Capítulo 8

Tierra, Sol, Luna

Juan Pablo Pinasco

8.1. El problema

Estamos ahora en condiciones de resolver el problema planteado en la introducción:

Problema

Calcular las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

En principio, los valores que estamos buscando son cuatro, como ya señalamos:

- **R, distancia entre el Sol y la Tierra.**
- **r, distancia entre la Luna y la Tierra.**
- **D, diámetro del Sol.**
- **d, diámetro de la Luna.**

Antes de resolver el problema, es importante saber distinguir el tipo de *datos* que necesitamos, y cómo calcularlos. Por ejemplo, supongamos que el Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo rectángulo, como en la figura 8.1

Figura 8.1

Llamemos aquí $R = \overline{ST}$ y $r = \overline{TL}$.

Ahora, si conocemos el ángulo a y la distancia $\overline{SL}$ entre el Sol y la Luna, podemos utilizar los argumentos trigonométricos que ya vimos para calcular las distancias buscadas:

$$\begin{aligned} sen(a) &= \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \\ &= \frac{\overline{SL}}{\overline{ST}} \end{aligned}$$

Entonces, conociendo a y $\overline{SL}$, calculamos el seno de a, y luego despejamos la distancia entre la Tierra y el Sol $\overline{ST}$:

$$
\begin{aligned}
R &= \overline{ST} \\
&= \frac{\overline{SL}}{sen(a)}.
\end{aligned}
$$

Ahora, conociendo $\overline{ST}$ podemos calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, $\overline{TL}$:

$$
\begin{aligned}
cos(a) &= \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \\
&= \frac{\overline{TL}}{\overline{ST}}
\end{aligned}
$$

porque en el paso anterior hemos calculado $\overline{ST}$, y despejamos

$$\overline{TL} = cos(a) \cdot \overline{ST}.$$

Observemos que podemos escribir esta última ecuación como

$$r = cos(a) \cdot R.$$

Lamentablemente, para resolver de esta forma el problema de las distancias, estamos suponiendo que tenemos cierta información, es decir que conocemos tres *datos* importantes:

1. los puntos S, T, L forman un triángulo rectángulo,

2. conocemos el ángulo a,

3. conocemos la distancia $\overline{SL}$.

Sin embargo, seríamos deshonestos si terminamos el libro resolviendo el problema de esta manera. Si pudiéramos medir en forma directa, o con observaciones, la distancia entre el Sol y la Luna, seguramente podríamos medir entonces la distancia entre el Sol y la Tierra (y entre la Tierra y la Luna) sin necesidad de utilizar argumentos geométricos.

Necesitamos buscar otra manera de encarar el problema, y la solución debe estar dada en términos de datos a los que realmente tengamos acceso. En teoría, la solución anterior es perfecta; en la práctica, depende de conocer una distancia tan difícil de calcular como las que queremos averiguar.

Por otra parte, notemos que nos quedan por analizar los otros dos factores que utilizamos en esta solución del problema: la suposición de que el Sol, la Luna y la Tierra formen un triángulo rectángulo, y la posibilidad de conocer el ángulo a.

La Luna se ve muchas veces durante el día, aunque no siempre presenta la misma forma: va desde una estrecha cinta en forma de medialuna, hasta el disco completo de la luna llena. En

algunos casos, cerca de los cuartos crecientes y los menguantes, vemos iluminado exactamente un semicírculo: en ese momento, cuando vemos iluminada la mitad, la Luna se ubica en el vértice que corresponde al ángulo recto de un triángulo rectángulo (ver la figura anterior).

Es muy difícil determinar con precisión el momento en que exactamente la mitad de la Luna está iluminada, porque al ser esférica, y su superficie rugosa, no vemos exactamente una línea recta que separa la zona iluminada de la zona en sombras, pero es posible determinar ese momento con una aproximación muy buena. Desde ya, culpa de esto se cometen errores en la medición, pues tal vez el momento elegido para medir no corresponde exactamente al momento en que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo rectángulo.

