

# 7. Geometrías euclídeas y no euclídeas

"... existen incluso ahora, géómetras y filósofos, algunos de ellos ilustrísimos, que dudan de que todo el universo... haya sido creado según la geometría de Euclides, y se atreven incluso a soñar que dos líneas paralelas, las cuales según Euclides, por nada del mundo convergen en la tierra, convergen quizás en algún punto del infinito."

(Ivan Karamazov a su hermano Aliosha, en **Los Hermanos Karamazov, de Fedor Dostoievski (1821-1881)**).



Figura 7.1. Postulado 1.



Figura 7.2. Postulado 2.

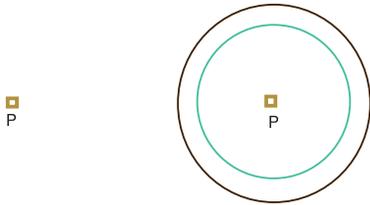


Figura 7.3. Postulado 3.

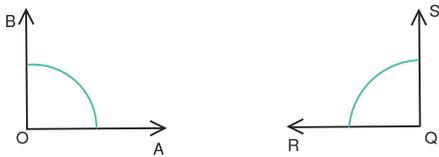


Figura 7.4. Postulado 4.

## □ 7.1. Geometría euclídea

La intuición desarrollada a partir de la experiencia cotidiana (que no involucra velocidades comparables con la de la luz) está en total acuerdo con la geometría elemental, cuya base son los postulados de Euclides. Euclides fue un matemático griego que vivió entre los años 325 a.C. y 265 a.C. Es posterior a Platón y a Pitágoras, y contemporáneo de Arquímedes y Eratóstenes. Euclides se basó en la lógica de Aristóteles para construir la geometría siguiendo el método axiomático. Los cinco postulados en que se basa la geometría de Euclides son:

1. Por dos puntos pasa una sola recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Se puede trazar una circunferencia de cualquier tamaño alrededor de un punto dado.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto externo a ella, sólo una recta que pasa por este punto es paralela a la primera.

Estos postulados implican entre otras cosas lo siguiente:

1. Dos rectas paralelas no se cruzan nunca.
2. La suma de los ángulos internos de un triángulo vale  $\pi$  ( $180^\circ$ ).
3. El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es igual a  $\pi$ .

La física clásica no cuestiona estos axiomas y sus consecuencias. Sin embargo, hemos visto en el capítulo 6 sección 1.12 que en los sistemas no inerciales como un

disco rotante, la geometría es no euclídea. El principio de equivalencia establece que un campo gravitatorio puede ser equivalente (al menos localmente) a un sistema no inercial. En consecuencia, debemos esperar que la geometría necesaria para describir los fenómenos en un campo gravitatorio también sea no euclídea.

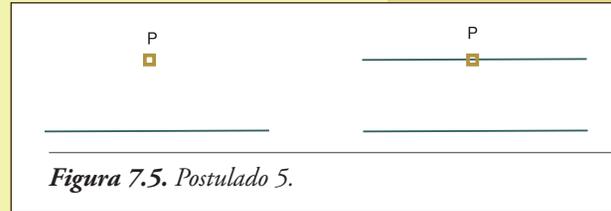


Figura 7.5. Postulado 5.

## □ 7.2. Introducción a las geometrías no euclídeas

Bernhard Riemann (1826-1866) fue un matemático alemán que estudió con el famoso matemático Gauss. En 1854 presentó las bases de una geometría no euclídea llamada geometría elíptica. En esta geometría no se satisface el quinto postulado de Euclides. Por la misma época, el matemático ruso Nikolai Lobachevski (1792-1856) desarrolló una geometría (la geometría hiperbólica) en la cual tampoco se verifica el quinto postulado de Euclides. Tales esfuerzos mostraron que es totalmente posible la existencia de geometrías lógicamente consistentes pero diferentes a la de Euclides. A continuación, daremos una noción de lo que ocurre cuando se trabaja con geometrías que no cumplen algunos de los postulados de Euclides.

Consideremos una superficie esférica de radio  $\rho$  que se halla en un espacio euclídeo tridimensional. Para esta superficie, se debe poder definir una geometría, como generalización de la geometría que se define sobre una superficie plana (en este último caso se trata de una geometría euclídea de dos dimensiones). Si imaginamos construcciones hechas con barras rígidas sobre la superficie, encontraremos que las relaciones geométricas resultantes son diferentes de las que se obtienen en una geometría euclídea de dos dimensiones.

