementos distintos de B se les asignan elementos distintos de A. Si tenemos estas dos hipótesis, ¿cuál será la conclusión del teorema?

- Lo estoy pensando.

- Bien. En otras palabras, lo anterior es equivalente a decir que de nuestros conjuntos A y B sabemos que A es coordinable a una parte de B, y que B es coordinable a una parte de A. ¿Qué te parece que ocurre entonces? ¿Cómo son A y B ?

- Bueno, al principio es como si A fuera más chico que B, pero después es como si B fuera más chico que A, así que creo que A y B son iguales.

- ¿A qué te referís con "iguales"? ¿Querés decir coordinables?

- Sí, claro, quiero decir que A y B tienen que ser coordinables.

- ¡Bravo! Lo comprendiste. Ésta es una de las formas de enunciar el teorema, hay muchas más. No vamos a hacer una demostración formal del mismo, pero lo vamos a usar, por ejemplo, para demostrar nuevamente que $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Q}^+$ son coordinables. A pesar de que no hemos enunciado todas las versiones de este teorema, me gustaría remarcarte lo esencial: si tenemos dos conjuntos A y B, y hay algún modo de ver que A es "más chico" que B, y otro de ver que B es "más chico" que A, entonces se puede concluir que A y B son coordinables. Me gustaría que intentes aplicar el teorema al caso de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Q}^+$. ¿Te animás?

Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder. Si A y B son conjuntos tales que A es coordinable a una parte de B y B es coordinable a una parte de A, entonces A y B son coordinables, o lo que es lo mismo, card A = card B.

- Sí, pero no sé si voy a poder completar la demostración.

- Vas a ver que sí.

- Bueno, lo intento. Hay una forma natural de meter los naturales en los racionales positivos, así que ya sabemos que es como si **N** fuera más chico que $\mathbf{Q}^+$. Después, el recorrido que hicimos de las diagonales del cuadro nos dice que es como si **N** fuera "más grande" que $\mathbf{Q}^+$, ¿verdad?

- Sí. Continúa

- Entonces, según lo que dijo usted sobre lo esencial del teorema, tenemos que **N** y $\mathbf{Q}^+$ son coordinables.

- Lo has hecho muy bien. Ahora te dejo un problema para que pienses en tu casa, con él se completa la demostración de que **N** y **Q** son coordinables.

Para resolver

Problema 3.8. Hallar una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números racionales **Q** y el conjunto de los racionales positivos $\mathbf{Q}^+$.

[Ayuda: considerar una numeración q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, ... de $\mathbf{Q}^+$, luego **Q** consiste del 0 y de $\pm\, q_j$, con j = 1, 2, 3, 4, 5, ...]

El Maestro estaba contento de ver cómo Clara lograba completar algunas demostraciones complicadas. Luego de una pausa continuaron.

- Ahora, veamos otras formas de expresar el resultado de que **Q** es numerable. Creo que te gustarán. Una forma es mostrando que "la unión numerable de conjuntos numerables es numerable".

- ¿¡Cómo es eso!? -dijo Clara confundida, casi quejándose por lo difícil que le sonaba lo enunciado.

- Te acordás de la unión de conjuntos, ¿verdad? Si consideramos dos conjuntos numerables A y B, entonces su unión, $A \cup B$, también será numerable. Es decir, si hay una forma de ir nombrando los elementos de A, y otra de nombrar los de B, entonces habrá una forma de nombrar todos los elementos que estén en cualquiera de esos dos conjuntos. ¿Estás de acuerdo?

- Sí, eso lo entiendo bien. Por ejemplo, puedo ir nombrando primero el primer elemento de A, después el primer elemento de B, luego el segundo elemento de A, sigo con el segundo de B, ahora el tercero de A, el tercero de B, y así sigo.

- Bien, Clara. En símbolos, podríamos ponerlo así: si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...\}$, entonces a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, ... es una forma de nombrar todos los elementos de la unión de A y B. Nuevamente, podemos tener el problema de las repeticiones, puesto que puede haber elementos en A y en B simultáneamente que estaríamos nombrando dos veces. Pero eso se arregla, como lo hicimos con las repeticiones en $\mathbf{Q}^+$ en el cuadro.

Lo que te estaba diciendo antes, era que si en lugar de hacer la unión de sólo dos conjuntos numerables A y B, hacemos la unión de tres, cuatro, o de una lista infinita de conjuntos numerables A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; ... entonces esta unión también será un conjunto numerable.

- Ahora sí entiendo lo que quiere decir.

La unión finita o numerable de conjuntos numerables es numerable.

- No es difícil demostrar esta afirmación. En rigor de verdad, ya lo hemos hecho, sólo que puede haber pasado desapercibido porque no era exactamente eso lo que estábamos demostrando, sino algo análogo. En este caso, Clara, podemos proceder con las diagonales del cuadro ¿te acordás?

- Bueno. Voy a pensar que los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ..., son todos numerables, y tengo que ver que puedo numerar la unión de estos conjuntos. Entonces voy a dibujar un cuadro como el que hicimos antes. En la primera fila pongo los elementos de A_1, en la segunda los de A_2, en la tercera los de A_3, etc. Ahora, si los voy nombrando como hicimos antes con el cuadro de $\mathbf{Q}^+$, creo que voy a nombrar a todos los elementos, ¿no?

- Sí, muy bien. Veo que has entendido que la unión de conjuntos numerables es numerable, cuando tenés una lista de conjuntos, o sea, una cantidad finita o infinita numerable de conjuntos a unir. Es un resultado que puede sorprender. Entusiasmados, podríamos llegar a pensar, erróneamente, que todos los conjuntos son numerables. Pero pronto veremos que el conjunto de los números reales, **R**, no lo es. Por consiguiente, tendremos al menos dos tipos distintos de infinitos, el llamado *infinito numerable*, que corresponde a la cantidad de números naturales, y un nuevo infinito, correspondiente a la cantidad de números reales, a veces llamado el *continuo*, que es más grande que el anterior. Ya los hindúes distinguían entre estos dos tipos de infinito ¡hace más de dos mil años!

- ¡Qué interesante! ¿Cuándo veremos el infinito de los números reales?

- La semana que viene, Clara. Mientras tanto, podés tratar de resolver los siguientes problemas. ¡Adiós!

Para resolver

Problemas. Ayudar a Clara a resolver los siguientes problemas.

Problema 3.9. Probar que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.

[Nota: dados dos conjuntos A y B se define el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto de los pares ordenados (a, b), donde a pertenece a A y b pertenece a B. En símbolos: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.]

[Ayuda: escribir una numeración de A y otra de B y hacer un cuadro como el que se hizo para $\mathbf{Q}^+$.]

Problemas más avanzados.

Problema 3.10. Si se hace el producto de 3 conjuntos numerables, ¿es numerable también? [Ayuda: $A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$ se puede pensar también como $(A \times B) \times C$.]

Problema 3.11. Mostrar que el *producto finito de numerables es numerable*. Es decir, mostrar que el producto cartesiano de una cantidad finita de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

Problema 3.12. Demostrar que el conjunto de los polinomios de grado 2 con coeficientes enteros es numerable.

