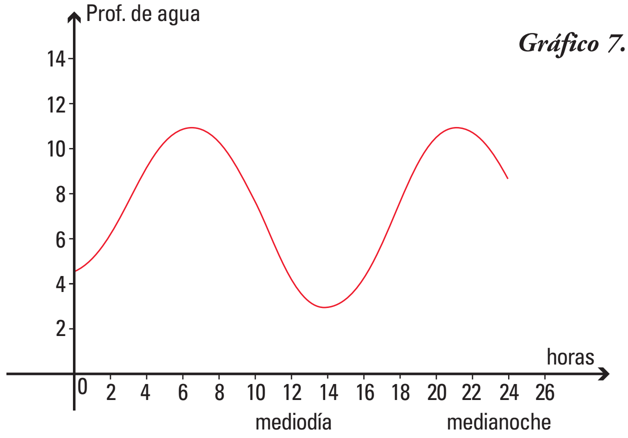
7. Funciones trigonométricas

Función trigonométrica

Problema 1. En el gráfico 7.1 vemos cómo varía la profundidad del agua de un puerto a lo largo de un día.

Gráfico 7.1



A partir de la curva que aparece en el gráfico, podemos deducir que:

1) la pleamar se produce, aproximadamente, dos veces al día: a las 6 h de la mañana y a las 22 h;

2) la bajamar se produjo durante el día registrado aproximadamente a las 13,30 h;

3) el nivel del agua está subiendo desde la medianoche hasta alcanzar la primera pleamar, a las 6 h y luego vuelve hacerlo entre las 13,30 h, aproximadamente, y las 22 h;

4) el nivel del agua está descendiendo desde las 6 h hasta alcanzar la primera bajamar a las 13,30 h, aproximadamente, y luego vuelve hacerlo entre las 22 h y la medianoche;

5) la mayor profundidad del agua es de 11 metros y el nivel más bajo asegura una profundidad de, aproximadamente, 3 metros;

6) la profundidad promedio del agua podría estimarse, para el día del registro, en 7 metros, por lo cual la variación de la profundidad desde este valor promedio es de 4 metros.

Observando la curva que aparece en el gráfcio 7.1 y conociendo que los barcos sólo pueden entrar al puerto cuando el agua es lo suficientemente profunda, ¿qué variables determinarán cuándo puede entrar o salir del puerto un barco determinado?

Problema 2. En el Parque de la Costa, que es un parque de diversiones que se encuentra en la Capital Federal hay una vuelta al mundo, cuyo radio mide 17m. Se midió la altura en que se encontraba una determinada silla, que al inicio del juego estaba a nivel del suelo, a medida que funcionaba la vuelta al mundo, y se registraron los datos que se observan en la tabla 7.1.

Tabla 7.1

Tiempo (en segundos)	Altura de la silla (m) desde el suelo
0	1
16	18
32	35
48	17
64	1
80	18
96	35
112	17
128	1
144	18
160	35

Si a partir de los datos de la tabla realizamos el gráfico de esta función uniendo los puntos, ya que el movimiento de la vuelta al mundo es continuo, obtenemos el gráfico 7.2.

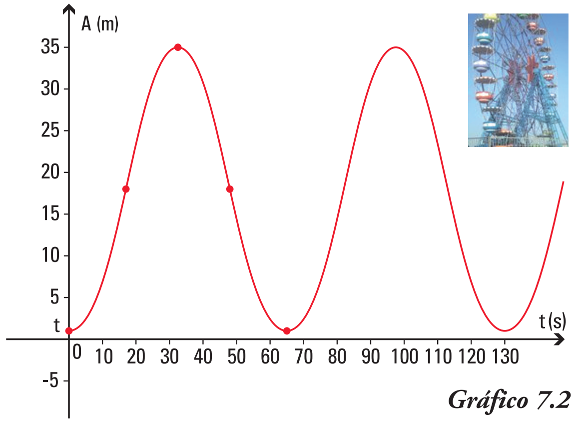


Gráfico 7.2

En general, muchos fenómenos y situaciones de la vida diaria se comportan de forma que las funciones que los representan se repiten cada cambio periódico de la variable independiente (x), entre ellos:

Ejemplo 1. En las siguientes situaciones está presente el fenómeno de periodicidad:

- el avance y retroceso de las mareas;
- las fases de la Luna;
- la producción de kg de leche/día en una vaca de tambo al cabo de un año;
- el movimiento de oscilación de un reloj de péndulo;
- algunas magnitudes físicas: la corriente eléctrica, los campos electromagnéticos;
- la producción de pasto natural en un área no cultivada al cabo de cada año;
- el día y la noche ...

Estas situaciones, y en general todo fenómeno que se repite en forma periódica, se modelizan utilizando las funciones que se denominan **funciones trigonométricas**.

La trigonometría, que etimológicamente significa medida de ángulos de un triángulo, estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

Se encuentran registros con las primeras aplicaciones de trigonometría en la navegación y la astronomía: el principal problema era determinar una distancia inaccesible, el movimiento de un barco en el mar en relación a las estrellas que se consideraban fijas, la distancia entre la Tierra y la Luna o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Después, se generalizó el uso de la trigonometría cuando aparecieron problemas de la física, química y, en general, en el estudio de fenómenos periódicos como el sonido o el flujo de una corriente.

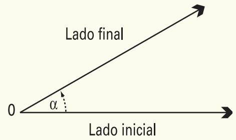
La historia de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. En el siglo II a.C. los astrónomos realizaron las primeras tablas trigonométricas para resolver triángulos. Más tarde los griegos, impulsados por el astrónomo Ptolomeo, adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios para medir los ángulos. Tolomeo incorporó, en su gran libro de astronomía, ejemplos de cómo utilizar las tablas trigonométricas para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos.

Para comenzar a trabajar con funciones trigonométricas, como se definen a partir de asignarle a la variable independiente la medida de un ángulo, es necesario recordar los siguientes conceptos relacionados geometría del plano.

Ángulos

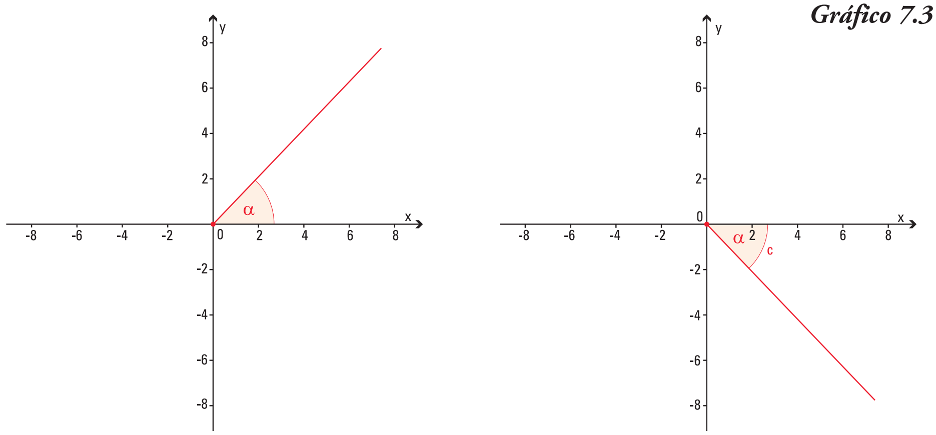
El ángulo α es la región del plano comprendida entre dos semirrectas que se intersecan en un punto 0, una de las semirrectas se denomina lado inicial y la otra lado final.

Gráficamente representamos un ángulo por:



Si consideramos el ángulo situado en el plano con el sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que el lado inicial coincida con el semieje *x* positivo, el lado final puede rotar en dos direcciones, si lo hace en sentido anti-horario decimos que el ángulo α es **positivo** y si la rotación es en sentido horario se dice que el ángulo α es **negativo**:

Gráfico 7.3



Clases de ángulos

Decimos que un ángulo es:

Nulo: cuando su lado final coincide con el lado inicial, sin producirse rotación alguna.
Recto: cuando su lado final, al rotar en sentido antihorario, coincide por primera vez con el semieje positivo *y*.
Llano: cuando su lado final, al rotar en sentido antihorario, coincide por primera vez con el semieje negativo *x*.
De un giro: cuando su lado final, al rotar en sentido antihorario, coincide por primera vez con el semieje positivo x, es decir realiza una rotación completa.
De más de un giro: cuando su lado final realiza más de una rotación completa.

Sistemas de medición de ángulos

Un sistema para medir ángulos

El sistema de medición de ángulos que se utiliza con mayor frecuencia es el *sistema sexagesimal*. Se denomina así porque cada unidad es sesenta veces mayor (o menor) que la siguiente unidad inferior (o superior).

La unidad de medida de ángulos del sistema sexagesimal es el **grado** (º), que representa la subdivisión en 90 partes iguales de un ángulo recto. Cada grado se divide en 60 minutos (´) y cada minuto se divide en 60 segundos (”).

Entonces:

- el ángulo **recto** mide 90º.
- el ángulo **llano** mide 180º
- el ángulo de **un giro** mide 360º.

Ejemplo 2. ¿A cuántos grados, minutos y segundos equivale un ángulo α que mide 62,37º?

Ya sabemos que el ángulo mide 62º, para conocer el valor de los minutos utilizamos "regla de tres" y calculamos:

$$\begin{array}{rcl} 1^\circ & \rightarrow & 60' \\ 0{,}37^\circ & \rightarrow & x' \end{array}$$

Entonces: $$x = \frac{0{,}37^\circ . 60'}{1^\circ} \quad \rightarrow \quad x = 22{,}2'$$

Hasta ahora podemos afirmar que el ángulo α mide 62º 22´ y nuevamente utilizando regla de tres calculamos a cuántos segundos equivalen 0,2´:

$$\begin{array}{rcl} 1' & \rightarrow & 60'' \\ 0{,}2 & \rightarrow & x'' \end{array}$$

Entonces: $$x = \frac{0{,}2' . 60''}{1'} \quad \rightarrow \quad x = 12''$$

En forma equivalente: el ángulo a mide 62,37º o bien 62º 22´ 12´´

Otro sistema para medir ángulos

Para el estudio de las funciones trigonométricas es más conveniente medir los ángulos en el *sistema radial*, cuya unidad de medida es el **radián**.

> El ángulo α que mide **un radián** (1 rad) es el ángulo cuyo arco de circunferencia *AB* comprendido entre sus lados inicial y final tiene una longitud igual a la del radio de la circunferencia (gráfico 7.4).

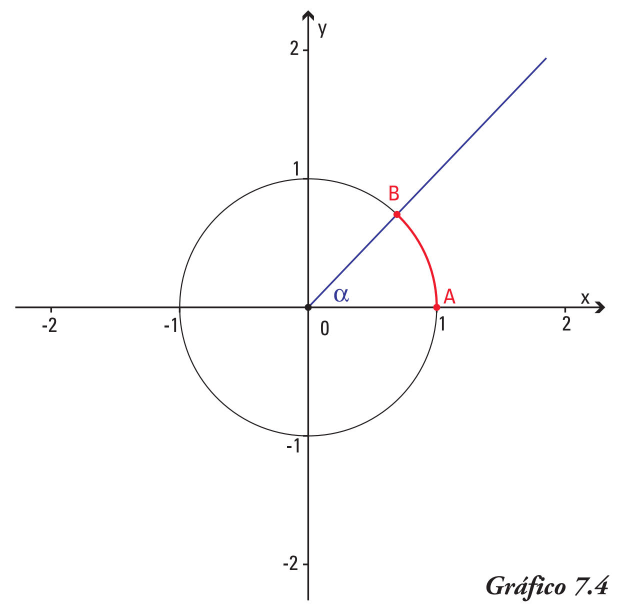


Gráfico 7.4

Entonces:

• el ángulo de **un giro** mide 2π radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente el perímetro de la circunferencia de radio uno[1];

• el ángulo **llano** mide π radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente el semi perímetro de la circunferencia de radio uno;

• el ángulo **recto** mide $\dfrac{\pi}{2}$ radianes, ya que el arco de circunferencia, comprendido entre sus lados inicial y final, es exactamente un cuarto del perímetro de la circunferencia de radio uno.

El número π (pi) es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional y, junto con el número *e*, es una de las constantes matemáticas que más aparece en las aplicaciones de la física e ingeniería.

La notación con la letra griega π se estima que proviene de la inicial de la palabra "περιμετου" (*perímetro*) de un círculo. Esta notación fue usada por primera vez en 1706 por un matemático galés y difundida por el matemático L. Euler en su texto "Introducción al cálculo infinitesimal" (1748). A comienzos de este siglo, las computadoras fueron capaces de calcular 1billón de decimales, requiriendo para ello quinientas horas de cálculo.

El valor numérico de π, truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

π ≈ 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428809756659334461284756482337867831652712019091456485…
y sigue…..

Y recordando las medidas de los ángulos en el sistema sexagesimal podemos establecer las siguientes relaciones:

[1] Recordar que el perímetro de la circunferencia de radio *r* se obtiene de calcular $2\pi r$

Relación entre los sistemas de medición de un ángulo

Tabla 7.2

Sistemas / Ángulos	**Sistema Sexagesimal** (grado)	**Sistema Radial** (radián)
Ángulo Nulo	0º	0 rad
Ángulo Recto	90º	$\frac{\pi}{2}$ rad
Ángulo Llano	180º	π rad
Ángulo de un Giro	360º	2π rad

¡¡Importante!!
Al utilizar la calculadora se puede trabajar con los dos sistemas de medidas, que en la calculadora se presentan como **modos**:

- en modo "degree (DEG)" la calculadora considera que la medida del ángulo está representada en el sistema sexagesimal;
- en modo "radián (RAD)" la calculadora leerá la medida del ángulo representada en el sistema radial.

Ejemplo 3. ¿Cuál es el ángulo, medido en el sistema sexagesimal que en el sistema radial mide 1,7 radianes?

Aplicando cualquiera de las relaciones de la tabla anterior calculamos:

$$\pi\ rad \rightarrow 180^{o}$$
$$1{,}7\ rad \rightarrow x^{o}$$

Entonces: $$x = \frac{1{,}7\,\text{rad}\ .\ 180^{o}}{\pi\ \text{rad}} \quad \rightarrow \quad x = 97^{o}\ 24'\ 10''$$

Ejemplo 4. ¿Cuál es el ángulo, medido en el sistema radial que en el sistema sexagesimal mide 30º?

Aplicando y cualquiera de las relaciones de la tabla anterior calculamos:

$$180^{o} \rightarrow \pi\ rad$$
$$30^{o} \rightarrow x\ rad$$

Entonces: $$x = \frac{\pi\,\text{rad}\ .\ 30^{o}}{180^{o}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

Ejemplo 5. Determinar cúal es el ángulo *t*, medido en el sistema sexagesimal, si en el sistema radial mide $\frac{\pi}{3}$ rad? ¿Y $\frac{16\pi}{3}$ rad?

Nos podemos preguntar qué sistema conviene utilizar en las aplicaciones trigonométricas, dado que éstas requieren que el dominio sea el de los números reales. Entonces, ¿cómo relacionamos ángulos con números reales?

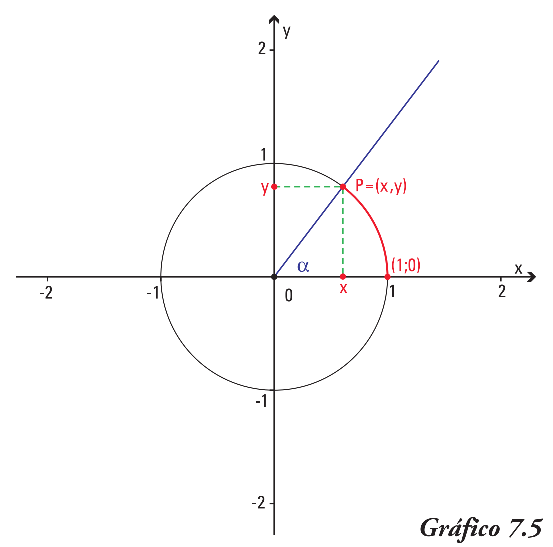


Gráfico 7.5

Dado un número $t \in \mathbf{R}$ positivo, hay exactamente un punto $P = (x , y)$ sobre la curva que representa la circunferencia de radio 1 y centro en el sistema de coordenadas cartesianas, tal que *la longitud del arco de circunferencia que une los puntos* (1;0) y P, medido en sentido anti-horario, es t.

El ángulo α cuyo lado inicial es el semieje positivo x y cuyo lado final es la semirrecta con origen en el punto (0;0) y que corta a la circunferencia de radio 1 en el punto P, mide exactamente t radianes. Así, asociamos el ángulo α con el número real t.

Análogamente, dado un ángulo α hay exactamente un punto $P = (x , y)$ donde el lado final del mismo corta a la circunferencia unidad. Así, asociamos al ángulo α el número real t que da la medida del arco de circunferencia comprendido entre el par ordenado (1;0) y dicho punto P.

Observar

- Como la circunferencia completa (ángulo de un giro) mide 2π radianes, si el número real t verifica $t > 2\pi$, al trazar el arco desde el par ordenado (1;0) al punto P, se recorrerá más de una vuelta completa de la circunferencia. En este caso el número t representará un ángulo de más de un giro.
- En forma similar, si $t \in \mathbf{R}$ es un número negativo, el ángulo que se asocia al mismo será un ángulo cuyo lado final se obtiene realizando una rotación en sentido horario desde el semieje x positivo que representa el lado inicial.

Para definir las funciones trigonométricas lo haremos primero trabajando con ángulos cuyo lado inicial coincide con el semieje x positivo y su vértice se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, y consideraremos como referencia a la circunferencia unidad.

Una circunferencia centrada en el origen del sistema de coordenadas cartesianas que tiene radio 1 se denomina **circunferencia unidad**.

