Solución de los Ejercicios

Capítulo 1

Ejercicio 1
Una distancia de cuatro años-luz es aquella que recorre la luz viajando durante cuatro años. Como La velocidad de la luz es, aproximadamente, 300.000 km/s, tenemos que ver cuántos segundos hay en cuatro años y multiplicarlos por 300.000 km/s. Para averiguar esto, sólo debemos efectuar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \textit{un minuto} &\rightarrow 60s \\ \textit{una hora} &\rightarrow 60\textit{minutos} = 60 \cdot 60.s = 3.600s \\ \textit{un dia} &\rightarrow 24h = 24 \cdot 3.600s \\ \textit{un año} &\rightarrow 365\textit{días} = 365 \cdot 24 \cdot 3.600s \end{aligned}$$

La distancia buscada es de $300.000 \cdot 4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ km = 3{,}78432 \times 10^{13}\ km$.

Ejercicio 2
Una letra N.

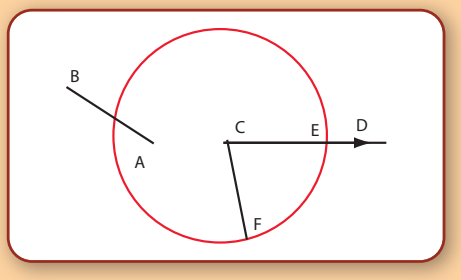
Ejercicio 3
Si los ángulos de la base midieran más de dos rectos, la prolongación de los dos lados del triángulo no podrían cortarse.

Ejercicio 4
Observemos que sólo podemos conectar dos vértices entre sí. Al hacerlo, descomponemos la figura en dos triángulos, y los ángulos interiores de cada uno suman 180°.

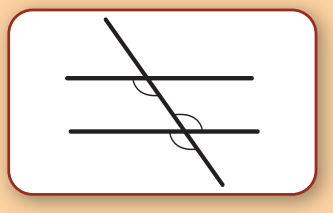
Capítulo 2

Ejercicio 1
Observemos que *DE* es congruente con *DF* por ser radios del círculo centrado en *D*. Como *DA* es congruente a *DC* (es un triángulo equilátero), resultan congruentes *AE* y *CF*. Pero *AB* y *AE* son congruentes, pues son radios del círculo que trazamos con centro en *A*; y por lo tanto, *CF* y *AB* son congruentes.

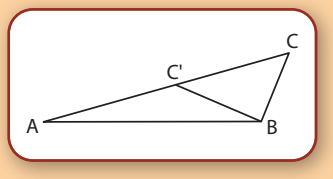
Ejercicio 2
Por la construcción anterior, sabemos que podemos obtener un segmento *CF* congruente al *AB*, no necesariamente en la recta dada. Ahora, con centro en *C* y radio *CF*, trazamos un nuevo círculo, y buscamos su intersección *E* con la recta *CD*. El segmento *CE* es el buscado.



Ejercicio 3
No siempre serán congruentes. En la figura, si las hipotenusas son paralelas, cada cateto forma ángulos congruentes al cortarlas (se deduce de los resultados sobre alternos internos entre paralelas, y para un ángulo externo se utiliza que son opuestos por el vértice, ver la figura: →



Ejercicio 4
No siempre serán congruentes. Observe la siguiente figura, donde los triángulos *ABC* y *ABC* no son congruentes, pero comparten el ángulo en *A*, comparten el lado *AB*, y son congruentes los lados *BC* y *BC* .



Ejercicio 5
La respuesta es que sí, pues si tienen dos ángulos congruentes, el tercero también lo será. Ahora, por los resultados de semejanza de triángulos, ambos son semejantes, pero como tienen un lado congruente, resultan congruentes.

Ejercicio 6
Tracemos dos cuerdas distintas en el arco, y tracemos sus bisectrices. Como ambas pasan por el centro del círculo, éste estará en el punto donde se cortan.

Capítulo 3

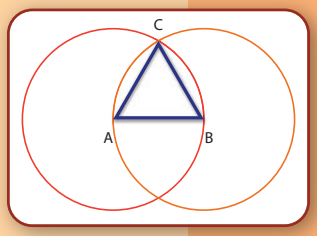
Ejercicio 1
Como *sen*(30°) = 0, 5 y *sen*²(30°) + *cos*²(30°) = 1, debe ser

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2(30°) = 1$$

y, despejando,

$$\begin{aligned} cos(30°) &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2
Sí. La construcción es similar a la que hicimos para obtener un triángulo equilátero. Se toma un punto de la circunferencia, y con éste como centro se traza un nuevo círculo de igual radio que el anterior.



Como el triángulo *ABC* es equilátero, sus tres ángulos son iguales y miden 60°. Repetimos el proceso a partir del punto *B* y obtenemos un nuevo triángulo. Cada triángulo de éstos divide el círculo en seis sectores iguales.

Ejercicio 3
Para resolver este ejercicio recomendamos que: el equivalente a 360° es 2π radianes. Un ángulo llano tiene 180°, equivalentemente, π radianes; y un ángulo recto, $\pi/2$ radianes. Como π es un número irracional, no tenemos una expresión exacta para 1°, que en radianes es

$$1° = 1° \frac{2\pi\, rad}{360°} \approx 0,01745\, rad.$$

A la inversa, podemos expresar en grados a cuanto equivale un radián:

$$1\, rad = 1 rad \frac{360°}{2\pi\, rad} \approx 57,2958°.$$

Entonces, como 1° ≈ 0, 01745 *rad,* tenemos que, en general,

$$x^\circ = x \cdot 1^\circ \approx x \cdot 0,01745\, rad,$$

con lo cual 30° ≈ 0, 5235 *rad* y 45° ≈ 0, 78525 *rad*.

