6. Relatividad especial

6.1. introducción a la cinemática relativista

6.1.1 Introducción

Las transformaciones de Galileo relacionan las coordenadas $\vec{r}$ de un cuerpo respecto de un sistema de referencia con las coordenadas $\vec{r}\,'$ respecto de otro sistema que se traslada con velocidad $\vec{V}$, respecto del primero:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t \tag{6.1}$$

En estas transformaciones se supone que el tiempo transcurre de la misma forma en todos los sistemas de referencia. De las mismas, se deduce la suma galileana de velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} \tag{6.2}$$

que relaciona las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ en ambos sistemas. De acuerdo con esta ley de adición de velocidades, la única velocidad que resultaría medida igual en todos los sistemas que se desplazaran unos respecto de otros sería la infinita. Sin embargo, numerosas experiencias han mostrado que cuando se mide la velocidad de propagación de una señal luminosa en el vacío el valor que se obtiene es siempre c = 300.000 km/s (aproximadamente, ver Capítulo 1), sea cual fuere el sistema de referencia considerado. Como consecuencia de este hecho, se deduce que los intervalos de tiempo correspondientes a los mismos eventos son diferentes en sistemas de referencia que se mueven unos respecto de otros, y esto tiene consecuencias cinemáticas notables.

6.1.2 Dilatación del tiempo

Consideremos dos sistemas inerciales K y K' con sus ejes paralelos entre sí, moviéndose uno respecto de otro con una velocidad V a lo largo del eje x. En un instante t_0', desde el origen del sistema K' se emite una señal luminosa que alcanza un espejo situado sobre el eje y' a una distancia A del origen, y regresa al punto de emisión en el instante t_1'. Es claro que el intervalo entre la partida y el regreso de la señal, medido en K'; es:

$$\Delta t' = t_1' - t_0' = \frac{2A}{c} \tag{6.3}$$

En el sistema K' la señal va y vuelve paralela al eje y'. Como dicho eje se traslada uniformemente respecto del sistema K, en K la señal describe una trayectoria formada por dos segmentos oblicuos, como se muestra en la figura 6.1. Por lo tanto, el intervalo temporal entre la partida y el regreso de la señal a la fuente, medido en el sistema K es:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{2D}{c} \qquad (6.4)$$

y resulta mayor que el intervalo medido en el sistema K', ya que D es mayor que A, y la velocidad de propagación de la luz es igual a c en ambos sistemas.

A primera vista parecería que se está privilegiando a uno de los dos sistemas; de hecho, muchas veces la frase usual para describir la diferencia entre Δt y Δt' es "un reloj en K' atrasa respecto de un reloj en K", lo que parece extraño cuando se piensa que para cada sistema es el otro el que se desplaza. La interpretación correcta es la siguiente:

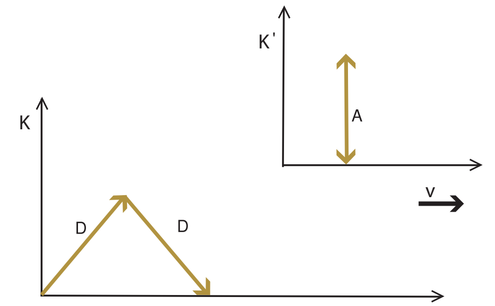

Figura 6.1. *Señal luminosa emitida en el sistema K' vista desde K y K'. El sistema de referencia K' se mueve con velocidad V respecto del sistema de referencia K.*

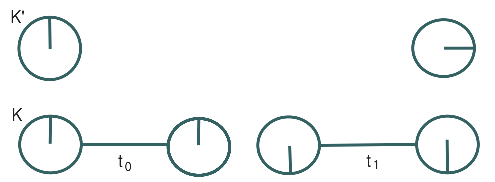

Figura 6.2. *Un reloj en el sistema K' se compara con dos relojes sincronizados en el sistema K.*

Supongamos que a lo largo del eje x de K hay una serie de relojes sincronizados como se muestra en la figura 6.2. En un primer instante t_0 un reloj del sistema K' pasa delante de uno de ellos; en ese instante los relojes enfrentados indican lo mismo. Para comparar el comportamiento de los relojes en distintos sistemas de referencia podemos comparar de nuevo la indicación del reloj de K' con la de uno en K; pero entonces estamos comparando el reloj de K' con otro reloj de K; aquél delante del cual pasa en un segundo instante t_1. En ese caso, se encuentra que el reloj en K' atrasa respecto del segundo reloj en K. Si procediéramos a la inversa, es decir, si se comparara un reloj de K con dos de K'; se encontraría que el que atrasa es el reloj de K. Como vemos, el proceso de comparación no es simétrico, y el reloj que atrasa es el que se compara con diferentes relojes del otro sistema (véase la figura 6.2).

