4. Movimiento en un campo gravitatorio central

4.1. Forma general de la trayectoria

Estudiaremos, a continuación, el movimiento de un cuerpo de masa m bajo la acción de la fuerza gravitatoria de un cuerpo esférico de masa m' >> m. Esta relación entre las masas permite suponer que el cuerpo de masa m se mueve en un campo gravitatorio central y constante, producido por el cuerpo de masa m'. El problema de estudiar un caso en que dicha condición no se cumple, y por lo tanto ambos cuerpos deben considerarse en movimiento alrededor del centro de masa, se reduce al de un único cuerpo en un campo central por el procedimiento introducido en la sección 5.1 del capítulo 2.

Dada la forma de la ley de gravedad de Newton, para determinar las trayectorias posibles del cuerpo en un campo gravitatorio central partiremos de una energía potencial de la forma:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{4.1}$$

donde α = Gmm' > 0 [30]. De este modo, el potencial efectivo (que incluye la energía cinética de la parte angular del movimiento) es igual a:

$$U_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{4.2}$$

y la energía del cuerpo se escribe:

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{4.3}$$

donde v_r = dr/dt es la velocidad radial. Cuando r tiende a 0, el potencial efectivo tiende a infinito [31], mientras que para una distancia r tendiendo al infinito el potencial efectivo tiende a 0. En el radio $r_0 = M^2/m\alpha$ el potencial efectivo tiene un mínimo, donde toma el valor $U_{efmin} = E_1 = -m\alpha^2/2M^2$ (ver figura 4.1).

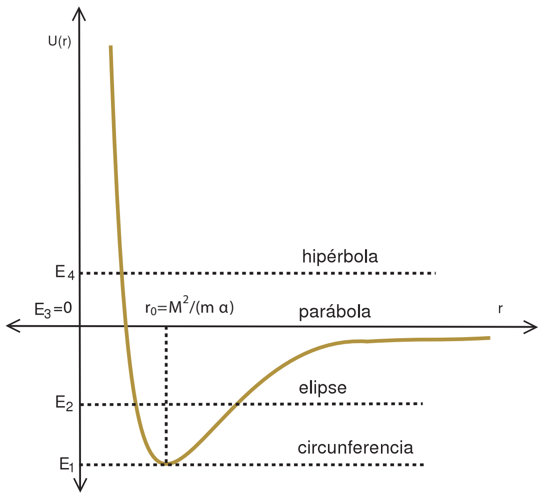

Figura 4.1. *Potencial efectivo en una dimensión. Para distintos valores de energía se obtienen órbitas circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas.*

[30] Esta forma de la energía potencial es la misma que describe la interacción entre dos cargas eléctricas puntuales. En ese caso α = -ee', donde e y e' son los valores de las cargas (con sus signos), de modo que U(r) = ee'/r.

[31] Notemos que esto se señala para caracterizar matemáticamente la dependencia de U con r, pero para el campo producido por un cuerpo de radio R > 0, esta expresión del potencial sólo es válida para r ≥ R.

La relación entre una variación infinitesimal del ángulo en términos de una variación de la distancia al centro se obtiene reemplazando este potencial en la expresión general dada en el capítulo 2 (ver ecuación 2.56). El resultado es:

$$d\phi = \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \tag{4.4}$$

Para encontrar la ecuación de la trayectoria ø (r) reescribimos:

$$d\phi = \frac{M\,dr}{r\,\sqrt{2mE\,r^2 + 2m\alpha r - M^2}} \tag{4.5}$$

e integramos miembro a miembro [32]. Obtenemos:

$$\phi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\alpha - M^2/(mr)}{\sqrt{\alpha^2 + 2EM^2/m}}\right) + C \tag{4.6}$$

donde C es una constante determinada por la elección del radio al cual se hace corresponder ø = 0. Es conveniente, como se verá más adelante, elegir C = $\pi/2$ y usar que sen (ø - $\pi/2$) = -cos ø. Así, reordenando un poco la expresión resultante, tenemos:

$$\phi = \arccos\left(\frac{-1 + M^2/(m\alpha r)}{\sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)}}\right) \tag{4.7}$$

que resuelve en forma general el problema de obtener la trayectoria del cuerpo de masa m en un campo central asociado con una energía potencial U(r) = $-\alpha/r$ con $\alpha > 0$.

