

8. La teoría de la relatividad general

□ 8.1. Bases de la teoría

Lo más usual en las leyes fundamentales de la naturaleza es que la magnitud que determina la intensidad de una interacción no este relacionada con la masa de los cuerpos involucrados. Por ejemplo, en el electromagnetismo la intensidad de la fuerza eléctrica sobre un cuerpo esta dada por el campo que actúa sobre el mismo y por su carga. Como para una dada fuerza la aceleración es inversamente proporcional a la masa, entonces la aceleración de un cuerpo cargado depende tanto de su carga como de su masa. Sólo adquieren aceleraciones iguales, en un campo dado, cuerpos cuya relación carga/masa es la misma. En contraste con los campos electromagnéticos, el campo gravitatorio tiene una propiedad notable: la aceleración que adquiere un cuerpo como consecuencia de la acción del campo gravitatorio no depende de su masa, composición, tamaño o estado físico. Este hecho puede expresarse a su vez de la siguiente manera: en primer lugar, de acuerdo con la ley de Newton se tiene que

$$F = m_i a \quad (8.1)$$

donde m_i es la masa inercial del cuerpo; la masa inercial, por lo tanto, determina el valor de la aceleración que adquiere el cuerpo para una dada intensidad de la fuerza neta aplicada. A su vez si la aceleración es causada por el campo gravitatorio, la fuerza está dada por

$$F = m_g \times \text{intensidad del campo gravitatorio} \quad (8.2)$$

donde m_g es la masa gravitatoria del cuerpo; esto es, dicha masa determina la intensidad de la interacción gravitatoria. De este modo se deduce que:

$$a = \frac{m_g}{m_i} \times \text{intensidad del campo gravitatorio} \quad (8.3)$$

y como sabemos que la aceleración es independiente de la naturaleza y composición de los cuerpos, se concluye que el cociente entre masa gravitatoria y masa inercial debe ser igual para cualquier cuerpo. A su vez, con una elección apropiada de unidades, este cociente se puede hacer igual a la unidad. De esta manera podemos concluir que la masa gravitatoria de un cuerpo es igual a su masa inercial. Una manera intuitiva de entender esta propiedad es pensar que la misma cualidad de un cuerpo se manifiesta, de acuerdo con las circunstancias, como medida de su inercia o como medida de su peso.

En 1890 Eötvös propuso un experimento para probar la igualdad entre la masa gravitatoria y la masa inercial. El principio en que se basa el experimento se puede visualizar de la manera siguiente: una masa que se encuentra sobre la superficie de la Tierra va a estar sujeta, para un observador en un sistema no inercial que gira con el planeta, a dos fuerzas: la gravitatoria, dirigida hacia el centro de la Tierra, y la centrífuga, dirigida hacia afuera respecto del eje de rotación. Eötvös utilizó una balanza de torsión en equilibrio respecto del observador y orientada de Este a Oeste. Cualquier pequeña diferencia en la proporcionalidad entre las fuerzas gravitatoria e inercial se traduciría en una rotación de la balanza. Es decir, como la razón de las fuerzas depende de la razón de las masa gravitatoria m_g a masa inercial m_i , la aparición de una rotación implicaría que m_g no sería igual a m_i . Eötvös demostró que, hasta una parte en mil millones y para todos los materiales usados, se cumplía que $m_g = m_i$. Posteriormente, varios científicos (Dicke, Roll, Krotkov, Braginsky, Panov, Keiser, Faller, Alderberg y Heckel) modificaron el experimento original de Eötvös, utilizando aparatos y técnicas de medición muy refinados. Entre 1964 y 1992 el experimento fue realizado nuevamente utilizando masas de distintos materiales. En todos los casos se utilizó la aceleración de caída de dos cuerpos hacia el Sol, y se obtuvo el mismo resultado que el experimento inicial pero con una precisión de una parte en un billón.

La independencia de la aceleración de un cuerpo respecto de su masa conduce, como vimos, al principio de equivalencia. Las consecuencias que se desprenden de dicho principio son notables, y llevan a una reformulación completa de la manera de entender la gravedad. Una forma posible en que pueden seguirse los pasos que conducen a la teoría moderna del campo gravitatorio es la siguiente:

1. La igualdad de aceleraciones, independientemente de las masas de los cuerpos, permite establecer la equivalencia entre campos gravitatorios y sistemas de referencia acelerados (es decir no inerciales).
2. Como se ve, por ejemplo, en el caso del disco rotante, la geometría en un sistema de referencia no inercial no es euclídea. Las relaciones entre distancias no son las de la geometría de Euclides, sino que son como las existentes sobre superficies curvas.
3. Por lo tanto, la equivalencia entre sistemas no inerciales y campos gravitatorios implica que la gravedad debe entenderse como una forma de curvatura.

En el nuevo marco conceptual que surge de estas ideas básicas -la teoría de la relatividad general- la gravedad ya no se entiende como una fuerza. La cuerpos ya no actúan sobre los otros, sino que modifican la geometría del espacio, la cual deja de ser euclídea. Las trayectorias de los otros cuerpos son las de cuerpos moviéndose libremente en un espacio cuya geometría no es plana sino curva. Por otra parte, en este marco conceptual no es válido el principio de superposición utilizado en la subsección 8.3 del capítulo 3 para el cálculo del campo gravitatorio.

No iremos más allá en el desarrollo de estas nociones básicas; en cambio, mostraremos a continuación algunas consecuencias directas del principio de equivalencia que permitirán precisar un poco lo que queremos decir con "curvatura".

□ 8.2. Consecuencias del principio de equivalencia

8.2.1 Deflexión de la luz en un campo gravitatorio

Supongamos un ascensor que se mueve con aceleración constante A en la dirección que llamaremos vertical, y de sentido "hacia arriba". Definamos un sistema inercial K respecto del cual se mide la aceleración del ascensor, y otro sistema inercial K_1 que instantáneamente acompaña al ascensor cuando su velocidad es V_0 . Sean x, x_1 los ejes verticales de ambos sistemas, y sean y, y_1 los ejes horizontales de los mismos. Supongamos que cuando la velocidad del ascensor es V_0 desde el exterior se apunta horizontalmente un haz de luz hacia un orificio realizado en una de sus paredes laterales (ver figura 8.1).

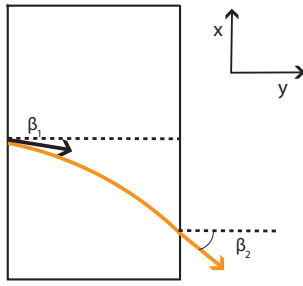


Figura 8.1. Rayo de luz que atraviesa el ascensor.