La necesidad de comparar un reloj de un sistema con diferentes relojes del otro es una consecuencia de restringir la elección de sistemas de referencia únicamente a los inerciales. En efecto, si se quisiera "volver atrás" para comparar un reloj de K' con el mismo reloj de K sería necesario que la velocidad relativa entre ambos sistemas cambiara de signo y, por lo tanto, al menos uno de los dos sistemas debería dejar de ser inercial. Si el sistema acelerado es K', en un camino cerrado el reloj que atrasará es el de K'; en efecto, tanto en el viaje de ida como en el de vuelta el reloj de K' irá atrasando respecto de sucesivos relojes de K ante los cuales vaya pasando, y el razonamiento que conduciría al resultado contrario, comparando un reloj de K con varios de K' hasta volver al primero, no sería posible porque en este caso K' no es un sistema inercial.

A partir de la figura 6.1 es posible, mediante un cálculo simple que no requiere más que el teorema de Pitágoras y un poco de cinemática elemental, encontrar la relación entre los intervalos Δt' y Δt medidos en cada sistema. En el sistema K' la señal recorre una distancia L' = 2A. En el sistema K, en cambio, la señal recorre una distancia $L = 2D = 2\sqrt{A^2 + (V\,\Delta t/2)^2}$, ya que en el tiempo Δt el sistema K' se desplaza una distancia V Δt respecto del sistema K.

Como $L' = 2A = c\Delta t'$ y $L = 2D = c\Delta t$, se obtiene, después de sencillos pasos algebraicos, que $c\Delta t' = \sqrt{c^2 - V^2}\,\Delta t$. Por lo tanto, los intervalos de tiempo entre la emisión y el regreso de la señal medidos en los sistemas K' y K están relacionados por:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2} \qquad (6.5)$$

donde V es el valor absoluto de la velocidad de K' respecto de K. De este modo, el intervalo de tiempo entre dos eventos (emisión y regreso de la señal), medido en el sistema (en este caso K') en que ambos ocurren en el mismo punto, es menor que el intervalo de tiempo medido en el sistema (en este caso K) en el cual ambos eventos ocurren en puntos diferentes. El intervalo medido donde ambos eventos ocurren en la misma posición se llama intervalo de tiempo propio, y es siempre el menor.

6.1.3 Medición de longitudes

Supongamos que se quiere medir la longitud de una regla situada en el sistema K en forma paralela al eje x. En el sistema K la longitud puede obtenerse midiendo con relojes sincronizados el tiempo Δt que transcurre entre el paso de un punto (por ejemplo el origen) de K' ante cada extremo de la regla, y multiplicando Δt por la velocidad V con que un sistema se traslada respecto del otro (ver figura 6.3). Así se obtiene:

$$l = V\,\Delta t \qquad (6.6)$$

(Por supuesto, la medición de la longitud de la regla en el sistema K se puede realizar de manera más sencilla. Sin embargo, para comparar las longitudes en ambos sistemas (K y K') se requiere utilizar el método que hemos descripto). En el sistema K' la longitud de la regla puede determinarse midiendo el tiempo $\Delta t'$ que transcurre entre el paso de ambos extremos ante un reloj situado en un punto (por ejemplo el origen) de K' (ver figura 6.3) y multiplicando $\Delta t'$ por la velocidad V, con lo que se obtiene:

$$l' = V\,\Delta t' \qquad (6.7)$$

Es claro que es $l' = l\Delta t'/\Delta t$; y usando la expresión 6.5 que relaciona los intervalos de tiempo en ambos sistemas, resulta que:

$$l' = l\sqrt{1 - V^2/c^2} \qquad (6.8)$$

Es decir, que la longitud de un objeto medida en un sistema (en este caso K') respecto del cual está en movimiento es menor que la longitud medida en un sistema (en este caso K) respecto del cual está en reposo. La longitud medida en el sistema respecto del cual el cuerpo está en reposo se llama *longitud propia,* y es siempre la mayor.