Ejercicio 4
Como 1 *rad* ≈ 57,2958°, tenemos que, en general,

$$y\, rad = y \cdot 1\, rad \approx y \cdot 57,2958^\circ,$$

con lo cual $\pi/3$ *rad* = 60° y 1, 5 *rad* ≈ 85, 9437°.

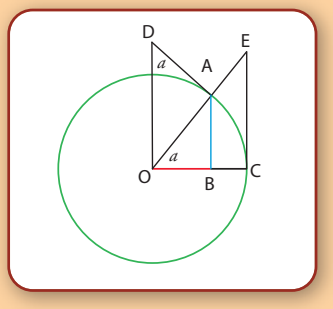
Ejercicio 5
Tenemos

$$cos(a) = \frac{CA}{H} \qquad \text{entonces} \qquad sec(a) = \frac{H}{CA} = \frac{1}{cos(a)}$$

$$sen(a) = \frac{CO}{H} \qquad \text{entonces} \qquad cosec(a) = \frac{H}{CO} = \frac{1}{sen(a)}$$

$$tg(a) = \frac{CO}{CA} \qquad \text{entonces} \qquad cotg(a) = \frac{CA}{CO} = \frac{1}{tg(a)}$$

Ejercicio 6
Representemos en la circunferencia trigonométrica el ángulo *a*, y tenemos 1 = $\overline{OA}$, *cos*(*a*) = $\overline{OB}$, *sen*(*a*) = $\overline{AB}$, y *tg*(*a*) = $\overline{CE}$. Ahora, trazamos la perpendicular a $\overline{OB}$ por el punto *O*, hasta su intersección a la perpendicular a *OA* por el punto *A*, y llamemos *D* a ese punto. Prolonguemos, también, el radio *OA* hasta el punto *E*.



Los triángulos *OCE* y *OAD* son semejantes al triángulo *OAB*, con lo cual se tienen las siguientes

$$\frac{OE}{OC} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a),$$

$$\frac{OD}{OA} = \frac{1}{sen(a)} = cosec(a),$$

$$\frac{OA}{CE} = \frac{cos(a)}{sen(a)}$$
$$= \frac{1}{tg(a)},$$

pues $\overline{OC} = \overline{OA} = 1$.

Ejercicio 7
Observando la figura 3.10, vemos que en el segundo cuadrante se forma un triángulo rectángulo, y uno de sus ángulos mide $\pi - a$. Como su hipotenusa mide 1, y su cateto opuesto mide $y = sen(\pi - a)$, tenemos la primera igualdad. Para la segunda, como $x < 0$, tenemos que el cateto adyacente mide $-x$, con lo cual $cos(a) = -x = -cos(\pi - a)$.

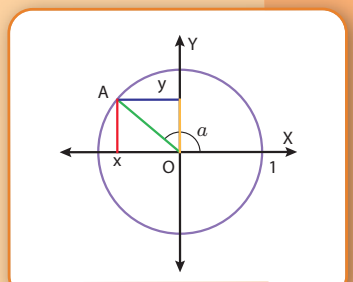


Figura 3.10

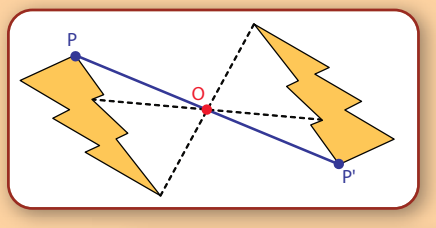
Ejercicio 8
En la figura 3.12 (pág. 57), observemos que

$$\frac{\text{sen}(a)}{x} = \frac{sen(b)}{y},$$

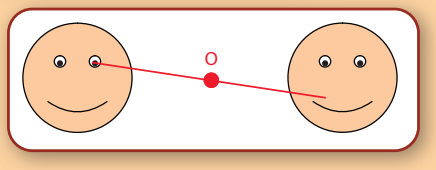
y despejando, se tiene la primer igualdad. La otra se obtiene trazando cada una de las perpendiculares a los otros lados. En el caso en que uno de los ángulos del triángulo sea mayor que un ángulo recto, se resuelve de la misma forma, dibujando la perpendicular hasta la prolongación del lado correspondiente.

Capítulo 4

Ejercicio 1
El punto simétrico es P'. Para encontrarlo, trazamos la recta que paso por P y por O, y buscamos el punto P' tal que PO = OP'.

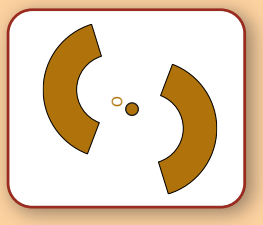


Ejercicio 2
a) Estas figuras no son simétricas con respecto a O. Por ejemplo, vemos que la imagen



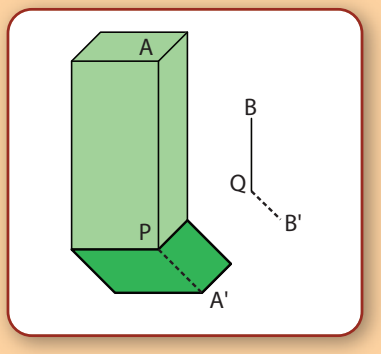
del centro del ojo, no es del centro del ojo de la figura de la izquierda.

b) Estas figuras sí son simétricas.



Ejercicio 7

Para poder calcular la altura, podemos tomar considerar el punto A del edificio y determinar su sombra, siguiendo el contorno de la sombra. La sombra es el punto A'.