Invirtiendo la ecuación de la trayectoria (es decir, despejando r(ø)) e introduciendo las definiciones del *parámetro:*

$$p = M^2/m\alpha \tag{4.8}$$

y la *excentricidad:*

$$e = \sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)} \tag{4.9}$$

se obtiene:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \tag{4.10}$$

Dada su definición, el parámetro es positivo: p > 0; sus dimensiones son las de una longitud. La excentricidad es una magnitud adimensional, y es mayor o igual que cero: e ≥ 0.
La trayectoria puede escribirse en coordenadas cartesianas utilizando que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4.11}$$

---

[32] Usamos la tabla de integrales: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$ + constante, si c < 0.

lo cual corresponde a que el centro del campo se encuentra en $x = 0$, $y = 0$, y a que el ángulo ϕ se mide respecto del eje x (ver figura 2.9). El resultado que se obtiene es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - ex \tag{4.12}$$

Como veremos a continuación, esta forma de expresar la trayectoria será de gran utilidad para comprender cómo la misma depende de la relación entre la energía y las demás constantes de un problema.

□ 4.2. Casos particulares

De la definición de la excentricidad se desprende que, para un dado valor M del impulso angular, el valor de la energía (dado por las condiciones iniciales) determina cuatro situaciones cualitativamente diferentes:

1. Si $E = -m\alpha^2/2M^2 = U_{efmin}$ se tiene $e = 0$. Por lo tanto, desaparece la dependencia de r con el ángulo ϕ, y se obtiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = p \tag{4.13}$$

lo que corresponde a una circunferencia de radio p centrada en el punto $x = 0$, $y = 0$. Este resultado es coherente con que para $E = U_{efmin}$ se tiene siempre $v_r = dr/dt = 0$, lo que justamente significa que la distancia al centro no cambia, es decir el movimiento es circular.

2. Si $E = 0$ se tiene $e = 1$. En ese caso la distancia al centro alcanza su valor mínimo $r = p/2$ cuando $\phi = 0$, mientras que cuando ϕ se acerca a π, el radio crece ilimitadamente. Si partimos de la expresión de la trayectoria en coordenadas cartesianas y elevamos al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2 + x^2 - 2px \tag{4.14}$$

de donde:

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \tag{4.15}$$

lo cual corresponde a la ecuación de una parábola simétrica respecto del eje x, y cuyo vértice se encuentra en el punto $x = p/2$, $y = 0$ (ver figura 4.2).

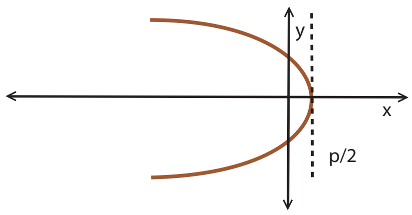

Figura 4.2. *Para E = 0 la trayectoria es una parábola de vértice x = p/2 .*

El hecho de que en este caso la trayectoria es tal que el cuerpo se aleja sin límites es esperable a partir de la analogía entre la parte radial del problema y un movimiento lineal con un potencial igual a U_{ef}. En efecto, para $E = 0$ existe un único punto de retorno correspondiente al único radio para el cual se cumple $E = U_{ef}$, y el cuerpo puede alcanzar cualquier radio más allá de este valor.

3. Si $-m\alpha^2/2M^2 < E < 0$ se tiene $0 < e < 1$. Por lo tanto el denominador de la expresión para el radio en función del ángulo $r = p/(1 + e \cos \phi)$ no se anula nunca; en cambio, toma su valor mínimo $1 - e$ cuando $\phi = \pi$, y su máximo $1 + e$ cuando $\phi = 0$. Por lo tanto, la distancia al centro alcanza su máximo $r = p/(1 - e)$ cuando $\phi = \pi$, y alcanza su mínimo $r = p/(1 + e)$ cuando $\phi = 0$; la distancia máxima corresponde a la posición llamada afelio de la órbita, mientras que la distancia mínima corresponde a la posición llamada perihelio.

Elevando al cuadrado la expresión de la trayectoria en coordenadas cartesianas se obtiene:

$$x^2 + y^2 = p^2 + e^2x^2 - 2epx \tag{4.16}$$

Agrupando los términos de acuerdo con las potencias de cada coordenada y dividiendo miembro a miembro por $1 - e^2$ (lo cual es posible porque $e < 1$), obtenemos:

$$x^2 + \frac{2epx}{1-e^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \tag{4.17}$$

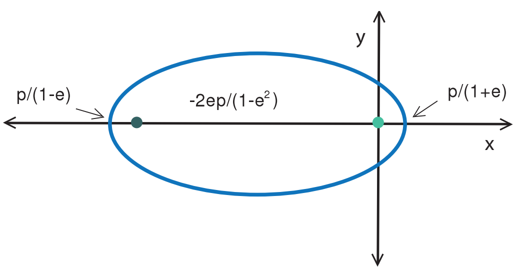

Figura 4.3. *Para $U_{efmin} < E < 0$ la trayectoria es una elipse de focos $x = 0$ y $x = ep/1-e^2$.*