Observemos que la expresión 6.8 no debe interpretarse diciendo que la regla se "ve" más corta en el sistema K', en el sentido que se refiere a la percepción que tiene un observador en dicho sistema. Ver y medir no es lo mismo. Un observador en K' vería la regla con la

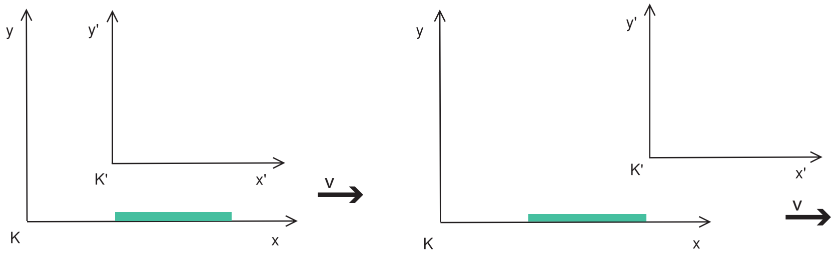

Figura 6.3. *Medición de la longitud de la regla en el sistema K. En la figura de la izquierda se mide el tiempo t_1 cuando el origen de K' pasa por un extremo de la regla, en la figura de la derecha se mide el tiempo t_2 cuando el origen de K' pasa por el otro extremo. De esta manera: $\Delta t = t_2 - t_1$.*

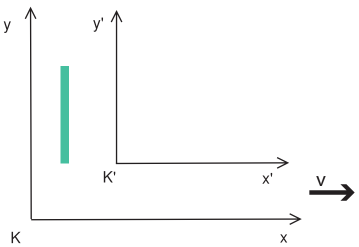

Figura 6.4. *Medición de la longitud de un objeto colocado a lo largo del eje y, desde un sistema K' que se mueve con velocidad en el eje x respecto de K.*

longitud l' dada por la ecuación 6.8 sólo si las señales que le llegan al mismo tiempo partieron de cada extremo simultáneamente, ya que una longitud es la diferencia entre dos posiciones medidas a un mismo tiempo. Si el observador "mira" cuando el primer extremo pasa ante él, la imagen del otro extremo que percibirá en ese instante corresponderá a la posición en un instante anterior (debido al tiempo que tardan las señales en propagarse) y, por lo tanto, no verá la regla con la longitud l', sino con una mayor.

Otra observación importante es que la longitud del objeto que aparece reducida cuando se la mide en el sistema respecto del cual está en movimiento, es la que corresponde a la dirección del movimiento relativo; la longitud en las direcciones perpendiculares al movimiento no se ven modificadas. Si tenemos una regla en el sistema K colocada a lo largo de su eje y, la longitud que mide un observador en el sistema K' que se mueve con velocidad V en la dirección del eje x respecto de K (ver figura 6.4) será l' = l. En la sección 1.5 se establecen las transformaciones de Lorentz, que son las utilizadas en la teoría de la Relatividad Especial para relacionar las coordenadas medidas respecto de dos sistemas. Veremos entonces, que a partir de estas transformaciones se puede deducir la invariancia de las longitudes transversales a la dirección de movimiento. Es importante resaltar este resultado, ya que en la sección 1.12 de este capítulo será la base que nos permitirá entender el motivo por el cual la geometría en un sistema no inercial es equivalente a una geometría no euclídea.

