

Introducción

Juan Pablo Pinasco

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática. Fue la primera en desarrollarse como un cuerpo teórico ordenado, con axiomas, teoremas, y demostraciones; este desarrollo fue imitado luego por el resto de las matemáticas. La propia geometría desarrolló sus propias ramas, y por ese motivo es difícil hablar hoy de una única geometría. Cada vez que las herramientas teóricas se demostraban insuficientes para resolver nuevos desafíos, distintos problemas prácticos motivaron el desarrollo de estas nuevas geometrías.

Por otra parte, muchas de estas ramas de la geometría fueron quedando obsoletas para las aplicaciones prácticas (aunque no como herramientas teóricas) ante el avance tecnológico. Para citar un ejemplo de gran importancia aún hoy día, pensemos en cómo determinar la ubicación de un barco en el océano. Después del descubrimiento de América este problema se transformó en el principal problema tecnológico relacionado con la navegación. Los barcos de la época eran capaces de atravesar el Atlántico, y por primera vez tenían necesidad de alejarse de la costa al navegar.

El primer obstáculo para ubicarse en mar abierto es la falta de puntos de referencia: sólo las estrellas están disponibles para intentar hacerlo. Las estrellas fueron utilizadas ya en la antigüedad, junto con argumentos de semejanza de triángulos y trigonometría, para resolver parcialmente el problema. Sin embargo, no son suficientes, también se hace necesario medir muy bien el tiempo, con mucha precisión. Los clásicos relojes de la Edad Antigua y la Edad Media (principalmente clepsidras y relojes de arena, que medían el tiempo en que tardaba en vaciarse un recipiente) no sirven en un barco debido al movimiento de las aguas; tampoco los relojes de péndulo posteriores, cuyo balanceo también se ve alterado. Por este motivo, para resolver el problema, durante los siglos XVI, XVII y XVIII se trabajó en mejorar los mapas y las cartas de navegación, los calendarios solares y lunares (para saber a qué hora debe aparecer un astro en determinado lugar, lo que permite ubicarse), y en el desarrollo de nuevos relojes.

Cada uno de estos problemas involucró nuevas herramientas matemáticas. En esa época surgieron la geometría proyectiva (impulsada por los pintores y arquitectos renacentistas), la geometría analítica (principalmente desarrollada por Fermat y Descartes), el análisis matemático (que permitió el estudio de curvas de manera analítica), y la geometría diferencial (si bien apareció a fines del siglo XVIII, fueron Cauchy, Gauss y Riemann en el XIX quienes la transformaron en una rama en sí misma).

Hoy día, el GPS (sistema de posicionamiento global) se encarga de resolver este problema de manera automática: una computadora calcula las distancias triangulando las señales intercambiadas entre el barco y distintos satélites. El funcionamiento del GPS se basa en los mismos principios de la geometría clásica utilizados al triangular posiciones basándonos en las estrellas u otros puntos de referencia; la principal diferencia es la precisión en los cálculos y la rapidez con que se los hace al estar automatizada la tarea, y si bien no necesitamos saber mucha geometría para utilizarlo, sí la necesitamos si queremos saber cómo funciona.

¿Qué escribir, entonces, en un libro de geometría como éste? ¿Cómo mostrar su potencial para las aplicaciones y, a la vez, su importancia teórica? Hemos tratado de equilibrar ambos aspectos, proponiendo que resolvamos el siguiente problema:

Estimar las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

Vamos a hacer una serie de suposiciones para aclarar qué pretendemos medir. Supongamos que la Tierra gira en torno al Sol en una órbita circular, y que la Luna también se mueve en círculos en torno a la Tierra (sabemos, gracias a los avances astronómicos, que en realidad sus órbitas son elípticas, pero en una primera aproximación no lo vamos a tener en cuenta). Nos interesa calcular, aproximadamente, el radio de estas órbitas, que son las distancias a la Tierra:

- R , distancia entre el Sol y la Tierra (radio de la órbita terrestre en torno al Sol)
- r , distancia entre la Luna y la Tierra (radio de la órbita lunar en torno a la Tierra)

Además, vamos a suponer que el Sol, la Luna y la Tierra son esferas perfectas, y para conocer su tamaño necesitamos conocer el radio de estas esferas, o el diámetro (que es igual al doble del radio). Serán nuestras incógnitas, entonces,

- D , diámetro del Sol
- d , diámetro de la Luna

Señalemos también que estos cuerpos celestes no son esferas perfectas, aunque para nuestros objetivos no es importante. Por ejemplo, en el caso de la Tierra, el radio ecuatorial (la distancia medida desde el centro de la Tierra hasta un punto en el Ecuador) es de 6.378,1 km, mientras que el radio polar (la distancia entre el centro de la Tierra y uno de los polos) es de 6.356,8 km; la Tierra está achatada entre los polos unos 22 kilómetros, que pueden despreciarse sin ningún problema si nuestro objetivo es hacernos una idea aproximada del tamaño de la Tierra.

Muchas veces puede medirse el tamaño de un objeto o la distancia a la que está sin necesidad de recurrir a la geometría. En este caso, no podemos ir con

Planteo del Problema

Planteo del Problema

una cinta métrica o una regla tratando de medir el diámetro lunar... mucho menos el del Sol. Sin embargo, veremos que es un problema que puede resolverse con muy pocas herramientas si empleamos distintos conceptos geométricos. Las primeras estimaciones de estos tamaños y de estas distancias se hicieron hace ya más de dos mil años, sin necesidad de telescopios, satélites, ni fotografías: simplemente observando con sus ojos, y utilizando modestos instrumentos como una regla y una plomada. Los cálculos se hacen hoy día de la misma forma para calcular la distancia a otras estrellas y a diferentes galaxias, sólo que se utilizan computadoras en vez de hacer las cuentas a mano, y se trabaja con señales de radiotelescopios y sobre fotografías satelitales. Pero los conceptos geométricos que se emplean no han variado.

Vamos a hacer una recorrida por distintas geometrías, recolectando estos conceptos que nos serán necesarios para la solución del mismo. Pero este problema no será la única motivación del libro: en cada capítulo veremos las ideas claves de distintas ramas de la geometría, junto con los teoremas y resultados centrales de cada una, sin descuidar sus demostraciones. Presentaremos también ejercicios y problemas particulares, que no siempre estarán conectados directamente con nuestro problema principal, pero que sirvan para extender o verificar que se han comprendido los resultados del texto.

La estructura del libro es la siguiente. En el primer capítulo haremos un breve recorrido por la historia de la geometría antes de Euclides, buscando su origen y los rastros de la misma en las primeras civilizaciones. El segundo capítulo presenta el sistema axiomático de la geometría euclidiana clásica, y los resultados de semejanza de triángulos. En el capítulo tres veremos los rudimentos de la trigonometría, y en el cuatro (escrito por Santiago Laplagne) diferentes aplicaciones teóricas y prácticas. El quinto capítulo (escrito por Nicolás Saintier) está dedicado a la geometría esférica, haciendo hincapié en la diferencia de trabajar sobre una superficie plana o una superficie curvada. En el sexto capítulo (escrito por Inés Saltiva) presentaremos la geometría proyectiva crítica para entender la perspectiva y cómo vemos las cosas. En el séptimo (escrito por Pablo Amster) introduciremos algunos conceptos topológicos y, finalmente, en el octavo capítulo resolveremos nuestro problema principal.