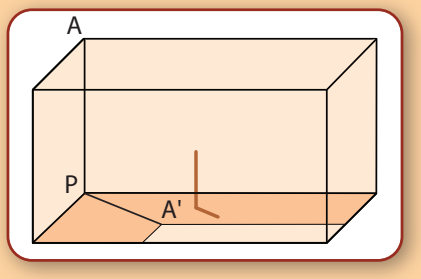


Ahora buscamos cuál es el punto que se encuentra sobre el piso, justo debajo de A. Este punto se llama la "proyección ortogonal" de A sobre el plano del piso, porque el segmento AP es ortogonal (o perpendicular) al plano del piso.

Luego tomamos un poste BQ del que sepamos la altura, medimos la sombra y con estos datos podemos calcular la longitud de AP, que es la altura del edificio.

Ejercicio 8

En este caso, el punto más fácil para calcular la sombra es el punto A.



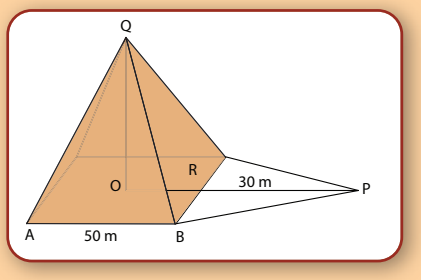
La sombra de A es el punto A' y la proyección de A es el punto P.

Midiendo la longitud de A'P podemos calcular la altura de la pared como antes.

Ejercicio 9

En este caso, no podemos medir la longitud de PO. Pero sabemos que

$$PO = PR + RO.$$



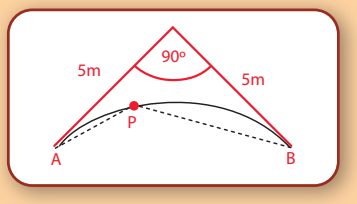
PR podemos medirlo. En este caso mide 30 m.

Para calcular la longitud de RO observamos que,

como O es el centro del cuadrado que forma la base de la pirámide, RO es igual a la mitad de la longitud del lado AB. Por lo tanto RO mide 25m y PO mide 55m. Con ese dato, ya podemos calcular la altura. OQ.

Ejercicio 10

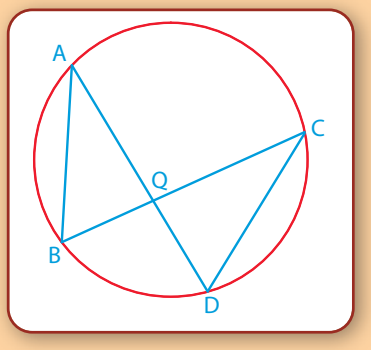
Si el perro está parado en el punto P, podrá ver todo el mural si el ángulo APB es menor o igual que 240º. Por lo tanto, para encontrar la región, trazamos el arco capaz de 240º y desde cualquier punto fuera de la región comprendida entre este arco y las dos paredes, el perro podrá ver todo el mural.



Ejercicio 11

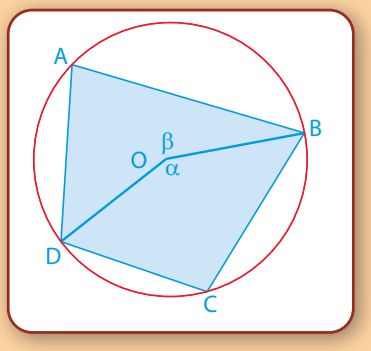
Los ángulos BAD y BCD se encuentran inscriptos en el arco BD. Por lo tanto son congruentes. Análogamente, los arcos ABC y ADC son congruentes.

Concluimos que los triángulos AQB y CQD son semejantes, siendo C el correspondiente de A y D el correspondiente de B.



Ejercicio 12

Como DAB = 80º, α = 2 x 80º = 160º, por ser el ángulo central correspondiente. Luego β = 360º - 160º = 200º. Obtenemos que DCB = 200º / 2 = 100º.



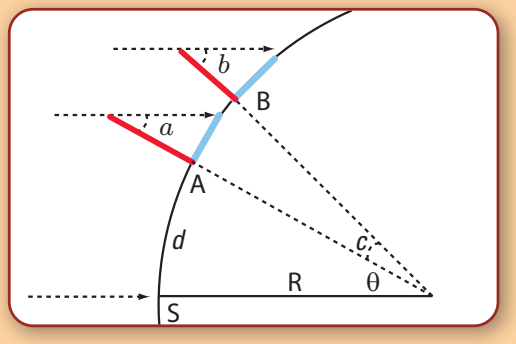
Ejercicio 13

La cuerda que pasa por los puntos donde entró y salió de la circunferencia señala la dirección Este-Oeste. La dirección Norte-Sur es la perpendicular a la cuerda.

Ejercicio 14

Podemos calcular el radio, y no hace falta una fecha especial. Observemos la siguiente figura:

Si A y B son las ciudades, podemos calcular el ángulo c a partir de los ángulos a y b, ya que utilizando el mismo argumento de antes, tenemos que $c = b - a$. Sabiendo la distancia entre A y B, y conociendo el ángulo c, el resto se deduce como antes.



Capítulo 5

Ejercicio 1

Basta recordar que por 3 puntos no alineados del espacio pasa un único plano, mientras hay una cantidad infinita de planos que pasan por una recta dada.

Ejercicio 2

Como el radio terrestre es aproximadamente R = 6.378 km, la distancia entre los dos polos vale $R\pi$ = 20.037 km, y la distancia entre el Polo Norte y una ciudad cualquiera ubicada sobre el Ecuador $R\pi/2$ = 10.019 km.