Sumamos la cantidad $e^2p^2/(1 - e^2)^2$ miembro a miembro:

$$x^2 + \frac{2epx}{1-e^2} + \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} + \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \tag{4.18}$$

Los tres primeros términos del miembro izquierdo de esta igualdad se agrupan en el cuadrado de un binomio, y los dos términos del miembro derecho pueden reagruparse; de este modo:

$$\left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \tag{4.19}$$

y de aquí se obtiene la expresión final:

$$\frac{(x + ep/(1-e^2))^2}{p^2/(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2/(1-e^2)} = 1 \tag{4.20}$$

Como $0 < e < 1$, esta ecuación describe una elipse [33] simétrica respecto del eje x, cuyo centro está situado en $x = -ep/(1 - e^2)$ e $y = 0$, y cuyos semiejes son $p/(1 - e^2)$ y $p/\sqrt{1 - e^2}$ (ver la figura 4.3). La longitud del semieje mayor $p/(1 - e^2)$ resulta, claro está, igual a la mitad de la suma entre la mayor y la menor distancia al centro, que son, respectivamente, $p/(1 - e)$ y $p/(1 + e)$. La elipse tiene dos focos. Uno de ellos se encuentra en el punto $x = 0$, $y = 0$, que corresponde al centro del campo; el otro se encuentra en $x = -2ep/(1 - e^2)$, $y = 0$. En efecto, dada la simetría, la distancia entre los dos focos deber ser igual a la resta entre la mayor y la menor distancia al centro:

[33] Recordemos que, en coordenadas cartesianas, la ecuación de una elipse centrada en el punto $(x_0; y_0)$ y de semiejes a y b es $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$p/(1 - e) - p/(1 + e) = 2ep/(1 - e^2)$: El hecho de que los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos se conoce como primera *ley de Kepler.*

Notemos que si el cuerpo que genera el campo gravitatorio (en este caso m') tiene un radio R, la trayectoria elíptica se desarrollará en forma completa en tanto la distancia mínima $r = p/(1 + e)$ sea mayor que R. De lo contrario, el cuerpo de masa m termina cayendo sobre la superficie del cuerpo de masa m'.

En general, observemos que la existencia de un radio mínimo y uno máximo resulta natural a partir de la analogía de la parte radial del movimiento con un problema unidimensional. Dada la forma de la energía potencial efectiva, para $U_{efmin} < E < 0$ hay dos puntos de retorno, que corresponden a los dos valores de r donde la velocidad radial $v_r = dr/dt$ se anula. El movimiento se encuentra entonces limitado por dichos valores de la distancia al centro.

A modo de ilustración, a continuación damos los valores de la excentricidad para las órbitas de los planetas del sistema solar:

Planeta	e
Mercurio	0,206
Venus	0,007
Tierra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Neptuno	0,009
Plutón	0,780

Para darnos una idea del significado de estos números, comparemos la diferencia $r_{max} - r_{min} = 2ep/(1 - e^2)$ con la distancia máxima al centro $r_{max} = p/(1 + e)$. El cociente entre estas cantidades es igual a $2e/(1+e)$, y por ejemplo para la Tierra es igual a 0, 033, mientras que para Mercurio es igual a 0, 342. Esto significa que en el caso de la Tierra la diferencia entre la distancia máxima y la mínima es apenas el 3% de la distancia máxima, en tanto que para el caso de Mercurio dicha proporción llega al 34%.

4. Si $E > 0$ se tiene $e > 1$. Por lo tanto, la distancia mínima al centro es $r = p/(1 + e)$, que se alcanza cuando $ø = 0$, mientras que cuando $\cos ø = -1/e$ el radio r tiende a infinito. Esto significa que los ángulos más allá de los que cumplen esa igualdad no se alcanzan nunca. Como en este caso $1 - e^2 < 0$, pueden seguirse los mismos pasos del caso anterior para obtener:

$$\frac{(x - ep/(e^2 - 1))^2}{p^2/(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{p^2/(e^2 - 1)} = 1 \qquad (4.21)$$

Tenemos así la ecuación de una hipérbola [34] simétrica respecto del eje x, tal que x puede tomar todos los valores menores o iguales que $p/(e + 1)$, y que pasa por $x = p/(e + 1)$ cuando $y = 0$ (ver figura 4.4).