Prolongando el borde donde comienza la región en sombras de la Luna hasta nuestra ubicación en la Tierra, obtenemos el cateto adyacente al ángulo a, y la hipotenusa es el segmento que une a la Tierra y el Sol. Ahora, necesitamos medir el ángulo a, y esto puede hacerse aunque con cierta dificultad, indiquemos brevemente cómo hacerlo.

Tenemos que determinar el ángulo que hace el cateto adyacente con la hipotenusa, es decir, la recta que une el punto donde estamos parados con el Sol. Como ya explicamos, es posible hallar el ángulo entre dos objetos que estamos viendo a la distancia (utilizando un teodolito, u otro instrumento similar). Pero aquí, el problema es que alinear esta recta imaginaria entre nuestros ojos y el Sol es peligroso, y nos puede costar la vista. Si se quiere hacer la medición, se puede intentar lo siguiente: en vez de "mirar" en dirección al Sol, conviene mirar en la dirección opuesta, lo cual no es tan difícil, ya que es la dirección de nuestra sombra. En lugar de medir el ángulo a, podemos tratar de medir su complemento, que debe ser $180° - a$ (como en la figura 8.2).

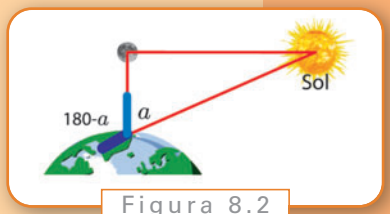

Figura 8.2

Para obtener una medición precisa hay que utilizar un radiotelescopio, o cámaras de rayos ultravioletas (pero cuidado, ¡no se debe mirar en la dirección del Sol!). Este ángulo, medido con la tecnología actual, resulta ser de 89,853°. Sin embargo, fue medido con métodos elementales por Aristarco en el siglo III a.C.; y el valor que calculó fue de 87°, que no está tan lejos del valor real, pero veremos que esos 2,853° e diferencia generan un gran error en los valores estimados finales. A él debemos también la idea de hacer las mediciones cuando *STL* forman un triángulo rectángulo.

Calcule $\frac{1}{cos(87°)}$, y $\frac{1}{cos(89,853°)}$. ¿Son muy diferentes? | **Ejercicio 1**

En definitiva, la suposición de que *STL* forman un triángulo rectángulo resulta razonable, y también es posible medir el ángulo a. En cambio, no podemos medir la longitud de uno de los catetos, o de la hipotenusa, de manera directa. Es conveniente razonar de este modo con todos los datos que se introducen para resolver el problema, verificar si existe alguna forma de obtenerlos, o si es que han salido de la nada, como por arte de magia. En este último caso, debemos descartarlos.

Observación: repitámoslo otra vez, en caso de intentar medir el ángulo a procedan con mucha cautela. Recuerden que jamás se debe mirar en la dirección del Sol.

8.2. Tamaños y distancias

El objetivo de la sección anterior fue tomar conciencia de que existen datos que podemos obtener en la práctica (a través de una medición) y otros que no. En esta sección vamos a enfocar otro aspecto del problema, establecer relaciones entre los valores que queremos calcular aunque no sepamos cuánto valen. Si bien los cuatro valores D, d, R y r caen dentro del tipo de datos a los que no podemos acceder en forma directa, la geometría nos permite despejar unos en función de los otros.

Por ejemplo, en la sección anterior vimos que

$$r = cos(a) \cdot R,$$

y como el ángulo a puede medirse, es suficiente averiguar una de las dos distancias para obtener la otra.

Con una calculadora obtenemos aproximadamente $cos(89{,}853) \approx 0{,}002565$, con lo que podemos despejar la distancia al Sol,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{0,002565} \cdot r \\ &\approx 389,86r, \end{aligned}$$

y por lo tanto la distancia entre la Tierra y el Sol es unas 390 veces la distancia entre la Tierra y la Luna.