6.1.4 Ejemplos con valores numéricos

La expresión 6.5 nos permite estimar qué tan buena resulta en la práctica la suposición $\Delta t = \Delta t'$ en la que se basan las transformaciones de Galileo. Veamos algunos ejemplos:

1. Consideremos el movimiento de una nave espacial con una velocidad del orden de la velocidad de escape de la Tierra (≈ 11.200 m/s) (para definición de la velocidad de escape ver el ejercicio propuesto en el capítulo 4 sección 2). Con este valor podemos calcular el cociente V/c y obtener la proporción en que atrasa un reloj en la nave, respecto de los relojes de un sistema inercial fijo a la Tierra. El resultado es:

$$\frac{V}{c} \approx 1.4 \times 10^{-9} \tag{6.9}$$

Recordemos que lo que queremos estimar es el cociente:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{6.10}$$

Para valores pequeños de V^2/c^2 se puede hacer la aproximación [37]:

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} \simeq 1 - \frac{V^2}{2c^2} \tag{6.11}$$

de donde resulta:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} \simeq 1 - 7,1 \times 10^{-10} \tag{6.12}$$

Resulta claro que $\Delta t'$ es prácticamente igual a Δt. ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que un reloj en la nave atrasara un segundo respecto de relojes sincronizados con los de la Tierra? El cálculo es simple, y da como resultado alrededor de 45 años.

2. Podemos, también, plantearnos la pregunta siguiente: ¿qué velocidad es necesaria para que un reloj atrase, por ejemplo, un segundo cada dos? En este caso es $\Delta t'/\Delta t = 1/2$ y entonces:

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{V^2}{c^2} \tag{6.13}$$

de donde:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} c \approx 260.000 \text{ km/s} \tag{6.14}$$

Velocidades tan grandes, si bien escapan a nuestra experiencia cotidiana y son unas 20.000 veces superiores a la de una nave espacial, pueden ser alcanzadas por partículas impulsadas por los campos muy intensos de los llamados *aceleradores de partículas.* Señalemos que todas las mediciones realizadas empleando tales medios confirman las predicciones de la teoría.

[37] Como en otros casos análogos, usamos que para $\epsilon \ll 1$ vale la aproximación $(1 - \epsilon)^{1/2} \approx 1 - \epsilon/2$.

□ Problema 1

Supongamos una barra en reposo respecto de un sistema K', el cual se traslada con velocidad V constante respecto de un sistema K. La longitud propia de la barra es l_0 = 9 m. ¿Cuál debería ser la velocidad de K' respecto de K para que un observador en este último sistema midiera una longitud de 8 m?

6.1.5 Las transformaciones de Lorentz

De la hipótesis clásica acerca de la invariancia de tiempos y longitudes se obtienen las transformaciones de Galileo. Sin embargo, estas transformaciones no son consistentes con el hecho de que la velocidad de la luz en vacío es la misma en cualquier sistema de referencia. Por este motivo, Albert Einstein propuso utilizar las *tranformaciones de Lorentz* dando lugar a la teoría de la Relatividad especial (ver capítulo 1). En esta teoría, la relación entre las coordenadas espacio-temporales de un cuerpo respecto de dos sistemas K y K' que se desplazan uno respecto del otro con una velocidad V a lo largo del eje x está dada por:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{6.15}$$

Las coordenadas espaciales y el tiempo ya no son independientes. Es claro que para velocidades pequeñas respecto de la de la luz estas fórmulas se reducen a las transformaciones de Galileo: basta con tomar el límite $V/c \to 0$, que equivale a $c \to \infty$. En ese caso se reobtiene $t = t'$, es decir, la independencia del tiempo respecto de la elección de sistema de referencia.

Observemos que, como adelantamos, de estas transformaciones se desprende que las distancias perpendiculares a la dirección de $\vec{v}$ son las mismas en ambos sistemas. La longitud de una regla colocada a lo largo del eje y, medida desde un sistema que se mueve con velocidad en la dirección del eje x (ver figura 6.4) es la misma que la que se mide desde un sistema que está en reposo respecto de la regla.

6.1.6 Adición de velocidades

A partir de las ecuaciones 6.15 es sencillo encontrar las fórmulas relativistas para la adición de velocidades, que en el límite no relativista se reducen a la regla galileana $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$;

basta escribir las variaciones de posición y de tiempo:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + (V/c^2)\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (6.16)$$

y calcular las componentes de la velocidad como cocientes de ambos y operar algebraicamente, para obtener:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V'^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \qquad (6.17)$$

Notemos que, aunque la velocidad V de un sistema respecto del otro sea paralela al eje x, para un objeto que se mueva con una velocidad cualquiera las tres componentes de su velocidad cambian al pasar de un sistema a otro. Esto resulta claro a partir de un ejemplo sencillo: consideremos un objeto que se desplaza con una velocidad v' perpendicular al eje x', es decir tal que $v'_x = 0$. Como es siempre $\sqrt{1 - V^2/c^2} < 1$, tendremos $v_y < v'_y$. Esto es esperable pues las distancias medidas perpendicularmente a V no se modifican al cambiar de sistema, pero los intervalos de tiempo medidos en K' resultan menores que los intervalos medidos en K.

