9. Solución de problemas

Capítulo 2

Solución problema 1:

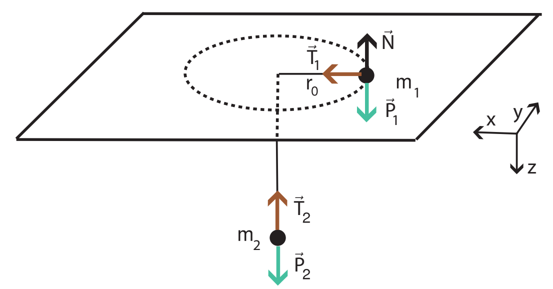


Diagrama de Fuerzas para el problema de dos masas unidas por un hilo que pasa por un orificio en una mesa horizontal.

i) Comencemos por realizar el diagrama de fuerzas sobre cada una de las masas del problema. Para que m_2 esté en reposo, la suma de fuerzas sobre este cuerpo debe ser nula, es decir que el valor de la tensión a la que llamaremos $\vec{T}_2$ debe ser igual al valor de la fuerza peso sobre la masa m_2: $T_2 = m_2 g$. A su vez, de acuerdo con lo enunciado acerca de la masa del hilo, es una buena aproximación considerar que la misma es nula. Por lo tanto, los módulos de las tensiones sobre los extremos de cada tramo del mismo deben ser iguales, y de esto se desprende que los módulos de las tensiones sobre la masas 1 y 2 son iguales: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Si la masa 2 no se mueve, la masa 1 describe un movimiento circular uniforme con velocidad angular v_0/r_0. A su vez, para la masa 1 tenemos [51]:

$$-T = m_1 a_c = -m_1 \frac{v_0^2}{r_0}$$

y de esta manera obtenemos la relación que deben cumplir m_1, m_2, g, v_0 y r_0 para que m_2 permanezca en reposo:

$$v_0^2 = \frac{m_2}{m_1} g r_0$$

ii) Vamos a resolver la siguiente pregunta utilizando las leyes de conservación. El mismo problema puede ser resuelto utilizando simplemente las ecuaciones de Newton, pero veremos que se vuelve más sencillo si utilizamos las leyes de conservación. Veamos en primer lugar la conservación de la energía. Las fuerzas aplicadas sobre m_1 y m_2 en este problema son los pesos, las tensiones sobre ambas masas y la fuerza que la mesa ejerce sobre m_1 que se denomina normal. El peso es una fuerza asociada con una energía potencial, de modo que su trabajo no cambia la energía mecánica, la normal aplicada sobre m_1 no realiza trabajo pues es perpendicular al desplazamiento de m_1; no es así, en cambio, para las tensiones. Plantear la conservación de la energía para el sistema requiere entonces cierto cuidado. Si consideramos un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ de la masa 1 sobre el plano, el trabajo infinitesimal sobre m_1 se puede escribir de la siguiente manera:

$$dL_1 = \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1$$

[51] La suma de fuerzas en la dirección radial es igual a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta $a_c = -v_T^2/r$

mientras que el trabajo sobre m_2 se puede escribir:

$$dL_2 = \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

Debido a que el hilo se supone inextensible, necesariamente si m_2 se desplaza una distancia dr_2, entonces m_1 también se va a desplazar esa distancia: $dr_1 = dr_2 = dr$. A su vez, el producto escalar entre la tensión y el desplazamiento infinitesimal de m_1 debe ser positivo, ya que ambos tienen el mismo sentido. Mientras que el producto escalar entre la tensión aplicada sobre m_2 y su desplazamiento debe ser negativo, ya que si m_2 desciende la tensión tiene sentido contrario al desplazamiento. De esta manera tenemos:

$$dL_1 + dL_2 = Tdr - Tdr = 0$$

y el trabajo total de las tensiones sobre el sistema es nulo, por lo que la energía total se conserva.