Si aplicamos las fórmulas (6.17) de transformación de las componentes de la velocidad, tenemos que la velocidad del haz medida desde el sistema K_1 tiene componentes

$$v_{1x} = -V_0, \quad v_{1y} = c\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} \quad (8.4)$$

Está claro entonces que el valor del ángulo del haz respecto de la horizontal, medido en el sistema K_1 , está dado por

$$\beta_1 = \arcsen\left(\frac{V_0}{c}\right) \quad (8.5)$$

Este ángulo define la dirección con que el haz ingresa al ascensor. Veamos ahora la dirección en que se propaga el haz cuando alcanza la pared opuesta. Para eso basta observar que, en el breve intervalo de tiempo que le lleva al haz alcanzar la pared, el ascensor ha incrementado su velocidad en una cantidad dV . Este incremento de la velocidad se obtiene de multiplicar la aceleración A por un tiempo aproximadamente igual³⁹ a L/c , donde L es la separación entre las paredes: $dV = AL/c$. Consideremos entonces un tercer sistema inercial K_2 que, precisamente cuando el haz alcanza la segunda pared, se traslada con la velocidad $V_0 + dV$ que tiene el ascensor en ese instante. Las componentes de la velocidad de la luz en el sistema K_2 son

$$v_{2x} = -(V_0 + dV), \quad v_{2y} = c\sqrt{1 - \frac{(V_0 + dV)^2}{c^2}} \quad (8.6)$$

y por lo tanto ahora el valor del ángulo que la dirección de propagación del haz forma con la horizontal es igual a

³⁹ Estamos suponiendo que la desviación es en todo momento pequeña, de modo que el tiempo de viaje de pared a pared puede calcularse usando c en lugar de la componente v_y ; observemos que esto dejaría de ser válido si V_0 no fuera mucho menor que c .

$$\beta_2 = \arcsen \left(\frac{V_0 + dV}{c} \right) \quad (8.7)$$

Está claro que estos dos ángulos son diferentes, y que la diferencia se debe a la aceleración del ascensor (en efecto, si es $A = 0$ también es $dV = 0$). En particular, como los ángulos pueden suponerse pequeños si $V_0 \ll c$, entonces $\beta_1 \approx V_0/c$ y $\beta_2 \approx (V_0 + dV)/c$, de modo que la diferencia está dada por

$$\Delta \beta \simeq dV/c = AL/c^2 \quad (8.8)$$

En general, la dirección de propagación del haz va cambiando respecto de sucesivos ejes perpendiculares a la aceleración del ascensor y fijos a sistemas de referencia que acompañan instantáneamente al mismo. En otras palabras, la trayectoria del haz de luz, respecto del ascensor, debe ser una curva. Esto es esperable, pues un sistema de referencia fijo al ascensor está acelerado, y lo que ocurre no es más que lo usual cuando la descripción de una trayectoria "recta" se traduce a un sistema acelerado.

Supongamos ahora que se quiere llevar hasta las últimas consecuencias la equivalencia entre sistemas no inerciales y campos gravitatorios. Entonces si el ascensor no está acelerado, de modo que un sistema de referencia fijo al ascensor es inercial, pero se encuentra inmerso en un campo gravitatorio uniforme y constante de valor $g = A$, vertical y de sentido "hacia abajo", debemos esperar que la trayectoria del haz de luz no sea una recta sino una curva; la desviación al atravesar el ascensor de ancho L en el campo gravitatorio de valor g debe ser igual a

$$\Delta \beta \simeq gL/c^2 \quad (8.9)$$

Nuestra conclusión tiene que ser, entonces, que un haz de luz se desvía bajo la acción de un campo gravitatorio. Esto es: la gravedad no solamente actúa sobre los cuerpos masivos, sino que también afecta a la propagación de la luz.

La deflexión de la luz en un campo gravitatorio es una de las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad. Está claro que una predicción tal no puede desprenderse de la forma newtoniana de entender la gravedad como una fuerza entre cuerpos con masa; en cambio, en el marco en que se entiende la gravedad como una curvatura del espacio, resulta una extensión muy natural de la desviación de la trayectoria de un cuerpo debida a la presencia de otro cuerpo masivo. Para un rayo de luz que pasa cerca de un cuerpo esférico de masa m' de modo tal que su máximo acercamiento se produce cuando alcanza una distancia R_0 a su centro, la teoría de la Relatividad General predice que la trayectoria está contenida en un plano y que la relación entre el ángulo \varnothing y la distancia al centro r se obtiene a partir de la siguiente relación entre variaciones infinitesimales ⁴⁰:

$$d\varnothing = \frac{dr}{r^2 \sqrt{1/R_0^2 - 1/r^2 + r_0/r^3}} \quad (8.10)$$

⁴⁰Aquí admitiremos este resultado sin demostrarlo.

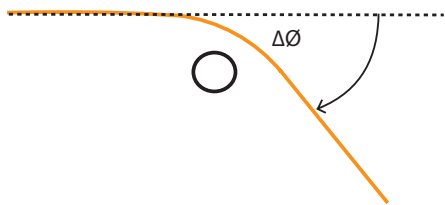


Figura 8.2. Desviación de un rayo de luz al pasar por un planeta o una estrella.

donde $r_0 = 2Gm'/c^2$. En particular, si se trabaja bajo la hipótesis de un campo gravitatorio débil (como es el caso, por ejemplo, del Sol y los planetas de nuestro sistema) y se comparan las direcciones "entrante" y "saliente" (es decir muy lejos del centro), la predicción de la teoría es una desviación total dada por la fórmula (ver figura 8.2)

$$\Delta \theta = \frac{4Gm'}{c^2 R_0} \quad (8.11)$$

En el caso de un rayo que pasa justo por la superficie del Sol, el cálculo da $\Delta \theta \approx 1,75''$. Pocos años después de que Einstein diera a conocer su teoría relativista de la gravedad, las observaciones astronómicas realizadas en 1919 por el grupo de investigadores liderado por Eddington confirmaron, por primera vez, esta predicción de la teoría.

8.2.2 Corrimiento al rojo en un campo gravitatorio

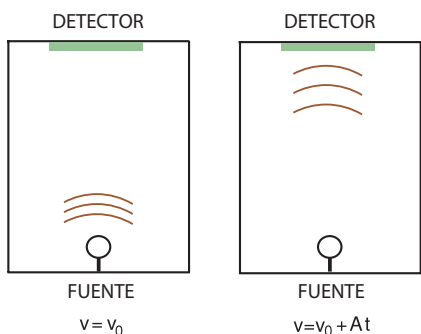


Figura 8.3. Diferencias en las frecuencias medidas en la fuente y el detector.