[Ayuda: estos polinomios son de la forma $a \,.\, x^2 + b \,.\, x + c$, donde a, b y c son enteros, $a \neq 0$. De modo que están totalmente determinados por los valores de a, b y c.]

Problema 3.13. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros son numerables.

[Ayuda: este conjunto consta de los polinomios de grado 0, 1, 2, 3, 4,… por lo tanto es la unión de conjuntos como el del problema anterior, que es numerable.]

Problema 3.14. Demostrar que el conjunto de los números algebraicos, **A**, es numerable.

[Nota: los números algebraicos son las raíces de polinomios con coeficientes enteros. Contienen a los números racionales, es decir $\mathbf{A} \supset \mathbf{Q}$, pues todo racional $\frac{m}{n}$ es raíz del polinomio de primer grado $n \,.\, x - m$ en la variable x. Además, por ejemplo, $\sqrt{2}$, que no es racional, también es un número algebraico, pues es raíz de $x^2 - 2$, que es un polinomio de segundo grado con coeficientes enteros.]

[Ayuda: se sabe que un polinomio de grado n, con $n \in$ N, tiene a lo sumo n raíces. Probar primero que los números algebraicos que son raíces de polinomios de grado n, con n fijo, son numerables. Luego notar que el conjunto de los números algebraicos es la unión, variando n, de los algebraicos que son raíces de un polinomio de grado n.]

3.7. ¡Los números reales no son numerables!

- Clara, hoy es un día importante, veremos que hay más de un tipo de infinito en esta teoría de cardinalidad que estamos considerando. Demostraremos que los números reales no son numerables. Primero, con un argumento que involucra longitudes de intervalos. Más adelante, con otras dos maneras de demostrar el mismo hecho, que los reales no son numerables, y entonces vas a poder elegir cuál es la que más te gusta.

- Me conformaría con entender una, Maestro.

- Bien. En esta primera demostración, además de los intervalos, necesitaremos usar el argumento llamado “reducción al absurdo”, que consiste en suponer que la afirmación que se quiere demostrar es falsa, y a partir de ahí llegar mediante razonamientos válidos a algo absurdo, a una contradicción. Entonces la afirmación no podía ser falsa, y por lo tanto se concluye que la afirmación debe ser verdadera. ¿Lo entendés?

- Más o menos.

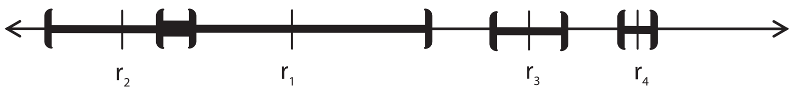
- Clara, cuando lo usemos en ejemplos concretos, lo aprenderás en seguida. Hay un punto muy sutil al final del razonamiento que generalmente pasa inadvertido. En ese último paso del razonamiento se está usando el llamado *principio del tercero excluido*, que dice que entre una afirmación y su negación una de las dos debe ser verdadera. Si bien casi todos aceptan este principio, algunas personas lo cuestionan. Nosotros vamos a aceptarlo, porque es lo más razonable, y además, nos permite avanzar mucho. Pero te repito que podés olvidarte de todo esto, porque si bien suena complicado en abstracto, será sencillo usarlo.

- Espero que sí. ¡Sigamos!

- Bien. Supongamos que los números reales son numerables. O sea, que hay una enumeración r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, ... de los mismos. En ella aparecen todos los números reales sin repetirse. Entonces, le asociamos alrededor de cada número r_j un pequeño intervalo en la recta real, moviéndonos a partir de r_j un espacio de longitud $\frac{1}{2^j}$ hacia la izquierda y lo mismo hacia la derecha. O sea, estamos tomando el intervalo de los números reales *x* que satisfacen $r_j - \frac{1}{2^j} < x < r_j + \frac{1}{2^j}$, es decir, el intervalo de la forma $\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right)$, para cada j = 1, 2, 3, 4, 5,.... La longitud de cada pequeño intervalo es el doble de $\frac{1}{2^j}$, o sea $2 \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{j-1}}$. Fijate que, de acuerdo a nuestra suposición inicial, todo número real pertenece por lo menos a uno de estos intervalos, puesto que todo número real es un r_j para algún j, y obviamente r_j pertenece al intervalo $\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right)$. Por consiguiente, toda la recta real está contenida en la unión de estos pequeños intervalos. ¿Estás de acuerdo?

- Sí, pero tengo dudas sobre cómo es la unión de los intervalos.

- Es simplemente la unión de ellos como conjuntos. Podés unir tantos intervalos como quieras. En este caso hay una cantidad numerable de intervalos a unir, y su unión da toda la recta real. En símbolos lo podríamos expresar así: $R = \bigcup_{j \in N} \left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right)$, donde el símbolo $\bigcup$ significa unión, y debajo de él, $j \in \mathbf{N}$, significa que j varía tomando todos los valores de los números naturales. Por otra parte, la longitud de la unión de dos intervalos cualesquiera, es menor o igual que la suma de las longitudes de cada uno de ellos. Por ejemplo, en este dibujo



ocurre que la longitud de la unión de los intervalos alrededor de r_1 y de r_2 es estrictamente menor que la suma de las longitudes de dichos intervalos, mientras que la longitud de la unión de los intervalos alrededor de r_3 y r_4 es igual a la suma de las longitudes de estos intervalos. En símbolos:

$$\text{long}\left(\left(r_1 - \frac{1}{2}, r_1 + \frac{1}{2}\right) \cup \left(r_2 - \frac{1}{2^2}, r_2 + \frac{1}{2^2}\right)\right) < \text{long}\left(r_1 - \frac{1}{2}, r_1 + \frac{1}{2}\right) + \text{long}\left(r_2 - \frac{1}{2^2}, r_2 + \frac{1}{2^2}\right)$$

De este modo, la longitud de la unión de todos los intervalos es menor o igual que la suma de todas las longitudes, o sea, que la suma de los números $\frac{1}{2^{j-1}}$, para $j = 1, 2, 3, 4,\dots$ ¿Sabés cuánto da esta suma?

- ¿Cómo es lo que hay que sumar?

- Simplemente $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$

- ¡Ah! ¡Esto da 2! Lo vimos después de "Aquiles y la tortuga".

- Sí, claro. También vimos que era la serie geométrica de razón un medio. Lo importante es que da un número finito. Volviendo a los pequeños intervalos, estamos mostrando que la longitud de la unión de todos ellos no supera al 2. ¿No te parece que hay algo extraño?

- A ver… la suma da 2, pero al mismo tiempo estos intervalos cubren la recta de los números reales, ¿no? Entonces sí hay algo raro. ¡Muy raro!