Ejercicio 3

Llamemos O al centro de la esfera. Sea M' la proyección ortogonal de M sobre el plano xy (el punto donde la recta perpendicular al plano xy que pasa por M corta el plano xy), con lo cual el triángulo OMM' tiene un ángulo recto en M'. Luego, la coordenada z de M, es decir la longitud del lado MM' de este triángulo, es

$$z = MM' = OM \operatorname{sen}\theta$$

$$z = R \operatorname{sen}\theta.$$

Para encontrar x e y introducimos la proyección ortogonal M'' de M' sobre el eje x (el punto donde la recta perpendicular al eje x que pasa por el punto M'' corta al eje x). El triángulo $OM'M''$ es rectángulo en M'', y tenemos

$$x = OM'' \qquad y = M''M'$$

y

$$x = OM' \cos\varphi \qquad y = OM' \operatorname{sen}\varphi.$$

Volviendo al triángulo OMM' vemos que

$$OM' = OM\cos\theta$$

$$= R\cos\theta.$$

Luego,

$$x = R\cos\theta\cos\varphi \quad \text{y} \quad y = R\cos\theta\text{sen}\varphi.$$

Ejercicio 4

Aplicando la fórmula en *AB'C*, triángulo rectángulo en *C*, obtenemos

$$\frac{\text{sen}(\pi - c)}{\text{sen}(\pi - \hat{C})} = \frac{\text{sen}(\pi - a)}{\text{sen}(\pi - \hat{A})},$$

$$\cos(\pi - c) = \cos(\pi - a)\cos(b).$$

Como $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, llegamos a

$$\frac{\text{sen}c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{\text{sen}a}{\text{sen}\hat{A}},$$

$$\cos c = \cos a\cos b = \cos a\cos b + \text{sen}a\text{sen}b\cos\hat{C}.$$

Ejercicio 5

Introduzcamos el punto *A'* antipodal de *A*. Como $d(C,A') = d(A,A') - d(C,A') = \pi - b < \pi/2$ (pues suponemos que $b > \pi/2$), podemos aplicar las relaciones fundamentales en el triángulo *CBA'* rectángulo en *C* de la misma manera que en el ejercicio anterior para obtenerlas en *ABC*.

Ejercicio 6

Lo probaremos primero en el caso $a, b < \pi/2$. Usando las relaciones trigonométricas que probamos al principio, obtenemos

$$\text{sen}b = \frac{ED}{OD}, \quad \text{tg}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a} \qquad \cot\hat{A} = \frac{\cos\hat{A}}{\text{sen}\hat{A}}$$

y

$$\text{tg}a = \frac{BD}{OD}, \qquad \cot\hat{A} = \frac{DE}{BD}.$$

Luego

$$\text{sen}b = \frac{ED}{OD} = \frac{BD}{OD}\frac{DE}{BD}$$

$$\text{sen}b = \text{tg}a\cot\hat{A}.$$

Después extendemos este resultado al caso a, $b > \pi/2$ de la misma manera que en los dos ejercicios anteriores usando $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ y $\cos(\pi - x) = -\cos x$ que implican $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ y $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

Ejercicio 7

Como suponemos a, b y c chicos podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos(b) \approx 1 - \frac{b^2}{2}, \quad \cos(c) \approx 1 - \frac{c^2}{2},$$

y

$$\operatorname{sen}(b) \approx b, \quad \operatorname{sen}(c) \approx c.$$

Entonces podemos reescribir la primera relación fundamental

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(\hat{A})$$

como

$$1 - \frac{a^2}{2} \approx \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos(\hat{A}).$$

Simplificamos y obtenemos

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) - \frac{b^2c^2}{2}.$$

Como b^2c^2 es mucho más chico que b^2, c^2 y bc, lo podemos olvidar y nos queda

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

por a, b y c chicos.

Ejercicio 8

Según el teorema,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = \frac{\acute{a}rea(ABC)}{R^2}.$$

A medida que el radio R de la esfera aumenta, el miembro de derecha se acerca más y más a 0. Luego si consideramos el plano como una esfera de radio infinito obtenemos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 0.$$

Ejercicio 9

Llamemos A_1, A_2, ..., A_n los n vertices de P_n (recorridos en el sentido de las agujas del reloj), y consideremos los $n-2$ triángulos $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$. El área de P_n es la suma de las áreas de estos triángulos. Haciendo la suma

$$\begin{aligned}
area(A_1A_2A_3) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 - \pi)R^2 \\
+area(A_1A_3A_4) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 - \pi)R^2 \\
+area(A_1A_4A_5) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{A}_5 - \pi)R^2 \\
+\dots & \\
+area(A_1A_{n-1}A_n) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_{n-1} + \hat{A}_n - \pi)R^2
\end{aligned}$$

(ojo que el $\hat{A}_1$ de la 1era línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_2A_3$, mientras el $\hat{A}_1$ de la 2nda línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_3A_4$ ..., y que la suma de todos estos $\hat{A}_1$ da el $\hat{A}_1$ de P_n - idem por $\hat{A}_2$,. . . ,$\hat{A}_n$), obtenemos

$$\begin{aligned}
area(P_n) &= area(A_1A_2A_3) + \cdots + area(A_1A_{n-1}A_n) \\
&= (\hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n - (n-2)\pi)R^2.
\end{aligned}$$

