

5. Sistemas inerciales y no inerciales

□ 5.1. Sistemas inerciales y principio de relatividad de Galileo

El conjunto de cuerpos respecto de los cuales se describe el movimiento se denomina sistema de referencia, y los sistemas tales que en ellos se verifica la ley de inercia se denominan *inerciales*. Es fácil ver que cualquier sistema que se traslade uniformemente respecto de un sistema inercial es también inercial. En efecto, imaginemos un objeto libre de fuerzas que se mueve con una velocidad \vec{v} respecto de un sistema inercial K, y supongamos que otro sistema K' se traslada respecto de K con una velocidad constante \vec{V} . Como sobre el objeto no actúan fuerzas y el sistema K es inercial, la velocidad \vec{v} permanecerá constante. Entonces, el objeto libre se moverá de manera uniforme también respecto de K', y por lo tanto este sistema también es inercial.

Al estudiar el movimiento libre de un cuerpo no podemos diferenciar entre los distintos sistemas inerciales. La experiencia muestra que todas las leyes de la mecánica resultan las mismas en todos los sistemas inerciales, y este hecho recibe el nombre de *principio de relatividad de Galileo*. En la práctica, significa que un observador situado en el interior de un recinto cerrado no puede distinguir, a través de ningún experimento mecánico, si el recinto está en reposo o se traslada con velocidad constante; en cambio, sí puede distinguir el movimiento uniforme del movimiento acelerado.

□ 5.2. Sistemas en movimiento rectilíneo acelerado

5.2.1 Ecuaciones de la dinámica

Consideremos un sistema de referencia K' que se traslada con una velocidad variable $\vec{V}(t)$ respecto de un sistema inercial K. De acuerdo con el principio de inercia, un objeto libre de fuerzas se moverá con una velocidad \vec{v} constante respecto del sistema K. La velocidad \vec{v}' del objeto respecto del sistema acelerado K' verifica la suma galileana de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t) \quad (5.1)$$

Por lo tanto, \vec{v}' no puede ser constante. Esto significa que en el sistema K' no se cumple la ley de inercia, ya que respecto de K' un objeto libre de fuerzas no se mueve uniformemente. Entonces, K' es un sistema de referencia no inercial.

Supongamos que, en un instante dado la aceleración del sistema K' respecto del sistema K es \vec{A} . Como un objeto libre conserva su velocidad constante respecto del sistema inercial K , respecto del sistema K' tendrá una aceleración $\vec{a}' = -\vec{A}$. Es claro que la aceleración que adquiere un objeto respecto del sistema K' no depende de ninguna propiedad del objeto; en particular, \vec{a}' no depende de la masa del objeto. Este hecho permite, como veremos más adelante, establecer una analogía muy importante entre el movimiento en un sistema no inercial y el movimiento en un campo gravitatorio ya que, como sabemos desde Galileo, en un campo gravitatorio todos los cuerpos, independientemente de sus masas, adquieren la misma aceleración.

Las leyes de la mecánica, tal como se las formula en los sistemas inerciales, no valen, evidentemente, en un sistema acelerado. Sin embargo, las ecuaciones dinámicas pueden modificarse de manera tal que sean válidas también para el movimiento de un objeto respecto de un sistema no inercial K' ; basta introducir una fuerza \vec{F}^* , llamada fuerza inercial, proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración $-\vec{A}$ que adquiere respecto de K' si se encuentra libre de interacciones:

$$\vec{F}^* = -m\vec{A} \quad (5.2)$$

Es importante observar que la fuerza inercial \vec{F}^* se diferencia de las fuerzas asociadas a interacciones en dos aspectos fundamentales:

- Como la fuerza \vec{F}^* no se asocia a una interacción, no existe una fuerza $-\vec{F}^*$, aplicada en algún otro cuerpo, que sea la reacción correspondiente a \vec{F}^* .
- La existencia de la fuerza inercial depende del sistema considerado. En el sistema inercial la ley de Newton para un objeto libre se escribe:

$$\sum \vec{F} = 0 = m\vec{a} \quad (5.3)$$

En cambio, en el sistema acelerado se escribe:

$$\sum \vec{F}' = \vec{F}^* = m\vec{a}' \quad (5.4)$$

con la fuerza inercial:

$$\vec{F}^* = -m\vec{A}$$

5.2.2 Ejemplos

1. Consideremos un aparato formado por un objeto de masa m situado sobre un plano horizontal de rozamiento despreciable, y unido a un extremo de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 . Este aparato, levemente modificado, puede utilizarse para medir aceleraciones instantáneas, y de hecho, se lo instala en vehículos para medir, por ejemplo, la eficacia de los frenos; a menudo se lo llama "acelerómetro". Para entender su funcionamiento escribamos las ecuaciones dinámicas para el objeto de masa m en un sistema K' unido a un vehículo que acelera. A partir del diagrama de fuerzas (véase la figura 5.1 donde se considera que el resorte está inicialmente comprimido) tenemos:

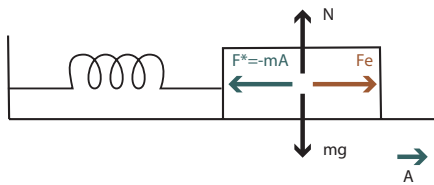


Figura 5.1. Diagrama de fuerzas para una masa m unida a un resorte de constante elástica k y longitud l_0 en un sistema no inercial.

$$\sum F'_x = k|l - l_0| - mA = ma' \quad (5.5)$$

$$\sum F'_y = N - mg = 0 \quad (5.6)$$

donde $k|l - l_0|$ es el valor absoluto de la fuerza elástica, l es la longitud del resorte, y mA es el valor absoluto de la fuerza inercial \vec{F}^* . Cuando el objeto se encuentra en equilibrio respecto del sistema K' su aceleración a' es nula y se obtiene:

$$k|l - l_0| = mA \quad (5.7)$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{k}{m}|l - l_0| \quad (5.8)$$

y midiendo la longitud l del resorte cuando el objeto se encuentra en equilibrio puede determinarse la aceleración de K' respecto de un sistema inercial K .

2. Como es sabido, un cuerpo de volumen V inmerso totalmente en un fluido de densidad ρ experimenta un empuje hacia arriba igual a ρVg (ley de Arquímedes). Este empuje sucede porque la presión debajo del cuerpo es mayor que la presión sobre el cuerpo y esto, a su vez, se debe a la fuerza peso ejercida por la Tierra sobre el fluido (ver figura 5.2 i). Un cuerpo de densidad ρ_c tiene un peso $\rho_c Vg$, y si ρ_c es menor que ρ el empuje resulta mayor que el peso y el cuerpo flota; en particular, si el cuerpo se encuentra inicialmente sumergido, se acelera hacia arriba hasta alcanzar la superficie.

Podemos preguntarnos qué ocurre si se tiene un objeto inmerso en un fluido y el recipiente que lo contiene se acelera uniformemente en la dirección horizontal. Si la aceleración del recipiente es A , en un sistema K' , no inercial fijo al recipiente, existe sobre el cuerpo una fuerza inercial:

$$F^* = -mA = -\rho_c V A \quad (5.9)$$

pero también hay un *empuje horizontal*:

$$E_x = \rho V A \quad (5.10)$$

debido a la diferencia de presiones entre ambos lados del cuerpo que surge como consecuencia de la fuerza inercial que actúa sobre el fluido (véase la figura 5.2).

Un aspecto interesante de esta situación es que si la densidad del cuerpo es menor que la del fluido el cuerpo no solamente flota sino que, como en ese caso, el empuje horizontal es mayor que la fuerza inercial, el cuerpo además se acelera en el

mismo sentido en que acelera el recipiente. Esto explica por qué, si se lleva un globo inflado con un gas menos denso que el aire dentro de un vehículo que aumenta su velocidad, el globo tiende a moverse, respecto del vehículo, "hacia adelante" y no "hacia atrás".

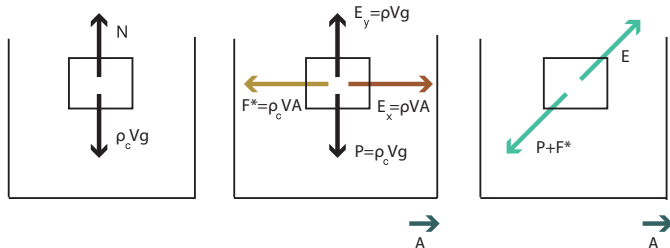


Figura 5.2. De izquierda a derecha: i) Ejemplo 2 en un sistema inercial. ii) Ejemplo 2 en un sistema no inercial. iii) Idem ii) con las fuerzas resultantes.

□ 5.3. Sistemas de referencia rotantes

5.3.1 Fuerzas centrífuga y de Coriolis

Deducir la forma de las ecuaciones dinámicas para el movimiento de un cuerpo respecto de un sistema de referencia rotante requiere, en el caso más general, de un formalismo matemático algo complicado. Por lo tanto, en este párrafo basaremos nuestras deducciones en ejemplos sencillos y justificaremos la validez de los resultados obtenidos a partir de argumentos más bien intuitivos.

Consideremos primero un cuerpo que describe una circunferencia de radio r con una rapidez constante v medida en referencia a un sistema inercial K . Respecto de dicho sistema el cuerpo tendrá una aceleración:

$$a = -\frac{v^2}{r} \quad (5.11)$$

si consideramos como positivo el sentido en que aumenta r (es decir, del centro de la circunferencia hacia afuera). Respecto de un sistema K' cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia y que rota con una velocidad angular Ω , el cuerpo tiene una velocidad tangencial v'_T tal que $v = v'_T + \Omega r$, y su aceleración es:

$$a' = -\frac{v'^2_T}{r} \quad (5.12)$$

Luego, entre la aceleración del cuerpo respecto de K' y la aceleración respecto de K hay una diferencia:

$$a' - a = -\frac{v'^2_T}{r} - \left(-\frac{v^2}{r}\right) \quad (5.13)$$

$$= -\frac{v'^2_T}{r} + \frac{(v'_T + \Omega r)^2}{r} \quad (5.14)$$

$$= \Omega^2 r + 2v'_T \Omega \quad (5.15)$$

Esta diferencia de aceleraciones entre ambos sistemas puede explicarse por la existencia en el sistema K' de una fuerza inercial:

$$F^* = m\Omega^2 R + 2mv'_T \Omega \quad (5.16)$$

que depende de la distancia del cuerpo al centro de la circunferencia y de su velocidad tangencial v'_T respecto del sistema rotante K' . El primer término corresponde a una fuerza radial que apunta de adentro hacia afuera, y se suele denominar *fuerza centrífuga*; el segundo término corresponde a una fuerza radial que apunta hacia afuera o hacia aden-

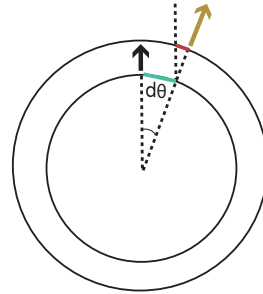


Figura 5.3. En negro: vector velocidad a tiempo inicial; en marrón: vector velocidad un instante dt posterior; en verde: "retraso" del cuerpo; en rojo: rotación del vector velocidad.

tro según v'_T sea positiva o negativa, y es la llamada *fuerza de Coriolis* para un cuerpo que se desplaza tangencialmente respecto de K' . Gustave Coriolis (1792 – 1843) fue un matemático y científico francés que, entre otras cosas, se dedicó a estudiar los conceptos de energía mecánica y trabajo de fuerzas en sistemas rotantes.

Ahora, consideremos un cuerpo libre que en cierto instante se mueve en dirección radial respecto del sistema rotante K' cuya velocidad angular es Ω . Entonces, en el sistema K' el cuerpo inicialmente tiene sólo una velocidad radial v'_r y velocidad tangencial nula. Supongamos que, inicialmente, el cuerpo se encuentra a una distancia r del eje de rotación de K' y que v'_r es positiva; entonces, luego de un intervalo dt muy chico, el cuerpo se habrá desplazado radialmente una distancia:

$$dr = v'_r dt \quad (5.17)$$

y su vector velocidad (constante respecto de un sistema inercial), habrá rotado un ángulo $d\theta = \Omega dt$ (ver Figura 5.3). Por otra parte, respecto de un sistema inercial, el cuerpo tiene inicialmente una velocidad tangencial Ωr mientras que un punto de la circunferencia de radio $r + dr$ que alcanza luego de un tiempo dt se mueve con una velocidad tangencial $\Omega(r + dr)$. Por lo tanto, cuando el cuerpo llega al radio $r + dr$, respecto de K' ha adquirido una velocidad tangencial dv'_T , que resulta de ambos efectos combinados: rotación del vector velocidad respecto del sistema K' ($-v'_r \sin d\theta$) y "retraso" debido a que se alcanza un radio donde la velocidad tangencial de K' es mayor ($-\Omega dr$) (ver Figura 5.3). Aproximando $\sin d\theta \approx d\theta$, y escribiendo $dr = v'_r dt$ tenemos:

$$dv'_T = -v'_r d\theta - \Omega v'_r dt \quad (5.18)$$

Así, dividiendo por dt , obtenemos la aceleración:

$$a' = \frac{dv'_T}{dt} = -2\Omega v'_r \quad (5.19)$$

ya que $d\theta/dt = \Omega$. De esta manera, en el sistema K' aparece sobre el cuerpo una fuerza tangencial proporcional a su velocidad radial:

$$F^* = -2mv'_r \Omega \quad (5.20)$$

Esta es la fuerza de Coriolis para un cuerpo que en cierto instante se mueve radialmente respecto de un sistema rotante. En el caso en que v'_r es positiva esta fuerza tiende a "retrasar" al cuerpo; por supuesto, si v'_r es negativa, es decir, si el cuerpo se acerca al eje de rotación, esta fuerza tiende a "adelantarlo".

En el caso general de un cuerpo que se mueve de cualquier manera respecto de un sistema que rota, aparece una fuerza inercial cuya componente radial está dada por la ecuación 5.16, y cuya componente tangencial está dada por la ecuación 5.20. La fuerza inercial depende de la posición del cuerpo y de las componentes radial y tangencial de su velocidad respecto del sistema rotante, pero no depende de la componente de su velocidad paralela al eje de rotación.

- Ejemplo. Consideremos un satélite geoestacionario, es decir, un satélite que se mantiene siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. En primer lugar, recordemos que sus órbitas deben ser circulares: esto se deduce del hecho de que el satélite geoestacionario debe mantener su velocidad angular constante (igual a la de la Tierra), y entonces la conservación del impulso angular conduce a la constancia de la distancia al centro.

Respecto de un sistema inercial K, el satélite geoestacionario se mueve uniformemente sobre una circunferencia de radio r y la suma de fuerzas en la dirección radial se escribe:

$$-\frac{GM_T m_s}{r^2} = m_s a = m_s (-\Omega^2 r) \quad (5.21)$$

donde M_T y m_s son las masas de la Tierra y del satélite respectivamente y G es la constante universal de la gravitación.

En cambio, respecto de un sistema K' que rota con la Tierra, el satélite permanece en reposo y su aceleración es nula; pero existen, además de la atracción gravitatoria, fuerzas inerciales. La fuerza de Coriolis es nula, ya que la velocidad del satélite respecto de K' es cero, mientras que la fuerza centrífuga es igual a $m\Omega^2 r$. Luego, en el sistema K' la suma de fuerzas resulta:

$$-\frac{GM_T m_s}{r^2} + m_s \Omega^2 r = m_s a' = 0 \quad (5.22)$$

Es evidente que las ecuaciones 5.21 y 5.22, aunque tienen sentidos esencialmente distintos, conducen a los mismos resultados cuando se calcula con ellas el valor de cualquier magnitud.

Observemos que la ecuación 5.22 muestra la clave acerca de la "ingravedez" que experimentan los objetos en, por ejemplo, una estación orbital. La "ingravedez" no es ausencia de la fuerza peso, sino el resultado de que la fuerza centrífuga que aparece en el sistema no inercial de la estación orbital equilibra a la fuerza gravitatoria, dando una resultante nula (estrictamente, esto no ocurre en cualquier punto dentro de la nave; véase la sección siguiente).

5.3.2 Fuerza de marea (2)

Planteemos el problema de un cuerpo extenso de masa m en órbita circular con velocidad angular Ω , alrededor de un planeta de masa M . Supongamos que el cuerpo es homogéneo, de modo que todo pequeño volumen igual dV tiene la misma masa dm . En el sistema de referencia K' que gira con la misma velocidad angular Ω (alrededor del mismo eje, por supuesto), la suma de fuerzas sobre una parte del cuerpo, cuya masa es dm , se escribe:

$$-\frac{GM dm}{r^2} + dm \Omega^2 r = dm a' \quad (5.23)$$

Esta ecuación permite observar que, como el cuerpo no es estrictamente puntual, si consideramos distintos puntos a lo largo del mismo en dirección radial, dichos puntos corresponderán a distintos valores del radio r . Existe un radio r_0 tal que la suma de fuerzas sobre una masa dm situada a esa distancia es nula. Si tomamos valores un poco mayores, la fuerza gravitatoria es un poco menor, mientras que la fuerza centrífuga, al ser proporcional al radio, es un poco mayor. Lo opuesto ocurre si tomamos valores menores del radio. Por lo tanto, en general ambas fuerzas sólo se cancelan para un radio dado, mientras que para radios mayores la fuerza resultante apunta "hacia afuera" (es decir, en el sentido en que crece la distancia al centro), mientras que para radios menores la fuerza resultante apunta "hacia adentro" (es decir, en el sentido en que decrece la distancia al centro). En otras palabras, si r_0 es el radio para el cual una parte de masa dm se encuentra en equilibrio, para r mayor o menor que r_0 las partes del cuerpo tenderán a separarse. Para fijar ideas, tomemos dos partes del cuerpo a una distancia d de su centro como se muestra en la figura 5.4: la primera más cerca del planeta y la segunda más lejos. Escribamos la suma de fuerzas para las tres partes consideradas, es decir, la que está en equilibrio y las otras dos que tienden a separarse:

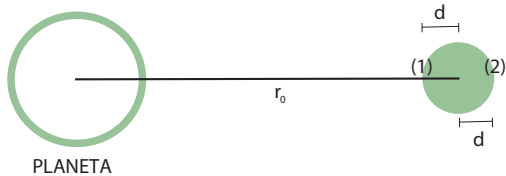


Figura 5.4. Fuerza gravitatoria que ejerce un planeta sobre distintas partes de un cuerpo extenso.

$$-\frac{GM}{r_0^2} dm + dm \Omega^2 r_0 = 0 \quad (5.24)$$

$$-\frac{GM}{(r_0 - d)^2} dm + dm \Omega^2 (r_0 - d) = dm a'_- \quad (5.25)$$

$$-\frac{GM}{(r_0 + d)^2} dm + dm \Omega^2 (r_0 + d) = dm a'_+ \quad (5.26)$$

donde a'_\pm indica la aceleración, medida en K' , de la masa dm ubicada más lejos o más cerca del planeta. La diferencia entre las fuerzas en distintos puntos es llamada usualmente

*fuerza de marea*³⁶. Con esto, se puede obtener la aceleración que cada parte tendría respecto de las otras. Pero supongamos, lo cual es razonable en gran parte de los casos concretos, que $d \ll r_0$. Entonces, podemos escribir: $(r_0 \pm d)^{-2} = r_0^{-2} (1 \pm d/r_0)^{-2} \approx r_0^{-2} (1 \mp 2d/r_0)$, y cancelando la masa dm de las ecuaciones anteriores se obtienen las expresiones aproximadas:

$$-\frac{GM}{r_0^2} (1 + 2d/r_0) + \Omega^2 (r_0 - d) \simeq a'_- \quad (5.27)$$

$$-\frac{GM}{r_0^2} (1 - 2d/r_0) + \Omega^2 (r_0 + d) \simeq a'_+ \quad (5.28)$$

Utilizando la relación (5.24), se obtiene:

$$-3\frac{GM}{r_0^3} d \simeq a'_- \quad (5.29)$$

$$3\frac{GM}{r_0^3} d \simeq a'_+ \quad (5.30)$$

Cada una de estas igualdades aproximadas da la aceleración relativa que cada una de las partes consideradas tendría, respecto de la parte sobre la cual la suma de fuerzas es nula. Observe-

³⁶ Compárese con la discusión en la sección "Fuerza de marea (1)".

mos que el resultado es un poco mayor (por un factor $3/2$) que el que habíamos obtenido sin tener en cuenta el movimiento del cuerpo (véase la sección "Fuerza de marea (1)", ecuación (3.27)). Evidentemente, la aceleración relativa entre las dos partes, que en principio no están en equilibrio, es igual a $6GM_d/r_0^3$. En la práctica, un cuerpo extenso se mantiene unido debido a las fuerzas *internas*, es decir las que unas partes del mismo ejercen sobre las otras.

□ Problemas

Problema 1: Un astronauta de masa $m = 100$ kg se encuentra unido a una estación espacial de masa 50×10^3 kg que se encuentra en órbita a una altura de 500 km, por medio de un cable. Se quiere determinar la tensión del cable necesaria para mantener al astronauta unido a la nave, a una distancia de 70 m en la dirección radial. ¿Es necesario tomar en cuenta la fuerza gravitatoria ejercida por la nave sobre el astronauta?

Problema 2: El radio de la Luna es de unos 1.737 km, su gravedad superficial es de aproximadamente $1,62 \text{ m/s}^2$ y su distancia media a la Tierra es de unos 384.000 km. Se propone comparar la fuerza de marea -debida a la gravedad terrestre y a la fuerza centrífuga- entre una masa dm en el centro de la Luna y otra en la cara opuesta a la Tierra, con la fuerza que la propia Luna ejerce sobre la misma masa dm sobre la superficie.