Para ver si se conserva el impulso angular, es necesario calcular la suma de los momentos $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ sobre m_1 y m_2. Para calcular los momentos, tomemos como centro de momentos el orificio sobre la mesa. Las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son paralelas a los vectores posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente, de modo que sus momentos son nulos. La fuerza peso sobre m_2 es colineal con el vector posición de m_2, y por ello el momento de esta fuerza es nulo. A su vez, el peso sobre m_1 se compensa con la normal $\vec{N}$ ejercida por la superficie sobre la misma masa; dado que ambas fuerzas se ejercen sobre la misma masa puntual, la suma de momentos sobre m_1 da 0. Por lo tanto, se conserva el impulso angular $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ donde $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ son los impulsos angulares de m_1 y m_2 respectivamente. Este resultado nos permite utilizar la conservación del impulso angular $\vec{M}$ y de la energía E para responder la segunda pregunta del problema. Calculemos el valor de $\vec{M}$ para un instante cualquiera, con $v_2 \neq 0$ (recordemos que el impulso angular se calcula tomando el mismo origen para el vector posición $\vec{r}$ que tomamos al calcular los momentos de las fuerzas). Se puede ver que $\vec{M}_2 = 0$, ya que tanto el vector posición $\vec{r}_2$ como la velocidad $\vec{v}_2$ está en la dirección de z y el producto vectorial de dos vectores paralelos es 0. Para calcular $\vec{M}_1$ vemos que tanto $\vec{r}_1$ como $\vec{v}_1$ se encuentran sobre el plano definido por la mesa. Debido a que el producto vectorial siempre es perpendicular al plano definido por los dos vectores, entonces $\vec{M}_1$ va a estar en la dirección del eje z. A su vez, se puede ver que $\vec{r}_1$ va a tener siempre dirección radial, mientras que $\vec{v}_1$ tiene componente radial v_{1r} y tangencial v_{1t}. Al hacer el producto vectorial, la parte correspondiente a la componente radial se anula y sólo queda la parte tangencial, de modo que:

$$M = M_1 = m_1 r v_{1t} = m_1 r_0 v_0$$

La última igualdad en la ecuación anterior es válida ya que $\vec{M}$ se conserva en todo instante (tenga o no velocidad m_2). De esta manera podemos escribir:

$$v_{1t} = \frac{M}{m_1 r} = \frac{r_0 v_0}{r} \qquad \text{(a)}$$

A continuación calculamos la energía del sistema, en la que tenemos que incluir las energías cinéticas de ambas masas y la energía potencial gravitatoria:

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(v_{1r}^2 + v_{1t}^2\right) + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g(l - r)$$

donde l es la longitud total del hilo y l - r es la longitud del hilo desde la mesa hasta m_2. Si reemplazamos v_{1t} por su expresión en función de los datos del problema y recordando que $v_{1r} = v_2$ obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_{1r}^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} - m_2 g(l - r) \qquad \text{(b)}$$

Es importante notar que la conservación del impulso angular $\vec{M}$ permite escribir la energía en función de la distancia de m_1 al centro de la mesa, su derivada temporal (la velocidad radial), y los datos iniciales. A su vez, como la energía se conserva, independientemente de si m_2 se mueve o no, podemos escribir el valor de la energía cuando $v_2 = 0$:

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - m_2 g(l - r_0) \qquad \text{(c)}$$

Ahora, si queremos obtener el valor de $v_{1r} = v_2$ cuando m_2 ha bajado una distancia d, sólo tenemos que reemplazar r = l - d en la ecuación (b) (d es la distancia entre la mesa y m_2) e igualar esta ecuación con la ecuación (c) para obtener:

$$v_{1r}^2 = \frac{m_1 r_0^2 v_0^2}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(l - d)^2}\right) - \frac{2m_2 g}{m_1 + m_2}(l - r_0 - d)$$

de modo que $v_{1r} = v_2$ resultan de tomar la raíz. Para obtener el valor de v_{1t}, evaluamos la ecuación (a) en r = l - d y obtenemos:

$$v_{1t} = \frac{r_0 v_0}{l - d}$$

Como vemos, la conservación del impulso angular tiene como consecuencia que la velocidad tangencial de m_1 aumenta al aumentar d, pues esto último implica que disminuye la distancia al centro.