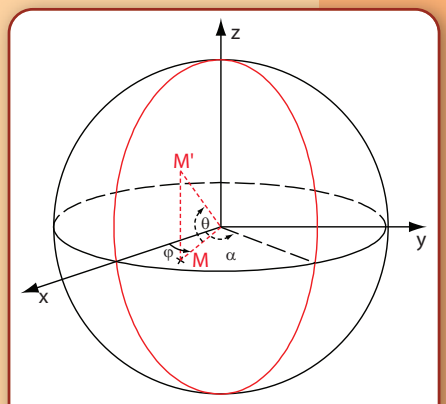
Ejercicio 10

Sea una luna cualquiera de ángulo α. Para describirla en coordenadas polares consideremos la figura 1. Vemos que la luna es el conjunto

$$\left\{(\theta, \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \alpha\right\}.$$

Luego su área vale

$$\begin{aligned}
R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\alpha} \cos\theta \, d\theta d\varphi &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \\
&= 2R^2\alpha.
\end{aligned}$$



La luna en rojo se describe en coordenadas polares como $\{(\theta, \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \alpha\}$.

Ejercicio 11

Por construcción la imagen de una arista es la intersección con la esfera del único plano que pasa por el centro de la esfera y esta arista. Recordando que por definición un círculo máximo es la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera, obtenemos que la imagen de una arista es una porción de círculo máximo.

Ejercicio 12
Sabemos que la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero vale 2π (lo probamos como consecuencia de que la suma de los ángulos de un triángulo vale π). Usando esto en el cuadrilátero formado por las cuatro rectas obtenemos

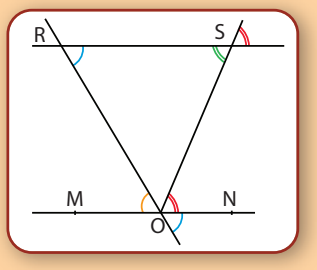
$$\hat{A} + (\pi - \hat{A}) + x + (\pi - \hat{B}) = 2\pi.$$

Simplificando llegamos a $x = \hat{B}$.

Ejercicio 13
Consideremos un triángulo plano ORS cualquiera y la recta (MN) definida como el transporte paralelo de (RS) a lo largo de (OR) (ver figura 2). Por definición del transporte paralelo tenemos $\widehat{MOR} = \widehat{ORS}$. Por hipotesis tenemos también $\widehat{NOS} = \widehat{OSR}$. Luego

$$\begin{aligned}\widehat{ORS} + \widehat{ROS} + \widehat{RSO} &= \widehat{MOR} + \widehat{ROS} + \widehat{SON}\\ &= \widehat{MON}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ejercicio 14
Examinando los vertices C y B vemos que



$$u + u' + \hat{C} = \pi \quad \text{y} \quad u'' - u' + \hat{B} = \pi$$

es decir

$$u = \pi - u' - \hat{C} \quad \text{y} \quad u'' = \pi - \hat{B} + u'.$$

Luego

$$\begin{aligned}H &= \pi - u'' + \hat{A} - u\\ &= \pi - (\pi - \hat{B} + u') + \hat{A} - (\pi - u' - \hat{C})\\ &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.\end{aligned}$$

Ejercicio 15
Llamemos M'' a la proyección ortogonal de M sobre el plano xy y O el centro de la esfera. Si conociéramos OM'' tendríamos resuelto el ejercicio pues

$$x = OM'' \cos\varphi \quad \text{y} \quad y = OM'' \text{sen}\varphi.$$

Busquemos entonces *OM"*. Como la recta (*MM"*) es paralela a la recta (*ON*) podemos aplicar el teorema de Thales en el triángulo *ONM'* para obtener

$$\frac{MM''}{ON} = \frac{M''M'}{OM'}.$$

Como

$$ON = R,$$

$$MM'' = \text{ coordenada z de M } = R\text{sen}\theta,$$

$$M''M' = OM' - OM'' = OM' - R\cos\theta.$$

tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{OM' - R\cos\theta}{OM'}$$

i.e.

$$OM' - R\cos\theta = OM'\text{sen}\theta \Leftrightarrow OM'(1 - \text{sen}\theta) = R\cos\theta.$$

Como habíamos supuesto que $M \neq N$, es decir, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, tenemos $(1 - \text{sen}\theta) \neq 0$ y luego podemos dividir en la última igualdad por $(1 - \text{sen}\theta)$. Obtenemos así

$$OM' = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)}.$$

Finalmente,

$$x = OM'' \cos\varphi = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)} \cos\varphi$$

$$y = OM''\text{sen}\varphi = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)}\text{sen}\varphi.$$

Ejercicio 16

Examinando la figura 5.33 (ver pág. 100) vemos que la imagen por la proyección estereográfica de un meridiano (respectivamente, de un paralelo) es una recta pasando por el origen (resp., un círculo centrado en el origen) en el plano *xy*. Vamos a probarlo analíticamente usando el resultado del ejercicio anterior.

Una mitad de meridiano está formado por los puntos de coordenada φ constante, es decir, es un conjunto de la forma $\left\{(\theta,\varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi = \varphi_0\right\}$ por algún $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ (la otra mitad tiene por ecuación $\varphi = \varphi_0 + \pi$). Luego si $\cos\varphi_0 \neq 0$,

$$y = \frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)}\operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)}\cos\varphi_0\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0}x.$$

Esta ecuación es la ecuación de una recta que pasa por el origen pues es de la forma $y = ax$ con $a = \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0}$. Si $\varphi_0 = 0$ i.e. $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ entonces

$$x = \frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)}\cos\varphi_0 = 0,$$

y

$$y = \frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)}\operatorname{sen}\varphi_0 = \pm\frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)},$$

con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Como la función $f(\theta) = \frac{R\cos\theta}{(1-\operatorname{sen}\theta)}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, es continua y creciente (pues $f(\theta) = \frac{R}{1-\operatorname{sen}\theta} > 0$), $f(-\pi/2) = 0$, $\lim_{\theta\to\pi/2} f(\theta) = +\infty$, es una biyección de $[-\pi/2, \pi/2)$ sobre $[0,+\infty)$. Luego, la imagen de una mitad de meridiano con $\cos\varphi_0 = 0$ es la parte positiva (respectivamente, negativa) del eje y si $\varphi_0 = \pi/2$ (respectivamente, si $\varphi_0 = -\pi/2$), y la imagen del meridiano completo es todo el eje y.