6.1.7 Energía e impulso

No deduciremos aquí las expresiones relativistas de la energía y el impulso de una partícula, pero las escribiremos porque de ellas se desprenden conclusiones físicas importantes. La generalización del impulso clásico $m\vec{v}$ conduce a la definición:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6.18)$$

que, por supuesto, tiende a la fórmula clásica cuando $v/c << 1$. La energía toma la forma:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6.19)$$

En el caso $v/c << 1$ la raíz en el denominador puede aproximarse haciendo $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + v^2/(2c^2)$. Reemplazando en la fórmula precedente resulta que, en el caso de velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, la energía puede escribirse como:

$$\varepsilon \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.20}$$

donde el segundo término es la energía cinética clásica, y el primero representa la *energía en reposo* $\square_0 = mc^2$.

De la expresión relativista de la energía se desprenden dos conclusiones: 1) Aún en reposo, un cuerpo tiene una energía no nula; su magnitud es considerable, dado el valor de la velocidad de la luz. 2) Para que un cuerpo de masa no nula alcanzara la velocidad de la luz se requeriría una energía infinita, pues el denominador de (6.19) se anula cuando $v = c$. Entonces, es imposible para un cuerpo masivo alcanzar la velocidad de la luz.

6.1.8 Intervalo espacio-temporal

Observemos que, si bien ahora los intervalos temporales ya no son absolutos y tampoco lo son las distancias, de las transformaciones de Lorentz se deduce que la cantidad:

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 \tag{6.21}$$

no cambia al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. En efecto, basta tomar las expresiones para Δt, Δx, Δy y Δz y reemplazar en la fórmula de s^2 para obtener:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \tag{6.22}$$

de manera que:

$$s^2 = s'^2 \tag{6.23}$$

La cantidad s se denomina *intervalo espacio-temporal.* Su invariancia refleja que, si bien la distancia y el intervalo temporal entre dos eventos son diferentes para distintos sistemas de referencia, existe una combinación de ellos que es independiente del sistema (inercial) considerado.

6.1.9 Causalidad

La relatividad predice la imposibilidad de que un cuerpo de masa no nula alcance la velocidad de la luz. Esto permite dar un significado muy importante a la invariancia del intervalo espacio-temporal. Para simplificar el análisis subsiguiente, consideremos eventos que ocurren en una única dimensión espacial, digamos sobre los ejes x y x' de dos sistemas K y K' que tienen una velocidad relativa paralela a dichos ejes. Entonces, si un evento tiene coordenadas espacio-temporales x_1, t_1 en K y x'_1, t'_1 en K', el siguiente evento tiene coordenadas x_2, t_2 en K y x'_2, t'_2 en K'. De la invariancia del intervalo se deduce que:

$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = s^2 \tag{6.24}$$

Consideremos ahora los tres casos posibles $s^2 = 0$, $s^2 < 0$ y $s^2 > 0$.

- Si $s^2 = 0$ entonces $\Delta x = \pm c\Delta t$, de modo que un rayo de luz podría conectar al primer evento con el segundo.
- Si $s^2 > 0$ entonces la distancia que separa ambos eventos es menor que la que recorre un rayo de luz en el tiempo que transcurre entre el primero y el segundo; por lo tanto, incluso un cuerpo masivo, viajando con la velocidad necesaria, podría conectar el primer evento con el segundo.
- Si $s^2 < 0$ la distancia que separa ambos eventos no puede ser cubierta por ningún cuerpo ni por un rayo de luz en el tiempo que separa al primero del segundo; por lo tanto, es imposible que el segundo evento esté conectado de ninguna forma con el primero.