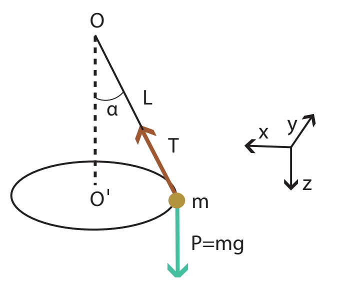


Diagrama de fuerzas para el péndulo cónico.

Solución problema 2:

Comenzamos por dibujar las fuerzas aplicadas sobre m, donde también está indicado el sistema de referencia que utilizamos. Si tomamos como centro de momentos el punto O, entonces el momento de la tensión $\vec{T}$ sobre la soga es nulo debido a que el vector posición desde ese centro de momentos es paralelo a la dirección de $\vec{T}$. El producto vectorial entre la fuerza peso $\vec{P}$ y el vector posición de m con origen en O, se puede escribir siguiendo las reglas para el producto vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{r}_O \times m\vec{g} = (-Lm\, g \operatorname{sen}\alpha,\ 0,\ 0)$$

A partir de esta expresión vemos que el impulso angular $\vec{M}$ desde el punto O no es una cantidad conservada.

Para calcular el momento de las fuerzas externas respecto de O', tenemos que calcular el producto vectorial entre el vector posición de m medido desde O' y las fuerzas tensión $\vec{T}$ y peso. En este caso el módulo del vector posición es: $|\vec{r}| = L\cos\alpha$, y entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{M}}{dt} &= \vec{r}_{O'} \times m\vec{g} + \vec{r}_{O'} \times \vec{T} \\
&= (-L\cos\alpha\, m g, 0, 0) + (L\cos\alpha\, T\ \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha), 0, 0) \\
&= (-L\cos\alpha\, m g, 0, 0) + (L\cos^2\alpha\, T, 0, 0) \\
&= (L\cos\alpha\,(T\cos\alpha - mg), 0, 0)
\end{aligned}$$

Para obtener el valor de la tensión escribimos la ecuación de Newton en el eje z para este sistema:

$$T\cos\alpha - mg = 0$$

de donde $T = mg/\cos\alpha$, y por lo tanto $d\vec{M}/dt = 0$; de esta manera, obtenemos que el impulso angular desde el punto O' sí se conserva.

□ Capítulo 3

Solución problema 1:

La gravedad en la superficie del Sol puede determinarse con la fórmula de ec. 3.30 cap 3 $g = GM_S / R^2_S$, donde M_S es la masa del Sol y R_S su radio. Pero también se puede calcular g expresando el producto GM_S en términos de los datos que surgen del movimiento de la Tierra. En efecto, igualando la fuerza gravitatoria del Sol sobre la Tierra con la masa por la aceleración centrípeta de la misma, obtenemos:

$$\frac{GM_S M_T}{r^2} = M_T \frac{v^2}{r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra, r es el radio de su órbita, y v es el valor de la velocidad con que recorre la misma. Por lo tanto, $v = 2\pi r/T$, donde T es el período, y así:

$$GM_S = v^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

Reemplazando ahora en la fórmula para g tenemos:

$$g = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 R_S^2}$$

de modo que el resultado se obtiene reemplazando T = 1 año= 365 x 24 x 3600 s = 3,1536 x 10^7 s y R_S = 6, 95 x 10^8 m. El valor de g en la superficie del Sol resulta así de unos 277m/s^2.