Probamos ahora que la imagen de un paralelo es un círculo centrado en el origen, es decir, un conjunto de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $r > 0$ (el radio del círculo).

Un paralelo tiene por ecuación $\theta = \theta_0$ por algún θ_0 $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Luego,

$$\begin{aligned} x &= \frac{R\cos\theta_0}{(1-\operatorname{sen}\theta_0)}\cos\varphi \\ &= r\cos\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{R\cos\theta_0}{(1-\operatorname{sen}\theta_0)}\operatorname{sen}\varphi \\ &= r\operatorname{sen}\varphi, \end{aligned}$$

donde $\frac{R\cos\theta_0}{(1-\operatorname{sen}\theta_0}$ es una constante que depende de θ_0, y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Entonces,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Luego, la imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el círculo centrado en el origen de radio $r = \frac{R\cos\theta_0}{(1-\operatorname{sen}\theta_0} = f(\theta_0)$. Como la función f es creciente con $f(-\pi/2) = 0$ y $\lim f(\theta)_{\theta\to\pi/2} = +\infty$,

el radio del círculo crece desde 0 cuando $\theta_0 = -\pi/2$ (el círculo en este caso se reduce al polo sur de la esfera) y va tomando valores más y más grandes a medida que θ_0 se acerca a $\pi/2$.

Ejercicio 17

La coordenada y de M' se encuentra de la misma manera que la coordenada z de las coordenadas esféricas. La coordenada x es por definición la longitud de un arco de círculo de radio R y ángulo φ. Como medimos los ángulos en radianes, obtenemos $x = R\varphi$.

Ejercicio 18

La imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el segmento horizontal

$$-R\pi \leq x \leq R\pi, \quad y = Cste$$
$$= R\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right).$$

La imagen del meridiano de ecuación $\varphi = \varphi_0$ es la recta vertical

$$x = R\varphi_0$$

pues cuando θ recorre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $y = R \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ recorre todo $\mathbb{R}$.

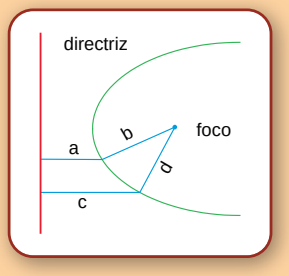
Ejercicio 19

Si el bote hace un ángulo constante con los meridianos, entonces su recorrido sobre una mapa obtenida con la proyección de Mercator hace también un ángulo constante con las rectas verticales (pues la proyección de Mercator conserva los ángulos por construcción y la imagen de un meridiano es una recta vertical como ya vimos). Entonces, el recorrido es una recta pues en ningún momento cambia la dirección de su movimiento.

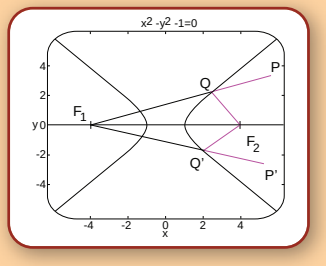
Capítulo 6

Ejercicio 1

a) La parábola se define como el conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo (foco) es igual a la distancia a una recta fija (directriz). En el gráfico, las distancias a y b son iguales entre sí; lo mismo que las distancias c y d.



La hipérbola se define como el conjunto de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.



Antes de pasar a las expresiones analíticas de estas cónicas veamos una de las aplicaciones inmediatas de estas definiciones: una variante del método del jardinero para el trazado de una hipérbola.

Se necesitan una regla, un hilo y un lápiz. La regla se apoya sobre el papel con un extremo fijo al mismo. El hilo también está fijo al papel y al otro extremo de la regla. Para dibujar una hipérbola basta con sostener el hilo tenso contra la regla con el lápiz y hacer girar la regla. En la figura, nuestra regla estaría representada en dos posiciones P y P' (con el extremo fijo en F_1), el lápiz estaría en Q y Q' respectivamente y el hilo recorrería el camino magenta en ambos casos.

O sea que los puntos P y P' se encuentran a la misma distancia de F_1 ya que la regla tiene una longitud fija y tenemos:

$$PF_1-QF_1=QP \qquad \text{y} \qquad P'F_1-Q'F_1=Q'P'$$

Entonces

$$PF_1 = QP + QF_1 \qquad \text{y} \qquad P'F_1 = Q'P' + Q'F_1$$

$$QP+QF_1 = Q'P'+Q'F_1$$

$$QF_1 = Q'P'-QP+Q'F_1$$

Si Q y Q' están en una hipérbola entonces se tiene que cumplir que:

$$QF_1- QF_2 = Q'F_1- Q'F_2 = \text{constante}$$

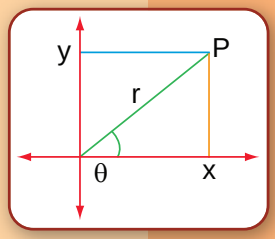
Pero esto vale porque

$$QF_2 = PF_2-QP \qquad \text{y} \qquad Q'F_2 = P'F_2-Q'P'$$

$$\begin{aligned} QF_1 - QF_2 &= Q'P'-QP+Q'F_1 - QF_2 \\ &= Q'P'-QP+Q'F_1-(PF_2-QP) \\ &= Q'P' + (P'F_1 - Q'P') - PF_2 \\ &= Q'F_1- Q'F_2 \end{aligned}$$

Como queríamos ver.

b) Dado un punto en el plano, las coordenadas polares r, θ representan su distancia al origen y el ángulo que forman con el eje de abscisas.

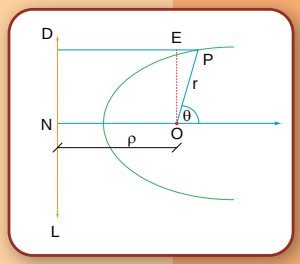


Se cumplen entonces las relaciones:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que nos servirán para pasar las expresiones que obtengamos en coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuación para la parábola:



Sea P un punto de la parábola de coordenadas r y θ, por lo tanto cumple que las distancias OP y PD son iguales.

Del gráfico obtenemos que

$$PD = PE + ED$$

O sea, usando las coordenadas polares

$$r = r\cos\theta + \rho$$

Despejando queda

$$r\,(1 - \cos\theta) = \rho$$
$$r = \frac{\rho}{1-\cos\theta}$$

Esta es la relación que cumplen r y θ cuando describen puntos que pertenecen a una parábola.

En general, se tiene la ecuación general de una cónica es

$$r = \frac{\rho}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

Donde ε se dice la excentricidad de la cónica. Existen variaciones sobre esta ecuación que corresponden a la orientación de la figura.

Esto corresponde a una forma más general aún de definir a las cónicas de una forma métrica.

Dada una recta directriz L y un foco F una cónica es el conjunto de puntos P que cumplen la relación

$$PF = \varepsilon\, PL$$

Donde PD representa la distancia de P a la recta L

Si $\varepsilon>1$ se define una hipérbola; si $\varepsilon=1$, es el caso de la parábola ya visto y si $0<\varepsilon<1$ se obtiene una elipse.

Veamos ahora que forma toma esta ecuación general en coordenadas cartesianas

Para eso notemos que

$$\cos\theta = x/r$$

Reemplazando

$$r = \frac{\rho}{1-\varepsilon\frac{x}{r}} = \frac{r\ \rho}{r-\varepsilon x}$$

Entonces, cancelando r y despejando queda

$$r-\varepsilon x = \rho$$
$$r = \rho+\varepsilon x$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$r^2 = (\rho+\varepsilon x)^2$$

Usando Pitágoras tenemos

$$r^2 = y^2 + x^2$$

Por lo tanto, nuestra ecuación queda

$$y^2 + x^2 = (\rho+\varepsilon x)^2$$

$$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 - 2\rho\varepsilon x - \rho^2 = 0$$

como queríamos ver.

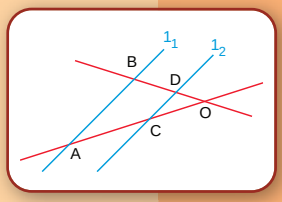
Ejercicio 2

La propiedad que queremos demostrar en realidad se trata de una reformulación del teorema de Thales y su recíproco.

Teorema de Thales

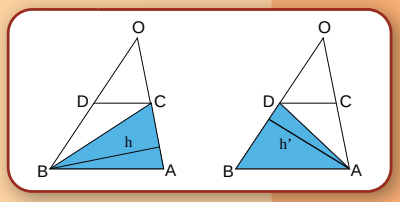
Si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{OC}{CA}$ entonces,

lo que además estamos asegurando es que vale la vuelta.



Para demostrar todo esto vamos a mirar los triángulos AOB y COD.

Dentro del triángulo AOB consideramos los triángulos BCA y BDA; dado que tienen la misma altura y base, su área es la misma. Por lo tanto, las áreas restantes que corresponden a los triángulos BOC y DOA también son iguales.



Entonces

$$\frac{AC.h}{2} = \frac{DB.h'}{2} \qquad \frac{OC.h}{2} = \frac{OD.h'}{2}$$

Dividiendo queda

$$\frac{\dfrac{OD.h'}{2}}{\dfrac{DB.h'}{2}} = \frac{\dfrac{OC.h}{2}}{\dfrac{AC.h}{2}}$$

O sea

$$\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$$

Recíprocamente, si vale la relación entre segmentos llegamos a la conclusión de que las áreas amarillas deben ser iguales y por lo tanto las rectas l_1 y l_2 paralelas.

Para pasar al enunciado de nuestra propiedad usamos que

$$OC + AC = OA \qquad OD + BD = OB$$

O sea

$$OC = OA - AC \qquad OD = OB - BD$$

Entonces, como vale Thales tenemos

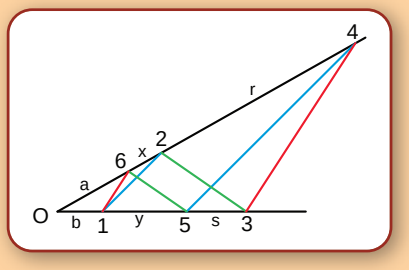
$$\frac{OC}{AC} = \frac{OA-AC}{AC} = \frac{OA}{AC} - 1 = \frac{OB}{BD} - 1 = \frac{OB-BD}{BD} = \frac{OD}{BD}$$

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

Y vale nuestra propiedad

Ejercicio 3

Como hicimos en la demostración del teorema de Desargues, podemos suponer que los puntos P y Q son ideales y, por lo tanto, basta con ver que R también es un punto ideal.