¿Cómo aprovechar esta relación? ¿Cómo medir una de estas distancias? La respuesta, provisoria, pasa por estimar los diámetros que estamos buscando. ¿Nos sirve una regla común, graduada en centímetros y milímetros...? ¡En contra de todo lo que podamos imaginar, la respuesta es que sí!

Si una noche extendemos una regla con el brazo y "medimos" el diámetro que vemos de la Luna, sabemos que el tamaño real de la misma no son esos pocos milímetros que ocupa en la regla. Pero esta medición no es tan inútil como puede parecer, ya vimos en el capítulo dedicado a la geometría proyectiva que hay reglas precisas de cuánto y cómo debe achicarse una figura que está en un cuadro para que nos dé una impresión de estar a la distancia.

Pensemos, entonces, en hacer un sencillo experimento: intentar atrapar la Luna entre dos dedos. Antes, vamos a hacerlo con este libro. Déjelo en una mesa o en el piso, a un metro o dos de distancia, y separe el índice y el pulgar unos tres centímetros. Ahora, cerrando un ojo, y acercando la mano al (otro) ojo, trate de hacer coincidir el libro entre los dos dedos, como si lo estuviese sosteniendo entre ellos. Evidentemente, el libro no mide tres centímetros, pero se ve de ese tamaño si la mano está ubicada a unos diez o veinte centímetros de nuestra cara. Los resultados de triángulos semejantes que vimos

antes no nos permiten calcular el tamaño del libro ni la distancia a la cual lo dejamos, pero sí sabemos que se mantiene la siguiente proporción:

$$\frac{distancia\ al\ libro}{tamano\ del\ libro} = \frac{distancia\ a\ los\ dedos}{separacion\ de\ los\ dedos}.$$

Ejercicio 2

Realizar este experimento, separando los dedos unos tres centímetros, midiendo a qué distancia están los dedos de su ojo, y verifique que el cociente entre la distancia al libro y su tamaño es igual al cociente que calculó.

Podemos repetir este experimento con la Luna, y obtener así una relación entre el diámetro d de la Luna y la distancia r a la que está, el cociente r/d puede calcularse con un experimento similar (ver figura 8.3). Es decir, resulta que r/d es un cierto valor que sí puede calcularse, pero la precisión del valor que obtendremos dependerá del cuidado con el cual hagamos las mediciones. Se tiene, aproximadamente,

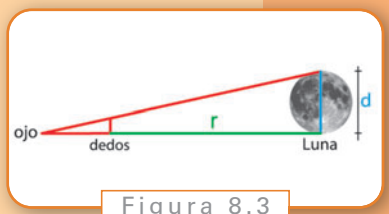

Figura 8.3

$$\frac{r}{d} \approx 110,$$

aunque, con seguridad, si lo intentamos nuestra aproximación será muy pobre. ¡Verifíquelo en una noche de luna llena!

Hay muchas formas de hacer esta medición del cociente r/d. Otra, es determinando el diámetro angular. Veámosla porque emplea una idea que utilizaremos más adelante.

8.2.1. Cálculo del diámetro angular de la Luna

Para calcular el diámetro angular de la Luna necesitamos conocer su velocidad: sabemos que el ciclo lunar tarda 29,5 días. Este tiempo se puede medir entre dos lunas llenas consecutivas, si bien hay que repetir la medición a lo largo de algunos meses para obtener esta aproximación (por ejemplo, si suponemos que el período es de 29 días, veremos que cada dos meses se atrasa un día). Como la Luna da una vuelta completa alrededor de la Tierra en ese tiempo, sabemos que recorre 360°en unas 708 horas. Esto nos permite calcular su velocidad angular:

$$\begin{aligned} velocidad\ angular &= \frac{360^\circ}{708h} \\ &\approx 0,51^\circ/h. \end{aligned}$$