Solución problema 2:

El ángulo se determina a partir de la condición de que ambos cuerpos se encuentren. Tomando $t_0 = 0$, las ecuaciones de movimiento de los cuerpos 1 y 2 son:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_{0x} t \\ y_1 &= v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \\ x_2 &= L \\ y_2 &= A - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

El encuentro de ambos implica $x_1 = x_2 = L$, $y_1 = y_2$. De la primera igualdad se deduce que $v_{0x} = L/t$, donde t es el instante en que se produce el encuentro. Por otro lado, notemos que en la segunda igualdad desaparecen los términos cuadráticos en el tiempo, de modo que $v_{0y} t = A$. Por lo tanto, $\tan \alpha = v_{0y}/v_{0x} = A/L$, donde α es el ángulo medido respecto de la horizontal. Así:

$$\alpha = \arctan \frac{A}{L}$$

lo cual quiere decir que el cuerpo 1 debe lanzarse apuntando a la posición inicial del cuerpo 2, tal como sería el caso en ausencia de gravedad. El resultado no es más que una consecuencia de la independencia de la aceleración respecto de la masa.

Solución problema 3:

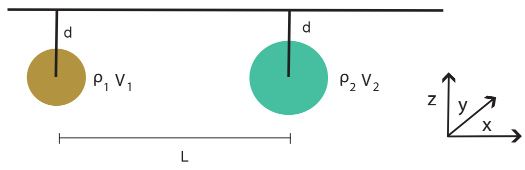
Coloquemos el origen sobre la superficie y elijamos como eje x el que es paralelo a la recta que pasa por los centros de las dos esferas. Tomemos el eje z perpendicular a la superficie. El campo por encima de la superficie es la suma de un campo uniforme más los campos de dos esferas de densidades ρ_1 y ρ_2, menos los campos de dos esferas de densidad ρ. Tomando x = 0 en el punto por encima de la mitad del segmento que une los centros de las esferas, el campo total se escribe entonces como:

$$\vec{g}(x, y, z) = (0, 0, -g_0) - \frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x + L/2, y, z + d)}{((x + L/2)^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2 - \rho)V_2(x - L/2, y, z + d)}{((x - L/2)^2 + y^2 + (z + d)^2)^{3/2}}$$

Por lo tanto, justo sobre la superficie z = 0 y a lo largo del eje x (y=0) las componentes cartesianas del campo son:

$$\begin{aligned} g_x(x, 0, 0) &= -\frac{G(\rho_1 - \rho)V_1(x + L/2)}{((x + L/2)^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2 - \rho)V_2(x - L/2)}{((x - L/2)^2 + d^2)^{3/2}} \\ g_y(x, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$g_z(x,0,0) = -g_0 - \frac{G(\rho_1-\rho)V_1 d}{((x+L/2)^2+d^2)^{3/2}} - \frac{G(\rho_2-\rho)V_2 d}{((x-L/2)^2+d^2)^{3/2}}$$



Dos esferas con densidades y volúmenes distintos sumergidas bajo la superficie.

El ángulo γ que forma un péndulo con la dirección vertical es el mismo que el del campo resultante; por lo tanto:

$$\gamma = \arctan \frac{g_x}{g_z}$$

Para las relaciones de densidades dadas, el signo del ángulo estará dado por el signo de la componente g_x. Está claro que para $\boldsymbol{\rho}_1 < \boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\rho}_2 > \boldsymbol{\rho}$ el apartamiento de la vertical debe seguir comportamientos opuestos en las proximidades de cada esfera sumergida.