Ejemplo. Si los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo que se mide en radianes, entonces podemos afirmar que el radio de la circunferencia que se puede trazar con esa abertura es de 24 cm.

Funciones seno y coseno

Dado $t \in \mathbf{R}$, el ángulo cuyo lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas en el sistema de coordenadas cartesianas y que mide t radianes, que llamaremos por simplificación del lenguaje ángulo t, determina un punto $P = (x\,, y)$ donde su lado final interseca a la circunferencia unidad (gráfico 7.6).

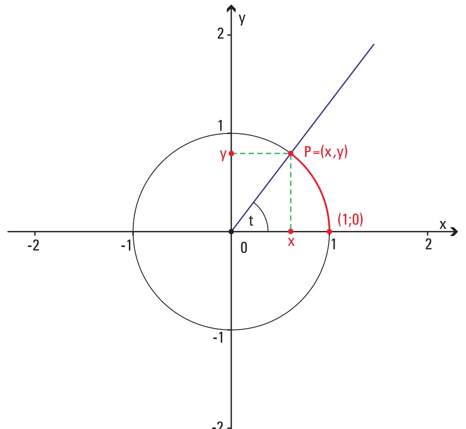


Gráfico 7.6

> Llamamos **función seno** del ángulo t a la función:
>
> $$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ definida por } f(t) = sen\ t$$
>
> que asigna a cada ángulo t el valor de la ordenada del punto P donde el lado final del ángulo interseca a la circunferencia unidad (es decir, $sen\ t = y$).
>
> Llamamos **función coseno** del ángulo t a la función:
>
> $$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ definida por } f(t) = cos\ t$$
>
> que asigna a cada ángulo t el valor de la abscisa del punto P donde el lado final del ángulo interseca a la circunferencia unidad (es decir, $cos\ t = y$).
> (gráfico 7.7)

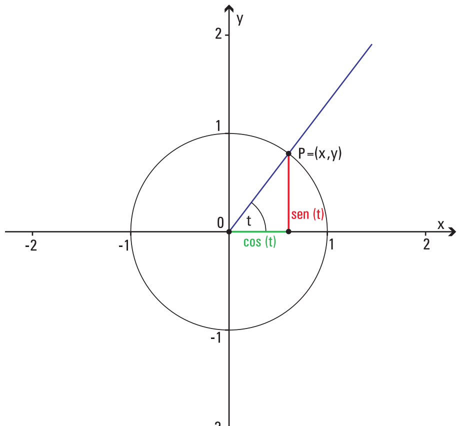


Gráfico 7.7

Ejemplo 6. La representación de las funciones seno y coseno cuando el ángulo t en la circunferencia trigonométrica es mayor que 90º y menor que 180º (es decir se encuentra en el segundo cuadrante) es la indicada en el gráfico 7.8.

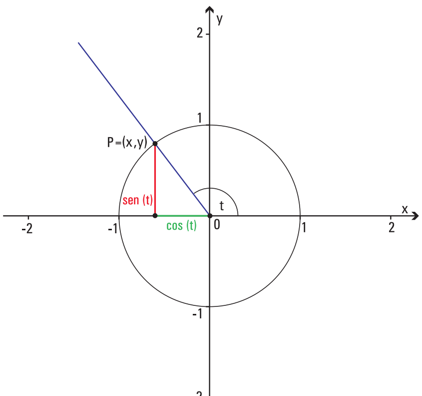


Gráfico 7.8

Ejemplo 7. La representación de las funciones seno y coseno cuando el ángulo t en la circunferencia trigonométrica es mayor que 180º y menor que 270º (es decir se encuentra en el tercer cuadrante) es la que se muestra en el gráfico 7.9.

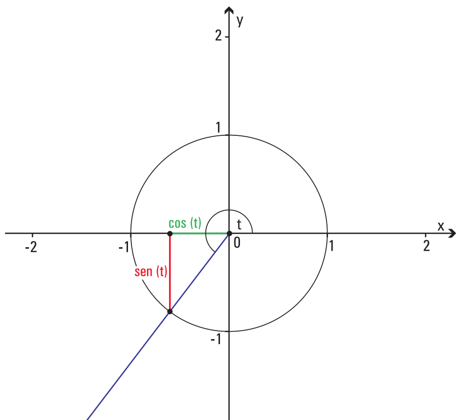


Gráfico 7.9

Gráfico de las funciones seno y coseno

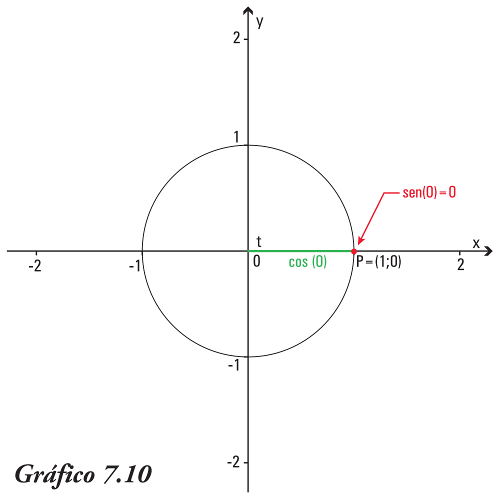


Gráfico 7.10

Para construir los gráficos de esas dos funciones, primero observemos las principales propiedades de dichas funciones.

1) Valores de las funciones seno y coseno para los ángulos notables

Consideremos los ángulos nulo, recto, llano y de un giro.

•Para un ángulo t de 0 radianes (ángulo nulo), el lado final del mismo (que coincide con el lado inicial) corta a la circunferencia unidad en el punto P = (1;0) luego, $sen\ 0 = 0$ y $cos\ 0 = 1$.

- Para un ángulo t de $\frac{\pi}{2}$ rad (= 90º) el lado final del mismo corta a la circunferencia en el punto P = (0 ;1) así, $sen\ \frac{\pi}{2} = 1$ y $cos\ \frac{\pi}{2} = 0$;
- Análogamente, realizando un gráfico para los ángulos que miden π rad (ángulo llano) y $\frac{3\pi}{2}$ rad se completa la tabla 7.3.

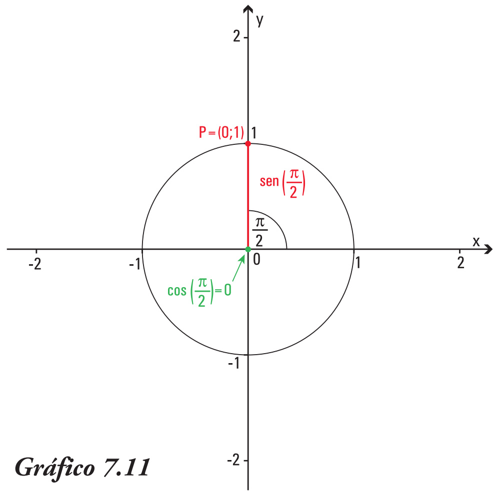


Gráfico 7.11

Tabla 7.3

Ángulos / Funciones	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2 π
sen t	0	1	0	-1	0
cos t	1	0	-1	0	1

2) Dominio e Imagen de las funciones seno y coseno

a) Para cualquier ángulo t, independientemente del número de giros y del sentido del mismo, el lado final del ángulo siempre corta a la circunferencia unidad y podemos determinar los valores del seno y del coseno.

b) De igual manera, como los valores del seno y coseno de cualquier ángulo siempre corresponden a la ordenada o la abscisa del punto P, donde el lado final del ángulo de t radianes corta a la circunferencia unidad, entonces, el punto P tiene siempre sus dos coordenadas variando entre -1 y 1, así:

Las funciones **seno** y **coseno** verifican:

$$Dom\,(sen\ t) = \mathbf{R} \quad \text{e} \quad Img\,(sen\ t) = [-1\ ,\ 1]$$
$$Dom\,(cos\ t) = \mathbf{R} \quad \text{e} \quad Img\,(cos\ t) = [-1\ ,\ 1]$$

3) Signo de las funciones seno y coseno

- Para el ángulo t cuya medida se encuentra entre los ángulos de 0 rad y $\frac{\pi}{2}$ rad, el lado final del mismo se encuentra en el primer cuadrante (I) del sistema de coordenadas cartesianas. Entonces el punto $P = (x, y)$ donde el lado final interseca la circunferencia unidad tiene sus dos coordenadas positivas, luego los valores de las funciones $y = sen\ t$ y $x = cos\ t$ son positivos[2] (gráfico 7.12)

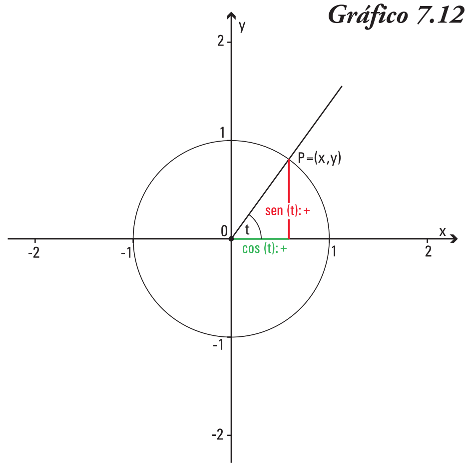


Gráfico 7.12

- Para el ángulo t cuya medida se encuentra entre los ángulos de $\frac{\pi}{2}$ rad y π rad, el lado final del mismo se encuentra en el segundo cuadrante (II) del sistema de coordenadas cartesianas. Entonces, el punto $P = (x, y)$ donde el lado final interseca la circunferencia unidad tiene su primer coordenada x positiva y la segunda coordenada y negativa, luego el valor de la función $y = sen\ t$ es negativo, y el valor de $y = cos\ t$ es positivo (gráfico 7.13)

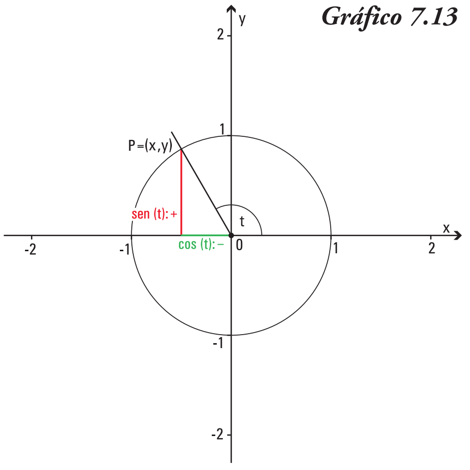


Gráfico 7.13

- Análogamente, observando el gráfico para el tercer (III) y (IV) cuadrante, se justifican los restantes signos del $sen\ t$ y $cos\ t$ en cada uno de ellos, que se presentan en la tabla.

Tabla 7.4

Funciones \ Cuadrante	I	II	III	IV
sen t	+	+	-	-
cos t	+	-	-	+

4) Período de las funciones seno y coseno

Los ángulos que miden t radianes y $t + 2\pi$ radianes tienen sus lados iniciales y finales coincidentes, porque sumarle al ángulo que mide t radianes un ángulo de 2π radianes significa realizar un "nuevo giro completo" en la circunferencia unidad.

Por lo cual se cumple:

$$sen\ t = sen\ (t + 2\pi)$$
$$cos\ t = cos\ (t + 2\pi)$$

[2] Los valores positivos de las funciones se indican con el signo más (+) y los valores negativos con el signo menos (-).

Gráficamente:

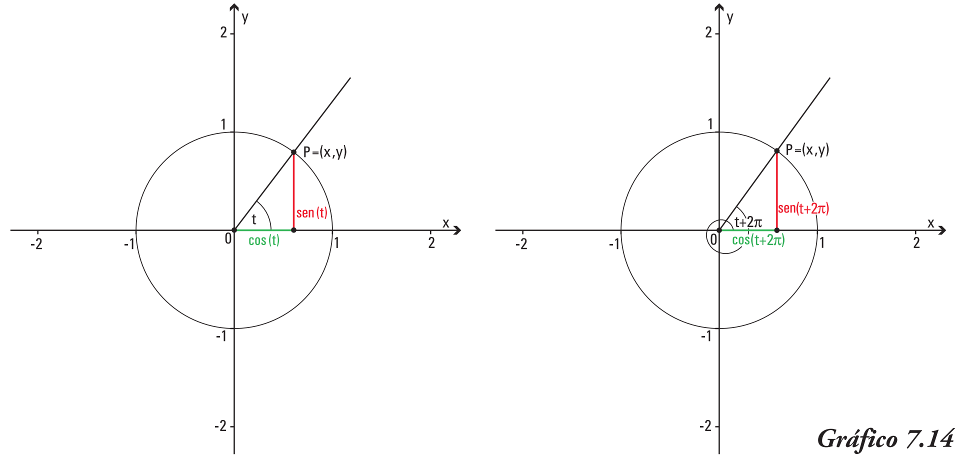


Gráfico 7.14

Las anteriores igualdades se mantienen para los ángulos que miden:

$$t + 4\pi,\ t + 6\pi,\ t + 8\pi, \text{ etc…}$$

Generalizando, los resultados de las funciones seno y coseno se repiten en los ángulos de la forma $t + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{R}$, luego definimos:

> Las funciones $y = sen\ t$ e $y = cos\ t$ son funciones **periódicas**, de período 2π, es decir sus imágenes se repiten al sumar el valor constante 2π a la variable. En símbolos:
>
> $$sen\ t = sen\,(t + 2\pi) \quad \text{y} \quad cos\ t = cos\,(t + 2\pi)$$

¡Importante!
Para los números reales positivos sólo debemos graficar las funciones seno y coseno entre 0 y 2π, y luego repetir el comportamiento de la misma en cada intervalo de longitud igual al período.

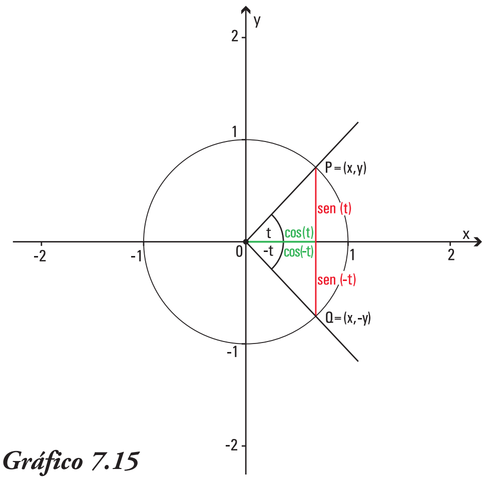


Gráfico 7.15

5) Seno y coseno de ángulos opuestos

Los ángulos que miden t radianes y $-t$ radianes tienen sus lados iniciales coincidentes y sus lados finales cortan a la circunferencia unidad en los pares ordenados $P = (x\,, y)$ y $Q = (x\,, -y)$, respectivamente. Estos puntos son simétricos respecto del eje x.

Entonces se verifica que (gráfico 7.15):

$$sen\ t = y \qquad sen\ (-t) = -y \qquad cos\ t = x \qquad cos\ (-t) = x$$

a) La función $y = sen\ t$ es **simétrica** con respecto al **origen de coordenadas**, es decir las imágenes para ángulos opuestos son opuestas.

En símbolos: $sen\ t = -\ sen\ (-t)$

b) La función $y = cos\ t$ es **simétrica** con respecto al **eje *y*** es decir las imágenes para ángulos opuestos son iguales.

En símbolos: $cos\ t = cos\ (-t)$

6) Crecimiento y decrecimiento de las funciones seno y coseno

- Si consideramos dos ángulos cuyos lados finales se encuentran en el primer cuadrante (I) del sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que:

$$\text{ángulo } t_1 < \text{ ángulo } t_2$$

como se observa en el gráfico, las relaciones entre el seno y coseno para estos ángulos verifican:

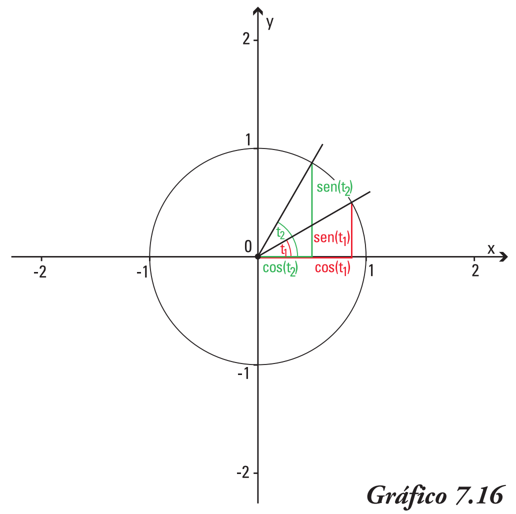


Gráfico 7.16

Por lo cual:

$$sen\ t_1 < sen\ t_2 \quad \text{y} \quad cos\ t_1 > cos\ t_2$$

En la función seno podemos concluir que cuando la medida del ángulo aumenta, también lo hace el valor del seno; en cambio, para la función coseno ocurre lo contrario, a mayor medida del ángulo, el valor del coseno del mismo disminuye. Utilizando las definiciones de funciones crecientes y decrecientes, podemos decir:

Las funciones $y = sen\ t$ es una función **creciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$.

La función $y = cos\ t$ es una función **decreciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$.