Volvamos a la situación del ascensor con aceleración A , y consideremos el siguiente experimento: una fuente situada en el piso del ascensor emite luz con una frecuencia \square y la luz se recibe en el techo, donde se vuelve a medir la frecuencia. La distancia entre el piso y el techo es z . Respecto de un sistema externo inercial, en el tiempo dt que la señal tarda en ir del piso al techo la velocidad del ascensor se incrementa en una cantidad $dV = A dt$. Dicho incremento de velocidad puede suponerse pequeño comparado con c , a menos que la aceleración A o las dimensiones del ascensor sean extremadamente grandes. Por lo tanto es una aproximación razonable considerar que $c dt = z$, de modo que $dt = z/c$ y entonces $dV = Az/c$. Observemos ahora que, debido al movimiento acelerado del ascensor, la velocidad relativa entre la fuente luminosa y un observador que mida la frecuencia de la luz recibida en el techo no es cero, sino que

es dV . Por lo tanto la frecuencia \square_o medida por dicho observador difiere de la frecuencia \square_f de la fuente, y su relación está dada por la fórmula (6.38) con $\square = dV = Az/c$:

$$\begin{aligned} v_o &= v_f \sqrt{\frac{c - Az/c}{c + Az/c}} \\ &= v_f \sqrt{\frac{1 - Az/c^2}{1 + Az/c^2}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$v_o \simeq v_F \left(1 - \frac{Az}{c^2} \right) \quad (8.13)$$

En el último paso hemos tenido en cuenta que $dV = Az/c$ es pequeño en comparación con c , de modo que $Az/c^2 \ll 1$; esto nos permite usar que para $\varepsilon \ll 1$ se puede aproximar $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$. Como vemos, el resultado expresa que la frecuencia medida por el observador es menor, de modo que la luz aparece corrida al rojo" (efecto Doppler para fuente y observador que se alejan; ver figura 8.3).

Consideremos ahora la situación en la cual el ascensor no está acelerado (un sistema de referencia fijo al mismo es inercial) pero, en cambio, se encuentra en un campo gravitatorio de valor $g = A$, vertical y de sentido "hacia abajo". Si se quiere sostener la equivalencia entre un sistema no inercial y un campo gravitatorio entonces es necesario admitir la existencia de un corrimiento al rojo dado por:

$$v_o \simeq v_F \left(1 - \frac{gz}{c^2} \right) \quad (8.14)$$

de manera que un campo gravitatorio produce un corrimiento de la frecuencia. Si se toma en cuenta que la frecuencia es la inversa del período, entonces hay que concluir que en un campo gravitatorio los intervalos de tiempo medidos en diferentes alturas (en general, en diferentes posiciones que impliquen diferentes valores del potencial gravitatorio) son diferentes. En efecto, recordando que gz es el potencial gravitatorio Φ a una altura z (tomando como cero la altura $z = 0$) y utilizando de nuevo que $(1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$, se desprende que los intervalos de tiempo medidos a una altura nula (potencial cero) y a una altura z (potencial $\Phi(z) = gz$) están relacionados por:

$$\tau(z) \simeq \tau(0) \left(1 + \frac{\Phi(z)}{c^2} \right) \quad (8.15)$$

(observemos que, para trabajar dentro del mismo grado de aproximación, si al principio supusimos $dV = Az/c \ll c$, ahora debemos suponer que $gz = \Phi(z) \ll c^2$). Así, si se tienen dos relojes separados por una altura z en un campo gravitatorio uniforme (vertical y de sentido "hacia abajo"), el reloj situado más arriba adelanta respecto del situado más abajo. En otras palabras, la escala temporal se ve modificada por la presencia de materia. En tanto se pueda seguir trabajando bajo las mismas aproximaciones, el resultado se puede extender al potencial $\Phi(r)$ asociado con un campo central. En ese caso es usual tomar el cero del potencial en el infinito, y por lo tanto el potencial se puede expresar como $\Phi(r) = -Gm'/r$. Para esta elección del cero del potencial es natural expresar el intervalo temporal transcurrido en un punto donde la coordenada radial toma el valor r en función del intervalo temporal respectivo a una distancia infinita (donde ya se estableció previamente que el potencial es nulo). Así, se tiene

$$\tau(r) \simeq \tau(\infty) \left(1 - \frac{Gm'}{c^2 r} \right) \quad (8.16)$$

Como el potencial es negativo y su valor absoluto aumenta al disminuir r , entonces un reloj ubicado más cerca del centro del campo marcha más lentamente que uno más alejado del centro. Esta predicción de la teoría fue confirmada, por primera vez, en el experimento de

Pound y Rebka de 1960, en el cual se midió el corrimiento de frecuencia en el campo gravitatorio de la Tierra.

8.2.3 Distancias en un campo gravitatorio

Sigamos con los experimentos pensados en el ascensor con aceleración constante. Imaginemos que a un lado del ascensor que sube con aceleración constante A , se traslada con velocidad constante V , en forma paralela, una barra de cierta longitud propia l . Desde el ascensor la barra se mide sucesivamente dos veces con una regla que tiene la misma longitud propia que la barra (ver figura 8.4):

- La primera medición se realiza con la regla a la altura del techo, cuando la velocidad del ascensor es V , de modo que la velocidad relativa de la barra respecto del ascensor es cero.
- La segunda medición se realiza con la regla situada a la altura del piso, de modo que pasa frente a la barra después de que el ascensor se ha desplazado una distancia z , y por lo tanto ha alcanzado una velocidad igual a $V' = \sqrt{V^2 + 2Az}$ ⁴¹.

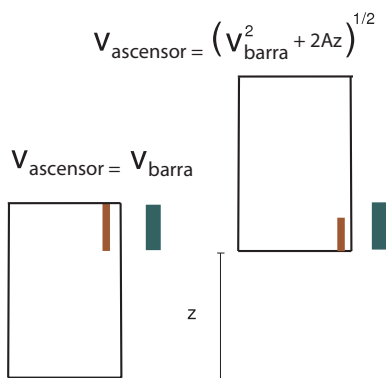


Figura 8.4. Medida de la longitud de la barra desde el sistema del ascensor; en todos los casos, nos situamos en el sistema donde la barra se encuentra en reposo.