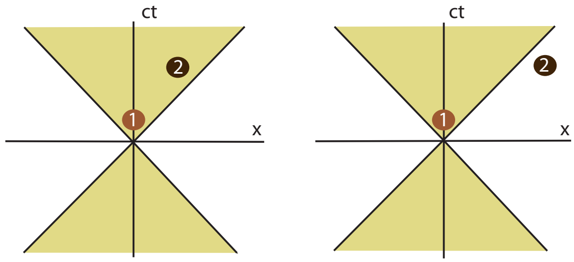

Figura 6.5. *Conos de luz. Izquierda: Eventos (1) y (2) conectados causalmente. Derecha: Eventos (1) y (2) no conectados causalmente; las líneas oblicuas indican la propagación de un rayo de luz.*

Es esencial el hecho de que $s^2 = s'^2$: la existencia o no de conexión causal entre un evento y el otro no depende del sistema de referencia. Así, si bien los intervalos temporales y las distancias entre ambos eventos dependen del sistema de referencia considerado, la causalidad no es relativa sino absoluta.

En la figura 6.5 se indica el llamado *cono de luz* correspondiente a un evento (1) cuyas coordenadas espacio-temporales se toman como origen. La región sombreada ($s^2 > 0$) corresponde a la región donde posibles eventos (2) están conectados causalmente, mientras que la región sin sombrear ($s^2 < 0$) corresponde a la región donde los eventos (2) no están conectados causalmente. En la figura 6.5 izquierda el evento (2) se encuentra dentro de la región sombreada, mientras que en la figura 6.5 derecha el evento (2) se encuentra por fuera de la región sombreada, es decir, que en este caso los eventos (1) y (2) no están conectados causalmente.

6.1.10 Ejemplos

1. A lo largo del eje x del sistema K se encuentran, separados una distancia l_0, dos relojes sincronizados a los que llamaremos A y B, mientras que sobre el eje x' del sistema K', que se mueve con velocidad V respecto de K , se encuentra un reloj al que llamaremos C (ver figura 6.6). Cuando el reloj C pasa por delante del reloj A situado en K, los dos relojes enfrentados (A y C) indican lo mismo: $t_1 = t_1'$. Se quiere calcular entonces cuánto atrasa el reloj C del sistema K' cuando pasa enfrente del reloj B del sistema K.

Este problema se puede resolver utilizando la invariancia del intervalo espacio-temporal. Tenemos dos eventos:

(a) el reloj C pasa por delante del reloj A.
(b) el reloj C pasa por delante del reloj B.

Elegimos el origen del sistema K en la posición del reloj A, y el origen de K' en la posición del reloj C. Comenzamos a contar el tiempo, en ambos sistemas, cuando C pasa frente a A.

Entonces, las coordenadas espacio-temporales del primer evento son:

$$t_1 = t'_1 = 0 \tag{6.25}$$

$$x_1 = x'_1 = 0 \tag{6.26}$$

Como el sistema K' se traslada con velocidad V, el reloj C pasa frente a B, ubicado en $x = l_0$, cuando en K ha transcurrido un tiempo $t_2 - t_1 = t_2 = l_0/V$. Entonces, las coordenadas del segundo evento son:

$$t_2 = \frac{l_0}{V} \qquad t'_2 = ? \tag{6.27}$$

$$x_2 = l_0 \qquad x'_2 = 0 \tag{6.28}$$

Tenemos que $x'_2 = 0$ pues el sistema K' acompaña al reloj C (véase la figura 6.6). Utilizamos ahora la propiedad de invariancia del intervalo:

$$s^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \tag{6.29}$$

y de aquí se obtiene:

$$c^2 t'^2_2 = c^2 \frac{l_0^2}{V^2} - l_0^2 \tag{6.30}$$

de donde:

$$t'_2 = \frac{l_0}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{6.31}$$

Vemos entonces que, comparando con el tiempo t_2 medido por el observador en K, el reloj en K' ha atrasado, ya que t'_2 es menor que t_2 en un factor $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