- Por un lado, la longitud de la unión debería ser igual a la longitud de la recta real, que como sabés no es finita. Por otro lado, recién dijimos que la longitud de esta unión es menor o igual que 2. O sea que algo tan largo como la recta real nos ha dado menor que dos. Esto es un absurdo. ¡Una contradicción! Escribámoslo en símbolos, así no nos quedan dudas. Te recuerdo que el símbolo Σ significa suma o sumatoria:

$$\operatorname{long}(\mathbf{R}) = \operatorname{long} \bigcup_{j\in N}\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right) \tag{1}$$

pero

$$\operatorname{long} \bigcup_{j\in N}\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right) \le \sum_{j\in N} \operatorname{long}\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in N} \operatorname{long}\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right) &= \sum_{j\in N} \frac{1}{2^{j-1}}\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\\ &= 2\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\operatorname{long} \bigcup_{j\in N}\left(r_j - \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{2^j}\right) \le 2 \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta long (**R**) <= 2. Esto es absurdo, puesto que la longitud de **R**, la recta real, es mayor que dos. ¿Estás de acuerdo, Clara?

- Sí, claro, pero… ¿por qué pasa esto, Maestro?

- Esta contradicción se produjo, justamente, por haber supuesto que los números reales eran numerables. Por lo tanto, ¡los reales no pueden ser numerables! De modo que estamos frente a un nuevo tipo de infinito, mayor al infinito de los números naturales, o sea mayor al infinito de los conjuntos numerables. ¿Qué te parece?

- Me gusta. Creo que entendí lo del "ab-sur-do". ¡Estoy contenta por aprender esto!

- Bien. Ahora, sabemos que **N** y **R** son ambos infinitos pero no son coordinables, es decir que card **N** < card **R**. Esto nos invita a hacer nuevas preguntas, nos abre el universo de "los infinitos".

- ¿Hay otros infinitos?

- Hablaremos de eso en otra clase, Clara. Hoy, para terminar, te contaré sobre la pregunta o el problema más famoso en este tema, llamado la *hipótesis del continuo*[2]. Sabemos que card **N** < card **R**, ¿verdad? Entonces naturalmente surge la inquietud: ¿Existirá algún conjunto cuyo cardinal esté entre medio de estos dos? ¿La entendés?

- Creo que sí.

- Hemos visto, por ejemplo, que el conjunto de los números racionales **Q** está "entre" **N** y **R** y tiene el mismo cardinal que **N**. Si empezás a pensar en conjuntos candidatos a contestar afirmativamente la pregunta, pronto verás que todos tienen cardinal igual al de **Q** o al de **R**, pero nunca entre medio de los dos. Veamos otro ejemplo, el conjunto de los números algebraicos, **A**, ¿cómo era su cardinal?

- Vimos que era el mismo que el de **N**.

- Bien, y eso que a primera vista **A** parece ser un conjunto muy grande, y cuesta encontrar números reales que no sean algebraicos. En los problemas, tendrás que demostrar que el conjunto de los números irracionales tiene el mismo cardinal que el de **R**. La *hipótesis del continuo*, Clara, afirma que no puede existir un conjunto cuyo cardinal esté entre el de **N** y el de **R**. Cantor -el creador de la teoría de cardinales que estamos estudiando- intentó demostrarla durante mucho tiempo, pero no lo consiguió. Nadie lo ha logrado, ni tampoco se ha podido mostrar lo contrario.

- Debe ser entonces un problema muy difícil.

Hipótesis del continuo: no existe un conjunto Y cuyo cardinal esté estrictamente entre el de **N** y el de **R**, es decir, que cumpla que card **N** < card Y < card **R**.

- Sí. Es más difícil de lo que se pensó originalmente, *demasiado* difícil -el Maestro enfatizó la palabra demasiado, lo que hizo pensar a Clara que se trataba realmente de algo excepcional-. Es tan difícil que…

Y se hizo un silencio por unos segundos, que a Clara le pareció larguísimo, luego el Maestro dijo:
- ¡Es una pregunta imposible de contestar!

- ¿Cómo? ¿En serio? ¿Por qué?

- Se debe a ciertos resultados muy profundos de la lógica matemática. Kurt Gödel demostró, a mediados del siglo pasado, que siempre habrá afirmaciones *indecidibles*, es decir, que no podrán ser demostradas, ni refutadas, o equivalentemente, que no podremos decidir si son verdaderas o falsas. Tal vez esto nos deje con una sensación de vacío o inseguridad. Sin embargo, podemos asumir una de las dos opciones, que es verdadera, o que es falsa, y en ninguno de los dos casos encontraremos contradicciones. Luego Paul Cohen completó la demostración de que la "hipótesis del continuo" es una de estas "afirmaciones indecidibles".

- Me cuesta entenderlo, Maestro. Yo pensaba que, con tiempo, todas las afirmaciones podrían ser contestadas. ¿No es así?

[2] La **Hipótesis del Continuo** fue formulada en el siglo XIX por el célebre matemático alemán Georg F. L. Cantor, quien también fue el creador de la idea de cardinalidad de conjuntos que estamos siguiendo aquí. En el año 1900, Hilbert propuso éste como el primero en su famosa lista de 23 problemas.

- Te comprendo porque a mí me sucedía lo mismo. Uno tiende a pensar que todo enunciado es susceptible de ser verificado. Pero Gödel dejó boquiabiertos a todos con semejante conclusión. La hipótesis del continuo no es verdadera ni falsa. Notable, ¿no creés?

- Sí, seguro. Entonces Cantor estuvo trabajando muchísimo en algo que jamás iba a poder contestar.

- Así es. Hay que saber que la matemática, maravillosa como es, también puede dar grandes frustraciones, y no solamente por estos casos tan elevados.

- Y además de los cardinales de **N** y **R**, ¿hay otros infinitos?, ¿o eso tampoco se podrá saber nunca?

- ¡Claro que esto se puede saber! ¡Y se sabe! ¡Hay infinitos tipos distintos de infinito! Lo averiguaremos juntos dentro de un par de clases.

- ¡Qué bueno! ¡Hasta la semana que viene!

Clara se fue pensando en lo que había aprendido. Sentía que eran cosas importantes, porque finalmente el infinito comenzaba a retirar ese enorme velo que lo había cubierto durante tanto tiempo, para que ella pudiera admirarlo, y comprender algunos de sus aspectos. Ahora, ya sabía bien que había dos conjuntos infinitos cuyos infinitos eran esencialmente distintos. ¡Y esperaba seguir aprendiendo!

Para resolver

Problema 3.15. Demostrar que el conjunto **I** de los números irracionales no es numerable. [Nota: recordar que todo número real es racional o irracional, y no puede ser ambas cosas a la vez. Es decir, **R** = **Q**∪**I**, donde la unión es disjunta].

[Ayuda: razonar por el absurdo, es decir, suponer que **I** fuera numerable, y llegar a que entonces **R** sería numerable].

Problema 3.16. (Difícil). Demostrar que **I** es coordinable a **R**.

[Nota: esto es en realidad un caso particular de un Teorema que vale para cualquier conjunto infinito D no numerable al que le quitamos un subconjunto B numerable. Es decir, el teorema afima que: si B ⊂ D, siendo B infinito numerable y D infinito no numerable, entonces D – B y D son coordinables].

[Ayuda. Realizar los siguientes pasos:
(i) considerar una numeración b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ... de B;
(ii) considerar otro subconjunto numerable C de D disjunto de B, y una numeración c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ... de C;
(iii) definir una correspondencia biunívoca entre C y B∪C;
(iv) definir la correspondencia de D – B a D mediante la siguiente regla: si el elemento de D – B no está en C, entonces se le asigna el mismo elemento en D; y si está en C, se le asigna el elemento de B∪C de acuerdo a la correspondencia hallada en (iii);
(v) demostrar que la asignación definida en (iv) es una correspondencia biunívoca].