Luego, dado que conocemos la velocidad angular, si podemos calcular cuánto tarda en recorrer su propia distancia, tendremos una estimación de su diámetro angular, ya que conocemos su velocidad angular. Una forma de calcularlo es observar cuando la Luna pasa

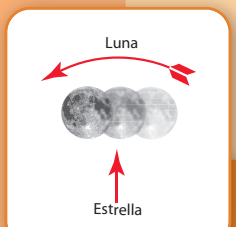

Figura 8.4

Para realizar este cálculo sólo deben determinarse la duración del ciclo lunar, y el tiempo que tarda la Luna en recorrer su propio diámetro. Puede hacerse de otras formas, por ejemplo, el tiempo en que tarda en ocultarse detrás de un edificio, o un árbol.

por delante de una estrella (en una noche de luna llena,), tomando el tiempo que la estrella permanece oculta, y calculando así la distancia angular que recorre; esta distancia angular es igual a su diámetro angular, ver la Figura 8.4.

El tiempo que tarda es prácticamente una hora, apenas un poco más de una hora, con lo cual el diámetro angular es de 0,52°, ó 30'.

Ejercicio 3 **Intentar hacer esa medición en una noche de luna llena, y verifique que el tiempo es de aproximadamente una hora.**

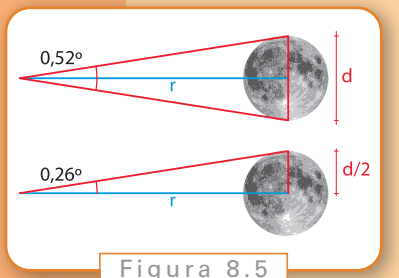

Figura 8.5

Conociendo el diámetro angular, obtenemos la relación entre r y d utilizando un argumento trigonométrico. Observemos los triángulos de la figura 8.5.

El primero es un triángulo isósceles, con la superficie de la Luna como base; el segundo es un triángulo rectángulo que obtenemos bisecando el ángulo, cuyos catetos son r y $d/2$. En definitiva,

$$\begin{aligned} tan(b/2) &= \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \\ &= \frac{d/2}{r} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{r} \end{aligned}$$

Luego, utilizando ahora una calculadora, podemos despejar

$$\begin{aligned} \frac{r}{d} &= \frac{1}{2tan(b/2)} \\ &= \frac{1}{0,009075} \\ &\approx 110. \end{aligned}$$

En definitiva, aunque no podemos medir ni r ni d, sí podemos calcular su cociente r/d (y de dos formas diferentes). Puede parecernos poco este logro, pero observemos que hemos eliminado otra variable de nuestro problema: si sabemos calcular r, tenemos resuelto cuánto vale d (o, a la inversa, si podemos calcular d, averiguamos r). Y, en ambos casos, podemos calcular luego D.

8.2.2. Diámetro angular del Sol

A primera vista, nos puede parecer que podemos repetir el experimento con el Sol y obtener de la misma forma un valor para el cociente *R*/*D*... ¡NO! Si lo intentamos, corremos el riesgo de perder la visión del ojo que dejamos abierto.

No siempre el método que sirve para medir un objeto, conviene para medir otro objeto distinto. Debemos buscar otra manera de obtener información sobre *R* y *D*, sin mirar directamente al Sol, y en este caso, utilizaremos los eclipses de sol. Puede resultar paradójico que para obtener alguna información del tamaño del Sol, utilicemos precisamente el momento en que no está visible.

Si observamos imágenes de eclipses solares (figura 8.6), veremos que la Luna se superpone casi perfectamente sobre el Sol.

Esta situación se puede representar en un diagrama como el de la figura 8.7: y, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{R}{D} \approx \frac{r}{d} \approx 110.$$

En definitiva, también el diámetro angular del Sol es de aproximadamente 30' (ó 0,5°).