□ 5.4. El principio de equivalencia

Imaginemos una región en el espacio exterior, que se encuentra suficientemente alejada de estrellas y planetas de manera tal que la fuerza gravitatoria pueda suponerse nula. En esta región es posible elegir un sistema de referencia inercial, de manera que los cuerpos inicialmente en reposo, respecto de este sistema, permanezcan en reposo; y los cuerpos con movimiento rectilíneo y uniforme continúan siempre con este movimiento. Supongamos ahora que un observador equipado con un acelerómetro se encuentra dentro de una caja grande, del tamaño de una habitación. Sobre el observador no actúa ninguna fuerza gravitatoria. Por lo tanto, para permanecer en el suelo debería estar atado o fijado al mismo, porque de lo contrario cualquier impacto contra el suelo (por el principio de acción y reacción) lo impulsaría hacia el techo (en este caso la tapa de la caja). En el centro de la tapa de la caja (el techo de la habitación para el observador) y del lado exterior de la misma, se encuentra un gancho con una soga atada al mismo. Ahora supongamos que se ejerce una fuerza constante sobre la soga y por lo tanto sobre el techo de la caja. La fuerza sobre la soga se ejerce de manera tal que la misma tira de la caja para moverla hacia arriba. ¿Cuál será la descripción del movimiento para un observador situado afuera de la caja? Para este observador, la caja comenzará a moverse junto con el observador que se halla dentro con un movimiento uniformemente acelerado. ¿Cuál será la descripción del movimiento para un observador situado adentro de la caja? La aceleración de la caja se transmite a este observador a través de la fuerza de contacto ejercida por el piso de la misma. Por lo tanto, el observador notará que no necesita estar fijado o atado al piso de

la caja. Dicho de otra manera, el observador está parado sobre el piso de la caja de la misma manera que cualquier observador sobre la superficie de la tierra. Si lanza un cuerpo, la aceleración de la caja no se transmitirá a este cuerpo, y entonces dicho cuerpo caerá con movimiento acelerado para el observador. Si lanza varios cuerpos de distinta masa, composición y/o tamaño, observará que la aceleración que mide es siempre la misma. Entonces, el observador, que sabe que en un campo gravitatorio uniforme todos los objetos caen con la misma aceleración, concluirá que él y la caja se encuentran en un campo gravitatorio uniforme. La propiedad fundamental de la fuerza gravitatoria de imprimir a todos los cuerpos la misma aceleración independientemente de su masa, composición y/o tamaño, es la que permite que el observador dentro de la caja llegue a esta conclusión.

Supongamos ahora que se usa una soga fijada a la tapa de la caja del lado interior de la misma para colgar un cuerpo en su extremo libre. La soga ejercerá una tensión sobre el cuerpo, pero el mismo permanece en reposo respecto de la caja. Si preguntamos al observador en su interior por la fuerza que compensa la tensión de la soga, como el mismo cree que se encuentra en un campo gravitatorio dirá que es la fuerza gravitatoria, de manera que la intensidad de esta tensión será proporcional a la masa gravitatoria del cuerpo. A su vez, el observador externo a la caja dirá que la soga transmite al cuerpo el movimiento acelerado de la caja. La intensidad de la tensión de la soga, para este observador, será proporcional a la masa inercial del cuerpo. De esta manera, se deduce la necesidad de la igualdad entre masa gravitatoria y masa inercial.

El hecho de que las fuerzas inerciales producen aceleraciones independientes de las masas de los cuerpos, permite establecer una analogía entre los sistemas de referencia no inerciales y los campos gravitatorios: todo sistema no inercial equivale a cierto campo gravitatorio (*principio de equivalencia*). En la práctica esto hace posible anular, al menos localmente, un campo gravitatorio mediante una elección de un sistema de referencia adecuado: basta con elegir un sistema en movimiento acelerado cuya aceleración sea igual a la que adquiriría un objeto colocado en la región del campo que se está considerando. En particular, un campo uniforme y constante equivale a un sistema de referencia que se traslada con aceleración constante y, por lo tanto, puede ser anulado simultáneamente en todo el espacio. Estrictamente, no existen en la naturaleza campos gravitatorios uniformes; sin embargo, en la práctica se dan muchas situaciones en las cuales un campo uniforme es una muy buena aproximación a las condiciones reales.