Problema 3.17. Los números reales que no son algebraicos son llamados números *trascendentes*, de modo que **R** es la unión disjunta de los algebraicos y los trascendentes. Demostrar que los trascendentes son coordinables con los reales.

☐ 3.8. El método de la diagonal de Cantor

- Clara, ¿qué te pareció la demostración que hicimos de que los números reales no son numerables?

- Me costó al principio, pero después la entendí. ¡Me gustó!

- A mí también me gusta esa demostración. Es elemental, aunque tiene sus dificultades, porque asume que se pueden identificar totalmente los números reales con los puntos de una recta y aparecen conceptos geométricos, como longitudes de segmentos. Hoy abordaremos el mismo problema, aunque usando otros elementos, como la escritura decimal de los números reales y una idea muy ingeniosa, llamada el **método de la diagonal**. La propuso Cantor y mostró por primera vez que los conjuntos **N** y **R** tienen distintos cardinales. Es posible que te guste más que la demostración anterior.

- ¿Es como las diagonales que usamos para ver que **Q** era numerable?

- No. Ésta es otra diagonal. Es **la diagonal** - dijo el maestro con cierto orgullo por `presentarla'-. Pero es bueno que te acuerdes de las otras porque el cuadro es el mismo. Esta diagonal es una sola, la principal, que comienza en la esquina superior izquierda del cuadro, va hacia abajo a la derecha, y continúa indefinidamente. ¿Estás lista para comenzar?

- Sí, claro. Lo único que me preocupa es que no sé bien lo de la escritura decimal de los números reales que usted dijo que me va a hacer falta.

- No te preocupes. Veremos lo necesario para comprender esta demostración. Comencemos por la idea básica que es tan simple como ingeniosa. Hagamos un cuadro como los anteriores, aunque en principio lo haremos finito, digamos de 4 × 4. Ahora en lugar de completarlo con números racionales o con pares ordenados, como hicimos antes, lo llenamos con símbolos, sólo dos para comenzar: O y X. Es decir, cada lugar o entrada en el cuadro será O o X. Cuando un cuadro esté lleno, nuestra tarea será armar una nueva fila fuera del cuadro, que sea distinta a todas las filas del cuadro. El método de la diagonal nos provee una forma poderosa de hacerlo: se arma una fila que se distingue de la primera fila del cuadro en el primer elemento, de la segunda fila en el segundo elemento, de la tercera fila en el tercer elemento, y de la cuarta en el cuarto. Por ejemplo, en este cuadro 4 × 4, ¿podrías armar una nueva fila como dijimos?

O	X	X	X
X	X	O	O
O	O	O	X
X	O	X	O

- Creo que sí. Tengo que armar mi fila que empiece con X para que sea distinto de O, que es el primer elemento de la primera fila. Después, como en la segunda fila aparece X en el segundo lugar, tengo que poner O. Después pongo X, y al final de nuevo X. Queda así: X O X X. ¿Está bien?

- Muy bien. Ahora quiero que pienses por qué la fila que hiciste es distinta a las filas del cuadro. ¿Puede ser igual a la primera fila?

- ¡No!

- ¿Por qué?

- Porque mi fila empieza con X y la del cuadro con O.

- ¡Bien! ¿Y a la segunda fila del cuadro, puede ser igual?

- No, porque mi fila tiene O en el segundo lugar, y la del cuadro tiene X.

- Así es. En general, la fila armada mediante el método de la diagonal no puede ser igual a ninguna de las filas del cuadro, porque al compararla con la primera fila, sabemos que tienen el primer elemento distinto, al compararla con la segunda, tienen el segundo elemento distinto, y así sucesivamente. De modo que la fila que construiste es distinta a todas las anteriores. ¿Esto también valdría en un cuadro con infinitas filas y columnas en lugar de un cuadro 4×4 como el que dibujamos?

- A ver… sí, creo que sí, ¿por qué no?

- Sí, funciona de la misma manera. Sólo debemos seguir el mismo procedimiento. Ahora, si en lugar de tener únicamente los símbolos O y X tuviéramos más símbolos, por ejemplo, los dígitos decimales ¿funcionaría también? ¿Podrías construir una fila distinta de las demás?

- Sí, y hay más posibilidades para armar mi fila. Con dos símbolos tenía una sola posibilidad de armar la fila en la forma que usted quería.

- Muy bien. Este es el "método de la diagonal", Clara, ¡así de simple!

- ¿Y nos va a servir para algo tan importante?

- Sí, claro. A veces una combinación de ideas simples como ésta, puestas en el orden apropiado, logran grandes resultados Ahora, en lugar de completar los casilleros del cuadro infinito con los símbolos O y X los llenaremos con dígitos, o sea con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Además, en lugar de mirar cada fila como una simple hilera infinita de dígitos, la identificaremos con un número real en el intervalo $[\mathbf{0,1}]$. Si la fila es de la forma $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ ... entonces se identificará con el número real $\alpha = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ ... Recíprocamente, si tenemos un número real α en el $[\mathbf{0,1}]$, es decir, $0 \le \alpha \le 1$, entonces α tiene una expresión o desarrollo decimal de la forma $\alpha = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7 \ldots$, donde $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ son dígitos y los podemos poner en una fila del cuadro, entonces la fila representará al número α. ¿Lo entendés?

- Creo que sí. ¿No importa que no aparezcan en el cuadro el cero y la coma que van al principio del número?

- Bueno, ellos no son necesarios cuando solo estamos hablando de números reales entre 0 y 1. Si sabemos que el número comienza siempre con un cero, la coma, y luego los dígitos, entonces podemos olvidarnos del cero y la coma y escribir solo los dígitos. Vale la pena mencionar que el desarrollo decimal se corresponde con una serie. El dígito a_j que uno ve en el lugar j después de la coma, corresponde a la fracción $\frac{a_j}{10^j}$, y se cumple que α es igual a la suma infinita de las fracciones $\frac{a_j}{10^j}$, es decir $\alpha = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{a_5}{10^5} + \frac{a_6}{10^6} + \frac{a_7}{10^7} + \cdots$.

En un caso extremo, como sería tomar todos los dígitos iguales a 9, esta suma infinita sería la serie geométrica de razón $\frac{9}{10}$, que vimos y sabemos que suma 1. Es decir, se cumple que 0,999999...=1 ¿Te sorprende?

- Sí. Parece mentira que un número empiece con "cero coma" y termine dando uno. Aunque me estoy acostumbrando, Maestro, porque con aquella serie que sumaba 2 también pasaba lo mismo: siempre la suma finita estaba por debajo de 2, pero usted dijo -y me convenció- que daba 2.

- Bien. Pero entonces, ¡el uno tiene dos desarrollos decimales distintos!

- ¡Claro! No me había dado cuenta de eso. Creo que pensaba que cada número tenía una expresión decimal y no más.

- Hay números que admiten dos desarrollos decimales distintos. Otro ejemplo es el $\frac{1}{2}$, ¿cómo se escribe en notación decimal?