Capítulo 4

Solución problema 1:

Comencemos por escribir el valor del impulso angular y de la energía en términos de los datos v_0 y r_0, donde r_0 es igual al radio terrestre más la altura A. Si la masa del satélite es m, entonces:

$$M = mr_0v_0$$

y como la velocidad radial es inicialmente nula, si reemplazamos α= Gm'm en la expresión de la energía, obtenemos:

$$E = -\frac{Gm'm}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde m' es la masa de la Tierra. De esta manera, las fórmulas del parámetro p y la excentricidad e nos dan

$$p = \frac{1}{Gm'}r_0^2v_0^2,$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2v_0^2}{G^2m'^2}\left(v_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0}\right)}$$

Observemos dos cosas: 1) el resultado es independiente de la masa del satélite; esto se discute en detalle (cap. 4 - sección 4.2) si el movimiento del satélite es ligado, entonces E debe ser menor que cero, y de esto se desprende que $v_0^2/2 < Gm'/r_0$. Por lo tanto, el paréntesis en la fórmula de la excentricidad es negativo, y se tiene que $e < 1$, tal como dedujimos en el análisis general precedente.

Solución problema 2:

La velocidad mínima tal que el cuerpo escapa "al infinito" es la que hace nula la energía. Si bien en general hemos escrito la energía cinética como dos contribuciones asociadas al movimiento radial y al movimiento angular, en este caso particular es conveniente escribir simplemente:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}$$

donde v es el valor absoluto del vector velocidad del cuerpo. Reemplazando α = Gm'm donde m' es la masa del cuerpo en cuyo campo se mueve el cuerpo en cuestión, igualando E = 0 se obtiene que la velocidad mínima para lograr alejarse ilimitadamente es:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2Gm'}{r_0}}$$

donde r_0 es la distancia inicial al centro. Este resultado se conoce como velocidad de escape. Como vemos, la deducción misma nos muestra que el valor es independiente de la dirección de la velocidad. Como ejemplo, calculemos el valor de v_{min} para un cuerpo que se encuentra a una distancia del Sol igual a la de la Tierra ($1{,}5 \times 10^{11}$m). Para eso utilizamos la masa del Sol m' ≈ 2×10^{30} kg, y el valor de la constante de la gravitación G = 6,67 . 10^{-11} N m^2 kg^{-2}. El resultado que se obtiene es, aproximadamente, 4, 2 x 10^4 m/s. Es interesante, como ejercicio adicional, estimar la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol y compararla con el valor obtenido.

Solución problema 3:

Llamemos r_0 al radio inicial, igual al radio de la Tierra más la altura inicial, y r_1 al radio mínimo admisible (igual, análogamente, al radio terrestre más la altura mínima). Como en las posiciones correspondientes la velocidad es solamente tangencial (pues tanto el radio máximo como el mínimo corresponden a una velocidad radial nula), la conservación de la energía conduce a:

$$v_0^2 - \frac{2Gm'}{r_0} = v_1^2 - \frac{2Gm'}{r_1}$$

de donde:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\,Gm'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Por otro lado, la conservación del impulso angular implica que:

$$r_0 v_0 = r_1 v_1$$

de donde $v_1 = r_0 v_0 / r_1$. Igualando ambas expresiones para v_1 se obtiene una ecuación para el valor de la velocidad inicial, cuya solución es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm'}{r_0}\left(\frac{r_1}{r_1 + r_0}\right)}$$

Esta es la velocidad mínima requerida para que el satélite no descienda por debajo de r_1. Reemplazando los valores dados de r_0 y r_1 se obtiene v_0 ≈ 7.560 m/s. Observemos que, para radios r_0 y r_1 similares, v_0 es apenas menor que $v = \sqrt{Gm'/r_0}$, valor que corresponde a la órbita circular para la altura inicial.

Solución problema 4:

Está claro que, para que el satélite se mantenga sobre un punto dado de la superficie, el mismo debe moverse en un plano perpendicular al eje de rotación de la Tierra, y con igual velocidad angular que el planeta. Pero dado el carácter central de la fuerza gravitatoria, dicho plano solamente puede ser el del ecuador. Por otro lado, la constancia de la velocidad angular implica, dada la conservación del impulso angular (en particular, del módulo del mismo $M = mvr = m\Omega r^2$), que el radio es constante; esto demuestra que la órbita debe ser circular.