- Si consideramos dos ángulos cuyos lados finales se encuentran en el segundo cuadrante (II) del sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que:

$$\text{ángulo } t_1 < \text{ ángulo } t_2$$

como se observa en el gráfico 7.17, las relaciones entre el seno y coseno para estos ángulos verifican las siguientes relaciones:

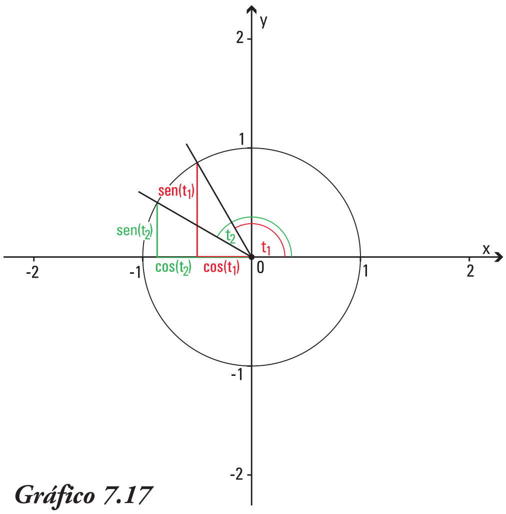


Gráfico 7.17

Por lo cual:

$$sen\ t_2 < sen\ t_1 \quad \text{y} \quad cos\ t_2 < cos\ t_1$$

En la función seno podemos concluir que cuando la medida del ángulo aumenta, el valor del seno del ángulo disminuye; lo mismo ocurre para la función coseno, a mayor medida del ángulo, el valor del coseno del mismo disminuye[3]. Utilizando las definiciones de funciones crecientes y decrecientes, podemos decir:

La función $y = sen\ t$ es una **función decreciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre $\frac{\pi}{2}$ y π.

La función $y = cos\ t$ es una **función decreciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre $\frac{\pi}{2}$ y π.

- Análogamente, observando el gráfico para el tercer (III) y (IV) cuadrante, se justifican el comportamiento del *sen t* y *cos t* en cada uno de ellos, que se presentan en la tabla 7.5.

Tabla 7.5

Funciones \ Cuadrante	I	II	III	IV
sen t	crece	decrece	decrece	crece
cos t	decrece	decrece	crece	crece

7) Gráfico de las funciones seno y coseno

Gráfico de $y = sen\ t$

Para una mejor representación de los gráficos de $y = sen\ t$ e $y = cos\ t$ en un sistema de coordenadas cartesianas, primero los realizaremos para la variable x que cumple: $x \in [0\ ,\ 2\pi]$.

- Observemos que los ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º se corresponden, respectivamente, con los valores $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57$; $x = \pi \cong 3{,}14$; $x = \frac{3\pi}{2} \cong 4{,}71$ y $x = 2\pi \cong 6{,}28$ sobre el eje de las abscisas en el sistema de coordenadas cartesianas. Para estos ángulos conocemos que se verifica: $sen\ 0 = 0, sen\ \frac{3\pi}{2} = 1$, $sen\ \pi = 0$, $sen\ \frac{\pi}{2} = 1$ y $sen\ 2\pi = 0$, entonces el gráfico de la función seno deberá pasar por los pares ordenados:

$$(0;0)\ ,\ \left(\frac{\pi}{2};1\right) \cong (1{,}57;1)\ ,\ (\pi;0) \cong (3{,}14;0)\ ,\ \left(\frac{3\pi}{2};1\right) \cong (4{,}71;1)\ \text{ y }\ (2\pi;0) \cong (6{,}28\ ;0)$$

[3] Recordar que en los números negativos, mayor absoluto indica que el número real se encuentra más lejos del cero.

- Si consideramos en el primer cuadrante de la circunferencia unidad los ángulos t_1 y t_2[4], podemos representar el seno de los mismos y "*trasladar*" dicho valor para construir en el sistema de coordenadas cartesianas los pares ordenados que se corresponden con dichos ángulos, es decir, los pares ordenados (t_1, *sen* t_1) y (t_2 , *sen* t_2), pertenecientes al gráfico de la función y = *sen* t (gráfico 7.18).

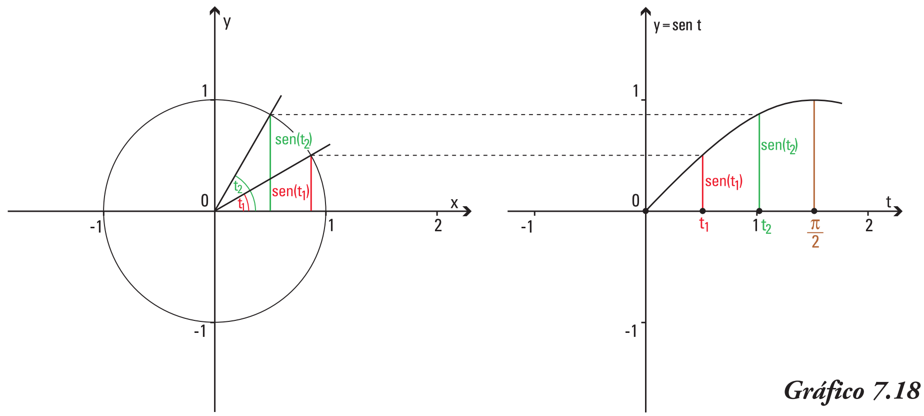


Gráfico 7.18

Notar. Para realizar un gráfico con mayor precisión podríamos considerar, por ejemplo, en el primer cuadrante cuatro ángulos, en dicho caso generaremos cuatro pares ordenados entre (0;0) y $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

- Si consideramos en el segundo cuadrante de la circunferencia unidad los ángulos t_3 y t_4[5], podemos representar el seno de los mismos y "*trasladar*" dicho valor para construir en el sistema de coordenadas cartesianas los pares ordenados que se corresponden con dichos ángulos, es decir, los pares ordenados (t_3 ,*sen* t_3) y (t_4 ,*sen* t_4) pertenecientes al gráfico de la función y = *sen* t (gráfico 7.19).

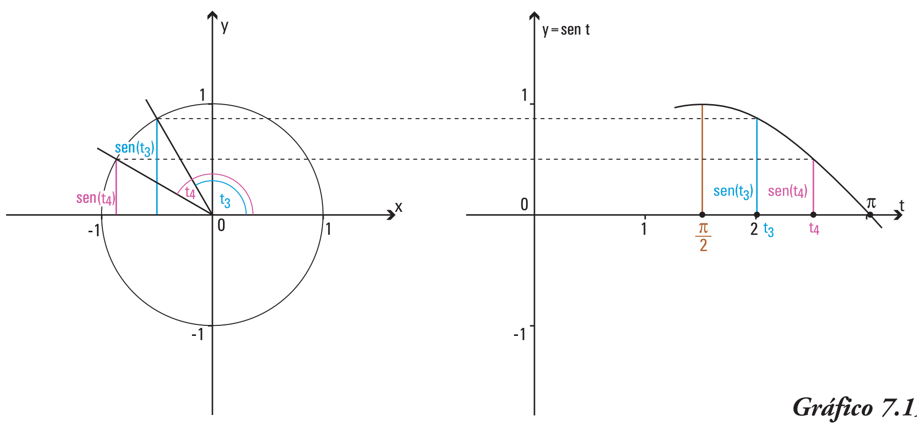


Gráfico 7.19

[4] Los ángulos t_1 y t_2 se representan en el eje de las abscisas a través de los números reales t_1 y t_2 que dan la medida de la longitud del arco de circunferencia unidad entre el lado inicial y final de cada ángulo.

[5] Los ángulos t_3 y t_4 se representan en el eje de las abscisas a través de los números reales t_3 y t_4 que dan la medida de la longitud del arco de circunferencia unidad entre el lado inicial y final de cada ángulo.

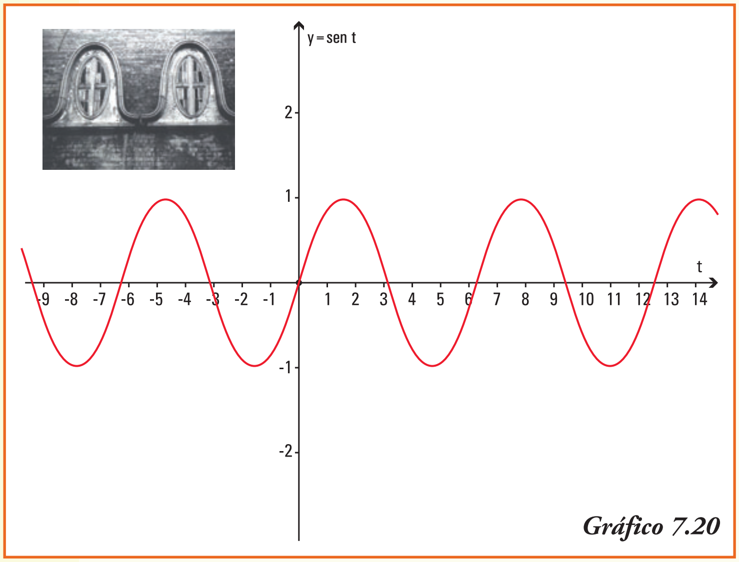


Gráfico 7.20

Imagen: Fotografía del tejado de una casona que guarda formas similares a la función seno.

Si procedemos de la misma manera en el tercer y cuarto cuadrante se obtendrá una serie de pares ordenados que al unirlos representan el **gráfico de la función *y* = *sen t*** (gráfico 7.20).

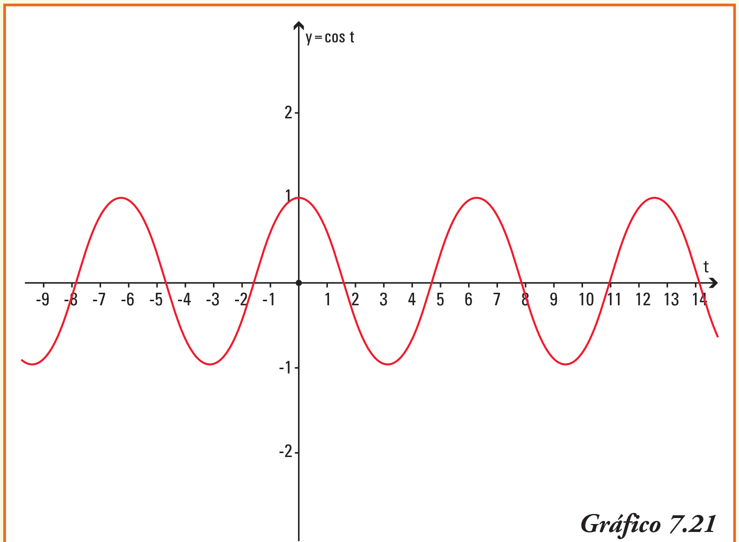


Gráfico 7.21

Con igual procedimiento que para la función seno, se pueden obtener pares ordenados que permiten representar el **gráfico de la función *y* = *cos t*** (gráfico 7.21).

Ejemplo 8. A partir del gráfico de la función $y = \cos t$, y utilizando las propiedades del gráfico de la suma de funciones ¿Cuál es el gráfico de la función $y = \cos t + 2$?

Para realizar el gráfico de esta función trigonométrica usamos las propiedades que estudiamos para el gráfico de una función cuando le sumamos (o restamos) un número real no nulo.

- La función $y = \cos t + 2$, es una función que resulta de sumar dos unidades a la función $y = \cos t$, entonces su gráfico se obtendrá *desplazando* cada valor de la curva que representa al gráfico de $y = \cos t$ dos unidades hacia arriba.

A partir del gráfico 7.22, podemos deducir que:

1) el conjunto dominio de la función $f(t) = cos\ t + 2$ es $Dom\ f = \mathbf{R}$ y el conjunto imagen es $Img\ f = [1;3]$;
2) el conjunto dominio de esta función $f(t) = cos\ t + 2$ **es igual** al dominio de la función $y = cos\ t$;
3) al operar con la función coseno, se obtiene un conjunto imagen para la $f(t) = cos\ t + 2$ un conjunto imagen que **es distinto** al de la función $y = cos\ t$;
4) si bien la función $y = cos\ t$ interseca al eje y en el par ordenado (0;1), la función trigonométrica $y = cos\ t + 2$ lo intersecta en (0;3).

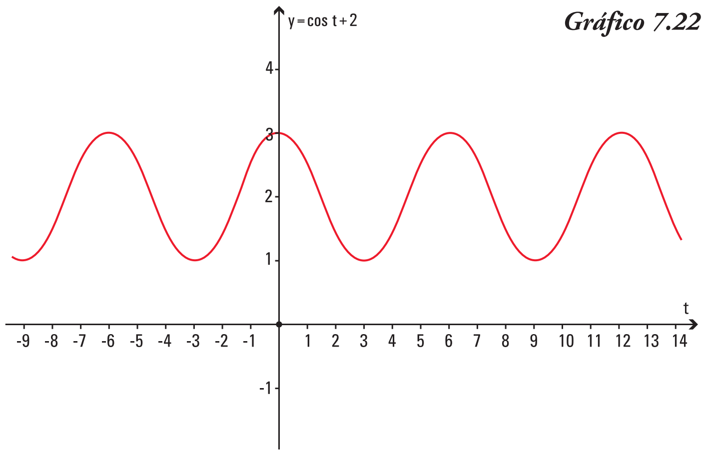


Gráfico 7.22

Ejemplo 9. A partir del gráfico de la función $y = sen\ t$ y utilizando las propiedades del gráfico de producto de funciones, ¿cuál es el gráfico de la función $y = 2\ sen\ t$?

- La función $f(t) = 2\ sen\ t$, es una función que resulta de multiplicar (expandir) la función $y = sen\ t$, entonces su gráfico lo podemos obtener a partir de esta última función.

A partir del gráfico 7.23, podemos deducir que:

1) el conjunto dominio de la función $f(t) = 2\ sen\ t$ es $Dom\ f = \mathbf{R}$ y el conjunto imagen es $Img\ f = [-2,2]$;
2) el conjunto dominio de esta función $f(t) = 2\ sen t$ **es igual** al dominio de la función $y = sen\ t$;
3) al operar con la función seno, se obtiene un conjunto imagen para la $f(t) = 2\ sent$ un conjunto imagen que **es distinto** al de la función $y = sen\ t$;
4) tanto la función $y = sen\ t$ como la función $f(t) = 2\ sen\ t$ intersecan al eje y en el par ordenado (0 ; 0);

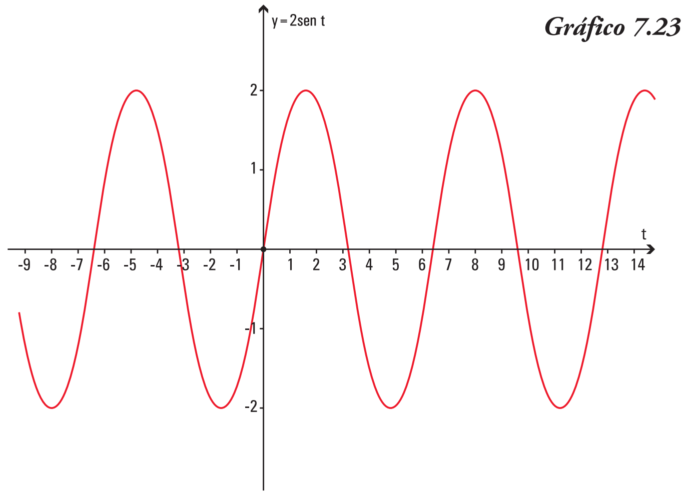


Gráfico 7.23

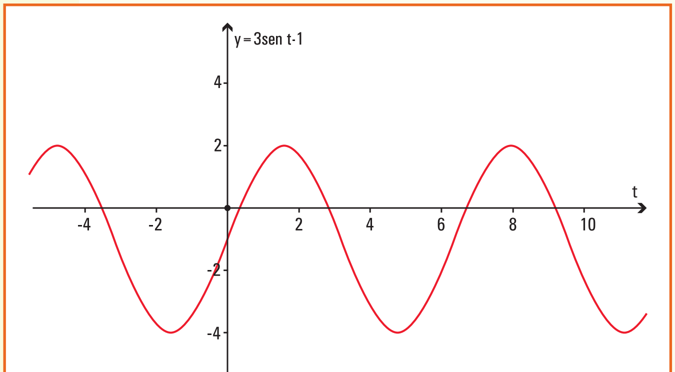


Gráfico 7.24

5) con respecto al eje de las abscisas. La función trigonométrica $f(t) = 2\, sen\, t$ lo interseca en los múltiplos de π.

Ejemplo 10. A partir del gráfico de la función $y = sen\ t$, el gráfico de la función $y = 3sen\ t - 1$ es el que se visualiza en el gráfico 7.24.

Relación fundamental

¿Qué relación existe entre el seno y el coseno de un mismo ángulo?

Dado el ángulo de *t* radianes, si consideramos el radio de la circunferencia unidad y los segmentos cuya longitud definen el *sen t* y *cos t*, queda determinado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es exactamente el radio de la circunferencia unidad.

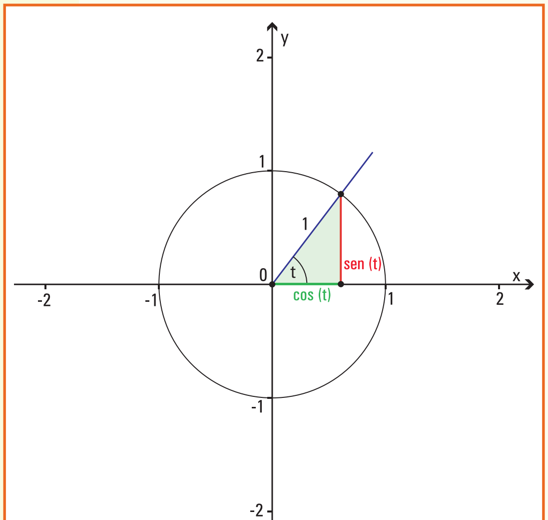


Gráfico 7.25

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$(sen\ t)^2 + (cos\ t)^2 = 1^2$$

Propiedad

Para un ángulo t se verifica:

$$sen^2\ t + cos^2\ t = 1$$

Observar: denotamos $(sen\ t)^2 = sen^2\ t$ y $(cos\ t)^2 = cos^2\ t$ a fin de precisar que el valor que se eleva al cuadrado es el resultado del *sen t* o *cos t*, y no el valor del ángulo.