- Se escribe como 0,5. Sí. Sin embargo, también vale que $\frac{1}{2} = 0{,}49999999\ldots$ con infinitos nueves.

Casi todos los números reales tienen un único desarrollo decimal y sólo algunos tienen dos. Nunca tienen más de dos. Además, los números que tienen dos desarrollos son aquellos con un desarrollo decimal finito que se corta, como por ejemplo 0,24 , y entonces el otro desarrollo es simplemente cambiar el último dígito no nulo por uno menos y poner infinitos nueves a continuación. ¿Te animás a dar el otro desarrollo decimal de 0,24?

- ¿Puede ser 0,2399999... ?

- Muy bien. De modo que los números que admiten dos desarrollos decimales distintos tienen infinitos nueves a partir de un momento, o infinitos ceros. Pero conviene que dejemos los desarrollos decimales para otra oportunidad, luego te dejaré un lindo problema para tu casa, que será pensar cuáles son los números reales que tienen desarrollo decimal que se corta.

- Lo haré, Maestro, me gustaría entender bien eso.

- Ahora, volvamos al cuadro, llenémoslo con una lista (infinita) de números reales α, β, γ, δ, ε, … , que tienen desarrollos decimales $\alpha = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\ldots$, $\beta = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7$, $\gamma = 0, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6\, c_7\ldots$ y continúan indefinidamente.

De modo que nuestro cuadro infinito representa ahora una sucesión de números reales, cada uno de ellos en el intervalo **[0,1]**. ¿Se podrá elegir otro número real entre 0 y 1 distinto a todos los del cuadro? Esto, Clara, es parecido a lo que te pedí de armar una fila distinta a las del cuadro 4 × 4.

$$\begin{array}{c|cccccc}
\alpha & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\
\beta & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdots \\
\gamma & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots \\
\delta & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & \cdots \\
\varepsilon & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

- Con lo que vimos de la diagonal principal se puede elegir una fila distinta de todas estas, ¿verdad?

- Sí, se puede.

- Y el número real correspondiente a esa fila va a ser distinto a los demás, salvo que justo pase eso raro de los dos desarrollos distintos.

- Dejame que te ayude, Clara. Para armar nuestra fila infinita en cada paso podemos elegir un dígito que sea distinto al de la diagonal y también distinto de 0 y de 9, y así nos aseguramos que la fila construida representará un número distinto de los demás, sin importar lo de uno o dos desarrollos decimales. ¿Estás de acuerdo?

- Sí, aunque después lo voy a pensar de nuevo en mi casa.

- Sigamos con la idea de la demostración. En otras palabras, cada vez que alguien haga una lista α, β, γ, δ, ε, …de números reales en el intervalo **[0,1]** nosotros seremos capaces de encontrar otro número real entre 0 y 1 que no está en dicha lista. En consecuencia, no se puede hacer una lista completa de los números reales del **[0,1]** o, equivalentemente, ¡el **[0,1]** no es numerable!

- ¡Qué bueno! Creo que esta demostración me gusta más que la anterior. Pero, todo el tiempo usamos el **[0,1]**. ¿Cuándo aparece **R**?

- Pensá y te vas a dar cuenta. Si no podés enumerar los números reales del intervalo **[0,1]**…

- ¡Claro! Me podría haber dado cuenta antes. El **[0,1]** está contenido en **R**, así que si no se pueden enumerar los elementos del conjunto más chico, entonces tampoco se pueden enumerar los del más grande.

- Muy bien. Eso es suficiente para completar la demostración de que **R** no es numerable por el método de la diagonal. Voy a agregar sólo una cosa más: para este fin, un intervalo de la recta real como el **[0,1]** y el conjunto **R** completo es como si fueran iguales porque veremos en uno de los problemas que son coordinables entre sí. ¡Adiós Clara!

- Adiós Maestro, hasta la semana que viene.

Para resolver

Problema 3.18. Si los símbolos permitidos son I, O y X, decidir cuál de estas tres filas ha sido obtenida aplicando el método de la diagonal (ver cuadro).

X	I	I	X	O
X	O	O	I	X
O	O	X	I	O
I	O	X	I	X
X	I	X	O	X

(i) O O X I O (ii) X X O O I (iii) O X I O I

Problema 3.19. (a) Hacer el desarrollo decimal de los siguientes números fraccionarios: $\frac{1}{3}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{96}{25}$; $\frac{21}{12}$.
(b) Notar que si al descomponer el denominador los únicos números primos que aparecen son 2 y 5 entonces el desarrollo es finito. Por ejemplo: $\frac{17}{20}$ tiene denominador $20 = 2^2 \times 5$.
(c) En los otros casos el desarrollo es infinito. Cuando en el denominador aparece un factor primo distinto de 2 y 5 como 3, 7, 11, 13, 17, etc. y la fracción está escrita en forma irreducible (o sea, no se puede simplificar nada entre el numerador y el denominador).
(d) Concluir que los únicos números reales que admiten un desarrollo decimal finito son los fraccionarios cuyo denominador (ya escrito en forma irreducible) es de la forma $2^j . 5^k$, con j y k enteros no negativos.

Problema 3.20. (i) Probar que los intervalos reales **(0,1)** y **(0,2)** son coordinables.

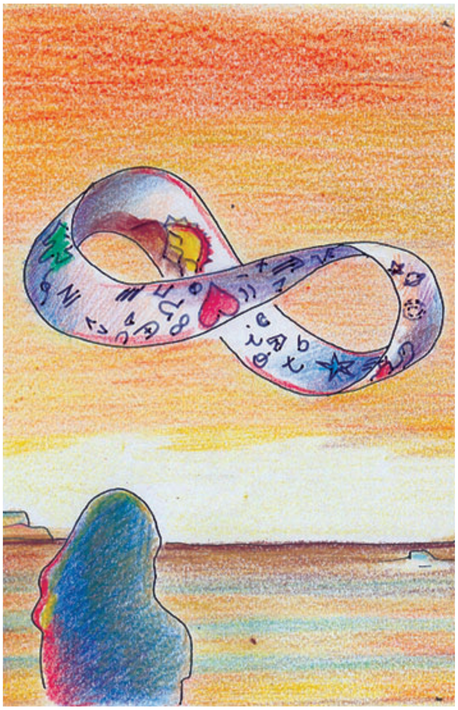
[Ayuda: considerar la correspondencia del **(0,1)** en el **(0,2)** que a cada x en **(0,1)** lo multiplica por dos, es decir $x \mapsto 2 \cdot x$].

(ii) Probar que el **(0,1)** es coordinable al $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

[Ayuda: usar la correspondencia $x \mapsto \pi \cdot x - \frac{\pi}{2}$].

(iii) Aceptar que hay correspondencias, como por ejemplo la función trigonométrica llamada **tangente**, que llevan el intervalo real $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ en el conjunto **R** en forma biunívoca. Concluir, que el **(0,1)** y **R** son coordinables.

3.9. ¡Hay infinitos tipos de infinito!



- Clara, ¿sabés lo que significa **partes de *X***, cuando *X* es un conjunto cualquiera?