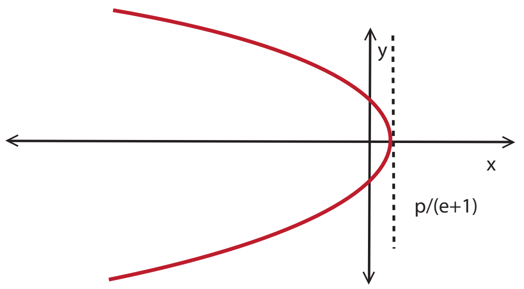

Figura 4.4. *Para E > 0 la trayectoria es una hipérbola de vértice x = p/1+e.*

[34] En coordenadas cartesianas, la ecuación de una hipérbola es de la forma general $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Observemos que un movimiento ilimitado es esperable dado que, para $E > 0$, existe un único punto donde $E = U_{ef}$, y por lo tanto donde se anula la velocidad radial.

La analogía de la parte radial con un problema unidimensional asegura que más allá de dicho radio todas las distancias al centro pueden ser alcanzadas si se espera el tiempo suficiente.

Entonces, podemos concluir que para energías menores que cero el movimiento es limitado o ligado, mientras que para energías mayores o iguales que cero el movimiento es ilimitado. Las trayectorias de los movimientos limitados pueden ser elipses o circunferencias; esto último sólo es posible en el caso particular en que la energía coincide exactamente con el valor mínimo del potencial efectivo. Las trayectorias de los movimientos ilimitados pueden ser hipérbolas o parábolas; la trayectoria parabólica corresponde a la situación en que la energía es exactamente cero. En el caso del movimiento parabólico, cuando r tiende al infinito la energía cinética tiende a cero; en el movimiento hiperbólico, en cambio, la energía cinética es siempre mayor que cero.

□ Problemas

Problema 1. En la práctica, en lugar de los valores de las constantes de movimiento E y M es usual tener como datos las condiciones iniciales en términos de velocidades y distancias. Supongamos que en cierto instante un satélite en órbita alrededor de la Tierra se encuentra a una altura A por encima de la superficie, moviéndose con velocidad tangencial igual a v_0 y -en ese instante- con velocidad radial nula. Queremos determinar entonces el parámetro p y la excentricidad e de la órbita.

Problema 2. Como hemos visto, para energías mayores o iguales que cero el movimiento es ilimitado. ¿Cuál será la expresión de la velocidad mínima que debe tener un cuerpo para escapar al infinito? ¿Dependerá dicha velocidad de que el objeto se lance en dirección radial o en dirección perpendicular al radio?

Problema 3. Supongamos que se quiere poner un satélite en órbita alrededor de la Tierra, evitando que descienda hasta donde el rozamiento con las capas superiores de la atmósfera pueda producir un frenado relevante. En general, los satélites se ponen en órbita dándoles una velocidad inicial en la dirección perpendicular al radio. ¿Cuál debería ser en ese caso el valor de la velocidad inicial para evitar que un satélite lanzado desde una altura de 500 km descienda por debajo de los 300 km?

□ 4.3. Períodos y tercera ley de Kepler

Para los movimientos ligados en un campo gravitatorio (trayectorias circulares y elípticas), existe una relación precisa entre los tiempos y las distancias características, esto es, entre los períodos y las longitudes de las trayectorias, o distancias relacionadas con las mismas. En el caso del movimiento circular es muy sencillo recuperar la relación entre los períodos y los radios de las órbitas que, como vimos, juega un papel importante en el camino que lleva a la formulación de la ley de gravedad de Newton. En efecto, en ese caso tenemos que el radio de la órbita es igual al parámetro p:

$$r = p = \frac{M^2}{m\alpha} \tag{4.22}$$

y escribiendo $M = mrv_t = mr^2\Omega = mr^2(2\pi/T)$ con Ω la velocidad angular y T el período, tenemos:

$$r = \frac{m4\pi^2 r^4}{\alpha T^2} \tag{4.23}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} r^3 \tag{4.24}$$

De este modo queda probado que el cuadrado del período de una órbita circular es proporcional al cubo del radio de la misma.

Para las órbitas elípticas puede encontrarse una relación similar en términos de los semiejes de la elipse. En efecto, la constancia del impulso angular puede traducirse como la constancia de la velocidad areolar $dA/dt = M/2m$ (véase en el capítulo anterior el tratamiento general del movimiento en un campo central). En el caso de una trayectoria elíptica, el área barrida en una vuelta alrededor del centro es igual a πab, donde a y b son las longitudes de los semiejes de la elipse. Ahora bien, la velocidad areolar es simplemente el cociente del área y el período, de modo que:

$$\frac{M}{2m} = \frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} \tag{4.25}$$

Dado que $a = p/(1 - e^2)$ y $b = p/\sqrt{1 - e^2}$, entonces:

$$b = \sqrt{ap} \tag{4.26}$$

y reemplazando tenemos:

$$\frac{M}{2m} = \frac{\pi a^{3/2} p^{1/2}}{T} \tag{4.27}$$

Así, escribiendo $p = M^2/m\alpha$ finalmente resulta que $T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha}$, o, lo que es equivalente:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3 \tag{4.28}$$

El cuadrado del período de una órbita elíptica resulta entonces proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la elipse (*tercera ley de Kepler*).