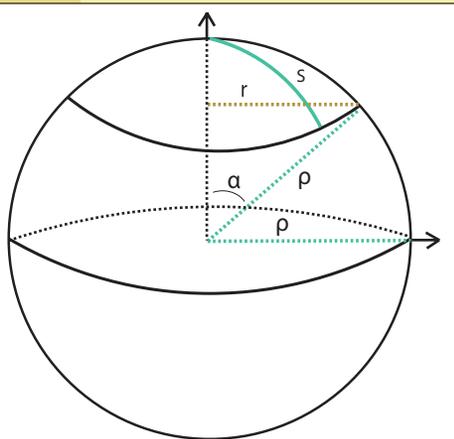
Veamos dos ejemplos:

- Imaginemos una circunferencia sobre la superficie de una esfera de radio  $\rho$ . Si nos movemos en el espacio tridimensional, el radio de dicha circunferencia es  $r$  (ver figura 7.6). Pero si nos restringimos a movernos sobre la superficie de la esfera, el radio medido sobre la misma es  $S$ . Por un lado,  $S = \rho\alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo desde el "polo" (es decir desde la intersección del eje perpendicular a la circunferencia y la superficie esférica) hasta la circunferencia; a su vez,  $\text{sen } \alpha = r/\rho$ , y por lo tanto,  $r = \rho \text{ sen } \alpha$ . Está claro que la longitud  $L$  de la circunferencia es igual a  $2\pi r$ , pero  $r < S$ . De esta manera, sobre la superficie esférica de radio  $\rho$  el cociente entre la longitud de una circunferencia y su radio es distinto de  $2\pi$ . En efecto, la superficie esférica no es un espacio euclídeo de dos dimensiones y no podemos definir un sistema de coordenadas cartesianas sobre dicha superficie.
- Sobre la misma esfera del ejemplo precedente tracemos el "ecuador", es decir una circunferencia de radio máximo. Entre dicho ecuador y el "polo" (la intersección de la superficie esférica y el eje perpendicular al plano que contiene al ecuador) es posible trazar un triángulo con dos o tres ángulos rectos, de modo que la suma de los ángulos interiores da como resultado más que  $\pi$  (véase la figura 7.7). En efecto, siguiendo dos "meridianos", a partir del ecuador llegamos al polo, y según la separación original de los meridianos en el

ecuador, el ángulo con que se cruzan en el polo puede tomar cualquier valor entre  $0$  y  $2\pi$ . En particular, si se cruzan formando un ángulo de  $\pi/2$ , la suma de los ángulos internos del triángulo formado será igual a  $3\pi/2$ .

Aprovechando los ejemplos precedentes, introduciremos ahora una idea acerca de cómo definir la curvatura de una superficie. Sobre la superficie de un plano marquemos un triángulo equilátero. Supongamos que uno de sus lados, al que llamaremos "base", se encuentra sobre el eje  $x$  de un sistema de coordenadas cartesianas definido sobre el plano. Llamemos  $A$  a uno de los extremos de la base, y  $B$  al otro extremo; nombremos  $C$  al vértice restante. Ahora supongamos que en el punto  $A$  ubicamos un vector  $\vec{V}$  paralelo a la base y apuntando hacia  $B$ . Con dicho vector podemos imaginar la siguiente operación: lo trasladamos, paralelamente a sí mismo, a lo largo del triángulo y comparamos el vector final  $\vec{V}'$  que se tiene al regresar al punto  $A$  con el vector de partida (véase la figura 7.8). Para ello debemos tener claro qué significa "paralelamente a sí mismo". La definición natural es que, si al principio el vector era paralelo a la base, al trasladarlo desde  $A$  hasta  $B$  se lo mantiene paralelo a la misma. En forma totalmente análoga, por lo tanto, al trasladarlo paralelamente a sí mismo desde  $B$  hasta  $C$  se tiene que mantener fijo el ángulo, digamos  $\beta$ , que forma el vector con el lado subtendido entre esos puntos; lo mismo vale, evidentemente, para la traslación desde  $C$  hasta  $A$ . Esto tiene como resultado que el vector  $\vec{V}'$  coincide con el vector de partida  $\vec{V}$ ; en otras palabras, la variación del vector al transportarlo paralelamente a sí mismo lo largo del triángulo es nula.

Consideremos ahora un triángulo trazado sobre una esfera, tal como en los ejemplos recién vistos. Para pensar en un caso concreto, supongamos que el triángulo es equilátero y rectángulo<sup>38</sup>, y se extiende desde el "ecuador" hasta el "polo". Llamemos  $A$  y  $B$  a los dos vértices situados sobre el ecuador, y  $C$  al vértice ubicado en el polo (ver figura 7.9). Tomamos ahora un vector  $\vec{V}$  inicialmente situado en  $A$ , en forma paralela al ecuador, y lo transportamos paralelamente a sí mismo a lo largo del perímetro del triángulo, hasta regresar al punto  $A$ . Para mantenerlo paralelo a sí mismo en el camino de  $A$  a  $B$ , debemos mantenerlo paralelo al ecuador. Al llegar el vector al vértice  $B$ , por ser paralelo al ecuador, forma un ángulo igual a  $\pi/2$  con el lado que va de  $B$  a  $C$ ; por lo tanto, en el siguiente transporte paralelo a lo largo de ese lado, debe mantenerse constante dicho ángulo. Observemos que entonces, al llegar al polo (punto  $C$ ), el vector forma un ángulo nulo (o igual a  $\pi$ ) con el lado que resta recorrer para regresar, es decir con el que va de  $C$  hasta  $A$ . Por lo tanto, en el tercer tramo del transporte paralelo a lo largo del perímetro, el vector debe formar un ángulo nulo con el lado correspondiente; pero entonces, al llegar al punto  $A$ , el vector se ha convertido en  $\vec{V}'$ , que forma un ángulo igual a  $\pi/2$  con  $\vec{V}$  (véase la figura 7.9). En otras palabras, ahora la variación del vector al transportarlo paralelamente a sí mismo