Esto significa que en la segunda medición la velocidad relativa es no nula, y su cuadrado es $2Az$. ¿Cómo se relacionan las longitudes medidas en el sistema del ascensor (no inercial) con respectivas longitudes medidas en el sistema en reposo respecto de la barra? Recordemos que en la sección 1.3 del capítulo 6, se da una expresión para las longitudes medidas desde distintos sistemas inerciales. ¿Se podrán aplicar dichas expresiones? Veremos que sí pero hay que hacerlo con cuidado. Supongamos ahora que en el momento de realizar la segunda medición nos subimos a un sistema inercial cuya velocidad respecto de la barra es $\sqrt{2Az}$. La velocidad de este sistema coincide en ese instante con la del sistema no inercial. Entonces podemos decir que la longitud de la regla l_R medida en el sistema de la barra está relacionada con su longitud propia (ver sección 1.3 del capítulo 6) de la siguiente manera:

$$l_R = l \sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}} \quad (8.17)$$

Como en el instante de la medición la velocidad relativa de ambos sistemas (el sistema inercial con velocidad $\sqrt{V^2 + 2Az}$ y el no inercial) respecto del sistema donde la barra se encuentra en reposo es la misma, se puede extender el resultado para el sistema no inercial. Por lo tanto,

⁴¹ Para llegar a la expresión indicada para $V'^2 = V^2 + 2Az$ se utiliza una combinación de las ecuaciones de movimiento para un movimiento uniformemente acelerado: $V' = V + At$ y $x = Vt + \frac{1}{2}At^2$ (en este caso el movimiento se realiza en la coordenada z y no en la coordenada x).

en el sistema no inercial, la regla se contrae⁴² un factor $\sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}}$. Entonces, cuando se mide la longitud de la barra con dicha regla en el sistema no inercial, se encontrará que ésta es más larga que en el sistema inercial, de acuerdo con la siguiente relación:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}}} \quad (8.18)$$

donde l' es la longitud de la barra medida desde el sistema no inercial. De esta manera, en el sistema no inercial, las longitudes medidas a una altura z respecto del piso del ascensor (l) son menores que las distancias medidas sobre el piso del ascensor (l') (ver figura 8.5). Si $dl(z)$ es una pequeña longitud medida a la altura z y $dl(0)$ es una longitud pequeña medida a la altura del piso, se tiene que:

$$\begin{aligned} dl(z) &= dl(0) \sqrt{1 - \frac{2Az}{c^2}} \\ &\simeq dl(0) \left(1 - \frac{Az}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (8.19)$$

En el último paso tuvimos en cuenta que seguimos dentro del margen de validez de las aproximaciones de los párrafos anteriores, de modo que $Az/c^2 \ll 1$.

Ahora veamos las consecuencias del principio de equivalencia: si el sistema acelerado fijo al ascensor equivale a un sistema inercial en un campo gravitatorio de valor $g = A$, entonces debemos aceptar que la relación entre las longitudes en un campo gravitatorio uniforme y constante es

$$dl(z) \simeq dl(0) \left(1 - \frac{gz}{c^2}\right) \quad (8.20)$$

en tanto se cumpla que $gz \ll c^2$. Observemos que las distancias medidas en forma horizontal, en cambio, no deben verse modificadas, ya que están en correspondencia con longitudes perpendiculares a la velocidad relativa en el caso del ascensor. Dado que gz es el potencial gravitatorio Φ a una altura z correspondiente a elegir el cero del mismo a la altura nula, podríamos escribir

$$dl(z) \simeq dl(0) \left(1 - \frac{\Phi(z)}{c^2}\right) \quad (8.21)$$

Tal como hicimos en el párrafo precedente, si podemos suponer que las aproximaciones realizadas siguen siendo válidas, se puede extender el razonamiento al caso del potencial $\Phi(r) = -Gm'/r$ de un campo central. La analogía conduce entonces a $dl(r) \approx dl(\infty) (1 - \Phi(r)/c^2)$, que relaciona la distancia radial medida a un radio r donde el potencial es $\Phi(r)$, con la distancia medida a una distancia muy grande del centro, donde el potencial se anula. Como Φ es negativo y tiende a cero cuando r tiende a infinito, entonces las distancias radiales medidas más cerca del centro son mayores que las medidas más lejos del mismo. Las longitudes medidas en forma perpendicular a la dirección

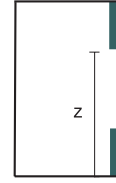


Figura 8.5. En el sistema no inercial, la primera medición se realiza a una distancia z del piso del ascensor y la segunda medición se realiza sobre el piso del ascensor.

⁴² No vale aquí argumentar que en ambos sistemas (uno fijo a la barra y otro fijo al ascensor) debe medirse que la otra longitud es la que aparece más corta, pues ambos sistemas no son equivalentes: uno es inercial, y el otro no.

radial, claro está, no se modifican, dado que en una dirección tal el potencial gravitatorio no varía.

Precisemos un poco el significado geométrico de esta afirmación: para empezar, notemos que la coordenada radial r se define de manera natural como la longitud de una circunferencia centrada en el origen, dividida por 2π . Por lo tanto, en ausencia de campo gravitatorio r sería la distancia desde el centro hasta la circunferencia, y dr sería un pequeño incremento de dicha distancia. Esto implica que cuando el campo gravitatorio es no nulo, dr coincide con lo que habíamos llamado $dl(\infty)$, de modo que en un campo central

$$dl(r) \simeq dr \left(1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) \quad (8.22)$$

Esta expresión es válida en tanto se cumpla que $Gm' \ll c^2 r$. Las distancias radiales finitas entre dos radios dados se obtienen integrando esta ecuación. Comparemos dos distancias finitas correspondientes a dos diferencias iguales de la coordenada radial, esto es, calculemos las diferencias Δl para $r_2 - r_1 = \Delta r$ y $r_4 - r_3 = \Delta r$, suponiendo $r_4 > r_3 > r_2 > r_1$; el cálculo ⁴³ nos da:

$$\Delta l_{12} \simeq \int_{r_1}^{r_2} dr \left(1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) = r_2 - r_1 + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} = \Delta r + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (8.23)$$

$$\Delta l_{34} \simeq \int_{r_3}^{r_4} dr \left(1 + \frac{Gm'}{c^2 r} \right) = r_4 - r_3 + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_4}{r_3} = \Delta r + \frac{Gm'}{c^2} \ln \frac{r_4}{r_3} \quad (8.24)$$

Vemos que como los cocientes r_2/r_1 y r_4/r_3 son diferentes, las distancias Δl también lo son, a pesar de corresponder a diferencias iguales de la coordenada radial r (ver figura 8.6). En particular, para la relación $r_4 > r_3 > r_2 > r_1$, $r_4 - r_3 = r_2 - r_1 = \Delta r$ se tiene que $\ln(r_2/r_1) > \ln(r_4/r_3)$ y por lo tanto $\Delta l_{12} > \Delta l_{34}$. En cualquier caso, para cualquier r finito se tiene que $\Delta l > \Delta r$.