□ Problemas

Problema 4. Un satélite *geoestacionario* es el que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie de la Tierra. Queremos comprobar que la órbita debe ser circular, y a partir de ello determinar la altura de tal satélite sobre la superficie terrestre.

Problema 5. El período de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra es de poco menos de 27 días y 8 horas, en tanto que en su perigeo [35] se encuentra a una distancia de aproximadamente 363.000 km. A partir de estos datos, proponemos calcular los valores del parámetro p y la excentricidad e de la órbita lunar.

Problema 6. A partir de los datos y resultados del problema anterior proponemos calcular el diámetro angular de la Luna vista desde la Tierra, cuando se encuentra en el apogeo y en el perigeo (el radio de la Luna es de unos 1.737 km).

□ 4.4. Independencia de la masa

En la forma de presentar los resultados de las secciones anteriores no se refleja de manera explícita el hecho de que el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio es independiente de su masa. Para hacer manifiesto ese hecho reescribiremos los resultados para un cuerpo de masa m aprovechando la constancia de la energía y el impulso angular (y la consecuente constancia de la velocidad areolar). Para empezar, como M se conserva podemos escribir la velocidad areolar en términos de la velocidad angular y el radio iniciales (indicados por el subíndice 0):

$$\frac{M}{2m} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\Omega_0 r_0^2 \qquad (4.29)$$

de donde:

$$M^2 = m^2\Omega_0^2 r_0^4 \qquad (4.30)$$

Si a continuación reemplazamos M^2 y $\alpha = Gm'm$ en la energía, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}mv_{r_0}^2 - \frac{Gm'm}{r_0} + \frac{1}{2}m\Omega_0^2 r_0 \qquad (4.31)$$

donde v_{r0} es el valor inicial de la velocidad radial. De esta manera, las fórmulas del parámetro p y la excentricidad e nos dan:

$$p = \frac{M^2}{Gm'm^2} = \frac{1}{Gm'}\Omega_0^2 r_0^4 \qquad (4.32)$$

[35] Se llama así a la distancia mínima respecto del centro de la Tierra; la máxima se llama apogeo.

$$e = \sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2 r_0^4}{G^2 m'^2}\left(v_{r0}^2 + \Omega_0^2 r_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0}\right)} \qquad (4.33)$$

con lo que queda de manifiesto que la trayectoria del cuerpo es independiente de su masa m (pero no lo es, por supuesto, de la masa m'). En efecto, reemplazando en la ecuación de la trayectoria se obtiene:

$$r = \frac{\Omega_0^2 r_0^4/(Gm')}{1 + \cos\varnothing \sqrt{1 + \Omega_0^2 r_0^4 (v_{r0}^2 + \Omega_0^2 r_0^2 - 2Gm'/r_0)/(Gm')^2}} \qquad (4.34)$$

La masa m no aparece. Las únicas variables de esta igualdad son la distancia r al centro y el ángulo ø medido respecto del eje x. Todas las demás cantidades (además de la masa m' del cuerpo en el centro del campo y la constante universal de la gravitación G) son constantes que caracterizan las condiciones iniciales del problema.

Análogamente, podemos reemplazar α = Gm'm en la expresiones del período de las órbitas; para las órbitas circulares obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} r^3 \qquad (4.35)$$

donde r es el radio de la circunferencia, y para las elípticas:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} a^3 \qquad (4.36)$$

donde a es el semieje mayor de la elipse. Estas expresiones ponen de manifiesto la independencia del período con la masa del cuerpo en órbita, así como la dependencia del cuadrado del mismo, con la inversa de la masa m' situada en el centro del campo.

□ 4.5. Perturbación de una órbita circular

4.5.1 Tratamiento general

Es claro que puede ser de interés obtener una descripción detallada de lo que ocurre cuando a una órbita dada en un campo gravitatorio central se la perturba modificando los valores del impulso angular y la energía. En lo que sigue, nos ocuparemos de resolver dicho problema a partir de una trayectoria circular a una dada distancia del centro, es decir una trayectoria tal que el parámetro y la excentricidad son:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} = r_0, \qquad e = 0 \qquad (4.37)$$

y la energía es igual a:

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \tag{4.38}$$

Nos restringiremos a estudiar el caso en que la perturbación del movimiento se limita a un cambio en la velocidad tangencial, sin modificar inicialmente la distancia al centro ni introducir una velocidad radial (por cierto, en el movimiento ulterior del cuerpo la velocidad radial será en general no nula). Además, supondremos que la variación de los parámetros que caracterizan el movimiento se produce en un intervalo de tiempo mucho menor que el de una órbita completa; de esta manera podemos no tomar en cuenta la transición de unos valores a otros en el análisis del movimiento, y suponer que el cambio es "instantáneo". Para el nuevo movimiento valen entonces las condiciones iniciales:

$$v_r = v_{r_0} = 0, \qquad r = r_0 \tag{4.39}$$

Los nuevos valores del impulso angular y la energía pueden escribirse:

$$M' = M + \delta M, \qquad E' = E + \delta E \tag{4.40}$$

donde δE y δM están relacionados entre sí como se verá más abajo. Supondremos que $|\delta M| < M$; incluir $|\delta M| \geq M$ tendría como resultado tomar en cuenta la posibilidad de una inversión del sentido de giro, la cual no introduce ninguna diferencia conceptualmente relevante. Los nuevos parámetros de la órbita son entonces:

$$p' = \frac{M'^2}{m\alpha}, \qquad e' = \sqrt{1 + 2E'M'^2/(m\alpha^2)} \tag{4.41}$$

donde la nueva energía y el cuadrado del nuevo impulso angular están dados por:

$$E' = \frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0}, \qquad M'^2 = (M + \delta M)^2 \tag{4.42}$$

de modo que δE queda determinada por δM. Para obtener efectivamente la excentricidad en términos de δM, notemos que así como podemos escribir:

$$EM^2 = M^2 \left(\frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \tag{4.43}$$

de acuerdo con las condiciones iniciales (4.39) vale una relación análoga para E' y M':

$$E'M'^2 = M'^2 \left(\frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \tag{4.44}$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$
\begin{aligned}
E' M'^2 &= M'^2 \left(\frac{M'^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \\
&= (M + \delta M)^2 \left(\frac{(M + \delta M)^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) \\
&= M^2 \left(\frac{M^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} \right) + \frac{4M^3\, \delta M + 6M^2 \delta M^2 + 4M\delta M^3 + \delta M^4}{2mr_0^2} - \frac{2\alpha M\, \delta M + \alpha \delta M^2}{r_0} \\
&= EM^2 + \frac{4M^3\, \delta M + 6M^2 \delta M^2 + 4M\delta M^3 + \delta M^4}{2mr_0^2} - \frac{2\alpha M\, \delta M + \alpha \delta M^2}{r_0} \\
&= EM^2 + m\alpha^2 \left(\frac{2\delta M^2}{M^2} + \frac{2\delta M^3}{M^3} + \frac{\delta M^4}{2M^4} \right) \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que $r_0 = M^2/m\alpha$ para agrupar y cancelar términos. Reemplazando $M^2 = m\alpha r_0$ en la expresión de la energía se obtiene:

$$
EM^2 = -\frac{m\alpha^2}{2} \qquad (4.46)
$$

de modo que la nueva excentricidad $e' \neq 0$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
e' &= \sqrt{1 + \frac{2E' M'^2}{m\alpha^2}} \\
&= \sqrt{1 - 1 + \frac{4\delta M^2}{M^2} + \frac{4\delta M^3}{M^3} + \frac{\delta M^4}{M^4}} \\
&= 2 \frac{|\delta M|}{M} \sqrt{1 + \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta M^2}{4M^2}} \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

La raíz es igual al módulo $|1 + \delta M/(2M)|$, y como $|\delta M| < M$, podemos escribir simplemente:

$$
e' = 2 \frac{|\delta M|}{M} \left(1 + \frac{\delta M}{2M} \right) \qquad (4.48)
$$

Por otra parte, el nuevo parámetro puede escribirse en términos de r_0 y la variación del impulso angular:

$$
\begin{aligned}
p' &= \frac{(M + \delta M)^2}{m\alpha} \\
&= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha} \\
&= r_0 \left(1 + \frac{\delta M}{M} \right)^2 \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

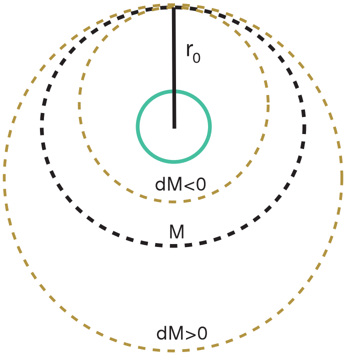

Figura 4.5. *Apartamientos de la órbita circular de radio r_0 e impulso angular M. Las órbitas perturbadas (δM < 0 y δM > 0) son elípticas.*

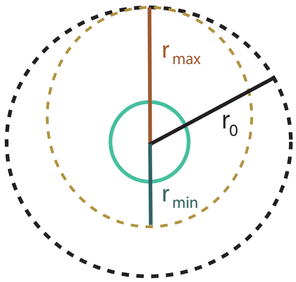

Figura 4.6. *El radio de la órbita circular r_0 es igual al afelio (r_{max}) en la órbita perturbada con δM < 0.*

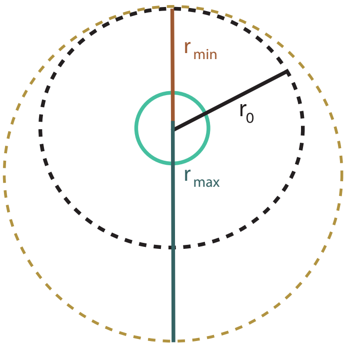

Figura 4.7. *El radio de la órbita circular r_0 es igual al perihelio (r_{min}) en la órbita perturbada con δM > 0.*

De esta manera, al perturbar la trayectoria circular (de radio r_0) de modo que las nuevas condiciones iniciales son $r = r_0$, $v_r = 0$ y $M' = M + \delta M$, tenemos una trayectoria caracterizada por nuevos valores del parámetro y la excentricidad que están dados por las expresiones (4.48) y (4.49).

Como las únicas trayectorias posibles en un campo gravitatorio central son circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas, se puede demostrar que en el caso M' < M (es decir δM < 0 y por lo tanto |δM| = -δM) se tiene e' < 1 (véase el problema al final de esta sección), entonces r_0 es el radio máximo en una trayectoria elíptica; en otras palabras, la distancia inicial al centro corresponde al afelio de la nueva órbita. En efecto, para e' < 1 la trayectoria es elíptica con un parámetro p' y la distancia máxima al centro es:

$$r_{max} = \frac{p'}{1 - e'} \tag{4.50}$$

Reemplazando $p' = (M + \delta M)^2/(m\alpha)$ y e' de acuerdo con la igualdad (4.48) tenemos:

$$\begin{aligned} r_{max} &= \frac{(M + \delta M)^2}{m\alpha\,(1 - 2|\delta M|/M\,(1 + \delta M/(2M)))} \\ &= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha\,(1 + 2\delta M/M + \delta M^2/M^2)} \\ &= \frac{M^2(1 + \delta M/M)^2}{m\alpha\,(1 + \delta M/M)^2} \\ &= \frac{M^2}{m\alpha} \end{aligned} \tag{4.51}$$

que es el valor original p del parámetro, el cual para la órbita circular coincide con r_0. En la ecuación anterior se tuvo en cuenta que dM < 0 al sacar las barras del módulo.

De manera totalmente análoga se puede comprobar que si M' > M, en tanto siga siendo e' < 1, la distancia inicial r_0 es ahora el radio mínimo en la trayectoria elíptica que resulta de la perturbación; en otras palabras: para δM > 0, e' < 1, la distancia r_0 corresponde al perihelio de la nueva órbita elíptica (véase las figuras 4.5, 4.6, 4.7).

☐ Problema 7

En el texto se señaló que cuando $\delta M < 0$ ($|\delta M| < M$) se tiene $e' < 1$. Proponemos verificar dicha afirmación reescribiendo de manera adecuada la relación cuadrática que existe entre la nueva excentricidad e' y la variación δM.

☐ 4.5.2 Caída a la superficie

A partir del análisis general realizado es posible estudiar el ejemplo, de gran interés físico, de un cuerpo que, a partir de una órbita circular alrededor de otro, cae a la superficie del mismo debido a una perturbación que reduce su impulso angular (y, consistentemente, también su energía). Como vimos, si la perturbación reduce el impulso angular ($\delta M < 0$) sin introducir una velocidad radial inicial en el nuevo movimiento, la nueva trayectoria es una elipse. Entonces, el cuerpo comienza a una distancia del centro:

$$r_0 = \frac{p'}{1 - e'} \qquad (4.52)$$

y reduce la misma hasta, en principio, alcanzar el perihelio cuando r alcanza el valor mínimo:

$$r_{min} = \frac{p'}{1 + e'} \qquad (4.53)$$

Esto último ocurre, claro está, en tanto el valor de la distancia mínima no sea menor que el radio R del cuerpo esférico alrededor del cual gira el cuerpo cuyo movimiento estamos estudiando. En el caso en que resulta $r_{min} < R$, entonces la trayectoria elíptica se interrumpe cuando $r = R$. Recordando que la ecuación de la trayectoria es:

$$r = \frac{p'}{1 + e' \cos \varnothing} \qquad (4.54)$$

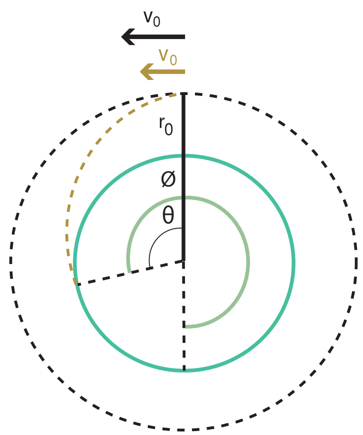

Figura 4.8. *Caída de un cuerpo sobre un planeta al modificar su impulso angular. θ es el ángulo medido desde el punto donde se produce la perturbación, ø es el ángulo polar.*

donde ø se mide desde la posición del perihelio, entonces si queremos hallar el ángulo θ barrido desde el afelio (la distancia máxima) hasta llegar a la superficie debemos igualar $r = R$ en la (4.54), despejar ø, y al resultado restar un ángulo π, igual al que se barre al ir del perihelio al afelio (véase la figura 4.8).

Por lo tanto:

$$\theta = \arccos\left(\frac{p' - R}{e'R}\right) - \pi \qquad (4.55)$$

Esta expresión da la solución al problema de determinar la posición de caída de un cuerpo que se encontraba realizando una trayectoria circular a cierta distancia de otro de radio R. Para poder utilizarla se requiere conocer las constantes e' y p' que caracterizan a la elipse de la nueva trayectoria, y que están definidas por las ecuaciones (4.48) y (4.49).

Dichas ecuaciones dan e' y p' en términos de la distancia inicial y la variación del impulso angular debida a la perturbación de la órbita originalmente circular.

En el caso de un cuerpo que cae sobre un planeta cabe la siguiente aclaración: el ángulo θ (ver figura 4.8) está medido desde el punto donde se produce la perturbación; no coincide, en general, con el ángulo medido por un observador situado en la superficie del planeta sobre el cual cae el cuerpo, debido a la rotación del propio planeta alrededor del eje que pasa por sus polos. El ángulo θ sólo sería aproximadamente igual al que mide un observador tal si el planeta tiene una velocidad angular Ω_p mucho menor que la inicial del cuerpo. De no ser así, el cálculo se complica un poco, excepto si el cuerpo que cae se encontraba inicialmente orbitando alrededor del ecuador. En ese caso particular, para hallar el ángulo θ' medido por un observador sobre el planeta hay que restar o sumar (según el planeta y el cuerpo giren en el mismo sentido o en sentidos opuestos) al valor de θ el ángulo $\Omega_p\Delta t$, donde Δt es el tiempo que tarda el cuerpo en descender desde el radio inicial r_0 hasta el radio R correspondiente a la superficie:

$$\theta' = \theta \mp \Omega_P \Delta t \tag{4.56}$$

Determinar el tiempo de caída requiere usar la fórmula (2.54) que relaciona el intervalo de tiempo con una variación de la distancia, para el caso particular de $U(r) = -\alpha/r$, e integrando entre los dos radios:

$$\Delta t = \sqrt{m/2}\int_R^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E' + \alpha/r - M'^2/2mr^2}} \tag{4.57}$$

Notemos que, por supuesto, los resultados obtenidos hasta aquí y en lo que sigue son válidos en tanto se pueda despreciar cualquier otra fuerza que actúe durante la caída. En el caso de un cuerpo que cae sobre un planeta con atmósfera, el efecto de frenado debido a la misma debería ser tomado también en cuenta; el cálculo puede complicarse entonces considerablemente.

□ 4.5.3 Escape al infinito

Si la órbita originalmente circular se perturba de modo tal que el impulso angular aumenta ($\delta M > 0$), es posible que la nueva trayectoria sea la de un movimiento ilimitado. De acuerdo con la discusión general precedente, esto ocurre si la nueva excentricidad e' resulta igual o mayor que la unidad (si e' = 1 la trayectoria es una parábola y si e' > 1 la trayectoria es una hipérbola). El valor mínimo de δM tal que el movimiento es ilimitado se obtiene de igualar e' = 1, es decir:

$$1 = 2\frac{\delta M}{M}\left(1 + \frac{\delta M}{2M}\right) \tag{4.58}$$

De aquí resulta que:

$$\delta M = M(\sqrt{2} - 1) \tag{4.59}$$

De este modo, para una variación del impulso angular dada por esta relación con el valor original (de la trayectoria no perturbada), la nueva trayectoria es una parábola, mientras que para valores mayores la nueva trayectoria es una hipérbola.

□ Problema 8

Para un valor inicial v de la velocidad en una órbita circular, i) calculemos el incremento de dicha velocidad tal que la nueva trayectoria sea una hipérbola con excentricidad $e' > 1$, e ii) obtengamos el módulo de la velocidad del cuerpo cuando se encuentra muy lejos del centro.