Como P y Q están en el infinito, las rectas 2-3 y 5-6 (en verde) son paralelas, así como las 1-2 y 4-5 (en azul). Veamos que también los son las rectas 1-6 y 3-4(en magenta).

Volveremos a usar la misma propiedad sobre paralelas que en el teorema de Desargues.

Sean a, b, x, y, r y s las distancias entre O y 6, O y 1, 6 y 2, 1 y 5, 2 y 4 y 5 y 3 respectivamente.

Entonces se cumple que

$$\frac{a}{a+x} = \frac{b+y}{b+y+s} \qquad \frac{b}{b+y} = \frac{a+x}{a+x+r}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y operamos queda

$$\frac{a}{a+x+r} = \frac{b}{b+y+s}$$

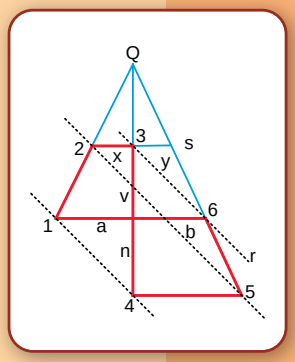
Y de vuelta, esto nos dice que 16 y 34 son rectas paralelas.

Ejercicio 4

En este caso queremos ver que tres rectas pasan por un punto, el caso más sencillo de demostrar es cuando ese punto es ideal. O sea las tres rectas serán paralelas.

Tomemos dos de esas rectas, se intersecan en algún punto. Mandemos ese punto y el punto P al infinito, entonces tendremos dos rectas paralelas. Para ver que la tercer recta es concurrente con las otras dos basta con probar que es paralela a alguna de ellas.

Como dijimos, podemos considerar P y en el infinito y que las rectas 1-4 y 3-6, por ejemplo, son paralelas.



Como 1-4 y 5-6 son paralelas tenemos $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$

Pero como además consideramos a P en el infinito nos quedaron paralelas 2-3, 1-6 y 4-5, entonces tenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{u}{v} = \frac{r}{s}$$

Y por lo tanto

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$$

Con lo que las rectas 2-5 y 3-6 son paralelas, como queríamos ver.

Capítulo 7

Ejercicio 1

En esta sección resolveremos, paso por paso, el ejercicio propuesto al final del capítulo. Según mencionamos, al tratarse de un poliedro simple entre cuyas caras no hay triángulos o cuadriláteros, vale $C_3 = C_4 = 0$, y en consecuencia la fórmula que resulta ahora es:

$$5C_5 + 6C_6 + \ldots + NC_n = 2A.$$

Por otro lado, dijimos que todos los vértices son tríadas y entonces

$$3V = 3V_3 = 2A.$$

Siguiendo la sugerencia, vamos a escribir la fórmula de Euler-Descartes como $14C - 4A + 14V - 10A = 28$, vale decir:

$$14C_5 + 14C_6 + \ldots + 14C_n - 2 \cdot (5C_5 + 6C_6 + \ldots + NC_n) + 14V - 5 \cdot 3V = 28.$$

Reagrupando los términos, se obtiene:

$$(14 - 10)C_5 + (14 - 12)C_6 + (14 - 14)C_7 + \ldots (14 - 2N)C_n = 28 + V,$$

de donde resulta

$$4C_5 + 2C_6 \geq 28 + V.$$

Ahora podemos imaginar que a cada ángulo de cada cara del poliedro le asignamos un valor fijo, por ejemplo 1. De esta forma, la suma total de los valores de todos los ángulos es $3V$, pues en cada vértice concurren exactamente tres aristas (y en consecuencia, se forman exactamente tres ángulos).

Supongamos ahora que no hay dos pentágonos contiguos: en tal caso, la cantidad de vértices que pertenecen a una cara pentagonal es $5C_5$, pues no hay vértices "repetidos". Esto dice que dichos vértices aportan, a la suma total, un valor igual a tres veces la cantidad $5C_5$, es decir: $15C_5$. Si además ningún hexágono toca a un pentágono, entonces cada uno de los ángulos de las caras hexagonales aporta por lo menos 1 a la suma total, con lo que resulta

$$3V \geq 15C_5 + 6C_6 \geq 3(4C_5 + 2C_6) \geq 3(V + 28) > 3V,$$

lo que es absurdo. Esto prueba que alguna de las dos suposiciones que hicimos es falsa: en otras palabras, o bien hay pentágonos contiguos, o bien algún hexágono toca a algún pentágono.

Capítulo 8

Ejercicio 1
Calcule $1/cos(87°)$, y $1/cos(89,853°)$. ¿Son muy diferentes?

Utilizando una calculadora tenemos $cos(87°) = 0{,}0523$, $cos(89,853°) = 0{,}0025$. Por lo tanto, $1/cos(87°) = 19{,}1$, y $1/cos(89,853°) = 389,8$.

Ejercicio 4
Recordemos las relaciones que hemos obtenido:

$$\begin{array}{ll} (i) & D = 390 \cdot d \\ (ii) & r = 110 \cdot d \\ (iii) & R = 110 \cdot D \end{array}$$

Supongamos que conocemos D. Utilizando la ecuación (i), averiguamos r; ahora, gracias a (ii), averiguamos r; finalmente, utilizando (iii), calcularmos R.

Si conocemos r, la ecuación (ii) nos permite averiguar d; conociendo d, averiguamos D con (i), y finalmente, como averiguamos D, despejamos R de (iii).

Por último, si conocemos R, con la ecuación (iii) calculamos D; reemplazamos D en (i) y tenemos d, y finalmente, con la ecuación (ii) calculamos r.