De la fórmula anterior se deduce:

$$sen\, t = \pm \sqrt{1 - cos^2\ t}$$

$$cos\, t = \pm \sqrt{1 - sen^2\ t}$$

Donde el signo ± se definirá a partir de conocer el cuadrante al que pertenece el ángulo *t*.

Ejemplo 11. Utilizando la calculadora obtenemos:

$$sen\ 40° = 0{,}642788 \quad \text{y} \quad cos\ 40° = 0{,}766044$$

Calculando sus cuadrados:

$$sen^2\ 40° = 0{,}413176 \quad \text{y} \quad cos^2\ 40° = 0{,}586824$$

y realizando la suma:

$$(0{,}413176) + (0{,}586824) = 1$$

Función tangente

Llamamos función tangente del ángulo t, a la función f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ que se denota por $f(t) = tg\ t$, y se define:

$$tg\ t = \frac{sen\ t}{cos\ t}$$

La tangente del ángulo de t radianes está representada geométricamente por la ordenada del punto Q, perteneciente al lado final del ángulo t que tiene abscisa 1 (gráfico 7.26).

¡Importante!
Por definición el valor de la $tg\ t$ corresponde siempre a la ordenada de un punto cuya abscisa es $x = 1$. Entonces, si el ángulo t pertenece al segundo o tercer cuadrante, para representar geométricamente la $tg\ t$ debemos prolongar el lado final de dicho ángulo.

Ángulo t en el primer cuadrante

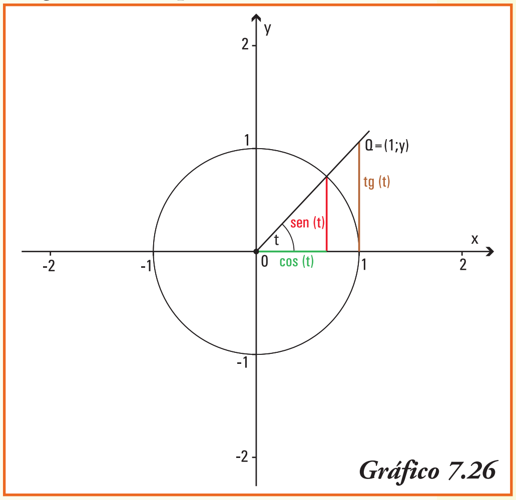


Gráfico 7.26

Ángulo t en el segundo cuadrante

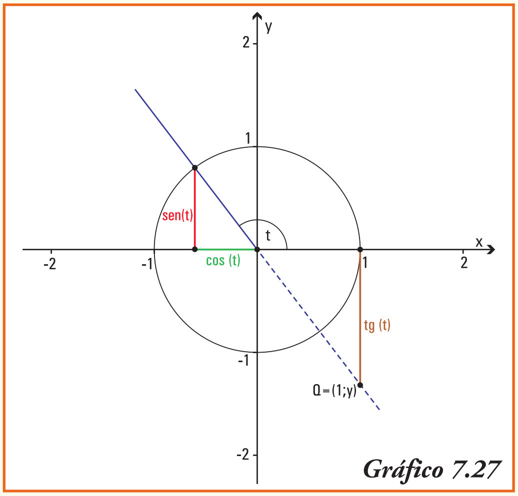


Gráfico 7.27

Ángulo t en el tercer cuadrante

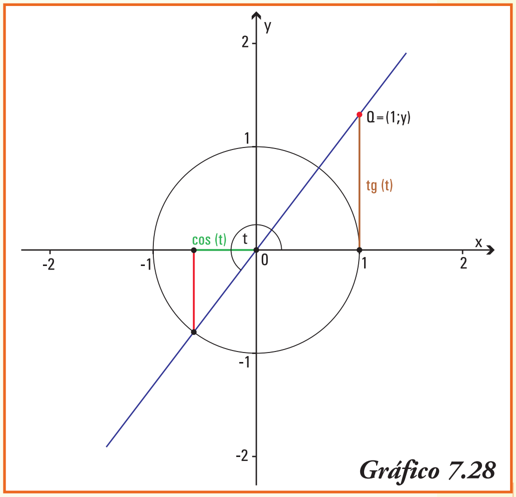


Gráfico 7.28

■ Gráfico de la función tangente

1) Valores de la función tangente para los ángulos notables

Consideremos los ángulos nulo, recto, llano y de un giro.

- Para un ángulo t de 0 radianes (ángulo nulo), el lado final del mismo (que coincide con el lado inicial) corta a la circunferencia unidad en el punto $P = (1;0)$, luego $tg\ 0 = \dfrac{sen\ 0}{cos\ 0} = 0$
- Para un ángulo t de $\dfrac{\pi}{2}$ rad (= 90º) el lado final del mismo corta a la circunferencia en el punto $P = (0;1)$ y como $cos\ \dfrac{\pi}{2} = 0$, entonces no se puede obtener el valor de $tg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

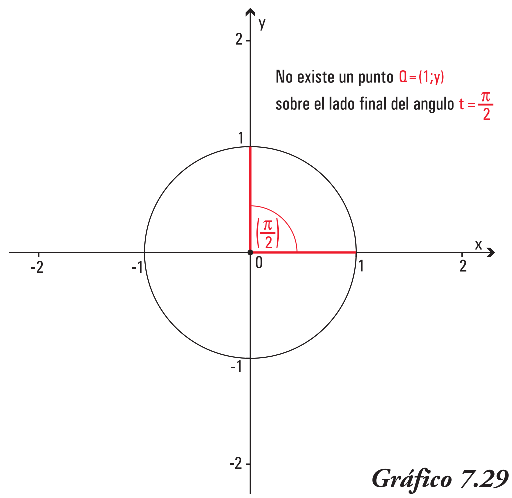


Gráfico 7.29

¡Importante!
En la representación gráfica de la tangente deberíamos encontrar un punto que, con abscisa igual a 1, se encuentre sobre el lado final del ángulo (el eje y en este caso), **lo cual ¡es imposible**! (gráfico 7.29)

•Análogamente, utilizando la definición de tangente para π rad (ángulo llano) y $\dfrac{3\pi}{2}$ rad se completa la tabla 7.6.

Tabla 7.6

Ángulo	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
tg t	0	No existe	0	No existe	0

2) Dominio e Imagen la función tangente

Por definición $tg\ t = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$ entonces la función tangente sólo se define para los valores del ángulo t que verifica $cos\ t \neq 0$, esto significa que no se puede encontrar el valor de la tangente para los ángulos que miden:

$$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Si observamos la representación geométrica de la función $tg\ t$, todos los ángulos cuyo lado final coincide con el eje y (positivo o negativo) no contienen puntos de abscisa 1. Así no se puede representar el punto Q, entonces no existe la $tg\ t$ cuando t es un múltiplo impar de $\dfrac{\pi}{2}$.

Para todo otro ángulo, el valor de la ordenada del punto Q es un número real, perteneciente al intervalo $(-\infty\ ,\ +\infty)$ entonces:

La función tangente verifica:

$$Dom\ (tg) = \mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots, \pm\frac{(2k+1)\,\pi}{2}, \ldots \right\}$$

$$Img\,(tg\ t) = \mathbf{R}$$

3) Signo de la función tangente

A partir de los signos de las funciones seno y coseno, o de la representación geométrica de la tangente del ángulo t, se pueden obtener los signos de la función tangente para los ángulos de los distintos cuadrantes del sistema de coordenadas cartesianas:

Cuadrante del Sistema de Coordenadas	I	II	III	IV
tg t	+	-	+	-

Tabla 7.7

4) Período de la función tangente

En los ángulos que miden t radianes y $(t + \pi)$ radianes, vemos que sus lados finales son semirrectas opuestas, ya que sumarle al ángulo que mide t radianes un ángulo de π radianes significa agregar un "giro de 180º". Gráficamente:

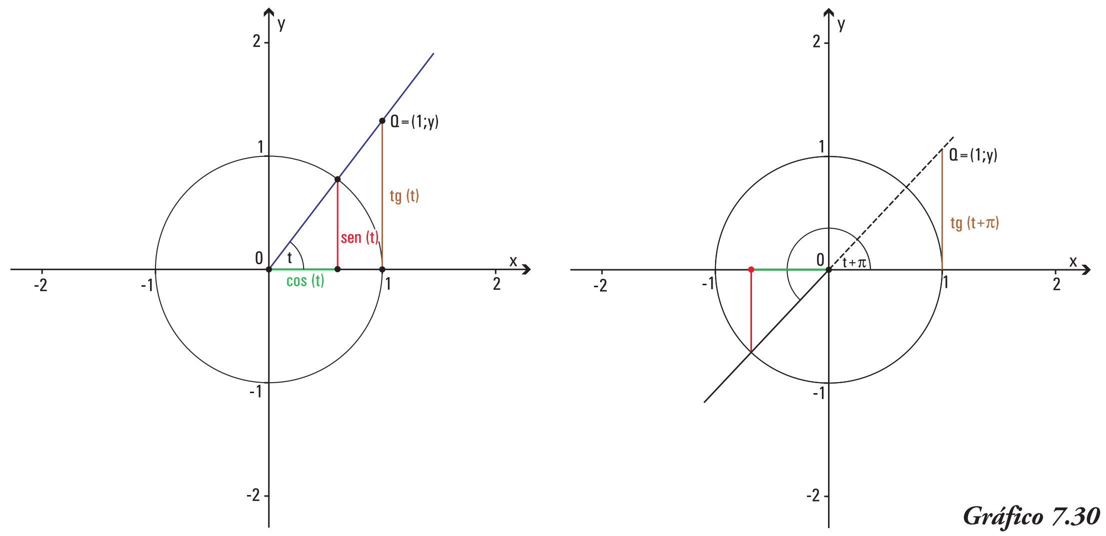


Gráfico 7.30

Por lo cual se cumple:

$$tg\ t = tg\ (t + \pi)$$

Las anteriores igualdades se mantienen para los ángulos que miden:

$$t + 2\pi,\ t + 3\pi\ ,\ t + 4\pi, \text{ etc…}$$

Generalizando, los resultados de la función tangente se repiten en los ángulos de la forma $t + k\pi$ con $k \in$ Z, luego definimos:

La función $y = tg\ t$ es una función **periódica**, de período π, es decir sus imágenes se repiten al sumar el valor constante π a la variable. En símbolos:

$$tg\ t = tg\ (t + \pi)$$

¡Importante!
Para los números reales positivos sólo debemos graficar la función tangente entre 0 y π, y luego repetir el comportamiento de la misma en cada intervalo de longitud igual al período.

5) Tangente de ángulos opuestos

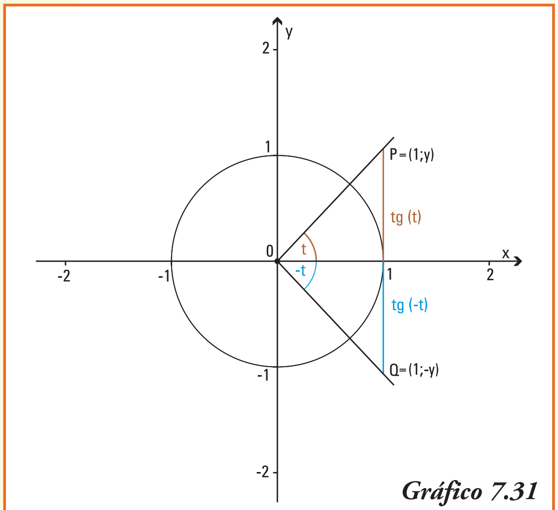


Gráfico 7.31

Los ángulos que miden t radianes y $-t$ radianes tienen sus lados iniciales coincidentes y los puntos sobre sus lados finales que tienen abscisa igual 1 son $P = (1;y)$ y $Q = (1;-y)$, respectivamente. Estos puntos son simétricos respecto del eje x. (gráfico 7.31).

Entonces se verifica que:

$$tg\ t = y \qquad tg\ (-t) = -y$$

La función $y = tg\ t$ es **simétrica** con respecto al **origen de coordenadas**, es decir las imágenes para ángulos opuestos son opuestas. En símbolos:

$$tg\ t = -tg\ (-t)$$

6) Crecimiento y decrecimiento de las función tangente

- Si consideramos dos ángulos cuyos lados finales se encuentran en el primer cuadrante (I) del sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que:

$$\text{ángulo } t_1 < \text{ángulo } t_2$$

como se observa en el gráfico 7.32, los valores de la tangente para estos ángulos verifican:

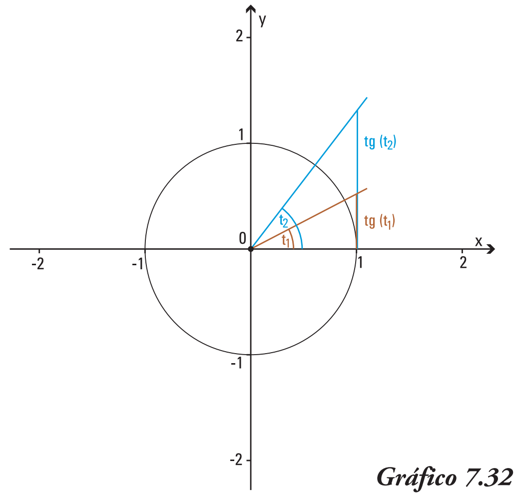


Gráfico 7.32

Por lo cual:

$$tg\ t_1 < \text{tg}\ t_2$$

Y utilizando la definición de función creciente:

La función $y = tg\ t$ es una **función creciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$.

- Si consideramos dos ángulos cuyos lados finales se encuentran en el segundo cuadrante (II) del sistema de coordenadas cartesianas, de modo tal que:

$$\text{ángulo } t_1 < \text{ángulo } t_2$$

como se observa en el gráfico 7.32, los valores de la tangente para estos ángulos verifican:

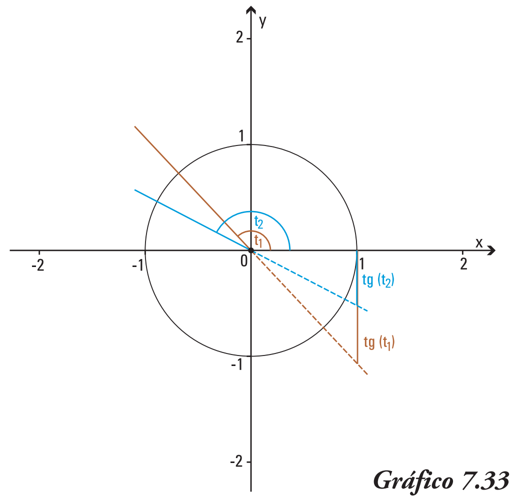


Gráfico 7.33

Por lo cual:

$$tg\ t_1 < tg\ t_2$$

Y utilizando la definición de función creciente:

La función $y = tg\ t$ es una **función creciente** para ángulos cuyos valores se encuentran entre $\dfrac{\pi}{2}$ y π.

- Análogamente, observando el gráfico para el tercer (III) y (IV) cuadrante, se justifican el comportamiento de la *tg t* en cada uno de ellos, que se presentan en la tabla 7.8.

Cuadrante del Sistema de Coordenadas	I	II	III	IV
tg t	crece	crece	crece	crece

Tabla 7.8

A partir de las propiedades anteriores y utilizando la representación de la tangente de un ángulo en la circunferencia unidad para formar pares ordenados en el sistema de coordenadas cartesianas que pertenezcan a esta función, representamos el gráfico de la función $y = tg\ t$ (gráfico7.34).

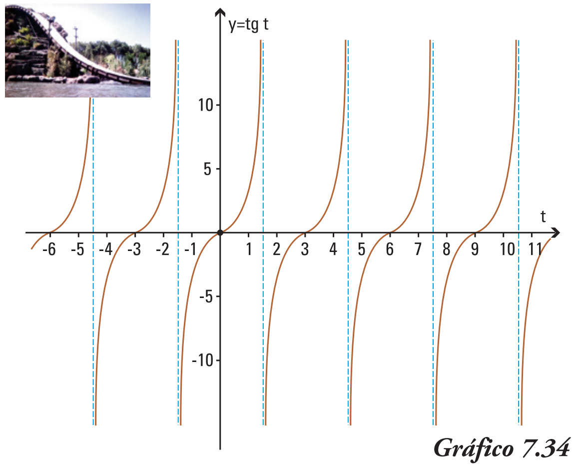


Gráfico 7.34

Ejemplo 12: Si el valor de $tg\ t = \frac{3}{2}$ y sabiendo que $tg\ t = \frac{sen\ t}{cos\ t}$ ¿será el valor del seno del ángulo t igual a 3 y el coseno del ángulo t igual a 2?

La respuesta es **no**, pues debemos recordar que los valores que alcanzan las funciones seno y coseno son siempre menores que 1. En cambio, el valor $\frac{3}{2}$ como resultado de la función tangente, podría conseguirse cuando $sen\ t = \frac{1}{2}$ y $cos\ t = \frac{1}{3}$

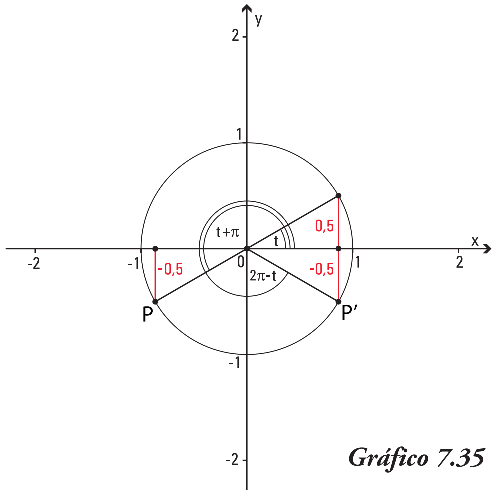


Gráfico 7.35

Ejemplo 13. Si representamos en la circunferencia trigonométrica unidad un ángulo *t* en el primer cuadrante tal que el segmento que representa el seno de dicho ángulo mide media unidad tenemos (gráfico 7.35)

A partir de la representación podemos deducir que:

1) la medida del segmento que representa el *sen* (t + π) es -0,5 ya que el lado final de este ángulo interseca a la circunferencia unidad en un punto *P* cuya coordenada *y* es la opuesta a la del punto donde el lado final del ángulo *t* interseca a la circunferencia;

2) la medida del segmento que representa el *sen* (2π - *t*) es -0,5 ya que el lado final de este ángulo interseca a la circunferencia unidad en un punto *P'* cuya coordenada *y* es la opuesta a la del punto donde el lado final del ángulo *t* interseca a la circunferencia.