□ 8.3. Desplazamiento del perihelio

La teoría clásica de la gravedad, construida de modo de ser coherente con las observaciones astronómicas disponibles en tiempos de Newton, predice cuatro tipos de trayectorias posibles en un campo gravitatorio central: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. De esta manera, los movimientos finitos en un campo tal tienen asociadas trayectorias que son curvas cerradas. El carácter cerrado de las trayectorias ligadas no es, sin embargo, una propiedad general de los campos centrales, sino solamente de algunos de ellos, entre los cuales se encuentra el campo gravitatorio asociado con una energía potencial inversamente proporcional a la distancia al centro. La teoría de Einstein de la gravedad -la relatividad general- no fue construida para explicar ningún dato experimental en particular, pero entre sus muchas predicciones se encuentra la de un desplazamiento del perihelio de la trayectoria de un cuerpo en movimiento en un campo gravitatorio central. Como acabamos de ver, las escalas temporales y espaciales se ven afectadas por la presencia de un cuerpo; tal predicción se desprende, justamente, de cómo la geometría espacio-temporal asociada

⁴³ Utilizamos que la integral de $1/x$ es $\ln x$.

a un cuerpo esféricamente simétrico determina la trayectoria de otro cuerpo moviéndose alrededor del primero. A continuación estudiaremos en detalle el carácter cerrado o abierto de las trayectorias, las consecuencias de introducir una corrección al campo gravitatorio newtoniano, y el caso particular del desplazamiento del perihelio del planeta Mercurio.

8.3.1 Trayectorias abiertas y cerradas en un campo central

Como hemos visto, como consecuencia de la conservación del impulso angular el movimiento de un cuerpo en un campo central se encuentra contenido en un plano; de esta manera, la posición del cuerpo queda determinada por solamente dos coordenadas. Trabajando entonces en las coordenadas polares φ y r , a partir de los teoremas de conservación de la energía y del impulso angular hemos demostrado que la relación entre una variación del ángulo φ y una variación de la distancia r al centro esta dada por:

$$d\varphi = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.25)$$

donde m es la masa del cuerpo, E es la energía y M el valor de su impulso angular.

Si la coordenada radial tiene dos límites r_{\min} y r_{\max} (tal como ocurre para la energía potencial $U(r) = -\alpha/r$ cuando $\alpha > 0$ y $E < 0$), el movimiento es finito y la trayectoria se encuentra contenida en una corona circular de radios interior y exterior r_{\min} y r_{\max} . En el tiempo en que el cuerpo va de la distancia mínima a la distancia máxima y de nuevo alcanza la mínima, el vector posición barre un ángulo que se obtiene de integrar la expresión anterior entre los radios correspondientes y multiplicar por 2; de este modo:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.26)$$

La trayectoria es una curva cerrada solamente si después de un cierto número n_2 de idas y vueltas entre r_{\min} y r_{\max} , el cuerpo ha realizado n_1 vueltas completas. Esto es equivalente a decir que la relación $\Delta\varphi/2\pi$ es un cociente de enteros:

$$\Delta\varphi/2\pi = n_1/n_2 \quad (8.27)$$

En general, esta condición no se cumple para un campo central cualquiera; sólo se verifica para dos tipos de potenciales: $U(r) = -\alpha/r$ (asociado al problema de Kepler del movimiento planetario) y $U(r) = kr^2$ (que corresponde a un oscilador espacial).

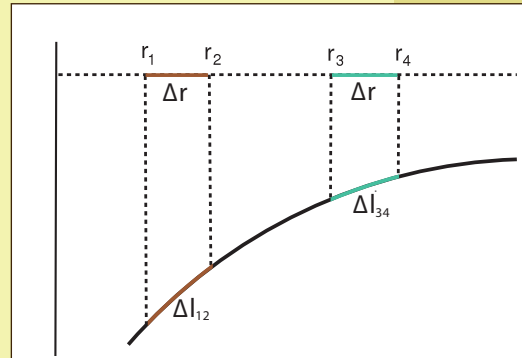


Figura 8.6. Modificación de las longitudes medidas en la dirección radial.

8.3.2 El movimiento real de los planetas

Para un cuerpo sujeto a la acción de un campo gravitatorio asociado a una energía potencial $U = -\alpha/r$ ya hemos probado que la relación entre la distancia al centro y el ángulo está dada por la expresión

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad (8.28)$$

donde $p = M^2/(m)$ y $e = \sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)}$. Para $E \geq 0$ vimos que r no tiene un límite superior, de modo que el movimiento no está limitado a una región finita del espacio. Pero para $E < 0$ demostramos que las trayectorias posibles son elipses o circunferencias, de manera que para los movimientos ligados bajo la acción de una fuerza gravitatoria central ya está probado que las trayectorias son curvas cerradas.

Ahora bien: todos los planetas del sistema solar muestran un desplazamiento o corrimiento del perihelio, esto es, al ir de la distancia mínima al Sol (perihelio) a la máxima (afelio) y volver a la mínima, el ángulo que barren no es exactamente igual a 2π . Pero, en general, dicho corrimiento es muy pequeño y se explica en el marco de la teoría de Newton (dentro del margen del error con que se realizan las mediciones astronómicas correspondientes) por el hecho de que cada planeta no está bajo la acción de solamente un campo central (el del Sol), sino que además se encuentra sometido a las fuerzas gravitatorias de los demás planetas.

En el caso de Mercurio (el planeta mas próximo al Sol), sin embargo, tomar en cuenta esta corrección no condujo a una explicación satisfactoria de lo observado: dentro de la teoría de Newton, aún teniendo en cuenta las fuerzas de los demás planetas, queda sin explicar un corrimiento acumulado de unos $(43 \pm 0,4)''$ (poco menos de un minuto de grado sexagesimal) por siglo; este corrimiento adicional del perihelio constituye una contrastación negativa de la teoría newtoniana de la gravedad, y su explicación fue durante mucho tiempo un problema abierto de la física.

8.3.3 Introducción de una corrección al campo newtoniano

Si a la energía potencial $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$) se agrega una corrección ⁴⁴ $\delta U(r)$ que no sea de la forma $1/r$, la trayectoria de un cuerpo en un movimiento ligado deja de ser cerrada, y en cada vuelta el perihelio o el afelio de la órbita se desplaza un ángulo $\Delta\vartheta$.