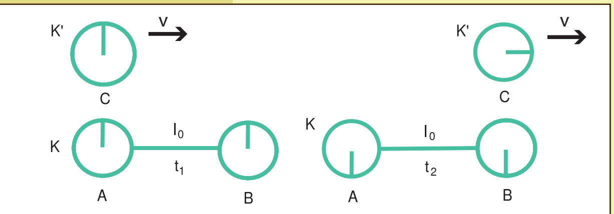

Figura 6.6. *Relojes sincronizados en el sistema K se comparan con un reloj en el sistema K' que se mueve con velocidad v respecto de K.*

2. Una nave viene hacia la Tierra viajando con una velocidad v. Una fuente sobre el planeta emite dos pulsos de luz, separados un tiempo t_0 medido en un sistema que está en reposo con respecto de la fuente. Se quiere calcular cuál es el intervalo de tiempo que mide un observador fijo a la nave entre la recepción del primer pulso y el segundo.

También en este caso utilizaremos la invariancia del intervalo relativista para resolver el problema. La figura 6.7 será útil para orientarnos.

Tomemos $x = -l$ como la posición inicial de la nave, es decir, la que tiene cuando se emite el primer pulso. Elegimos como positivo el sentido en que avanza la nave, y negativo el sentido en que se propagan los pulsos. En un tiempo t el primer pulso se encuentra en una posición $x_1(t) = -ct$, mientras que en ese instante el segundo pulso se encuentra en $x_2(t) = -c(t - t_0)$. Llamaremos t_1 al tiempo de encuentro entre el primer pulso y la nave, y t_2 al tiempo de encuentro entre el segundo pulso y la nave; ambos tiempos son medidos desde un sistema fijo a la Tierra.

De acuerdo con la convención adoptada, la ecuación de movimiento de la nave es $x_N(t) = -l + vt$. De esta manera la posición del encuentro entre el primer pulso y la nave es $x_1(t_1) = -ct_1 = x_N(t_1) = -l + vt_1$, de lo cual inferimos que $t_1 = l/(c + v)$. A su vez, la posición del encuentro entre el segundo pulso y la nave es $x_2(t_2) = -c(t_2 - t_0) = x_N(t_2) = -l+vt_2$, de lo que se deduce que $t_2 = (l + ct_0)/(c + v)$. Por lo tanto:

$$t_2 - t_1 = \frac{ct_0}{c+v} \tag{6.32}$$

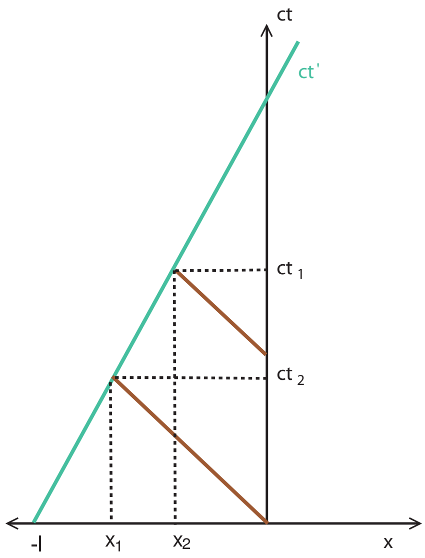

Figura 6.7. *En verde: x (posición) vs ct (tiempo) de la nave; en marrón, x vs ct de los pulsos de luz.*

Ahora, utilizamos la invariancia del intervalo relativista. El sistema K es el sistema en reposo respecto de la fuente que emite los pulsos de luz y el sistema K' es el sistema en reposo respecto de un observador que viaja con la nave. Por lo tanto, de la igualdad de los intervalos espacio-temporales se deduce que:

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \tag{6.33}$$

Dado que en el sistema de la nave ambos eventos (la llegada de cada pulso) ocurren en la misma posición, entonces $x'_2 = x'_1$. A su vez, $x_2(t_2) - x_1(t_1) = -c(t_2 - t_0)+ct_1$, y utilizando la expresión 6.32 se tiene que $x_2 - x_1 = (vct_0)/(c+v)$. De esta manera, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \sqrt{\frac{c^2t_0^2}{(c+v)^2} - \frac{v^2t_0^2}{(c+v)^2}} \\ &= t_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Esta ecuación muestra que el intervalo temporal entre la llegada de un pulso y el siguiente es *menor* en el sistema de referencia fijo a la nave que en el sistema fijo a la fuente que emita los pulsos.