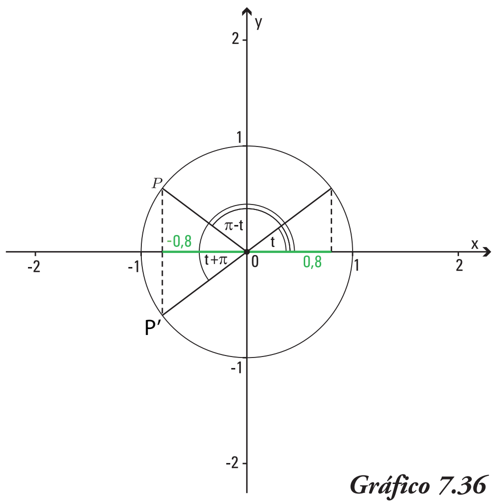


Gráfico 7.36

Ejemplo 14. Si representamos en la circunferencia trigonométrica unidad un ángulo t en el primer cuadrante tal que el segmento que representa el coseno de dicho ángulo mide 0,8 unidades (gráfico 7.36).

A partir de la representación podemos deducir que:

1) la medida del segmento que representa el $cos\ (t + \pi)$ es -0,8 ya que el lado final de este ángulo interseca a la circunferencia unidad en un punto P cuya coordenada x es la opuesta a la del punto donde el lado final del ángulo t interseca a la circunferencia;

2) la medida del segmento que representa el $cos\ (\pi - t)$ es -0,8 ya que el lado final de este ángulo interseca a la circunferencia unidad en un punto P' cuya coordenada x es la opuesta a la del punto donde el lado final del ángulo t interseca a la circunferencia.

Ejemplo 15. Si representamos en la circunferencia trigonométrica unidad un ángulo t en el primer cuadrante tal que el segmento que representa la tangente de dicho ángulo mide tres unidades (gráfico 7.37).

A partir de la representación podemos deducir que la medida del segmento que representa el $tg\ (t + \pi)$ es 3 ya que la prolongación del lado final de este ángulo coincide con el lado final del ángulo t.

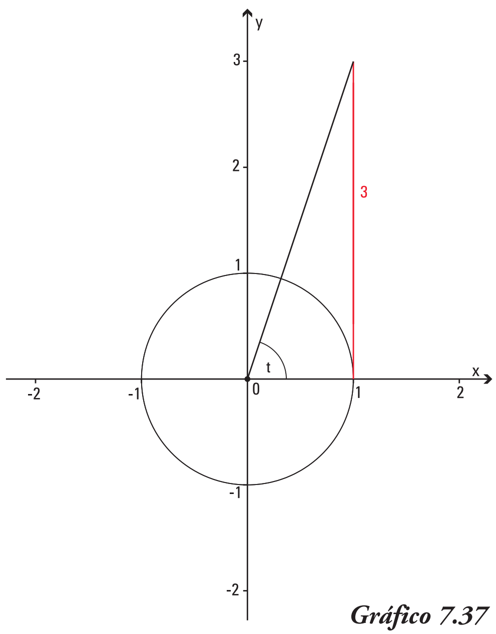


Gráfico 7.37

Funciones trigonométricas recíprocas

Se definen a partir de las funciones trigonométricas $y = sen\ t$, $y = cos\ t$ e $y = tg\ t$, las siguientes tres funciones, calculando el recíproco del valor de las mismas:

Las funciones cotangente, secante y cosecante de un ángulo t se definen como:

- Función cotangente de t $\rightarrow$ $cotg\ t = \dfrac{1}{tg\ t}$
- Función secante de t $\rightarrow$ $sec\ t = \dfrac{1}{cos\ t}$
- Función cosecante de t $\rightarrow$ $cosec\ t = \dfrac{1}{sen\ t}$

¡Importante!
Observar que las funciones trigonométricas recíprocas no aparecen definidas en las calculadoras.

La definición de estas funciones, que con el uso generalizado de las calculadoras y computadoras ya no se usan en la práctica cotidiana, tenía como principal finalidad permitir de forma simple el cálculo del seno, coseno o tangente cuando la variable (ángulo) tomaba valores próximos a cero o muy grandes.

Es por eso que en la actualidad y para la representación de modelos matemáticos han perdido vigencia.

Gráfico de la función $y = cotg\ t$

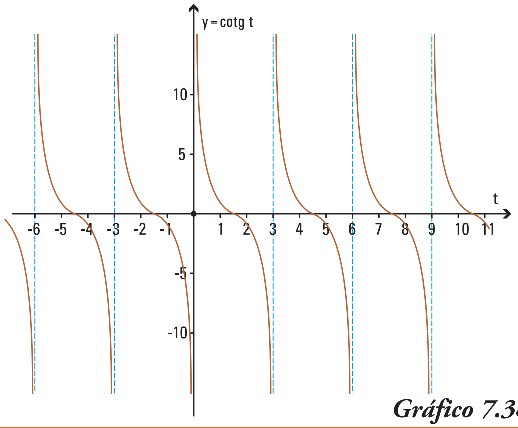


Gráfico 7.38

Gráfico de la función $y = sec\ t$

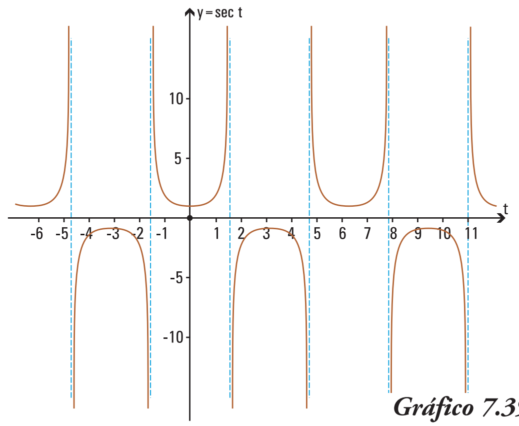


Gráfico 7.39

Gráfico de la función $y = cosec\ t$

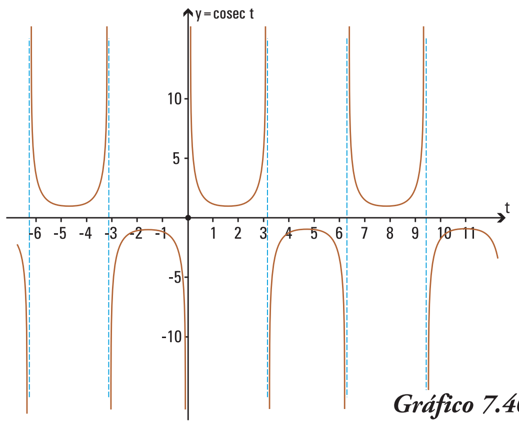


Gráfico 7.40

Ejemplo 16. Los valores de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos en el primer cuadrante de 0º, 30º, 45º, 60º y 90º se pueden obtener utilizando una "regla práctica" sin necesidad del uso de una calculadora, para eso construimos una tabla siguiendo los pasos:

Paso 1. Completamos la fila correspondiente al seno del ángulo con los números enteros desde 0 a 4.

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
sen t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
cos t					
tg t					

Paso 2. Aplicamos a cada número la operación de raíz cuadrada y dividimos por la mitad dicho resultado.

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
sen t	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos t					
tg t					

Paso 3. Calculamos los resultados y obtenemos el valor del seno de cada ángulo. Si utilizamos la calculadora para obtener los resultados anteriores, se podrá comprobar que da igual.

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
sen t	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos t					
tg t					

Paso 4. A partir de la relación fundamental, conocemos que para ángulos en el primer cuadrante $\cos t = \sqrt{1 - sen^2 t}$, entonces podemos completar la segunda fila de la tabla:

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
sen t	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos t	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tg t					

Paso 5. La definición de tangente $tg\ t = \dfrac{sen\ t}{cos\ t}$ permite completar la totalidad de la tabla[6] :

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

Ejemplo 17. A partir de la tabla de valores de seno, coseno y tangente para los ángulos del primer cuadrante que construimos, podemos afirmar que para las funciones recíprocas se cumple:

Ángulo t (º)	0º	30º	45º	60º	90º
cotg t	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
sec t	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No existe
cosec t	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

Ejemplo 18. ¿Qué ángulo/s t verifican que $sen\ t = 0{,}7$?

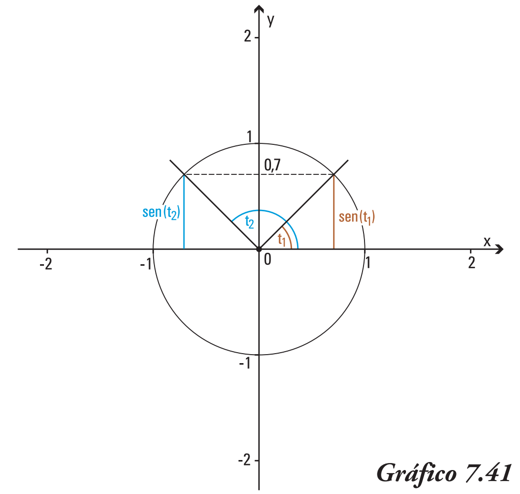


Gráfico 7.41

Para contestar esta pregunta observemos la circunferencia trigonométrica unidad y recordemos la representación del seno de un ángulo.

Debemos encontrar el ángulo cuyo "*arco*" se corresponde con el segmento que representa el *seno* del mismo. En este caso existen dos ángulos t_1 y t_2 que verifican:

$$sen\ t_1 = 0{,}7 \quad \text{y} \quad sen\ t_2 = 0{,}7$$

¿Son los únicos ángulos?

La respuesta es **no**, sólo debemos recordar que la función seno es periódica (de período 2π). Entonces:

[6] Recordar que se si “racionaliza el denominador” se verifica la fracción $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$sen\ (t_1 + 2k\pi) = 0{,}7 \quad \text{y} \quad sen\ (t_2 + 2k\pi) = 0{,}7 \text{ con } k \text{ un número entero}$$

¿Cómo encontramos t tal que $sen\ t = 0{,}7$? Necesitamos encontrar una nueva función que permita "volver" o *invertir* lo que realiza la función seno, esto es:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, bend left, "sen\ t"] & 0{,}7 \arrow[l, bend left, "sen^{-1}\ t"] \end{tikzcd}$$

La función que "deshace" o invierte el resultado obtenido por el cálculo del seno y que permite resolver la igualdad $sen^{-1}\ (0{,}7) = t$ es la función arco seno.

Funciones trigonométricas inversas

En el ejemplo anterior, observamos que existe una cantidad infinita de ángulos que al calcularle el valor del seno dan por resultado un número real comprendido en el intervalo $[-1,1]$.

Esto significa que la función seno no tiene una inversa que sea función (recordar la definición de función, en el segundo capítulo), sin embargo, podemos definir una inversa siempre que se consideren como imagen intervalos donde se cumplan la definición de función, que se obtienen a partir de considerar el gráfico de la función seno.

Análogamente ocurre para las funciones coseno y tangente.

Las funciones definidas por:

$$arc\ sen\ x: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$arc\ cos\ x: [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$arc\ tg\ x: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

son las **funciones inversas** de $y = sen\ t$, $y = cos\ t$ e $y = tg\ t$, respectivamente, y asignan a cada valor de su dominio el **ángulo cuyo arco** se corresponde con el seno, coseno o tangente del mismo.

Nota. Estas funciones también se escriben, utilizando la notación de función inversa, como: $arc\ sen\ t = sen^{-1}\ t$, $arc\ cos\ t = cos^{-1}\ t$, $arc\ tg\ t = tg^{-1}\ t$.

De esta forma aparecen en la calculadora.

Ejemplo 19. ¿Qué ángulo t verifican que $sen\ t = 0{,}7$?

Utilizando la calculadora[7] obtenemos:

$$arc\ sen\ 0{,}7 = 44{,}42^o \text{ o bien } t = 44^o\ 25'37''$$

[7] Recordar que al utilizar la calculadora en modo "degree (DEG)" el resultado que se obtiene será la medida del ángulo en el sistema sexagesimal, en cambio en el modo "radián (RAD)" el resultado que se obtiene será la medida del ángulo medido en el sistema radial.

En el sistema radial *arc sen* 0,7 es t = 0,775 rad

Gráficos de las funciones trigonométricas inversas

Gráfico de la función
y = arc sen t

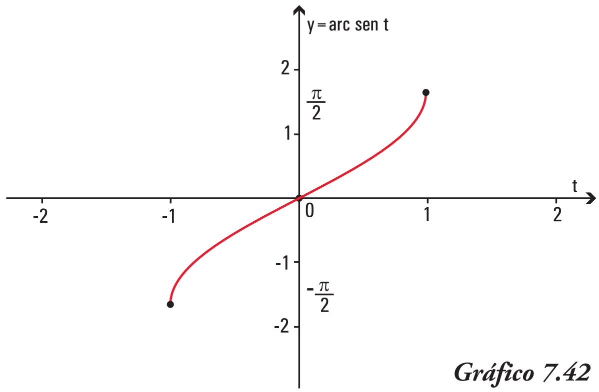


Gráfico 7.42

Gráfico de la función
y = arc cos t

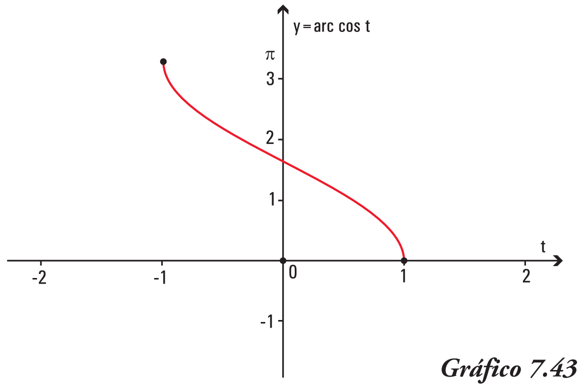


Gráfico 7.43

Gráfico de la función
y = arc tg t

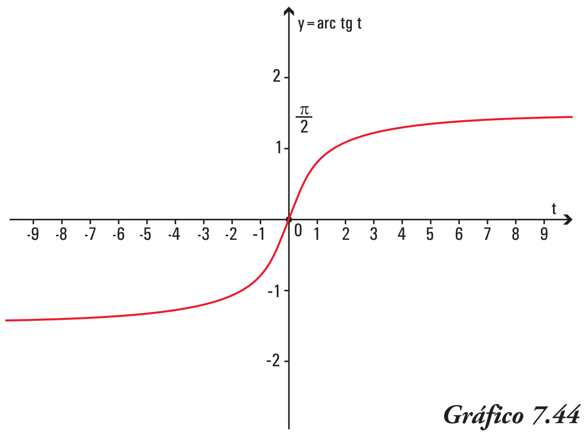


Gráfico 7.44

Observación. También se definen de igual forma las funciones trigonométricas inversas arco cotangente, arco secante y arco cosecante.

Combinando las funciones trigonométricas...

Relacionadas con las funciones trigonométricas de seno y coseno aparecen unas funciones que son combinaciones de éstas, y que se utilizan para la modelización de muchas situaciones reales. Las funciones también llamadas **funciones sinusoidales** son:

$$f(t) = a\ sen\ (bt + c) + d \quad \text{y} \quad g\ (t) = a\ cos\ (bt + c) + d$$

La principal característica de estas funciones es que sus gráficas se pueden obtener, si $b > 0$, aplicando las operaciones de funciones a las gráficas de $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$.

¡Importante!
Las constantes a, b, c, y d que aparecen en la formulación indican:

1) el valor absoluto de la constante a es la **amplitud** de la onda de la función, que indica el promedio de la diferencia entre los valores máximos y mínimos;
2) el **período** de la función es $\frac{2\pi}{b}$, e indica la longitud de la variable t a partir del cual se repetirán los valores;
3) el cociente $\frac{-c}{b}$ indica el número de unidades que se **desplazará horizontalmente** a la derecha o a la izquierda de la variable t (según sea c negativo o positivo) la gráfica de la función $f(t) = a\ sen\ (bt)$ o $g\ (t) = a\ cos\ (bt)$;
4) la constante d indica el número de unidades que se **desplazará verticalmente** la gráfica de la función $f(t) = a\ sen\ (bt + c)$ o $g\ (t) = a\ cos\ (bt + c)$.

Movimiento armónico simple

Ejemplo 20. Una aplicación de la física: **Movimiento armónico simple**

Si un cuerpo está vibrando verticalmente, la función $f(t)$ que mide (en cm) la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central, que consideramos el origen, después de t segundos, siempre que el sentido positivo sea considerado hacia arriba es:

$$f(t) = 8\,cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Entonces:
- la amplitud del movimiento es 8 cm, lo que indica que será el máximo desplazamiento;
- el período es $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$, es decir 6, lo que indica que se requiere que transcurran 6 segundos para una vibración completa del cuerpo;
- inicialmente, el cuerpo se encuentra 8 cm sobre el origen, que es la posición central, en el primer segundo baja $f(1) = 8\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ esto significa que la altura del cuerpo es de 4 cm sobre el origen, aproximadamente.

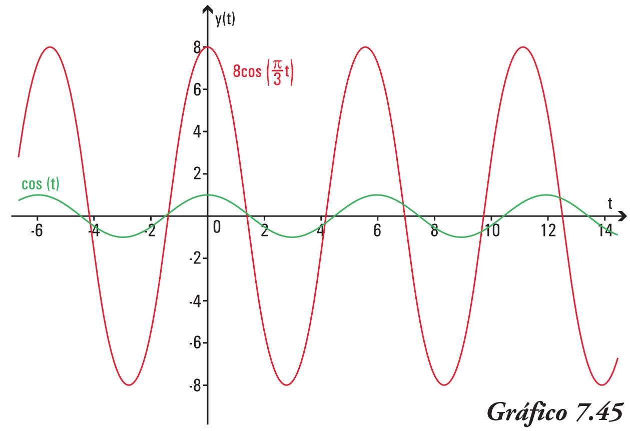


Gráfico 7.45

La representación gráfica del movimiento armónico simple que verifica esta función $f(t)$ es la indicada en el gráfico 7.45.

Ejemplo 21. Una aplicación de la economía: **temporalidad del empleo**.

Un economista dedicado a asesorar a empresas le indica a un gerente que la demanda del empleo es temporal, y expresando la misma en miles de solicitudes de trabajo por mes en su consultora, la misma se puede modelizar por la función:

$$f(t) = 4{,}3\ sen\ (0{,}8t + 1{,}5) + 7{,}3$$

donde t representa el tiempo medido en meses, a partir de enero.

A partir de la información anterior, podemos deducir que:

1) la amplitud de la función que explica la temporalidad en la presentación de solicitudes de empleo es igual a 4,3. En el contexto planteado indica el promedio de la diferencia entre los valores máximos y mínimos de solicitudes recibidas;

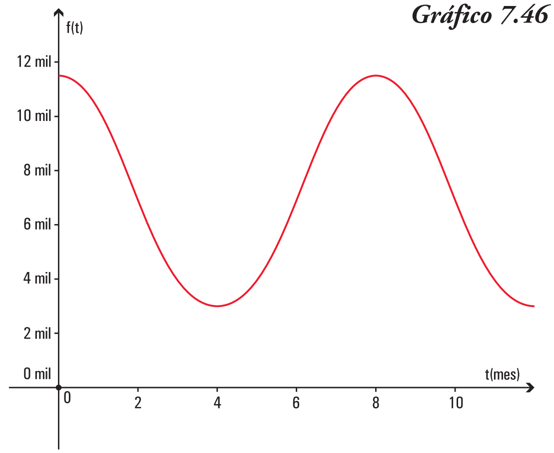
2) el desplazamiento vertical de la función temporalidad en la presentación de solicitudes de empleo es igual a 7,3;

3) el período de la función temporalidad en la presentación de solicitudes de empleo es igual a $\dfrac{2\pi}{0{,}8} \cong 7{,}85$;

4) la empresa recibe mayor número de solicitudes en los meses de enero y agosto, lo cual está indicado por el período que indica que los valores máximos se repiten cada ocho meses, aproximadamente;

5) el gráfico de la función $f(t)$ es el gráfico 7.46.

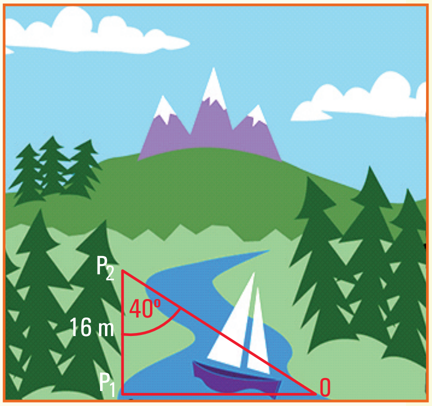
Gráfico 7.46



Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Ejemplo 22. Se necesita conocer el ancho de un río a fin de colocar adecuadamente los instrumentos que registran su altura y caudal diario. Desde la posición P_1, exactamente al frente del punto *0*, donde se colocarán los instrumentos se miden en línea recta, paralela a la corriente del río, 16 m y se marca la posición P_2. Con el uso de un teodolito se mide el ángulo $P_1 \hat{P}_2 O$, que resulta de 40º ¿Cuál es el ancho del río en la zona donde se colocarán los instrumentos de medida?

Podemos representar gráficamente →



Interpretando esta situación en un sistema de coordenadas cartesianas, y considerando que el punto P_2 se identifica con el origen del sistema:

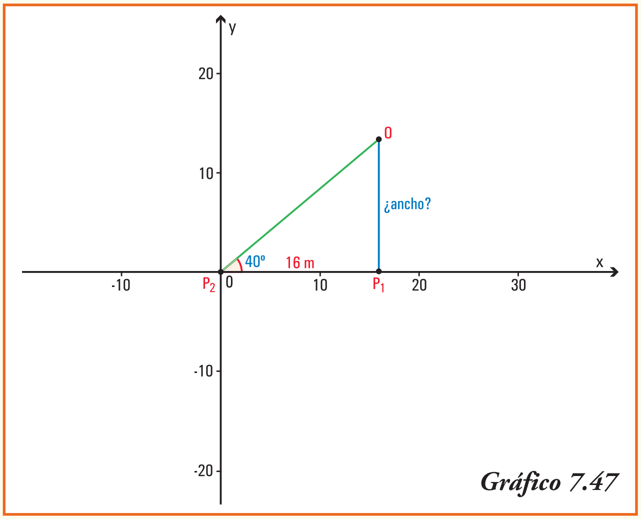


Gráfico 7.47

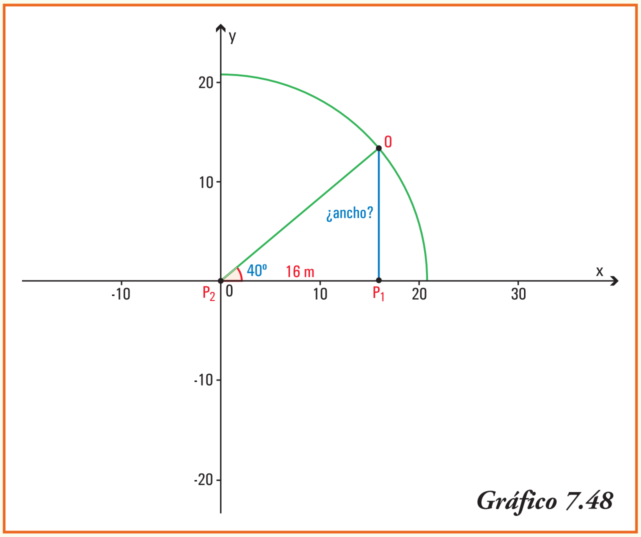


Gráfico 7.48

Notemos que si la hipotenusa del triángulo coincidiera con el radio de la circunferencia unidad, el valor del **ancho** sería el resultado del *sen* 40°, pero la circunferencia cuyo radio es la hipotenusa del triángulo considerado es mayor que 16 m ¿por qué?

r = radio del círculo

Entonces, para resolver el problema planteado debemos definir las funciones trigonométricas para ángulos de un triángulo rectángulo.

Funciones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Consideremos el triángulo rectángulo $A\hat{O}B$ de modo tal que el ángulo α coincida con el origen del sistema de coordenadas cartesianas, y el lado $\overline{OA}$ se encuentre sobre el eje x positivo.

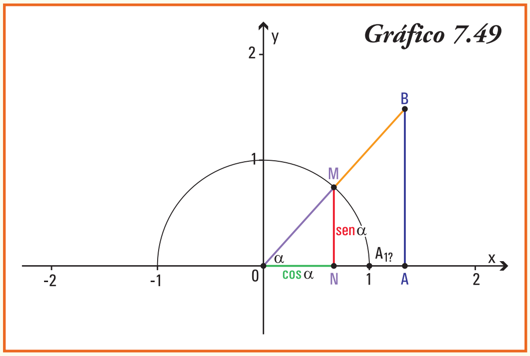


Gráfico 7.49

Por las definiciones de las funciones seno y coseno queda determinado el triángulo $N\hat{O}M$ que es semejante al triángulo $A\hat{O}B$ ya que el ángulo α es común a ambos, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{N}$ son rectos, y entonces el ángulo $\hat{M}$ es igual al ángulo $\hat{B}$. Como la hipotenusa del triángulo $N\hat{O}M$ mide $\overline{OM} = 1$, podemos concluir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{sen\ \alpha}{\overline{OM}} \rightarrow sen\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{cos\ \alpha}{\overline{OM}} \rightarrow cos\,\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

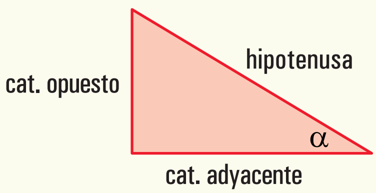
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}$$

En un triángulo rectángulo, para el ángulo agudo α se verifica:

$$sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}}$$

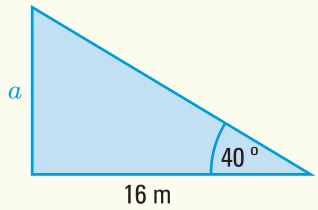
$$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}$$



Ejemplo 23. (Continuación del problema planteado en el Ejemplo 22). Se necesita conocer el ancho de un río a fin de colocar adecuadamente los instrumentos que registran su altura y caudal diario. Desde la posición P_1, exactamente al frente del punto *0*,

donde se colocarán los instrumentos se miden en línea recta, paralela a la corriente del río, 16 m y se marca la posición P_2. Con el uso de un teodolito se mide el ángulo $P_1\hat{P}_2 0$, que resulta de 40º ¿Cuál es el ancho del río en la zona donde se colocarán los instrumentos de medida?

La situación planteada se puede representar con el triángulo rectángulo:



Analíticamente

Datos

- Ángulo agudo 40º.
- Cateto adyacente al ángulo de 40º = 16 m.

Incógnita: a = *ancho* = cateto opuesto al ángulo de 40º.

Usando las relaciones entre ángulos de un triángulo y la función trigonométrica que relaciona los datos e incógnitas del problema, expresamos:

$$tg\ 40° = \frac{a}{16 \text{ m}}$$

$$a = 16 \text{ m}\ tg\ 40°$$

$$a = 13{,}4256 \text{ m}$$

Aún sin poder cruzar la cinta métrica sobre el río, podemos conocer que el ancho del mismo es de 13,43 m. (aproximadamente).

Ejemplo 24. Pablo debe colocar una cuerda desde el punto donde termina el tronco de una pequeña palmera que se encuentra en un parque y el suelo, a fin de protegerla del viento.

Como es un día soleado, la palmera está proyectando una sombra cuya longitud se puede medir sobre el verde del parque. Pablo midió la altura del tronco (desde el suelo hasta el punto donde se ramifica) y obtuvo como resultado 1,32 m, por otra parte midió la longitud de la sombra del mismo que es de 2 m.

A partir de la información anterior, cuál es la respuesta a las siguientes preguntas:

1) ¿cuál es el ángulo que forma el rayo de sol que pasa justamente por el punto donde termina el tronco (comienza el follaje) y la superficie de césped?;
2) ¿qué propiedad permite relacionar la altura del tronco de la palmera con la medida de su sombra? A partir de esta relación: ¿cuál es longitud de la cuerda que se debe atar a la palmera para que la misma no sufra los embates de los vientos?

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, planteamos gráfica y geométricamente la situación:

Analíticamente

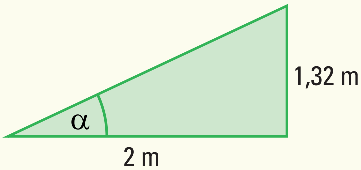
Datos:

- cateto opuesto al ángulo de α = 1,32 m;
- cateto adyacente al ángulo de α = 2 m

Incógnitas:

- ángulo α;
- hipotenusa del triángulo.

1) Para obtener el ángulo que forma el rayo de sol que pasa en el punto donde comienza el follaje de la palmera y la superficie de césped establecemos la función trigonométrica que relaciona los datos y el ángulo incógnita:



$$tg\,\alpha = \frac{1{,}32\text{ m}}{2\text{ m}}$$
$$tg\,\alpha = 0{,}66$$
$$\alpha = \text{arc } tg\, 0{,}66$$
$$\alpha = 33^\circ\, 25'\, 29''$$

El ángulo que forma el rayo de sol es de 33º aproximadamente.

2) La distancia entre el punto donde comienza el follaje de la palmera y el punto final de la sombra del mismo es el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo. Para obtener la medida de la hipotenusa utilizamos el Teorema de Pitágoras que afirma:

$$(\text{cat. opuesto})^2 + (\text{cat. adyacente})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$

En este problema:

$$(1{,}32\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$
$$1{,}7424\text{ m}^2 + 4\text{ m}^2 = (\text{hipotenusa})^2$$
$$\sqrt{5{,}7424}\text{ m} = \text{hipotenusa}$$
$$\text{hipotenusa} = 2{,}396\text{ m}$$

La distancia entre la altura máxima del tronco (comienzo del follaje) y el punto final de la sombra del mismo sobre el césped del parque es de 2,4 m.

Ejemplo 25. El edificio Empire State es el edificio más alto de Nueva York, situado al sur del barrio de Manhattan, en la Quinta Avenida. Desde el mismo se puede disfrutar de las mejores vistas de Manhattan y otras zonas características de Nueva York (Nueva Jersey, Pennsylvania, Connecticut y Massachussets).

El Empire State fue inaugurado en mayo de 1931, y cuenta con 102 pisos, 6.500 ventanas, 73 ascensores, 1.860 peldaños y su superficie es de 204.385 m². Este edificio fue declarado monumento Histórico Nacional en 1986, y después de la caída de las Torres Gemelas, es nuevamente el más alto de Nueva York.

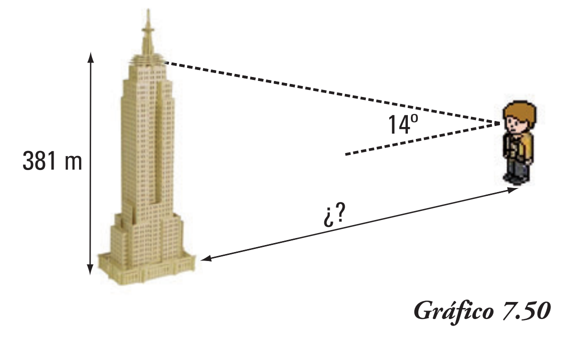


Gráfico 7.50

Este edificio tiene 381 metros de altura, hasta el último piso que es el 102. Si se incluyen los 62 metros del pináculo, su altura total llega a 443 metros. Si Agustín, cuya altura es de 1,70 m, observa el último piso con un ángulo de elevación de 14º ¿A cuántos metros de la base del Empire State se encuentra ubicado?

Para dar respuesta al problema, recordemos las definiciones de ángulo de elevación y ángulo de depresión:

Ángulo de elevación **Ángulo de depresión**

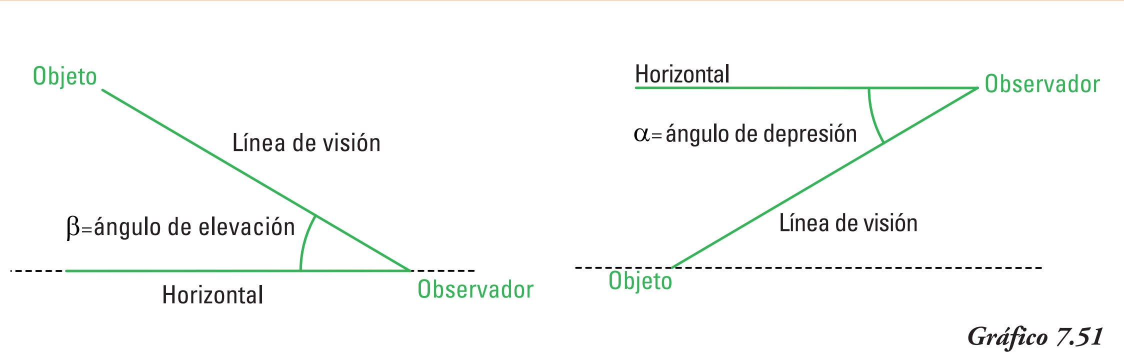


Gráfico 7.51

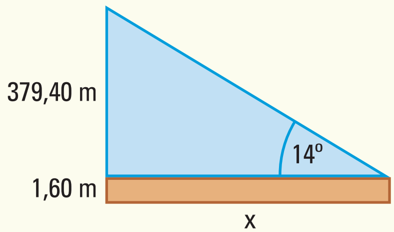
Como el ángulo de observación se define a partir de la visión del sujeto observador, supondremos que los ojos del mismo se encuentran a una altura de 1,60 m (puesto que la información que poseemos es que Agustín mide 1,70 m). Planteamos geométricamente la situación del problema.

Datos:

- altura del triángulo donde se observa el ángulo de elevación = 379,40 m;
- ángulo de elevación = 14º.

Incógnita:

- Distancia entre Agustín y el edificio = x



Conociendo el ángulo de elevación y la altura del edificio, establecemos la función trigonométrica que relaciona los datos y la medida incógnita:

$$tg\ 14^o = \frac{379{,}40 \text{ m}}{x \text{ m}}$$

$$x = \frac{379{,}40 \text{ m}}{tg\ 14^o}$$

$$x = 1.521{,}69 \text{ m}$$

En el momento planteado **Agustín se encuentra sobre la calle a 1.521,7 m** aproximadamente, observando el edificio.

Ejemplo 26. Silvina se encuentra en la ventana de su departamento que está situada a 9 m del suelo y observa la parte inferior del edificio con un ángulo de depresión de 70º. ¿Cuál es el ancho de la calle que divide el edificio donde vive Silvina y el edificio de enfrente?

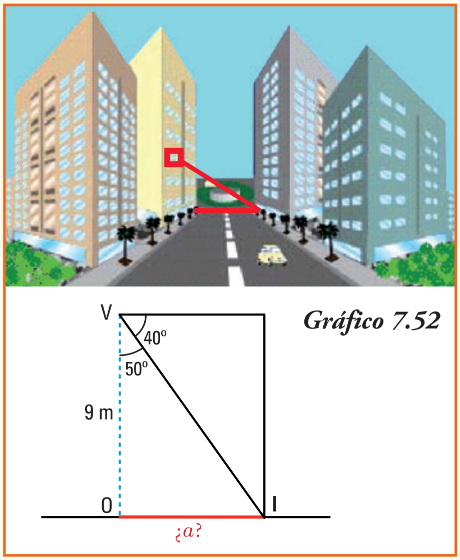


Gráfico 7.52

Para el problema planteado, la representación geométrica y los datos e incógnitas son:

Datos:

- distancia de la ventana de Silvina al suelo $\overline{VO} = 9$ m
- ángulo de depresión $\beta = 40^o$

Incógnita:

- ancho de la calle $a = \overline{OI}$

En el triángulo *OIV* conocemos la longitud del lado $\overline{OV} = 9$ m, y el valor del ángulo con vértice en V que es de 50º ya que la suma de los ángulos interiores del triángulo es igual a 180º.

Con estos datos, aplicando la función trigonométrica tangente, podemos obtener la longitud de la calle.

$$\text{tg } 50^o = \frac{\overline{OI}}{9 \text{ m}}$$

$$\overline{OI} = 9 \text{ m tg } 50^o$$

$$\overline{OI} = 10{,}73 \text{ m}$$

A partir de los cálculos podemos afirmar que el ancho de la calle es de 10,73 m.

Ejemplo 27. Virginia y Julia observan un globo aerostático. La distancia entre ellas es de 4 km, pero mientras Virginia observa el globo con un ángulo de elevación de 46º, Julia lo hace con un ángulo de elevación de 52º.

A partir de la información anterior, cuál es la respuesta de las siguientes preguntas.

1) ¿Cuál es la altura del globo aerostático en el momento de la observación?

2) ¿Qué distancia hay desde el globo al punto sobre la superficie de la tierra donde se encuentra ubicada Virginia? ¿Y dónde se encuentra Julia?

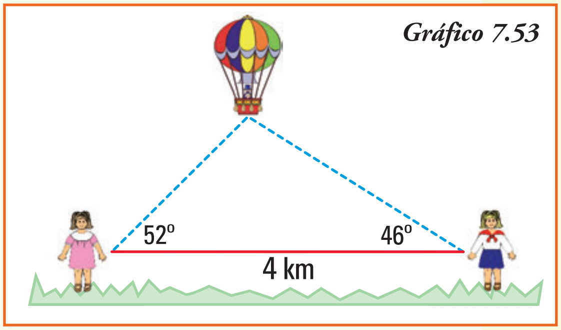
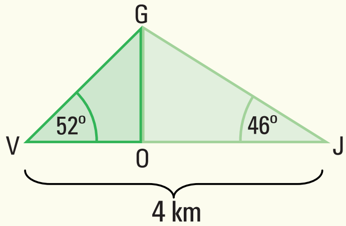


Gráfico 7.53

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, planteamos geométricamente la situación:



Datos:
- suma de las bases de los triángulos $G\hat{V}O$ y $J\hat{O}G$ = 4 km
- ángulo α = 52º
- ángulo β = 46º

Incógnita:
- distancia del globo a Virginia = longitud VG
- distancia del globo a Julia = longitud GJ
- altura del globo = longitud OG

1) Para obtener la distancia del globo a Virginia establecemos dos igualdades a partir de la función trigonométrica tangente, que relaciona el dato de la base de los dos triángulos rectángulos ($\overline{OJ} + \overline{VO}$ = 4 km) y la altura de los mismos que es coincidente:

$$tg\ 52^{o} = \frac{\overline{OG}}{\overline{VO}}$$

$$\overline{VO} \, . \, tg\ 52^{o} = \overline{OG} \quad (1)$$

Y también:

$$tg\ 46^{o} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OJ}}$$

$$tg\ 46^{o} = \frac{\overline{OG}}{4 - \overline{VO}}$$

$$(4 - \overline{VO}) \, . \, tg\ 46^{o} = \overline{OG} \quad (2)$$

Como en las dos igualdades (1) y (2) anteriores el término de la derecha $\overline{OG}$, que representa la altura del globo es el mismo, entonces podemos igualar ambas identidades y obtenemos:

$$\overline{VO} \, . \, tg\ 52^{o} = (4 - \overline{VO}) \, . \, tg\ 46^{o}$$

$$\overline{VO} \, . \, 1{,}280 = (4 - \overline{VO}) \, . \, 1{,}036$$

$$\overline{VO} \, . \, 1{,}280 = 4{,}144 - \overline{VO} \, . \, 1{,}036$$

$$\overline{VO} \, . \, 1{,}280 + \overline{VO} \, . \, 1{,}036 = 4{,}144$$

$$\overline{VO} \, . \, (1{,}280 + 1{,}036) = 4{,}144$$

$$2{,}316\ \overline{VO} = 4{,}144$$

$$\overline{VO} = 1{,}79 \text{ km}$$

La distancia entre Virginia y el globo, que es la longitud de la hipotenusa del triángulo $G\hat{V}O$, se puede calcular utilizando la función trigonométrica que relaciona la medida del segmento $\overline{VO}$ con la hipotenusa:

$$cos\ 52^o = \frac{\overline{VO}}{\overline{VG}}$$

$$\overline{VG} = \frac{1{,}79 \text{ km}}{cos\ 52^o}$$

$$\overline{VG} = 2{,}91 \text{ km}$$

La distancia entre el globo y Virginia, medida en línea recta, es de 2,91 km.

2) Para obtener la distancia del globo a Julia, conocemos que $\overline{OJ} = 2{,}21$ km, y como dicha distancia es la longitud de la hipotenusa del triángulo $G\hat{O}J$, se puede calcular utilizando la función trigonométrica que relaciona la medida del segmento $\overline{OJ}$ con la hipotenusa:

$$cos\ 46^o = \frac{\overline{OJ}}{\overline{GJ}}$$

$$\overline{GJ} = \frac{2{,}21 \text{ km}}{cos\ 46^o}$$

$$\overline{GJ} = 3{,}18 \text{ km}$$

La distancia entre el globo y Julia, medida en línea recta, es de 3,18 km.

3) Para obtener la altura a la que se encuentra el globo utilizamos, en el triángulo $G\hat{V}O$, la función trigonométrica seno que relaciona el dato de la hipotenusa y la altura del mismo:

$$sen\ 52^o = \frac{\overline{GO}}{\overline{VG}}$$

$$\overline{GO} = sen\ 52^o . 2{,}91 \text{ km}$$

$$\overline{GO} = 2{,}29 \text{ km}$$

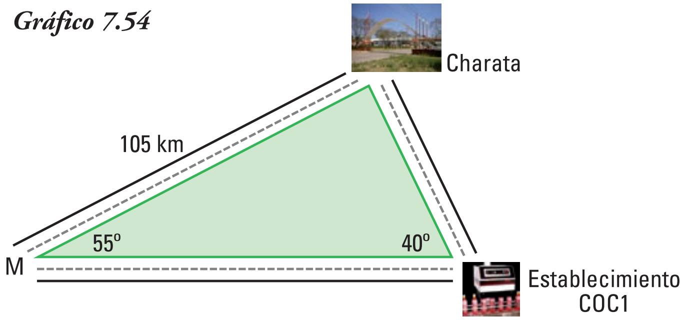
En el momento en que Virginia y Julia están observando, el globo aerostático se encuentra a 2.290 m o 2,29 km del suelo.

Ejemplo 28. Se necesita conocer el costo que insumirá el transporte de la producción de una empresa embotelladora de gaseosa, desde su establecimiento "COC1" hasta la ciudad de Charata en Chaco. Por datos obtenidos utilizando el sistema de posicionamiento global GPS y viajes anteriores, se conoce la siguiente información:

Sabiendo que el costo por kilómetro recorrido del transporte es de $ 1,30, y que cada viaje se realizará por la ruta que une ambos destinos en forma directa, es decir sin pasar por el punto M de intersección de rutas, ¿cuál es el costo de cada viaje?

Notemos que el triángulo que determina los datos del problema no es rectángulo ya que los ángulos conocidos no son rectos y la suma de los mismos supera 90º (gráfico 7.54). Entonces, para hallar la solución debemos completar el estudio de las funciones trigonométricas con el siguiente teorema.

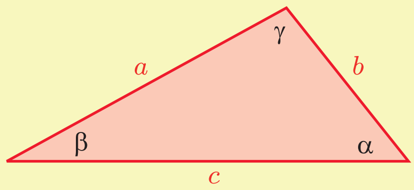
Gráfico 7.54



Teorema del seno

En todo triángulo se verifica que los cocientes entre cada lado y el seno del ángulo opuesto a dicho lado son iguales.

En símbolos: $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,\beta} = \dfrac{c}{sen\,\gamma}$



Demostración

Realizaremos la demostración de la primera igualdad:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

Para comprobar la segunda se deben realizar los mismos pasos.

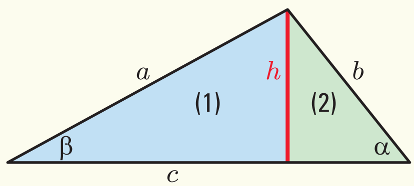
Para comprobar esta igualdad, trazamos en el triángulo, cuyos lados son los segmentos a, b y c, la altura h que divide al mismo en dos triángulos rectángulos: el triángulo rectángulo que señalamos con (1) y el triángulo rectángulo que señalamos con (2)

En el triángulo (1) se verifica: $sen\,\beta = \dfrac{h}{a} \quad \rightarrow \quad h = a\,.\,sen\,\beta$

En el triángulo (2) se verifica: $sen\,\alpha = \dfrac{h}{b} \quad \rightarrow \quad h = b\,.\,sen\,\alpha$

Como la altura h es la misma para ambos triángulos rectángulos, igualando las dos identidades anteriores, se obtiene:

$$a\,.\,sen\,\beta = b\,.\,sen\,\alpha$$



o bien:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

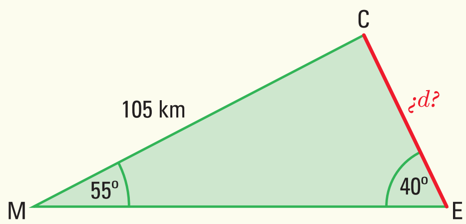
¡Importante!
En el enunciado del Teorema del seno aparece un cociente, debemos entonces asegurar que los denominadores son distintos de cero, por ser los ángulos de todo triángulo mayores que 0º y menores que 180º. Esta afirmación es siempre verdadera (verificar definición de seno de un ángulo).

¿Cuándo podemos aplicar el Teorema del seno?

- En todo triángulo.
- Si los datos son: dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Si los datos son: dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Ejemplo 29. (continuación del ejemplo 28)

Para conocer el costo que insumirá el transporte de la producción de una empresa embotelladora de gaseosa, desde su establecimiento "COC1" hasta la ciudad de Charata, se conoce como información:



En el problema planteado los datos e incógnitas son:

Datos:
- distancia de la intersección de rutas M a Charata $\overline{MC} = 105$ km
- ángulo en la intersección de rutas M $\alpha = 55º$
- ángulo en la intersección de rutas E $\beta = 40º$

Incógnita:
- distancia de la embotelladora a Charata $d = \overline{EC}$

Como los datos son dos ángulos de un triángulo no rectángulo y el lado opuesto a uno de ellos, aplicando el Teorema del seno planteamos:

$$\frac{105\ km}{sen\ 40º} = \frac{d}{sen\ 55º}$$

$$d = \frac{105\ km\ .\ sen\ 55º}{sen\ 40º}$$

$$d = 133{,}81\ km.$$

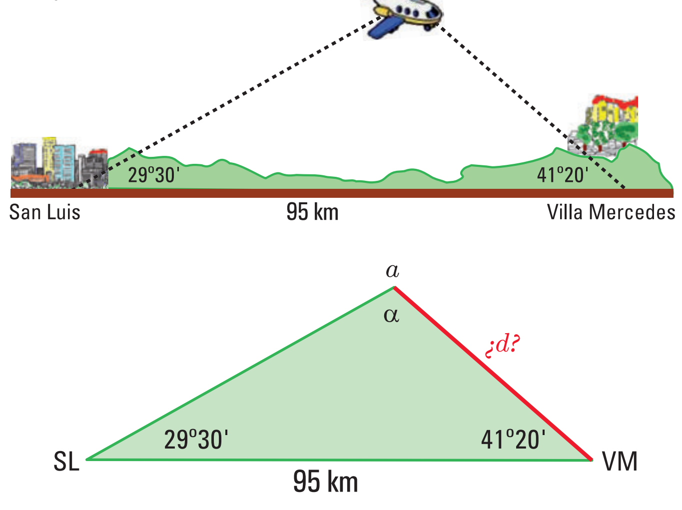
Como el costo del viaje es de $ 1,30 por kilómetro y la distancia a recorrer desde el establecimiento COC1 a la ciudad de Charata es de 133,81 km, el costo total del transporte de la producción será de $ 173,96 por cada viaje.

Ejemplo 30. La ciudad de Villa Mercedes se halla ubicada al centro-este de la provincia de San Luis. Posee un aeropuerto, que recibe vuelos de cabotaje de las principales ciudades del país. En la actualidad, es el centro comercial que sigue en importancia a la capital provincial y se caracteriza por su trazado edilicio moderno, con amplias calles arboladas, parques y paseos públicos.

Esta ciudad es conocida popularmente por el atractivo que presenta su "calle angosta" a la cual le han compuesto canciones folklóricas y versos, transformándose en una auténtica postal de la ciudad.

Un avión vuela entre las ciudades de San Luis y Villa Mercedes, que distan 95 km. Las visuales del avión, medidas desde los aeropuertos de San Luis y Villa Mercedes, forman ángulos de 29º 30' y 41º 20' respectivamente, con la horizontal. ¿Cuál es la distancia, si se considera en línea recta, desde el avión al aeropuerto de Villa Mercedes?

Gráfico 7.55



En el problema planteado los datos e incógnitas son:

Datos:
- distancia de Villa Mercedes a San Luis = 95 km;
- ángulo de observación desde San Luis = 29º 30';
- ángulo de observación desde Villa Mercedes = 41º 20'.

Incógnita:
- distancia del avión al aeropuerto de Villa Mercedes = d

Como los datos conocidos son dos ángulos de un triángulo (no rectángulo) y un lado, necesitamos conocer el valor del ángulo opuesto a dicho lado para aplicar el teorema del seno. Por la propiedad de suma de ángulos interiores de un triángulo planteamos:

$$\alpha + 29^\circ\, 30' + 41^\circ\, 20' = 180^\circ$$
$$\alpha = 109^\circ\, 10'$$

Con los datos del problema y el valor del ángulo opuesto a la distancia conocida, podemos calcular:

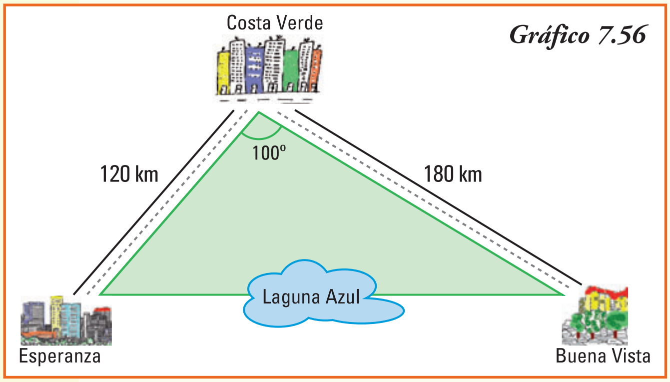
$$\frac{95\ km}{sen\ 109°10'} = \frac{d}{sen\ 29°30'}$$

$$d = \frac{95\ km\ .\ sen\ 29°30'}{sen\ 109°10'}$$

$$d = 49{,}53\ km$$

En línea recta, la distancia entre el aeropuerto de Villa Mercedes y el avión es de 49,53 km.

Ejemplo 31. Se desea construir una autovía para unir en forma directa las localidades de Esperanza y Buena Vista, para eso se realiza un puente sobre la laguna Azul. En la actualidad, se llega a la ciudad de Buena Vista siguiendo el trayecto Esperanza - Costa Verde - Buena Vista.



En el gráfico 7.56 se muestran los datos existentes.

Nos preguntamos, ¿en cuántos kilómetros se disminuirá el viaje con la nueva red vial?

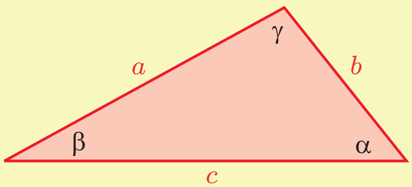
El triángulo que determinan los datos del problema no es rectángulo, y tampoco aparecen como información los ángulos de los lados opuestos conocidos, lo que permitiría utilizar el teorema del seno.

Para responder a hallar la solución debemos completar el estudio de las funciones trigonométricas con otro teorema que se aplica a las relaciones de cualquier triángulo.

Teorema del coseno

En todo triángulo se verifica que el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman los mismos.