Hemos obtenido entonces otra relación, ahora para nuestras incógnitas *R* y *D*: basta conocer una de las dos, y obtenemos la otra. Es la misma relación que hay entre *r* y d, con lo cual alcanza con conocer los radios para saber las distancias (o conocer las distancias para calcular los radios).

Recapitulando, si conociéramos, por ejemplo, la distancia al Sol *R*, obtenemos despejando el diámetro solar

$$D = \frac{R}{109}.$$

Ahora, gracias a que conocemos el ángulo a = 89, 853°, podemos calcular el diámetro lunar,

$$\begin{aligned} d &= cos(89,853) \cdot D \\ &= \frac{cos(89,853) \cdot R}{110}, \end{aligned}$$

Esta superposición no es perfecta, y puede verse un pequeño reborde circular del Sol asomando alrededor de la Luna. Por este motivo, en realidad el cociente R/D es un valor cercano a 109. Pero la diferencia es despreciable a la hora de estimar las distancias y los tamaños que nos interesan.

Figura 8.6

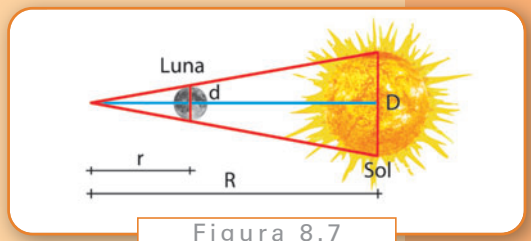

Figura 8.7

y tendríamos también la distancia a la Luna

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= \frac{110 \cdot cos(89,853) \cdot R}{110} \\ &= cos(89,853) \cdot R. \end{aligned}$$

(recordemos que $cos(89{,}853) \approx 1/390$).

Ejercicio 4 | **Verifique que si conoce alguno de los valores D, r o d, también es suficiente para averiguar los restantes.**

Antes de pasar a la siguiente sección, conviene meditar un momento la siguiente cuestión: ¿Qué convendrá intentar averiguar, la distancia al Sol o a la Luna? ¿O tal vez el diámetro del Sol, o el de la Luna? Y, cualquiera sea la respuesta que elija, ¿Cómo podría intentar calcularlos?

8.3. La sombra de la Tierra

Respondamos ahora las preguntas que dejamos al final de la sección anterior: podemos calcular un valor cualquiera de lo que nos interesa, ya sean los diámetros o las distancias, sean del Sol o la Luna. Para cualquiera de los dos, debemos considerar la sombra que proyecta la Tierra. Hay un argumento muy ingenioso que permite calcular el diámetro lunar de manera sencilla, y luego obtener de éste la distancia. Vamos a describir las dos formas de hacerlo, porque son de gran interés histórico.

Una, fue ideada por Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.); la otra, por Hiparco (190 - 120 a.C.).

En ambos casos, el truco para obtener más información es pensar en un eclipse lunar. Esencialmente, en este caso es la Tierra la que se interpone entre la Luna y el Sol, con lo cual la Luna queda fuera de nuestra vista durante cierto tiempo. Ahora podemos hacer un nuevo argumento de semejanza de triángulos, con el cual despejar el diámetro lunar en función del diámetro terrestre.

8.3.1. El argumento de Aristarco

La idea de Aristarco es sencilla, y depende de estimar el tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras de la Tierra durante un eclipse, prácticamente la misma idea que utilizamos para calcular el diámetro angular de la Luna.

Durante un eclipse de Luna, la Tierra proyecta un cono de sombras, y entre el momento en el cual comienza a entrar la Luna y el momento que sale, pasan poco más de tres horas y media. En la figura 8.8 hemos representado además la distancia x, que sumada

a r nos da la longitud total del cono de sombras terrestre. Hemos indicado también la distancia y que recorre la Luna durante el eclipse:

Si bien no conocemos x, sabemos que, aproximadamente, $y = 2{,}6\,d$ ya que cada hora la Luna recorre una distancia igual a su diámetro angular y tarda 3,6 h en atravesarlo.