6.1.11 Efecto Doppler

El resultado hallado en el ejemplo de los pulsos emitidos hacia la nave corresponde a un movimiento relativo tal que la fuente y el observador se acercan. En general, los intervalos temporales medidos por la fuente (Δt_F) y el observador (Δt_O) se relacionan de la forma:

$$\Delta t_O = \Delta t_F \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{6.35}$$

cuando fuente y observador van uno hacia el otro, y de la forma:

$$\Delta t_O = \Delta t_F \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{6.36}$$

cuando fuente y observador se alejan uno del otro. Estas igualdades permiten relacionar las frecuencias medidas en los distintos sistemas de referencia. Sean ν_F la frecuencia con que emite la fuente y ν_O la frecuencia medida por el observador; entonces, recordando que la frecuencia ν es igual a la inversa del período τ, tenemos que:

$$\nu_O = \nu_F \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{6.37}$$

cuando fuente y observador se acercan, mientras que:

$$\nu_O = \nu_F \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{6.38}$$

cuando fuente y observador se alejan. Como vemos, en el primer caso la frecuencia medida por el observador es mayor que la de la fuente (corrimiento al azul), en tanto que en el segundo caso la frecuencia medida por el observador es menor que la de la fuente (corrimiento al rojo). Este fenómeno recibe el nombre de efecto Doppler relativista.

6.1.12 Tiempos y distancias en un disco rotante

Consideremos un disco perpendicular al eje z que rota con velocidad angular Ω constante, en torno de dicho eje. Introduzcamos dos sistemas de referencia, uno de los cuales (digamos K) es inercial, mientras que el otro (digamos K') gira con la misma velocidad angular constante Ω, respecto del eje z común a ambos sistemas (es decir que K' es un sistema no inercial).

Supongamos que colocamos dos relojes idénticos sobre el disco, uno de ellos en el centro y otro en el borde del mismo. Ambos relojes están en reposo respecto del disco. Para un observador situado en el sistema K el reloj en el centro del disco tiene velocidad nula, mientras que el que se encuentra en el borde está en movimiento respecto de K como consecuencia de la rotación. De acuerdo a lo que hemos visto en la sección 1.2, el reloj en el borde del disco se irá retrasando respecto de sucesivos relojes colocados en K frente al borde; por lo tanto, *también se irá atrasando respecto del reloj en el centro del disco,* ya que éste no se mueve, y por lo tanto permanece sincronizado con los relojes en K. Un observador situado en el centro del disco notará que hay una diferencia en la marcha de los relojes en su sistema (el del centro y el del borde). De esta manera, en el disco rotante la medición del tiempo dependerá de la posición del reloj.

Veamos qué ocurre con la medición de longitudes. Un círculo en el plano x, y del sistema K (con centro en el origen de coordenadas) se puede considerar también un círculo en el plano x', y' en el sistema K'. Midiendo en K la longitud y el diámetro de la circunferencia con una regla obtenemos valores cuyo cociente es igual a π, de acuerdo con el carácter euclídeo de la geometría en el sistema de referencia inercial. Supongamos, ahora, que la medida se efectúa con una regla en reposo respecto de K'. Si se observa este proceso desde el sistema K, encontramos que la regla tangente a la circunferencia experimenta una contracción en su longitud. Sin embargo, esto no ocurre con la regla ubicada radialmente, es decir la que mide el diámetro. La razón de esto es que el movimiento es siempre perpendicular al radio de la circunferencia y, como se vio en la sección 1.5, cuando se mide una distancia a lo largo de una dirección perpendicular al movimiento entre los dos sistemas, dicha longitud no se ve modificada respecto de la longitud propia. Por lo tanto, concluimos que en el sistema no inercial el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro será mayor que π y la geometría de Euclides no vale en dicho sistema.

En la sección 4 del cap. 5 hemos introducido el principio de equivalencia: todo sistema no inercial equivale (localmente) a un campo gravitatorio. De esta manera, en un campo gravitatorio, como ocurre en un disco rotante, no debe ser posible sincronizar relojes que se encuentren en distintas posiciones. Por otra parte, de lo discutido acerca de la medición de longitudes, se infiere que en un campo gravitatorio la geometría ya no debería ser la euclídea con la que estamos acostumbrados a trabajar.