En símbolos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



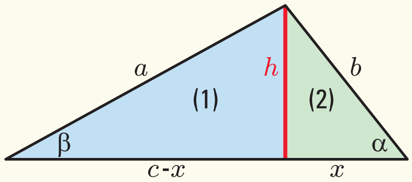
Demostración
Realizaremos la demostración de la primera igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Para comprobar la misma en los restantes lados se deben realizar los mismos pasos.

Para comprobar esta igualdad, trazamos, en el triángulo cuyos lados son los segmentos *a*, *b* y *c*, la altura *h* que divide al mismo en dos triángulos rectángulos: el triángulo rectángulo que señalamos con (1) y el triángulo rectángulo que señalamos con (2)

En el triángulo (2) supondremos que la base es *x* y por lo tanto la base del triángulo (1) será: $c - x$.



En el triángulo rectángulo (1) aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

Resolviendo el cuadrado de la diferencia:

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \qquad (*)$$

En el triángulo rectángulo (2) se verifican las relaciones trigonométricas definidas en los mismos, por lo que:

$$sen\,\alpha = \frac{h}{b} \quad \rightarrow \quad h = b\,.\,sen\,\alpha$$

$$cos\,\alpha = \frac{x}{b} \quad \rightarrow \quad x = b\,.\,cos\,\alpha$$

Como hemos escrito *h* y *x* en función de los datos conocidos, reemplazando éstos en la identidad (*), podemos escribir:

$$a^2 = (b\,sen\,\alpha)^2 + c^2 - 2c\,(b\,cos\,\alpha) + (b\,cos\,\alpha)^2$$

$$a^2 = b^2\,sen^2\,\alpha + c^2 - 2bc\,cos\,\alpha + b^2\,cos^2\,\alpha$$

$$a^2 = b^2\,(sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha) + c^2 - 2bc\,cos\,\alpha$$

El término que aparece entre paréntesis en la igualdad anterior es, exactamente, la relación fundamental entre seno y coseno de un mismo ángulo: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$, concluimos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\alpha$$

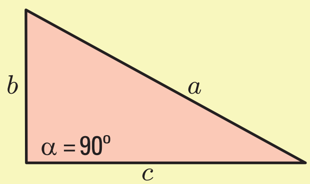
¡Importante!
El Teorema del coseno, si se aplica a un triángulo rectángulo, resulta el enunciado del Teorema de Pitágoras.

Por teorema del coseno en el triángulo de la figura conocemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,90°$$

y como $cos\,90° = 0$, entonces se obtiene:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



¿Cuándo podemos aplicar el Teorema del coseno?

- En todo triángulo.
- Si los datos son: dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos.
- Si los datos son: los tres lados de un triángulo.

¡Importante!
A partir de la relación expresada por el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

es posible obtener el valor del coseno del ángulo α que forman los lados a y b del triángulo:

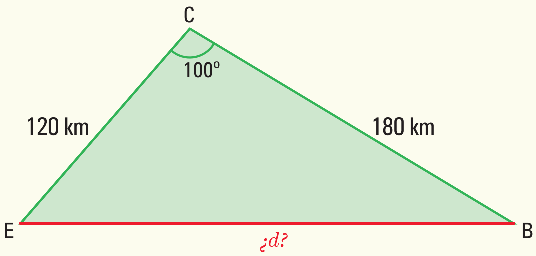
$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

y de esta última ecuación, utilizando la función inversa se puede conocer el valor del ángulo α.

De manera análoga, siempre aplicando el Teorema del coseno, se obtienen los restantes ángulos de un triángulo a partir de conocer las medidas de los lados.

Ejemplo 32. (continuación del ejemplo 31)

Necesitamos conocer la distancia a cubrir con la autovía y el puente, que se deben construir, para unir en forma directa las localidades de Esperanza y Buena Vista, a partir de la información conocida. Lo que permitirá obtener en cuántos kilómetros se disminuirá el viaje luego de construida la nueva red vial.



Geométricamente los datos e incógnitas son:

Datos:
- distancia de Esperanza a Costa Verde $\overline{EC}$ = 120 km;
- distancia de Buena Vista a Costa Verde $\overline{BC}$ = 180 km;
- ángulo en la intersección de rutas α = 100º.

Incógnita:
- distancia de Esperanza a Buena Vista $d = \overline{EB}$.

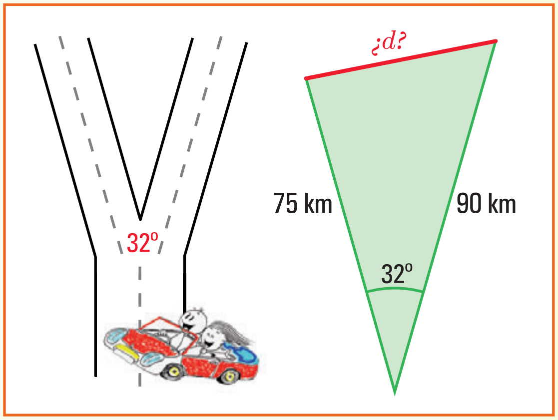
Como los datos son dos lados de un triángulo no rectángulo y el ángulo comprendido por ellos, aplicando el Teorema del coseno planteamos:

d^2 = (120 km)^2 + (180 km)^2 - 2 (120 km)(180 km) $\cos$ 100°
d^2 = 14.400 km^2 + 32.400 km^2 - 43.200 km^2 (-0,1736)

$d^2 = 54.299{,}52 \text{ km}^2$
$d = 233{,}02 \text{ km}$

Cuando la nueva estructura vial permita conectar en forma directa Buena Vista y Esperanza se ahorrarán 66,98 km, aproximadamente, ya que el recorrido actual es de 300 km.

Ejemplo 33. Dos automóviles se encuentran transitando una misma autopista, en un punto la autopista se bifurca en dos caminos que forman entre sí un ángulo de 32º y cada automóvil sigue por un camino diferente. Si el primer automovilista continúa por uno de los nuevos caminos a una velocidad constante de 75 km por hora y el otro automovilista lo hace a 90 km por hora, ¿a qué distancia se encuentran los automóviles una hora después que se separaron?



Los datos e incógnitas son:

Datos:
- distancia recorrida por el primer automovilista en una hora = 75 km;
- distancia recorrida por el segundo automovilista en una hora = 90 km;
- ángulo en la bifurcación de la autopista $\alpha = 32°$.

Incógnita:
- distancia entre los automovilistas después de una hora = d

Como los datos son dos lados de un triángulo no rectángulo y el ángulo comprendido por ellos, aplicando el Teorema del coseno planteamos:

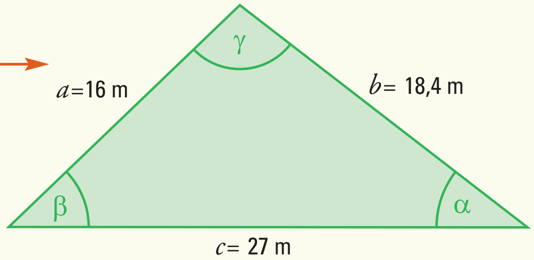
$d^2 = (75 \text{ km})^2 + (90 \text{ km})^2 - 2\,(75 \text{ km})(90 \text{ km}) \cos 32°$
$d^2 = 5.625 \text{ km}^2 + 8.100 \text{ km}^2 - 13.500 \text{ km}^2\,(0{,}8480)$
$d^2 = 2.277 \text{ km}^2$
$d \ = 47{,}71 \text{km}$

Una hora después que ambos automovilistas toman rutas distintas, en línea recta la distancia entre ellos es de 47,71 km, siempre que mantengan sus velocidades constantes.

Ejemplo 34. El pueblo de Alcira, más conocido por el nombre de su estación ferroviaria Gigena, está ubicado en el departamento Río Cuarto, al sur de la provincia de Córdoba. Lo une a la capital de la provincia la Ruta Nacional Nº 36 y se encuentra a una distancia de 170 km.

El municipio de Alcira (Gigena) ha decidido colocar césped en un cantero de su plaza central, que tiene forma triangular. Las longitudes de sus tres lados miden 27 m, 16 m y 18,4 m. El costo de implantación de césped es de \$20 por metro cuadrado. ¿Cuál será el gasto total

que tendrá el municipio?
Podemos representar el problema con el esquema siguiente



A partir de la información anterior, podemos expresar que:

1) la relación entre las funciones trigonométricas que se debe utilizar para obtener el valor de los ángulos del triángulo que forma el cantero es el *Teorema del Coseno*;

2) los ángulos del triángulo que forma el cantero miden, respectivamente, 103º 12', 35º 14', y 41º 34', que se obtienen aplicando la relación derivada del *Teorema del coseno*:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}, \quad \cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \quad \text{y} \quad \cos\gamma = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{-2ab}$$

3) la superficie del cantero es de 164,84 m^2, ya que la altura del mismo es igual a 12,21m la cual se obtiene de la relación:

$$\operatorname{sen}(41^{o}34') = \frac{altura}{18,4}$$

4) para colocar el césped al cantero se deberá gastar $3.296,80.

Consideraciones Finales

Como el objetivo de este texto es estudiar las funciones que permiten modelizar situaciones reales, la presentación y el estudio de Trigonometría se realizó poniendo énfasis en las **Funciones Trigonométricas**. Sin embargo, no se redujo el tema matemático, más aún utilizando el teorema del seno y del coseno se puede realizar la resolución completa de un triángulo.

Por otra parte, las computadoras y aún las calculadoras personales, permiten obtener los resultados que, en una exposición tradicional de trigonometría algebraica, necesitaban del estudio de gran cantidad de fórmulas para la resolución de triángulos.

Construcción de un modelo trigonométrico

Se propone realizar, para la siguiente situación, un modelo que permita su representación matemática y, utilizando el mismo, encontrar la respuesta a las actividades planteadas (es aconsejable trabajar en grupo).

1) La profundidad del agua en la zona para surfear en Mar del Plata varía de un mínimo de 1,5 m a un máximo de 4,5 m, dependiendo del estado del tiempo. El último domingo de enero la pleamar (mayor altura de la marea) se registró a las 5,00 h. y la siguiente pleamar fue a las 18,30 h. Definir una función seno que permita modelizar la profundidad del agua de Mar del Plata, en la zona apta para surfear, en función del tiempo t, en horas a partir de la medianoche del último sábado de enero.
2) En un camino rural, a causa de inundaciones, se produjo un barranco. Para poder restablecer el tránsito se debe salvar dicho barranco de 25m de profundidad construyendo un puente. Desde cada una de las orillas del barranco se ve una piedra en el fondo del mismo con ángulos de depresión de 43º y 27º respectivamente. ¿De qué longitud se debe realizar el puente?

Sugerencias para armar los modelos

Situación 1

1) A partir de los datos planteados identificar los parámetros de la función sinusoidal que permitirá representar la profundidad del agua en función del tiempo, medido en horas desde las 0 horas.
2) Encontrar los valores del período, amplitud y desplazamientos horizontal y vertical.
3) Escribir la función sinusoidal y realizar un gráfico de la misma, a fin de observar los cambios en la profundidad del agua.

Situación 2

1) A partir de los datos planteados realizar un esquema que represente la situación.
2) Plantear las relaciones trigonométricas que permitan dar respuesta a la longitud del puente a construir.

Ejercicios

Ejercicio 1. Trazar la circunferencia unidad y un ángulo de t radianes en el primer cuadrante. A partir del ángulo dibujado representar el ángulo de $(\pi - t)$ radianes y obtener las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante para los dos ángulos representados.

Ejercicio 2. Trazar la circunferencia unidad y un ángulo de t radianes en el primer cuadrante. A partir del ángulo dibujado representar el ángulo de $(\pi + t)$ radianes y obtener las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante para los dos ángulos representados.

Ejercicio 3. Trazar la circunferencia unidad y un ángulo de t radianes en el primer cuadrante. A partir del ángulo dibujado representar el ángulo de $(2\pi - t)$ radianes y obtener las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante para los dos ángulos representados.

Ejercicio 4. La medida de dos ángulos de un triángulo son, respectivamente, de 45º y $5/8\pi$ radianes. ¿Cuánto mide el tercer ángulo en grados sexagesimales? ¿Y en el sistema radial?

Ejercicio 5. Si el $A\hat{B}C$ es un triángulo rectángulo en A y el segmento $\overline{AB}$ mide 20 cm y el ángulo β, opuesto a ese lado, mide 42º. Calcular:

a) el lado $\overline{AC}$
b) el lado $\overline{BC}$
c) el ángulo γ

Ejercicio 6. Si $M\hat{N}O$ es un triángulo rectángulo en M y los lados $\overline{NO}$ y $\overline{MO}$ miden, respectivamente, 8 cm y 6 cm. Calcular:

a) el lado $\overline{NM}$
b) el ángulo con vértice en N
c) el ángulo con vértice en O

Ejercicio 7. En un triángulo se conoce el valor de los dos ángulos interiores y un lado que corresponde a ambos ángulos, que son: $\alpha=45°$, $\beta=105°$ y $c = \sqrt{2}$ cm

Determinar la longitud de los tres lados.

Ejercicio 8. En un triángulo se conoce la medida de dos lados y la del ángulo que se forma con los mismos: lado $a = 2$ cm, lado $b = 1 + \sqrt{3}$ cm y ángulo comprendido $\gamma = 60°$. Determinar la longitud del tercer lado y la medida de los dos ángulos restantes.

Ejercicio 9. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol si Ramiro, que mide 1,75 m de estatura, produce una sombra de 82 cm de longitud en el suelo?

Ejercicio 10. El edificio donde vive Walter está ubicado a 12 m de la casa del frente. Calcular la altura del edificio donde vive Walter, si estando sentado sobre el techo del mismo, ve el borde de la casa del frente con un ángulo de depresión de 40º.

Ejercicio 11. La cuerda con que se sostiene un cometa se encuentra tensa y forma un ángulo de 48 grados, si lo consideramos con respecto a la horizontal.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es la altura del cometa, con respecto al suelo, si la longitud de la cuerda es de 50 m y el extremo de la misma la estamos sosteniendo a 1,3 m del suelo?

Ejercicio 12. Una escalera de aluminio, cuya longitud es de 6 m está apoyada sobre una pared vertical de tal manera que el pie de la misma queda a 1,5 m de la base de la pared.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es el ángulo que la escalera forma con la pared?

c) ¿Hasta qué altura de la pared llega la escalera?

Ejercicio 13. Un árbol que se quebró por el viento, quedó de forma tal que sus dos partes forman con la tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de 35º con el piso, y la distancia, medida sobre el suelo, desde el tronco hasta la cúspide caída es de 5 m ¿Qué altura tenía el árbol?

Ejercicio 14. Si medimos los ángulos de elevación de una antena de telefonía móvil desde el extremo superior y desde la base de una torre de departamentos que tiene 20 m de altura obtenemos, 38,5° y 40,2° respectivamente.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es la altura de la antena de telefonía?

Ejercicio 15. Dos piedras se encuentran a la orilla de un lago en línea recta una de la otra y separadas por una distancia de 1.800 m en línea recta, las cuales representamos con los puntos A y B. Dentro del lago se encuentra una embarcación situada en un punto C. Si el ángulo con vértice en la piedra A ($C\hat{A}B$) mide 79° y el que tiene vértice en B ($C\hat{B}A$) mide 43°.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿A qué distancia está la embarcación de la costa (línea recta virtual que une ambas piedras?

Ejercicio 16. Olga está parada en la cúspide de un faro, que tiene una altura de 80 m, y observa mirando hacia el oeste dos veleros situados en la misma línea imaginaria; los ángulos de depresión, con respecto a cada uno de ellos, son de 60º y 40º.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es la distancia que separa los veleros?

Ejercicio 17. Para la celebración del día de la Independencia se coloca una gran bandera en la parte superior del edificio de Aduanas. Desde un punto situado en el suelo, que dista 12 m del edificio, se observa el techo del mismo un ángulo de elevación de 20º y la punta del asta de la bandera con un ángulo de elevación de 50º.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es la altura del edificio de Aduanas?

c) ¿Cuál es la longitud del asta de la bandera colocada?

Ejercicio 18. Un globo aerostático, que vuela a una altitud de 150 m, pasa exactamente sobre nuestra casa. Un minuto más tarde, y siempre manteniendo igual altitud, el ángulo de depresión de la casa, observada desde el mismo globo, es de 38º. ¿Cuál es la velocidad aproximada con que avanza el globo?

Ejercicio 19. Un topógrafo situado en un punto C de un terreno con sus instrumentos para medición localiza dos puntos A y B en los extremos opuestos de un lago. Si C está a 5.000 m de A y a 7.500 m de B y el ángulo ACB mide 95º.

a) Representar la situación gráficamente.

b) ¿Cuál es el ancho máximo del lago?

Ejercicio 20. Dos guardaparques en un Parque Nacional descubren la misma fogata clandestina en dirección NO 52º y NE 55º, de sus posiciones respectivas. El segundo guardabosque estaba a 1,93 km al oeste del primero. Si el guardabosque más cercano al fuego es el que debe acudir. ¿Cuál de ellos tiene que ir y cuánto tendrá que caminar?

Ejercicio 21. Un observador detecta un OVNI (objeto volador no identificado) situado estáticamente en un punto del espacio. El observador, por medio de instrumentos de medición, alcanza a determinar que el OVNI se encuentra a 4.460 m en un ángulo de elevación de 30 grados. El OVNI descendió verticalmente hasta posarse en la superficie de la Tierra y el observador continuó con su registro.

a) Determinar a qué distancia del punto de observación descendió el OVNI

b) ¿Qué distancia debió descender el OVNI hasta tocar tierra?

c) Estando a la distancia calculada, ¿cuál debería haber sido la reacción del observador?