Para obtener este ángulo en el caso genérico de un corrección central pequeña, partimos de la integral (8.26) donde sustituimos $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$:

$$\Delta \vartheta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2}} \quad (8.29)$$

⁴⁴ A una corrección a la energía se la suele llamar también perturbación.

y suponemos que δU es mucho menor que la energía potencial newtoniana: $\delta U \ll \alpha/r$; esta hipótesis es correcta, evidentemente, en el caso del movimiento planetario, y nos permitirá simplificar considerablemente los cálculos. Para comenzar, reescribimos la inversa de la raíz que aparece en la expresión (8.29):

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2} \right)^{-1} &= \left(2m(E + \alpha/r) - 2m\delta U(r) - M^2/r^2 \right)^{-1/2} \\ &= \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2 \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m\delta U(r)}{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (8.30)$$

y en el segundo paréntesis aprovechamos que la perturbación es pequeña para usar la aproximación $(1 - \varepsilon)^{-1/2} \approx 1 + \varepsilon/2$, válida para $|\varepsilon| \ll 1$; de este modo:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r - \delta U(r)) - M^2/r^2} \right)^{-1} &\simeq \\ &\simeq \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2 \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{m\delta U(r)}{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2} \right) \\ &\simeq \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2 \right)^{-1/2} + m\delta U(r) \left(2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2 \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Reemplazando ahora esta expresión en la fórmula (8.29) tenemos

$$\Delta \varnothing \simeq 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} + 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Mm \delta U(r) dr}{r^2 \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2} \right)^3} \quad (8.32)$$

El primer término del segundo miembro no es más que la cantidad $\Delta \varnothing$ para el caso de la energía potencial newtoniana, de modo que es igual al ángulo 2π barrido en una ida y vuelta en el caso no perturbado (es decir con $\delta U = 0$):

$$\Delta \varnothing \simeq 2\pi + 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Mm \delta U(r) dr}{r^2 \left(\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2} \right)^3} \quad (8.33)$$

El desplazamiento $\delta \varnothing$ debido a la perturbación está dado entonces por el segundo término de esta expresión. Para hacer más sencillas las cuentas es conveniente reescribir la integral como una derivada respecto del valor del impulso angular. De esta manera ⁴⁵:

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m \delta U(r) dr}{\sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.34)$$

⁴⁵ Recordando que $\frac{d}{dx} (x^{-1/2}) = -x^{-3/2}/2$ y usando la regla de la cadena, es sencillo verificar que $\frac{\partial}{\partial M} (2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2)^{-1/2} = Mr^2 (2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2)^{-3/2}$

La integral se puede ahora escribir de una forma mucho más simple recordando que, para el movimiento no perturbado, la relación entre una variación de la distancia al centro y una variación del ángulo está dada por

$$d\varnothing = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.35)$$

de donde

$$dr = d\varnothing \frac{r^2}{M} \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} \quad (8.36)$$

Por lo tanto, reemplazando esta expresión para dr en la ecuación (8.34), y observando que (para el movimiento no perturbado) cuando r va de r_{\min} a r_{\max} el ángulo \varnothing va de 0 a π , el desplazamiento $\delta\varnothing$ resulta estar dado por

$$\delta\varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2m}{M} \int_0^\pi r^2 \delta U(r) d\varnothing \right) \quad (8.37)$$

Esta fórmula permite calcular el corrimiento del perihelio para una perturbación asociada a un campo central cualquiera, mientras dicha perturbación se pueda suponer pequeña en comparación con la energía potencial newtoniana.

8.3.4 Casos particulares

Consideraremos dos tipos de perturbación al potencial newtoniano: en primer lugar analizaremos una corrección del tipo $U = \beta/r^2$ (correspondiente a una fuerza adicional inversamente proporcional al cubo de la distancia al centro), la cual se puede resolver de manera muy sencilla. En segundo lugar estudiaremos el caso de una perturbación $\delta U = \gamma/r^3$ (asociada a una corrección proporcional a $1/r^4$ en la fuerza), la cual resulta de gran interés físico.

1. Al reemplazar $\delta U = \beta/r^2$ en la fórmula (8.37) desaparece la dependencia con r dentro de la integral, la cual resulta trivialmente igual a $\pi\beta$. Al derivar $1/M$ respecto de M se obtiene $-1/M^2$, y por lo tanto el resultado es simplemente:

$$\delta\varnothing \simeq -\frac{2\pi\beta m}{M^2} \quad (8.38)$$

De esta manera, para una corrección de tipo atractivo ($\beta < 0$) el desplazamiento es "hacia adelante", mientras que para una corrección repulsiva ($\beta > 0$) el desplazamiento consiste en un "retardo"; notemos que, en principio, la perturbación se haría menos apreciable cuanto mayor fuera M , pero esto no sería necesariamente así si β dependiera del impulso angular.

Como el desplazamiento angular $\delta\varnothing$ es una magnitud adimensional, entonces las dimensiones de β deben ser iguales a las del cuadrado del impulso angular, divididas por las de

la masa; por lo tanto ⁴⁶:

$$[\beta] = [M]^2/[m] = [m]^2[v]^2[r]^2/[m] = [m][r]^4=[t]^2.$$

2. Al sustituir $\delta U = \gamma/r^3$ en la fórmula (8.37) se obtiene

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2m}{M} \int_0^\pi \frac{\gamma}{r} d\varnothing \right) \quad (8.39)$$

y si utilizamos la relación existente entre r y \varnothing para el caso no perturbado, es decir $p/r = 1 + e \cos \varnothing$, tenemos

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2m\gamma}{Mp} \int_0^\pi (1 + e \cos \varnothing) d\varnothing \right) \quad (8.40)$$

Como la integral del coseno de un ángulo entre 0 y π es nula (véase la figura 8.7), queda simplemente

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2\pi\gamma m}{Mp} \right) \quad (8.41)$$

(notemos que el desplazamiento resulta ser independiente de la excentricidad e). Si recordamos que el parámetro se escribe en términos del valor del impulso angular como $p = M^2/(m\alpha)$, entonces:

$$\delta \varnothing \simeq \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{2\pi\alpha\gamma m^2}{M^3} \right) \quad (8.42)$$

y al calcular la derivada respecto de M finalmente obtenemos:

$$\delta \varnothing \simeq - \frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} \quad (8.43)$$

Como $\alpha > 0$ (pues $\alpha = Gmm'$ donde m' es la masa del cuerpo en el centro del campo; en general suponemos $m \ll m'$ de modo que el cuerpo de masa m' puede suponerse en reposo) entonces el signo de γ determina que el desplazamiento sea "hacia adelante" o "hacia atrás" respecto del movimiento en un campo puramente newtoniano.

Análogamente a lo mostrado en el caso anterior, las dimensiones de la constante γ pueden deducirse ⁴⁷ del carácter adimensional del desplazamiento $\delta\varnothing$. El resultado es que $[\gamma] = [m][r]^5/[t]^2$.