De acuerdo con la discusión de la sección 3, cap. 4, el cubo del radio de la órbita circular es proporcional al cuadrado del período. A partir de la relación entre ambos se obtiene:

$$r = \left(\frac{\alpha T^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/3}$$

donde m es la masa del satélite y $\alpha = Gm'm$, con m' la masa de la Tierra. Así, la masa del satélite se simplifica, y nos queda:

$$r = \left(\frac{Gm'T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Reemplazando el período T = 24 horas = 24 x 3.600 s y los valores de $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ y la masa terrestre $m' \approx 6 \times 10^{24}$ kg, se obtiene el valor aproximado de r = 42.300 km. La altura sobre la superficie se obtiene restando a este número el radio de la Tierra, de unos 6.400 km. El resultado es de aproximadamente 35.900 km.

Solución problema 5:

Usando la fórmula que relaciona el cuadrado del período T con el cubo del semieje mayor a se obtiene que $a = (\alpha T^2/(4\pi^2 m))^{1/3}$. Por lo tanto de uno de los datos se obtiene inmediatamente el valor de dicho semieje, que se relaciona con los parámetros buscados de acuerdo con $a = p/(1 - e^2)$. Por otro lado, la relación entre la distancia mínima (correspondiente al perigeo) y los parámetros e y p es $r_{min} = p/(1 + e)$. El cociente entre estas expresiones nos da

$$\frac{r_{min}}{a} = 1 - e$$

es decir que

$$e = 1 - \frac{r_{min}}{a}$$

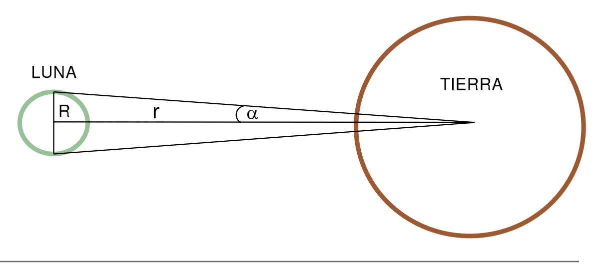
Sustituyendo esta igualdad en la fórmula de la distancia mínima y resolviendo para obtener p resulta

$$p = r_{min}\left(2 - \frac{r_{min}}{a}\right)$$

Las dos últimas fórmulas expresan la excentricidad y el parámetro p en términos del semieje mayor y la distancia mínima de la órbita elíptica. Escribiendo a en términos del período y evaluando de acuerdo con los datos: T = ((27 . 24) + 8) 3.600 s, r_{min} = 3,63 . 10^8 m obtenemos que a = 3,84 . 10^8 m, de donde

$$e = 0,055, \qquad p = 3,83 \times 10^8 \text{ m}$$

Solución problema 6:



El diámetro angular es dos veces el ángulo que subtiende, medido desde el centro de la Tierra, el radio R de la Luna. Si lo llamamos α, está claro que, como el radio lunar es mucho menor que la distancia r de la misma a la Tierra (o más precisamente a su centro), entonces en radianes se tiene

$$\alpha = \frac{2R}{r}$$

En el perigeo r = r_{min}, mientras que en el apogeo r = r_{max}, con r_{max} = p/(1 - e). De acuerdo con los resultados del problema anterior, obtenemos que r_{max} = 4,05 x 10^8m. Por lo tanto, haciendo la cuenta y pasando los resultados a grados sexagesimales, resulta que el diámetro angular es de unos 33' (poco más de medio grado) para el perigeo y de unos 29' para el apogeo.

Solución problema 7:

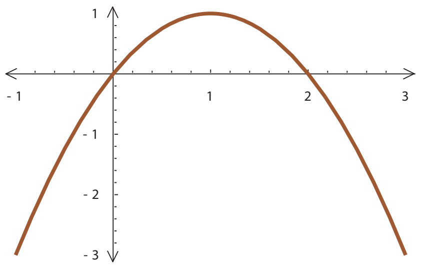


Gráfico de la parábola y = 2x - x^2.