**Figura 7.6.** Cálculo del cociente entre una circunferencia y su radio sobre una superficie curva.

<sup>38</sup>Es decir, sus tres lados son iguales, y sus tres ángulos también son iguales y valen  $\pi/2$ ; tal triángulo es posible si nos movemos sobre una superficie esférica.

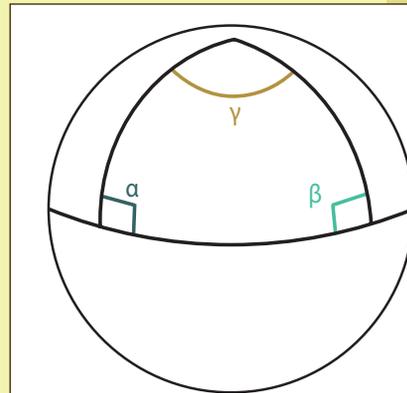
a lo largo del triángulo no es nula. Este resultado, claro está, es consecuencia de que la superficie sobre la cual se realizó el transporte paralelo del vector no es plana.

De esto se desprende una noción natural de curvatura: una superficie es curva cuando la variación de un vector transportado paralelamente a sí mismo a lo largo de una curva cerrada sobre dicha superficie es no nula.

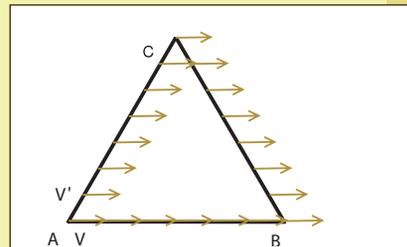
Vayamos un poco más lejos aún, y veamos si se puede decir algo no solamente cualitativo (una superficie es plana o curva), sino también algo cuantitativo (cuándo una superficie curva tiene mayor curvatura que otra superficie también curva). Pensemos en dos esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$ ; todos estamos de acuerdo en que la esfera mayor es la de menor curvatura. Consideremos ahora el transporte paralelo a lo largo de triángulos semejantes, uno sobre cada esfera; el mayor de ellos, que corresponde a una menor curvatura, tiene mayor área. La variación del vector será, por cierto, la misma en ambos casos, de modo que dicha variación, que basta para decidir que la superficie es curva y no plana, no basta para identificar cuál superficie tiene mayor curvatura. Pero si definimos de alguna manera un cociente entre la variación de un vector y el área delimitada por la curva sobre la que se realiza el transporte paralelo, sí logramos obtener una forma de cuantificar la curvatura: si la variación del vector es nula, la superficie es plana, mientras que si no lo es, el cociente define qué tanta curvatura tiene.

Existe, por cierto, la manera de formalizar estas ideas, y de extenderlas a conjuntos de puntos de más de dos dimensiones, de modo que se puede hablar, por ejemplo, de la curvatura del espacio tridimensional. El manejo de las herramientas matemáticas (el cálculo tensorial) necesarias para entrar de manera rigurosa en dicho terreno escapa a los objetivos de este libro.

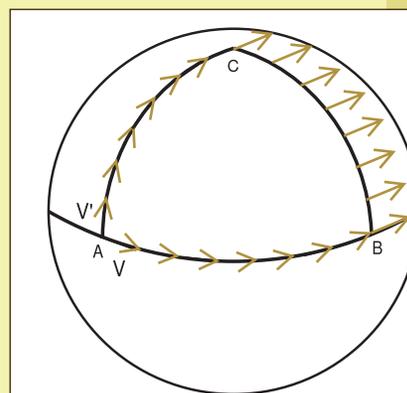
Como hemos adelantado, en una teoría de la gravedad que no soslaye las consecuencias del principio de equivalencia, la geometría del espacio (en realidad, con más precisión, la del espacio-tiempo) debe ser una geometría curva. En efecto, en la teoría de la Relatividad General de Einstein, la geometría del espacio-tiempo es una geometría riemanniana. La luz viaja a lo largo de geodésicas y la curvatura del espacio es función de la distribución y movimiento de la materia que se encuentra en el mismo.



**Figura 7.7.** La suma de ángulos interiores de un triángulo sobre una superficie esférica es mayor a  $\pi$ .



**Figura 7.8.** Transporte paralelo de un vector a lo largo de un triángulo en una superficie plana.



**Figura 7.9.** Transporte paralelo de un vector a lo largo de un triángulo en una superficie esférica.