- No. ¿Debería saberlo?

- No, no deberías. Pero nos será de gran utilidad. Tenés que pensar en los subconjuntos de *X*, en todos ellos. Esto incluye al conjunto vacío y al mismo *X*, llamado el **conjunto total**. El conjunto de las partes de *X*, o dicho brevemente "**partes de *X***", es simplemente el conjunto formado por todos los subconjuntos de *X*. Hay que ser cuidadosos porque lo que eran conjuntos -los subconjuntos de *X*- ahora pasan a ser elementos de este nuevo conjunto. Por ejemplo: si *X* es el conjunto formado sólo por dos elementos, digamos p y q, es decir, $X = \{p, q\}$, ¿cómo será el conjunto "partes de *X*"?

- Bueno, tengo que pensar en todos los subconjuntos de *X*, así que $\{p\}$ es uno, y $\{q\}$ es otro. Estos tienen solamente un elemento cada uno.

- Bien. Te faltan.

- Sí. Usted dijo que el vacío y el mismo *X* debían estar, ¿verdad?

- Sí. La convención es ponerlos como subconjuntos de *X*. Con esos cuatro terminaste. Es decir que partes de *X*, denotado $P(X)$, es un conjunto con cuatro elementos en este caso que son los que mencionaste: $\{p\}$, $\{q\}$, el conjunto vacío, que se denota con el símbolo Ø, y *X*, el conjunto **total**. En símbolos podemos escribir:

$$P(\{p, q\}) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$$

Definición. Dado un conjunto X, se llama **partes de X** al conjunto formado por todos los subconjuntos de X. En símbolos, $P(X) = \{ A : A \subseteq X \}$

Si ahora X tuviera tres elementos, ¿cuántos tendría $P(X)$? Supongamos que: $X = \{p, q, r\}$

- Hay muchos ahora. Están $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$, $\{p, q\}$, $\{p, r\}$, $\{q, r\}$, $\{p, q, r\}$, además del vacío. Creo que no hay más.

- Muy bien. ¿Cuántos son entonces?

- Son 8, Maestro.

- Quiere decir que cuando el cardinal de X es 2, el de $P(X)$ es 4, y cuando el de X es 3, el de $P(X)$ es 8. ¿Qué pasa si X tiene n elementos? ¿Cuál será el cardinal de $P(X)$?

- A ver. Va creciendo muy rápido. No estoy segura.

- Pensá el caso en que X tiene 4 elementos, por favor.

- En ese caso, hay 4 subconjuntos con un solo elemento, hay 6 con dos elementos, hay 4 con tres elementos y 1 con cuatro elementos, que es el mismo X, y como siempre, el vacío. O sea que son $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

- Bien, voy a hacer un pequeño cambio en lo que escribiste. -el Maestro cambió el 16 por 2^4, y continuó- ¿Esto te dice algo? El cardinal de X era 4, y el de $P(X)$ resultó ser 2^4. Antes teníamos cardinales de $P(X)$ iguales a $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$.

- Ah, claro. Parece que siempre da así. O sea, si X tiene n elementos, entonces $P(X)$ tiene 2^n. Estoy haciendo las cuentas con los siguientes números y dan bien.

- Así es. Esto se puede demostrar, por ejemplo, usando el principio de inducción, o si prefieres, la combinatoria que nos ofrece una demostración preciosa. Hagámosla para el caso $X = \{p, q, r\}$, pero vale en general. Cuando tomaste el subconjunto $\{p\}$, podemos pensar que asignaste un 1 a p, un 0 a q y un 0 a r. Cuando tomaste el subconjunto $\{p, q\}$, pensamos que asignaste un 1 a p, otro 1 a q, y un 0 a r. Es decir:

$$\{p\} \longrightarrow (1,0,0)$$
$$\{p,q\} \longrightarrow (1,1,0)$$

En general, dado un subconjunto se asignan **unos** a los elementos del subconjunto y **ceros** a los que no pertenecen al subconjunto. De este modo, los subconjuntos de X están en correspondencia biunívoca con las -en este caso- ternas de ceros y unos. Es decir:

$$P(X) \leftrightarrow \{\text{ternas de 0 y 1}\}$$

Es fácil contar cuántas ternas así hay: tenemos dos posibilidades, 0 ó 1, para el primer lugar en la terna; también dos posibilidades, 0 ó 1, para el segundo lugar; y lo mismo para el tercero. Estas posibilidades son independientes entre sí, es decir, tener 0 ó 1 en una posición, no afecta al número que aparezca en las otras posiciones. Por lo tanto, hay $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ ternas distintas de ceros y unos. En general, si el cardinal de X es n, entonces habrá $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} = 2^n$ posibilidades de elegir 0 ó 1 en cada una de las n posiciones, y por lo tanto hay 2^n elementos en $P(X)$. ¿Lo entendiste, o fuimos demasiado rápido?

Clara contestó que lo había entendido, a pesar de la velocidad, mientras el Maestro escribía el siguiente recuadro en el pizarrón:

$$\text{card } P(X) = 2^{\text{card } X}$$

y continuaba diciendo:

- También se puede escribir así lo que dijimos. ¿De acuerdo?

- Sí. Es un poco abstracto así, pero no hay problema.

- Ahora, que ya sabés el significado de partes de un conjunto, vamos a considerar conjuntos infinitos. Cuando X es infinito, es obvio que $P(X)$ será también un conjunto infinito. Por ejemplo, siempre están los subconjuntos formados por un solo elemento de X, o sea los de la forma $\{x\}$, donde x pertenece a X. Así que, si X es infinito, $P(X)$ también. Además, si comparamos sus tamaños, vemos que X es como si estuviera dentro de $P(X)$, mediante los subconjuntos $\{x\}$. Naturalmente, nos podemos preguntar si $P(X)$ será esencialmente más grande que X, o si podrían llegar a ser coordinables. ¿Tenés alguna intuición sobre esto, Clara?

- En el caso finito vimos que el cardinal de $P(X)$ es igual a $2^{\text{card } x}$, o sea, mucho más grande que el de X. Pero en el caso infinito se complica, tal vez siga valiendo que card $P(X) >$ card X, pero la verdad es que no sé la respuesta.

- De acuerdo a lo que dijiste, estás muy cerca de adivinarla. El primer -y muy interesante- ejemplo que podemos pensar es cuando X es $\mathbf{N}$. Veremos bien cómo es $P(\mathbf{N})$ y su cardinal. Comencemos por hacer la observación de que a cada subconjunto S de $\mathbf{N}$ se lo puede identificar con una sucesión infinita de **ceros** y **unos**, al igual que como hicimos recién con los subconjuntos de X en el caso en que el cardinal de X era 3. Más precisamente, S en $P(\mathbf{N})$ se identifica con una sucesión $t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ t_5\ t_6\ t_7 \dots$ donde cada t_k vale cero o uno para cada k, de acuerdo a la siguiente regla: t_k es 1 si el elemento k pertenece al subconjunto S, y t_k es 0 si k no pertenece a S. En símbolos:

$$S \leftrightarrow t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_{7,} \dots \quad \text{donde}$$
$$t_k = 1 \text{ si } \ k \in S \text{ , y } \ t_k = 0 \text{ si } \ k \notin S$$

Por ejemplo, si S es el subconjunto de los números pares, entonces la sucesión que le asociamos será la 0; 1; 0; 1; 0; 1; 1; 0..., si S es el subconjunto vacío, en la sucesión asociada son todos ceros; si S es el total, $\mathbf{N}$, entonces la sucesión que le corresponde tiene todos unos; si $S = \{3, 4, 5, \dots\}$, la sucesión es 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; ...y siguen todos ceros. Ahora cada una de estas sucesiones de ceros y unos puede considerse como un número real entre cero y uno, ¿sabés cómo?