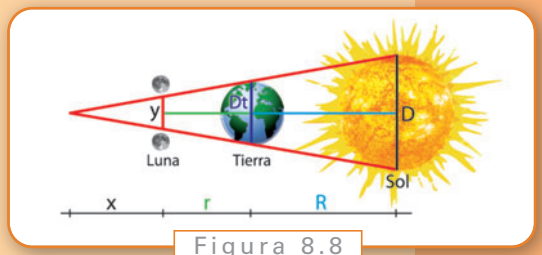

Figura 8.8

Podríamos preguntarnos por qué esta distancia es 2,6d y no 3,6d, si tarda en realidad 3,6 h. La respuesta está en cómo estamos midiendo la duración del eclipse: desde que la Luna entra en el cono de sombras, hasta que sale completamente. El punto del borde que ingresa primero en las sombras tarda 2,6 horas en salir, pero debe transcurrir una hora más hasta que el resto de la Luna sale de las sombras.

Por semejanza de triángulos, tenemos tres relaciones entre estas longitudes:

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{Dt}{x+r} = \frac{D}{x+r+R}$$

Antes de despejar, recordemos que

$$\begin{aligned} D &= 390d \\ R &= 110D \\ R &= 110 \cdot 390d \\ R &= 42.900d \\ r &= 110d, \end{aligned}$$

y que el radio terrestre es de 6.378 km, con lo cual el diámetro es Dt = 12.756 km. Reemplacemos para eliminar r y las variables que dependen del Sol (podríamos haber eliminado tres cualesquiera sin dificultades):

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{12.756}{x+110d} = \frac{390d}{x+110d+42.900d}$$

Por comodidad, omitiremos las unidades durante la cuenta. Igualando la primera y la tercera,

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{390d}{x+43.010d}$$

despejamos el valor de x:

$$\begin{aligned}
(2,6d)(x+43.010d) &= 390dx \\
2,6dx+111.826d^2 &= 390dx \\
2,6x+111.826d &= 390x \\
387,4x &= 111.826 \\
x &= 288,6d
\end{aligned}$$

Ahora, igualando las dos primeras expresiones, tras reemplazar x,

$$\begin{aligned}
\frac{2,6d}{288,6d} &= \frac{12.756}{288,6d+110d} \\
\frac{2,6}{288,6} &= \frac{12.756}{398,6d} \\
2,6 \quad 398,6d &= 12.756 \quad 288,6 \\
d &= \frac{12.756 \cdot 288,6}{2,6 \cdot 398,6} \\
d &= 3552,2...
\end{aligned}$$

Conociendo d, calculamos los otros valores:

$$\begin{aligned}
D &= 390 \cdot d \\
&= 1.385.358 \ km \\
r &= 110 \cdot d \\
&= 390.742 \ km \\
R &= 110 \cdot D \\
&= 152.389.380 \ km
\end{aligned}$$

8.3.2. El argumento de Hiparco

Un siglo después de la medición de Aristarco (que dio valores muy inferiores a los reales, dado que su error en la medición de a lo llevó a la relación $D = 20d$), Hiparco dio un argumento diferente para calcular el tamaño de la Luna, también aprovechando un eclipse. Veremos que su idea es mucho más geométrica.

Figura 8.9

La clave aquí fue considerar la sombra que hace la Tierra sobre la Luna, observe la figura 8.9.

Puede resultar difícil de creer, pero esa imagen alcanza para estimar el radio lunar en función del radio terrestre gráficamente, como se indica en la figura 8.10.

Trazando dos cuerdas en el borde de cada círculo (en el borde de la Luna, y en el contorno de la sombra de la Tierra), podemos determinar el centro de cada círculo (ver el final del capítulo 3). Midiendo ambas distancias, podemos ver que el radio de la sombra terrestre es 3, 7 veces mayor que el radio de la imagen que vemos de la Luna.

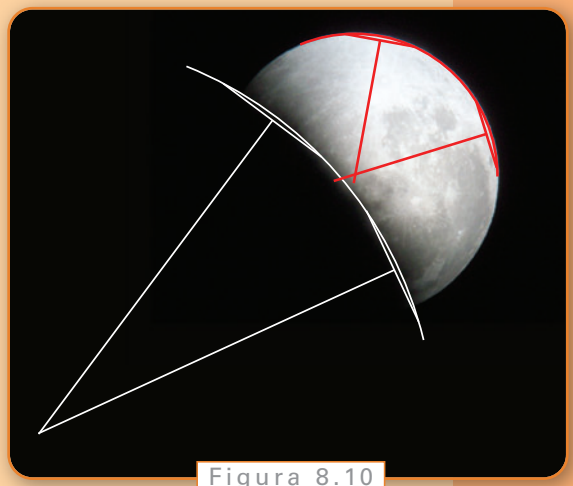

Figura 8.10

Ahora, dado que las proyecciones mantienen las proporciones de las imágenes entre ellas, el radio terrestre será 3, 7 veces el radio lunar, y la misma proporción se mantiene para los diámetros:

$$Dt = 3,7d,$$

con lo cual, dado que conocemos el diámetro terrestre, obtenemos

$$\begin{aligned} d &= \frac{12.756}{3,7} \\ &= 3447,5... \end{aligned}$$

que es un valor cercano al que obtuvimos antes, y mucho más exacto. Con este valor, obtenemos

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= 379.225 \\ D &= 390 \cdot d \\ &= 1.344.525 \\ R &= 110 \cdot D \\ &= 147.897.750 \end{aligned}$$

8.4. Comentarios finales

Con herramientas geométricas elementales hemos calculado el radio lunar: sólo utilizamos el gráfico de la sombra terrestre sobre la Luna.

Para calcular la distancia a la Luna es suficiente armar un triángulo semejante, "atrapando" la Luna entre dos dedos y midiendo la separación de los mismos y la distancia de la mano a nuestra cara. O, mejor aún, medimos el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra, y el que tarda en atravesar un punto fijo para calcular su diámetro angular. Conociendo el cociente *r*/*d*, y *d*, averiguamos r.

Y también podemos calcular *d* a partir del tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras durante un eclipse lunar.

Para conocer el diámetro solar, sólo necesitamos saber que el Sol y la Luna se ven del mismo tamaño desde la Tierra: para esto utilizamos que en un eclipse solar la Luna oculta casi perfectamente al Sol.

Si somos capaces, además, de medir el ángulo *a* -la separación con que vemos a la Luna y el Sol-, podemos calcular también la distancia al Sol.

Sólo este último paso es difícil de realizar, todos los demás son sencillos y no se necesita más que un reloj y una regla. Vamos a dejar, como problema abierto para discutir, si la distancia al Sol puede averiguarse sin necesidad de conocer este ángulo a. Desde ya, hay que detallar cómo se haría cualquier medición, evitando cualquier procedimiento que requiera mirar en dirección al Sol.

Planteamos, en la introducción, una serie de hipótesis sobre nuestro problema. En especial, asumimos que las órbitas lunar y terrestre eran circulares, con lo cual las distancias *r* y *R* estaban bien definidas como los radios de estas órbitas.

Pero sabemos desde principios del siglo XVII, gracias Kepler, que las órbitas son en realidad elípticas, con lo cual las distancia varía según la época del año. En el caso de la Luna, las distancias en el afelio (el momento en que la Luna está más lejos de la Tierra) y el perihelio (el momento en que está más cerca) son 384.400 km y 363.300 km respectivamente (nuestra aproximación dió 379.225 km). Para el Sol, tenemos 147.100.000 km y 152.100.000 km (obtuvimos 147.897.750). Como puede verse, la aproximación que hemos obtenido es muy buena. Mejorarla, ya no depende de la geometría, sino de la tecnología para mejorar las mediciones.