En efecto, definamos x como la relación entre |δM| y el valor inicial M: x = |δM|/M. Entonces, la nueva excentricidad puede escribirse como una función de x:

$$e' = 2x - x^2$$

Esta función es una parábola con las ramas "hacia abajo" (ver figura), y cuyo máximo se encuentra en x = 1; allí se alcanza el valor 1. Pero dada la definición de x, debemos restringirnos a 0 ≤ x < 1, y por lo tanto tenemos que e' < 1, tal como habíamos afirmado.

Solución problema 8:

i) Para δM > 0 podemos escribir la excentricidad como:

$$e' = 2\frac{\delta M}{M} + \frac{\delta M^2}{M^2}$$

de modo que, definiendo x = δM/M, obtenemos una ecuación cuadrática:

$$x^2 + 2x - e' = 0$$

de la cual resulta: $$x = \sqrt{1 + e'} - 1$$

A partir de la definición de la variable auxiliar x, podemos expresar el nuevo impulso angular M' en términos del impulso original M y la excentricidad de la trayectoria perturbada:

$$M' = M\sqrt{1 + e'}$$

De la definición de M tenemos que $M = mvr_0$ y $M' = mv'r_0$, donde m es la masa del cuerpo, y r_0 su distancia inicial al centro. v y v' son los valores de la velocidad antes y después de la perturbación. Por lo tanto:

$$v' = v\sqrt{1 + e'}$$

de donde se deduce el incremento de velocidad

$$\delta v = v\left(\sqrt{1 + e'} - 1\right)$$

ii) En la trayectoria circular original se cumple la igualdad:

$$m\frac{v^2}{r_0} = \frac{\alpha}{r_0^2}$$

donde α es Gm'm; de aquí se obtiene el radio inicial en términos de la velocidad:

$$r_0 = \frac{\alpha}{mv^2}$$

La energía inmediatamente después de la perturbación, cuando se ha modificado la velocidad pero aún no ha cambiado la distancia al centro (recordemos que estamos suponiendo que la perturbación se produce en un tiempo muy corto), se escribe:

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{\alpha}{r_0} = \frac{1}{2}m(1 + e')v^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

y reemplazando el valor de r_0 en términos de la velocidad inicial tenemos:

$$E' = \frac{1}{2}mv^2(e' - 1)$$

Por otra parte, dado que la energía se conserva, cuando el cuerpo se aleja a distancias muy grandes del centro y la energía potencial tiende a cero tenemos:

$$E' = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

donde usamos la notación v_∞ para la velocidad a grandes distancias (en el “infinito"). De aquí se obtiene entonces:

$$v_\infty = v\sqrt{e' - 1}$$

Como e' > 1, la velocidad es no nula.

Solución problema 1:

Sean M_A, M_N y M_T las masas del astronauta, de la nave y de la Tierra respectivamente, y sean r_0 la distancia de la nave a la Tierra y L la del astronauta a la nave. Dado que la masa de la nave es mucho mayor, es razonable suponer que la misma se encuentra en equilibrio respecto del sistema no inercial que acompaña su rotación, sin ser apreciablemente afectada por el astronauta. Pero no ocurriría lo mismo, si no contara con el cable. De acuerdo con lo explicado en el párrafo precedente, la fuerza de marea sobre el astronauta, debida a la diferencia entre la gravedad de la Tierra y la fuerza centrífuga es igual a $3GM_TM_AL/r_0^3$ hacia "afuera". Por otro lado, la fuerza gravitatoria ejercida por la nave sobre el astronauta es igual a GM_NM_A/L^2 hacia "adentro". Por lo tanto, la tensión del cable necesaria para mantener al astronauta en reposo respecto del sistema no inercial es:

$$T = \frac{3GM_T\ M_A\ L}{r_0^3} - \frac{GM_N\ \ M_A}{L^2}$$

Analicemos si los dos términos de esta expresión son comparables. Por un lado, dados los valores de las distancias tenemos $L/r_0^3 \sim 10^{-15}(1/L^2)$; pero por otro lado, $M_T \sim 10^{20}M_N$. Por lo tanto, la fuerza de marea es varios órdenes de magnitud mayor que la de gravedad de la nave sobre el astronauta. Esto permite despreciar esta última fuerza, y así:

$$T \simeq \frac{3GM_T\ M_A\ L}{r_0^3} \simeq 2.500 \text{ dynas}$$

Vemos que para las masas y distancias involucradas en este caso, el efecto relevante es el de la fuerza de marea, y no el de la fuerza de gravedad entre la nave y el astronauta.

Solución problema 2:

A partir de los datos y de la relación entre la gravedad superficial y la constante universal de gravitación G se puede obtener el valor de la masa de la Luna, la cual es de aproximadamente 0,012 veces la masa de la Tierra. De acuerdo con el análisis general realizado, la fuerza de marea F_m sobre una masa dm en la superficie lunar es $3GM\ dm\ r_L/r_0^3$, donde M es la masa de la Tierra, r_0 es la distancia Tierra-Luna, y r_L es el radio de la Luna. Por otro lado, la fuerza gravitatoria F_L de la Luna sobre la masa dm en su superficie es igual a $Gm'dm/r_L^2$, donde m'es la masa de la Luna y r_L es su radio. Por lo tanto, el cociente entre ambas fuerzas es igual a:

$$\frac{F_m}{F_L} = 3\,\frac{M}{m'}\frac{r_L^3}{r_0^3}$$

Entre las masas hay una diferencia de dos órdenes de magnitud. Entre las distancias involucradas la diferencia también es de unos dos órdenes: pero el cociente involucra los cubos de las distancias; por eso el valor del mismo es muy pequeño: aproximadamente igual a $2{,}27 \cdot 10^{-5}$. Entonces, la fuerza de marea debida a la Tierra es, en este caso, mucho menor que la fuerza gravitatoria de la propia Luna.

☐ Capítulo 6

Solución problema 1:

La ecuación 6.8 (cap. 6) nos da la relación entre la longitud medida en un sistema y la longitud medida en otro sistema. Invirtiendo dicha relación obtenemos la fracción V/c correspondiente a una relación dada de ambas longitudes:

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1 - \frac{l'^2}{l_0}}$$

De aquí se obtiene V ≈ 0,46 c = 138.000 km/s. Vemos que aún para lograr una diferencia de longitud proporcionalmente no muy grande (una novena parte), la velocidad tiene que ser del orden de c.

☐ Capítulo 8

Solución problema 1:

Para calcular el ángulo que se corre el perihelio en una órbita necesitamos determinar el valor del impulso angular. La órbita de la Tierra se aparta poco de una circunferencia, de modo que para el cálculo del impulso angular podemos aproximar la órbita como circular. Esto nos permite determinar la velocidad igualando la fuerza ejercida por el Sol a la masa de la Tierra multiplicada por su aceleración centrípeta. Si m' y m son las masas del Sol y de la Tierra,

$$\frac{Gm'm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{8.49}$$

de donde $v = \sqrt{Gm'/r}$. Así, escribiendo el impulso angular como M = mvr tenemos

$$M = m\sqrt{Gm'r} \tag{8.50}$$

Reemplazando en la fórmula para el corrimiento δø obtenemos

$$\delta\text{ø} = \frac{6\pi G m'}{c^2 r} \tag{8.51}$$

Para los valores de masa y radio dados, al multiplicar δø por cien (el número de órbitas en un siglo) y pasando el resultado a segundos de arco, se obtiene un desplazamiento acumulado de 3,84'' (que concuerda, dentro del margen de error observacional, con lo medido). Traducido a distancia, el desplazamiento predicho para la Tierra es de poco más de 9 km en una órbita, o sea poco más de 900 km en un siglo.