- Bueno, ¿podría ser como antes, o sea, asociarle el número 0, $t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ t_5\ t_6\ t_7 \dots$?

- ¡Por supuesto! Y ahora viene algo interesante, Clara. Estas sucesiones de ceros y unos, que parecen ser **algunos** de los números reales en el intervalo **[0,1]**, resultan ser **todos** estos números reales si consideramos la escritura en el **sistema binario**, donde los únicos dos caracteres que aparecen son el 0 y el 1. Es decir, todo número real en el intervalo **[0,1]** puede escribirse -en escritura binaria- como una sucesión de la forma 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7... donde los t_k son dígitos 0 ó 1. Este es el desarrollo decimal de un número escrito en el sistema binario. De este modo, dejando de lado algunos detalles -como las repeticiones de los números que admiten dos desarrollos decimales binarios distintos- se alcanza a ver que el conjunto de estas sucesiones de ceros y unos, y por lo tanto P (**N**), es coordinable al intervalo real **[0,1]**. ¿Me seguís?

- A ver, me gustaría repetir lo que dijo. Empezó con P (**N**), o lo mismo, los subconjuntos S de los naturales **N**. A cada uno de estos subconjuntos lo pensó como una sucesión infinita de ceros y unos. Después, a cada una de estas sucesiones la pensó como un número real mayor o igual que cero y menor o igual que uno. Al final, concluyó que partes de **N** y el **[0,1]** son coordinables. ¿Es así?

- ¡Sí! Sólo agrego que las identificaciones que hacemos son correspondencias biunívocas, por lo tanto los conjuntos en cuestión resultan ser coordinables. Y en el caso de las repeticiones, se puede proceder igual que en ocasiones anteriores para obtener la coordinabilidad. Sigamos. El **[0,1]** es a su vez coordinable a todo **R**. Por consiguiente, partes de **N** y el conjunto de los números reales son coordinables. Equivalentemente:

$$\text{card } P\,(\mathbf{N}) = \text{card } \mathbf{R}$$

Aquí tenemos el primer cálculo del cardinal de las partes de un conjunto infinito, y como ves, ha resultado ser más grande que el cardinal del conjunto.

- Claro, porque ya sabíamos que card **R** > card **N**, entonces ahora tenemos que card P (**N**) > card **N**.
¿Y qué va a pasar con los otros conjuntos, Maestro? Porque todavía no sabemos que esto valga para todos los conjuntos, ¿verdad?

- No, **todavía** no, pero ¡muy pronto sí! Demostremos que siempre ocurre que card P (X) > card X.

- No se me ocurre cómo pensar en esto, porque no sabemos qué conjunto es X. Qué difícil. ¿La demostración es parecida a alguna que ya hayamos visto?

- Es una demostración corta y el argumento muestra, por reducción al absurdo, que X nunca puede ser coordinable a P (X), con una idea como la de la diagonal de Cantor. A pesar de lo abstracto del tema, creo que no tendrás problema en entenderla. ¡Comencemos!

- Bueno, si se usa lo del absurdo, entonces creo que va a empezar diciendo “supongamos que X y P (X) son coordinables” –dijo Clara, adelantándose y sorprendiendo al Maestro.

- ¡Así es! Me alegro que estés comprendiendo cómo funcionan las pruebas por el absurdo. Se comienza negando lo que se quiere probar y se debe llegar a una contradicción. Supongamos, como dijiste, que X y P (X) son coordinables. Entonces, existe una correspondencia biunívoca Φ entre ambos conjuntos, es decir Φ asigna a cada $x \in X$, un elemento $\Phi(x) \in P\,(X)$, o lo que es lo mismo, $\Phi(x)$ es un subconjunto de X. Además, si $x \neq y$ entonces $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Por último, todo subconjunto de X debe ser igual a $\Phi(x)$ para algún x en X. Ahora viene la clave del asunto. Definimos el subconjunto C de X formado por los x en X tales que x no pertenece a $\Phi(x)$. En símbolos:

$$C = \{x \in X : x \notin \Phi(x)\}$$

- Disculpe, me cuesta entender bien cómo es C.

- Vamos a construir C como un subconjunto de X. Tomamos un elemento cualquiera x en X, y puesto que $\Phi(x)$ es un subconjunto de X podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Pertenece x a $\Phi(x)$? Si la respuesta es afirmativa, entonces incluimos este x en C, si es negativa lo dejamos fuera de C. Hacemos lo mismo con cada uno de los elementos x de X.

- Ahora sí lo entiendo.

- Bien. Ahora afirmamos que el conjunto C es distinto de todos los conjuntos $\Phi(x)$. Fijate que esto es como lo de la diagonal. Antes había muchas filas, y construíamos una distinta a todas. Ahora hay muchos subconjuntos de X, los $\Phi(x)$, y construimos uno distinto a todos ellos. Debemos probar que:

$$C \neq \Phi(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } X$$

ésta es nuestra **afirmación**.

- ¿O sea que C no va a poder ser ninguno de los subconjuntos $\Phi(x)$?

- Exacto. Y esto muestra que Φ no puede ser una correspondencia biunívoca entre X y $P(X)$ porque ha dejado elementos de $P(X)$, como C, sin ninguno que le corresponda en X. ¿Estás de acuerdo?

- Sí. ¡Qué bueno! Pero todavía no terminó la demostración.

- No. Nos falta demostrar nuestra afirmación. Para ello, nuevamente usaremos el razonamiento por el absurdo. Tratá de hacerlo sola.

- Podría intentarlo, aunque, ¿no será demasiado complicado?

- Lo sabrás al final. Debes comenzar negando la afirmación. Si la misma dice que "C es distinto de todos los $\Phi(x)$", entonces ¿qué es lo contrario de esto?

- Que hay un $\Phi(x)$ que es igual a C.

- Bien. Llamemos y al elemento de X que satisface esta igualdad. Es decir, tenemos que:

$$\text{existe} \quad y \in X \quad \text{tal que} \quad \Phi(y) = C$$

Ahora, debemos buscar una contradicción, un absurdo. Piensa que hay dos casos distintos a considerar: (1) $y \in C$ o (2) $y \notin C$. Recuerda cómo definimos C.

- A ver… en el caso (1) $y \in C$. Entonces, la definición de C nos dice que $y \notin \Phi(y)$, pero también sabemos que $\Phi(y) = C$, entonces $y \notin C$.

Clara se quedó callada. El Maestro la auxilió diciendo:
- Estás en el caso (1) donde $y \in C$, pero llegaste a que $y \notin C$, eso es una contradicción, un absurdo. Ahora debes analizar el segundo caso.