Observemos que, en principio, para constantes β y γ cualesquiera, el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio podría pasar a depender de su masa. Para mantener la independencia con la masa, tal como se da en el marco de la teoría newtoniana de la gravedad, las correcciones a la energía potencial deberían ser proporcionales a la masa, es

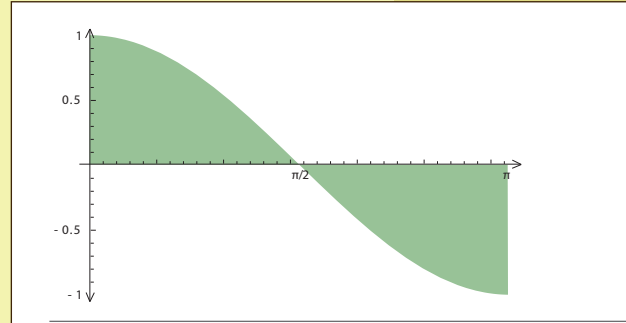


Figura 8.7.

⁴⁶ Recordemos que usamos la notación $[X]$ para las unidades de una magnitud X .

⁴⁷ Por cierto, las dimensiones también pueden inferirse observando que δU debe tener unidades de energía.

decir, en los dos casos considerados deberíamos tener $\beta \propto m$ y $\gamma \propto m$. Naturalmente, de ser así los desplazamientos angulares no dependen de m : para $\delta U = \beta/r^2$ la masa m en el coeficiente conduce a la aparición de m^2 en el numerador, que se cancela con el cuadrado de la masa que aparece en el denominador como resultado de elevar al cuadrado el impulso angular (recordemos que $M = mr^2\Omega$); en forma similar, para $\delta U = \gamma/r^3$ la masa en el coeficiente conduce, junto con la masa de $\alpha = Gmm'$, a la aparición de m^4 en el numerador, que se cancela con la potencia cuarta de m que resulta de M^4 .

8.3.5 La predicción de la teoría de Einstein

Para el movimiento de un planeta en el campo gravitatorio del Sol, la modificación que introduce la teoría de Einstein de la gravitación -la relatividad general- conduce solamente a una corrección pequeña respecto de la teoría de Newton, dado que el campo del Sol es débil y los planetas tienen velocidades mucho menores que la de la luz. En el marco de la teoría clásica la relación entre el ángulo y la distancia al centro se obtiene, como ya hemos visto, de

$$d\phi = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E + \alpha/r) - M^2/r^2}} \quad (8.44)$$

donde $E = E_0 = mv_0^2/2 + U_0$ y $\alpha = Gmm'$. En la relatividad general, a pesar de la forma conceptualmente distinta en que se entiende la gravedad, de todos modos se preserva la existencia de magnitudes conservadas, como el impulso angular y la energía (si bien introduciendo algunas redefiniciones tales que, cuando se consideran velocidades bajas y campos gravitatorios débiles, permiten recuperar las expresiones clásicas). En particular, el movimiento de un cuerpo de masa m en un campo central sigue estando contenido en un plano, y la trayectoria se obtiene de la relación

$$d\phi = \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(\tilde{E} + \alpha/r + \gamma/r^3) - M^2/r^2}} \quad (8.45)$$

donde sigue valiendo $\alpha = Gmm'$, y las nuevas constantes se definen como

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}^2 - (mc^2)^2}{2mc^2} \quad \gamma = -G \frac{m' M^2}{mc^2} \quad (8.46)$$

donde c es el valor de la velocidad de la luz en el vacío y \mathcal{E} es la energía relativista del cuerpo de masa m . Se puede probar que para velocidades y distancias como las que caracterizan el movimiento de los planetas alrededor del Sol, la constante \tilde{E} es aproximadamente igual a la constante E_0 . Notemos, por otro lado, que, como M^2 es proporcional al cuadrado de la masa m del cuerpo, entonces γ es proporcional a dicha masa, y de acuerdo con lo discutido en el último párrafo de la sección anterior, la predicción de la teoría de Einstein es que la trayectoria de un cuerpo en un campo gravitatorio sigue siendo independiente de su masa.

La diferencia más importante -la que resulta físicamente más interesante- entre la trayectoria clásica y la que predice la relatividad, es debida a la presencia del término $2m\gamma/r^3$ dentro de la raíz cuadrada. Si la expresión relativista no incluyera dicho término, tendríamos una relación entre $d\phi$ y dr completamente análoga a la clásica, salvo por las diferentes constantes \tilde{E} y E . Es claro entonces que la trayectoria cerrada que resultaría de integrar la ecuación (8.45) con $\gamma = 0$ sería una elipse (o, en particular, una circunferencia); la única diferencia con la trayectoria predicha por la ley de Newton serían los valores de los parámetros de dicha elipse. En particular, sin el término $2m\gamma/r^3$ el ángulo barrido en una ida y vuelta entre las distancias mínima y máxima al centro seguiría siendo igual a 2π . De acuerdo con lo discutido más arriba, esta analogía permite inferir que la inclusión de dicho término debe tener como consecuencia un desplazamiento del perihelio de la órbita y, en tanto la perturbación γ/r^3 pueda considerarse pequeña en comparación con α/r , dicho desplazamiento puede calcularse mediante la fórmula (8.43) de la sección anterior, con γ dado por la teoría de Einstein de la gravitación. Es decir, para hallar el corrimiento del perihelio debemos reemplazar $\alpha = Gmm'$ y $\gamma = -Gm'M^2/(mc^2)$ en (8.43), de donde resulta:

$$\delta\phi \simeq \frac{6\pi G^2 m^2 m'^2}{c^2 M^2} \quad (8.47)$$

El resultado, por cierto, es independiente de la masa m , ya que el cuadrado de la misma en el numerador se cancela con el cuadrado que aparece en el denominador al elevar al cuadrado el impulso angular.

Esta predicción de la teoría relativista de la gravitación puede contrastarse con lo observado. Para el caso de Mercurio el valor numérico que se obtiene para el desplazamiento del perihelio es

$$\delta\phi_{\text{Merc}} \simeq 4,99 \times 10^{-7} \quad (8.48)$$

en una órbita (recordemos que estamos midiendo los ángulos en radianes, de modo que $\delta\phi$ es adimensional). Teniendo en cuenta que cada órbita de Mercurio alrededor del Sol toma 0,24 años terrestres, se obtiene que el corrimiento acumulado en un siglo es $100 \delta\phi_{\text{Merc}}/0,24 \approx 2,08 \times 10^{-4}$. Traducido a segundos de arco (recordando que 2π equivale a 360 grados sexagesimales, cada uno de ellos igual a 3.600"), el resultado es de 43" por siglo, en excelente acuerdo con el valor medido, que es, con su error, igual a $(43,1 \pm 4)''$.

El acuerdo entre la teoría y la observación resulta aún más notable si se recuerda que Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general de manera puramente deductiva, y la misma fue recién a posteriori apoyada por observaciones astronómicas.

□ Problema

Determinar el corrimiento del perihelio, acumulado luego de un siglo, para el planeta Tierra. La masa del Sol es de aproximadamente 2×10^{30} kg, y la distancia de la Tierra al Sol es de unos 150 millones de kilómetros.

□ 8.4. Agujeros negros

Cuando el gas que dará origen a una estrella se comprime, aumenta la temperatura en su interior. A partir de cierto tamaño, la temperatura es tan grande que comienzan a producirse reacciones nucleares; de esta manera comienza a "funcionar" la estrella. Para una estrella ordinaria, se establece un equilibrio entre la gravedad, que tiende a hacerla contraer, y la presión del gas, que tiende a hacer que se expanda. Dicho equilibrio, sin embargo, no es siempre posible: hace ya muchos años, en la década de 1930, se demostró que si la masa m de la estrella supera la del Sol en dos veces y media o más, la presión del gas no puede equilibrar la atracción gravitatoria. La contracción de la materia que forma la estrella no puede entonces detenerse, sino que la estrella colapsa y continúa -en principio, ilimitadamente- reduciendo su tamaño y aumentando su densidad. Una vez que la estrella se contrae por debajo del llamado radio gravitatorio r_g o radio de Schwarzschild, cuyo valor está dado por

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2} \quad (8.49)$$

la geometría del espacio-tiempo fuera de la masa en contracción adquiere características muy notables ⁴⁸. Señalaremos, sin demostración, algunas de ellas.

Como ya hemos visto, los tiempos medidos por observadores situados en distintos radios en un campo gravitatorio central son diferentes. La relación matemática exacta que existe entre el tiempo medido por un observador situado en un punto dado por un valor r de la coordenada radial y el tiempo medido por uno muy alejado ("en el infinito") es ⁴⁹

$$dt^2(r) = dt^2 (1 - r_g/r) \quad (8.50)$$

Por otro lado, ya vimos que la relación entre longitudes medidas en la dirección radial también depende del valor de la coordenada r . La relación exacta entre las longitudes esta dada por ⁵⁰

$$dl^2(r) = \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)} \quad (8.51)$$

De estas relaciones se desprende, en particular, que:

1. En el caso de una estrella colapsada la relación entre el tiempo medido por un observador muy lejano y el tiempo medido por un observador que cae hacia el centro se va haciendo cada vez mas grande, tendiendo al infinito cuando el observador que cae alcanza el radio gravitatorio. Para entender esto, supongamos que un astronauta cayera en una nave, y que dicho astronauta hubiera prometido enviar a un observador lejano una señal cada minuto. Tal observador empieza a recibir las señales cada varios

⁴⁸ Cuando el radio gravitatorio es mayor que el radio del cuerpo, se dice que la geometría presenta un horizonte de eventos en $r = r_g$. En general, el radio gravitatorio de un cuerpo es mucho menor que su radio; por ejemplo, para el Sol se tiene $r_g \approx 3$ km.

⁴⁹ Esta expresión no se corresponde con la obtenido anteriormente al final de la sección 2.2 de este capítulo, porque allí trabajamos bajo la aproximación de un campo gravitatorio débil.

⁵⁰ Cabe la misma aclaración anterior respecto de la correspondiente expresión obtenida en la sección 2.3.

minutos, luego cada varias horas, luego años, y finalmente, por mucho que espere, ya nada le llega desde el astronauta. Sin embargo, el astronauta ha cumplido con lo prometido, porque según los relojes situados a bordo de la nave ha seguido enviando una señal cada minuto.

2. Los conos de luz, que en ausencia de campo gravitatorio se generaban a partir de rectas a 45° en los diagramas espacio-tiempo (véase sección 1.9 del capítulo 6), exhiben un comportamiento como el que se muestra en la figura 8.8. Como se ve en el esquema, mientras que el tiempo para recorrer un cierto Δr se hace más y más grande al acercarnos desde "afuera" al radio gravitatorio $r_g = 2Gm/c^2$, desde "adentro" es imposible alcanzar dicho radio, ya que aún viajando a la velocidad de la luz el futuro de cualquier punto con $r < r_g$ sólo contiene puntos con valores aún menores de la coordenada radial. Esto significa que ningún cuerpo, ni la luz misma, puede escapar una vez que ha ingresado en la región que se encuentra por debajo del valor del radio gravitatorio.

El segundo aspecto notable que hemos mencionado implica que tales estrellas colapsadas (o, en general, cualquier masa que haya experimentado el colapso gravitatorio descrito) resultan inobservables desde el exterior en forma directa, ya que no reflejan ni emiten luz en ninguna frecuencia. Esto ha llevado a que tales objetos se denominen "agujeros negros". Sin embargo, el hecho de que un agujero negro no emita ni refleje luz no significa que no pueda detectarse: en principio, existen formas indirectas en que su presencia se puede manifestar, como por ejemplo la peculiar emisión de radiación de las partículas que caen hacia el mismo. Al día de hoy parece haber evidencia que sugiere la existencia de agujeros negros incluso en nuestra galaxia. Por ejemplo, en el centro de la misma parece existir un agujero negro de gran masa, estimada en casi 3 millones de veces la masa del Sol.

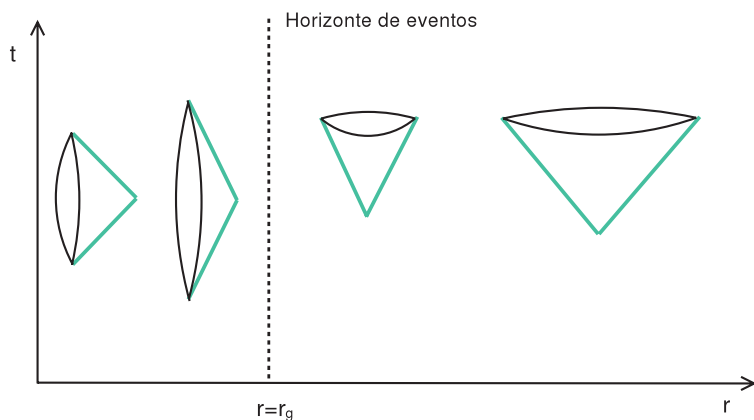


Figura 8.8. Conos de luz para $r < r_g$ y para $r > r_g$. En azul se indica la propagación de un rayo de luz.