- En el caso (2) tenemos que $y \notin C$ y la definición de C nos dice que no pasa que $y \notin \Phi(y)$, entonces lo que pasa es que $y \in \Phi(y)$.

- Ahora podés continuar como en el caso (1) -interrumpió el Maestro.

- Sí, porque sabemos que Φ (*y*) = *C*, entonces $y \in C$, y habíamos empezado con $y \notin C$, esto es una contradicción, ¡un absurdo! -dijo Clara, riéndose al usar esta palabra.

- Muy bien. Recuerda que comenzamos negando la afirmación y llegamos a absurdos en los dos casos, por lo tanto, podemos concluir que la afirmación debe ser verdadera, que era lo que debíamos probar. De modo que hemos terminado la demostración de que no existe una correspondencia biunívoca entre *X* y *P* (*X*). Por lo tanto, el cardinal de *X* es estrictamente menor que el de *P* (*X*), que es lo que nos habíamos propuesto averiguar. ¿Qué te ha parecido?

- Estoy muy impresionada por los resultados. Me cuesta mucho pensar en *X* sin saber qué conjunto es, pero he tratado de imaginarme que era **N**, y así creo que más o menos lo he entendido. Déjeme que anote bien todo lo que hemos visto hasta ahora.
Luego de una pausa, el Maestro y Clara retomaron la conversación.

- Fijate que hemos demostrado que siempre se cumple que card *P* (*X*) > card *X*, en particular, vale que card *P* (**N**) > card **N**, y como también vimos hoy que card *P* (**N**) = card **R** ¿qué podemos concluir?

- Que card **R** > card **N**, aunque ya lo sabíamos.

- Sí, pero podemos tomarlo como la tercera forma distinta de haber demostrado este hecho. ¿Te acordás que te había dicho que podrías elegir cuál te gustaba más? ¿Cuál de las tres preferís?

. si X es finito, card P (X) = $2^{\text{card } X}$;
. card P (**N**) = card **R**;
. card P (X) > card X, en particular, card P (**N**) > card **N** y por lo tanto card **R** > card **N**

- A ver…la primera fue con las longitudes de los pequeños intervalos alrededor de cada número real, la segunda fue la de la diagonal…, las dos me encantaron. Esta última me resulta más difícil, aunque no haya sido larga.

- Me alegro que te hayan gustado las dos primeras. Aunque la tercera es muy importante, por lo que veremos ahora.

- ¿Vamos a ver algo más?

Hipótesis del continuo generalizada: dado cualquier conjunto X, no existe un conjunto Y cuyo cardinal esté entre el de X y el de P (X), en símbolos:

no existe Y tal que card X < card Y < card P (X).

- Sí, lo último, porque realmente vale la pena. Hasta ahora sólo hemos distinguido entre dos tipos de infinitos: uno es el cardinal de los conjuntos numerables, que se denota $\aleph_0$ y se lee **aleph cero**, y el otro es el cardinal del conjunto de los números reales, llamado **el continuo**. Dicho sea de paso, el símbolo del infinito es este: ∞. Recuerda que no debemos buscar conjuntos de cardinal entre estos dos porque la hipótesis del continuo dice que no hay, y es indecidible. La versión generalizada de la hipótesis del continuo dice que lo mismo ocurre si se toma cualquier conjunto *X* en lugar de **N**, es decir, que no hay conjuntos cuyo cardinal esté estrictamente entre el de *X* y el de *P* (*X*). Pero podría haber conjuntos con cardinalidades cada vez más grandes. ¿Qué crees, Clara? Debes tener en cuenta que probamos que card *P* (*X*) > card *X*, para cualquier conjunto *X*, o sea que para cualquier conjunto, por más grande que sea, sus partes forman un nuevo conjunto que tiene mayor cardinal.

- Entonces hay muchísimos infinitos.

- ¿Qué significa "muchísimos"?

- ¡Que hay infinitos infinitos!

- ¡Bien! Podrías explicarlo.

- Creo que sí. Si empiezo con **N** tengo un primer tipo de infinito. Después P (**N**) me da otro infinito, mayor que el primero. Después, puedo tomar partes del segundo conjunto, y según vimos, va a dar otro conjunto con cardinal mayor, sería un tercer tipo de infinito, ¿no?, y así sigo, pero no estoy segura que esté bien.

- Sí, está bien. Como dijiste, podemos armar una sucesión de conjuntos con cardinales cada vez más grandes. Solamente sabiendo que card $P(X) >$ card X, se deduce que los conjuntos:

$$\mathbf{N},\ P(\mathbf{N}),\ P(P(\mathbf{N})),\ P(P(P(\mathbf{N}))),\ P(P(P(P(\mathbf{N})))),\ \ldots$$

satisfacen que:

$$\text{card } \mathbf{N} < \text{card } (P(\mathbf{N})) < \text{card } (P(P(\mathbf{N}))) < \text{card } (P(P(P(\mathbf{N})))) < \ldots$$

De modo que, en efecto, hay infinitos tipos distintos de infinito. De hecho, no era necesario poner el conjunto **N** para tomar sus partes, sino que esto mismo funciona con cualquier conjunto X.

- Maestro, se ve muy linda la última línea con todos esos cardinales distintos.

- ¡Qué suerte que te gusta!

Éste era el último día de las clases sobre el infinito. Ya casi despidiéndose dijeron:

- ¿Valió la pena el esfuerzo, Clara?

- ¡Sin dudas! Usted tenía razón: no me ha contestado qué es el infinito, pero lo que me ha enseñado es muy interesante. ¡Estoy muy contenta!

- Cuando algo es tan difícil y misterioso como el infinito, yo valoro cada paso que se pueda dar hacia su comprensión. Los nuestros han sido pasos pequeños, quizás ínfimos, pero al menos nos han dicho algo sobre el infinito, y algo lindo y bien construido.

- Una última pregunta, Maestro, que me intriga. En la realidad, ¿existe el infinito?

Se produjo un largo silencio. El Maestro mostró evidentes signos de estar en aprietos. Quizá estuviera dudando entre contar a Clara sus pensamientos al respecto, o dejar que ella se formara los suyos propios, sin su influencia; o quizá no sabía la respuesta.

Entonces dijo:

- Es demasiado difícil para mí, Clara, contestar a tu pregunta. Confío que podrás responderla sola algún día.

Problema 3.21. Se definen las **partes finitas** de un conjunto cualquiera X como el con-

Para resolver

junto formado por todos los subconjuntos finitos de X. En símbolos:
Si X es finito, entonces "partes finitas de X" coincide con "partes de X". Pero si X es infinito,

$$P_f(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito}\}$$

estos dos conjuntos pueden ser muy distintos. Por ejemplo, si $X = \mathbf{N}$, vimos que $P(\mathbf{N})$ es coordinable con $\mathbf{R}$. Demostrar ahora que $P_f(\mathbf{N})$ es coordinable a $\mathbf{N}$, o sea, es numerable.

[Ayuda. Considerar los subconjuntos de **N** de un elemento, luego los de dos, luego los de tres, etc., y recordar que la unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable].