Capítulo 6

Geometría proyectiva

Inés Saltiva

6.1. Introducción

Observemos las dos mesas de la Figura 6.1

Y veamos la figura 6.2 ¿Qué ocurre si se la mira desde el borde derecho de la página?

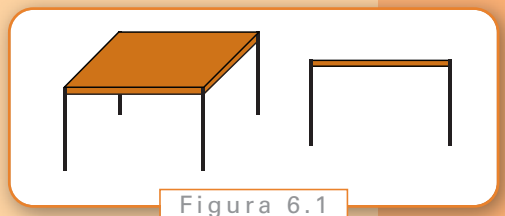


Figura 6.1

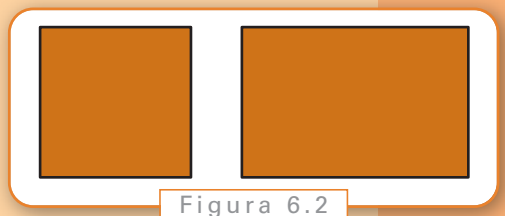


Figura 6.2

Dentro de estos ejemplos hay mucha geometría escondida y, para encontrarla, tenemos que remontarnos al siglo XV, a la época del Renacimiento y, en lugar de buscar entre los matemáticos de esa época, hacerlo entre los pintores. Esto no suena tan raro, dado que los ejemplos se tratan de dibujos y de su interpretación.

Uno de los cambios que se produce en la pintura del Renacimento es el estudio de la perspectiva, y uno de sus precursores fue Giotto di Bondone. Él marcó un nuevo rumbo en la búsqueda de realismo y sensación de profundidad. Lo siguió Filippo Brunelleschi, que logró encontrar leyes geométricas para la perspectiva. No escribió ningún tratado sobre el tema, sino que mostró su sistema en la práctica. Pintó dos paneles que representaban dos plazas de Florencia usando su técnica. Para aumentar la sensación de realismo, pintó el cielo de uno de sus paneles con plata, de manera que el cielo real se reflejara, y entonces se podía ver cómo las nubes corrían empujadas por el viento sobre la perfecta composición de edificios pintados.

Hubo varios artistas impresionados por las obras de Brunelleschi. Los primeros en trabajar usando perspectivas geométricas fueron Masaccio, Fra Angélico y Paolo Ucello. Sin embargo, sería León Battista Alberti quien por primera vez dejaría por escrito esas reglas. Nacido en 1404 en Roma, fue arquitecto, matemático, poeta, filósofo, músico y arqueólogo. Entre otras obras, publicó "De Pictura" en 1436, donde escribió la primera definición científica de perspectiva, que puede analizarse de la siguiente manera.

Supongamos que miramos una nube a través de una ventana. El ojo recibe los rayos luminosos que salen de cada punto del objeto, y con estos rayos forma la imagen que recibe el cerebro. Ahora, para cada uno de esos rayos marquemos el lugar donde cruza la ventana;

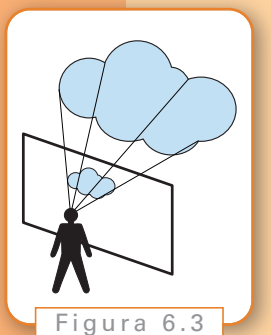


Figura 6.3

cuando la nube se haya ido, todavía podremos "verla" en la ventana (ver la figura 6.3) . Es muy importante no cambiar de posición durante todo el proceso.

A los rayos que usamos para dibujar en el vidrio se los llama *proyección,* y al conjunto de los puntos que quedaron marcados en la ventana, y que forman el dibujo de la nube, se lo llama *sección*.

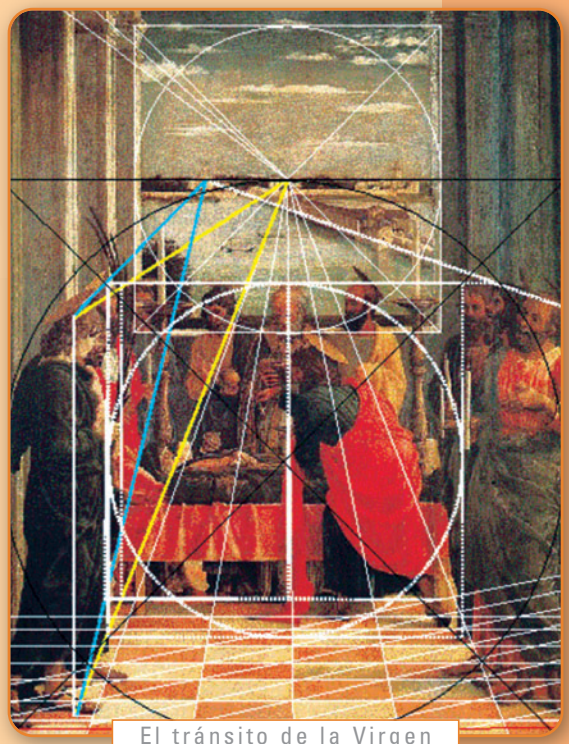
El problema era, en ese entonces, cómo se debía pintar un objeto para que pareciera estar "más allá" de la tela. Piero della Francesca, Andrea Mantegna y más tarde Alberto Durero se suman a la búsqueda de esa técnica. Pero, para esa época, el estudio de las proporciones ya no estaba restringido sólo a los pintores y artistas. En 1509 Luca Pacioli publica "De Divina Proportione", un libro con ilustraciones de Leonardo da Vinci que trata sobre la proporción áurea y la perspectiva, entre otros temas geométricos. Gracias a esta obra, Durero se interesa por la matemática en relación con el arte, con lo que empieza un estudio de la misma que no abandonó en su vida y que marcó una profunda influencia en sus obras.

La evolución de la perspectiva en la pintura se puede observar a partir de los cuadros de distintos artistas renacentistas. Hemos elegido algunas que muestran esta evolución, en los cuales se observa gradualmente cómo mejora la técnica para dotar de profundidad a la pintura, y cómo varían las proporciones a la distancia. Primero, en *La última cena* (1302/05) de Giotto di Bondone, se observa una noción de perspectiva muy básica, y alejada de la que asociamos al cuadro de igual nombre de Da Vinci, pintada casi doscientos años después. Por otra parte, en *El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres*, de 1437, se observan ya nociones más precisas, si bien no siempre se mantienen paralelas líneas que deberían serlo. En *El Tributo* de Masaccio (iniciado por Massolino en 1424, terminado en 1480 por Lippi) se observa claramente el uso de la perspectiva para resaltar la figura central de Cristo, quien está dibujado de la misma altura que los Apóstoles, y convergen a él las líneas de los escalones, el dintel de la puerta, el frente del edificio (antes se acostumbra representarlo más alto, para indicar su importancia). Por último, en *El tránsito de la Virgen* (1462) de Andrea Mantegna se observan ya las reglas de la perpectiva de Alberti excelentemente combinadas, por ejemplo: la línea del horizonte bien definida, un

La última cena

El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres

El tributo



El tránsito de la Virgen

punto de fuga que da una perspectiva central, un segundo falso punto de fuga en la iglesia que se ve en el horizonte, el embaldosado del piso integrado a esta perspectiva.

6.1.1. ¿Cómo hacer para pintar en perspectiva?

En el caso más sencillo, cuando se busca el efecto de una vista de frente, los artistas utilizan lo que se llama "punto de fuga". Un ejemplo típico, es el dibujo de las vías del tren cuando el observador se sitúa en ellas. Las vías parecen unirse a lo lejos aunque en la realidad sean paralelas. Vamos a dibujar una caja sobre el suelo para ver cómo se hace.

El primer paso (figura 6.4) es decidir dónde está el horizonte y cuál será el punto de fuga.

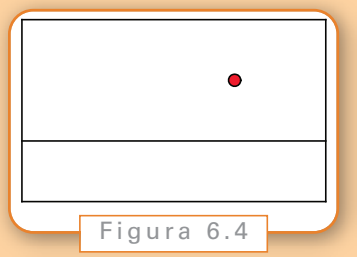


Figura 6.4

En el segundo paso, vamos a marcar las esquinas del frente de la caja y marcar suavemente las rectas que unen cada una de estas esquinas con el punto de fuga (figura 6.5)

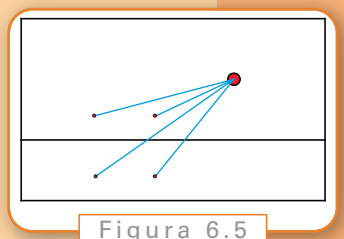


Figura 6.5

Ahora, sobre estas rectas tenemos que marcar las esquinas visibles de la parte trasera de la caja (figura 6.6)

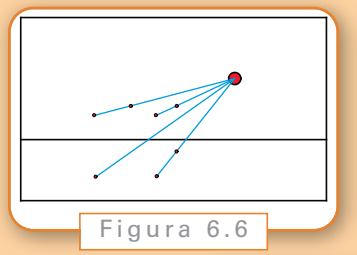


Figura 6.6

Ahora, completamos las líneas horizontales y verticales que podemos ver de la caja (figura 6.7)

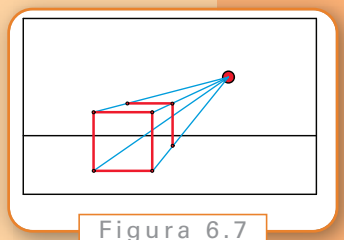


Figura 6.7

Y, como último paso, hacemos las líneas laterales siguiendo las rectas del punto de fuga (figura 6.8).

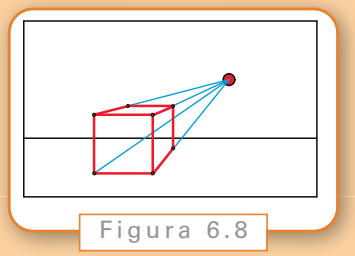


Figura 6.8

Esta técnica permite conseguir cualquier tipo de vista: frontal, desde arriba o abajo, desde la derecha o la izquierda. El efecto cambiará según cómo elijamos el punto de fuga.

Con este procedimiento se logra traer el infinito hacia un punto en la tela, con lo que, por comparación, se puede dar una sensación de distancia y profundidad.

Conviene hacer distintas vistas, cambiando el punto de vista, para entender cómo funciona el efecto.

6.1.2. Secciones cónicas

Como vimos, es relativamente sencillo dibujar en perspectiva objetos con bordes rectos, ya que basta con encontrar los vértices y completar con líneas rectas. El caso de objetos con bordes curvos como, por ejemplo, una rueda es más difícil. Una figura tan sencilla como un círculo no se verá, dibujado en perspectiva, como otro círculo.

Consideremos el siguiente ejemplo: iluminamos con una linterna una hoja de papel. Si la linterna se encuentra perpendicular a la hoja, el cono de luz tiene forma circular; pero si inclinamos la linterna, el círculo se empieza a deformar y toma varias formas distintas (ver figura 6.9).

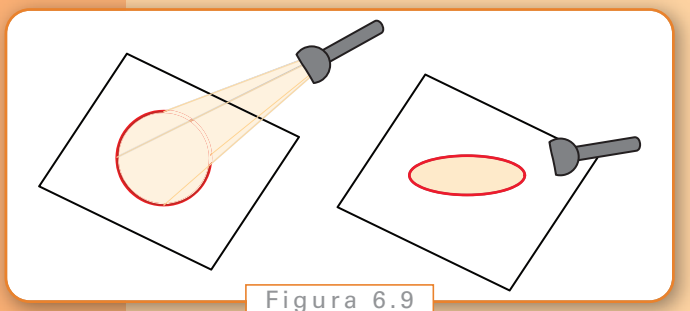


Figura 6.9

Se puede pensar estas figuras como la intersección de un cono y un plano: el cono es el haz de luz de la linterna y el plano es la hoja de papel. Estas intersecciones se llaman *secciones cónicas*: elipse (incluye a la circunferencia), parábola e hipérbola.

Las secciones cónicas, o más brevemente las cónicas, pueden definirse de distintas maneras. Analíticamente, son las curvas definidas por una ecuación del tipo:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

donde a, b, c, f, g, y h son números fijos.

Ejemplo: una circunferencia de radio R está dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Las cónicas se pueden definir según ciertas propiedades de tipo métrico.

Podemos definir la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto que llamamos su centro.

Para el caso de la elipse, existen dos puntos llamados *focos* con la siguiente propiedad: desde cualquier punto de la elipse, si trazamos dos segmentos conectándolos con los focos, como se muestra en la figura 6.10, la suma de las longitudes de estos segmentos no varía. En particular, en la circunferencia estos dos puntos se confunden en el centro de la misma.

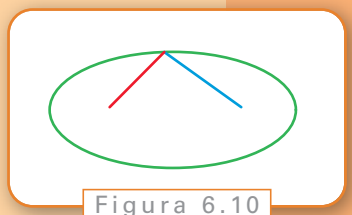


Figura 6.10

Observación. Esta definición nos da un método para dibujar elipses, que Descartes llamaba (¡en 1637!) el método de los jardineros. Se clavan dos estacas en la tierra en los puntos elegidos como foco de la elipse, y se ata un hilo a ambos. Luego, se estira el hilo con una rama y la hace girar manteniendo tenso el hilo. La figura que queda marcada es una elipse.

Definimos una elipse de dos formas diferentes (si cortamos el cono con un plano, o vía las distancias a los focos), veamos que efectivamente si cortamos un cono con un plano inclinado adecuadamente obtenemos una elipse.

Esta demostración fue dada por Germinal Dandelin, y utiliza las llamadas esferas de Dandelin. Estas esferas son tangentes al mismo tiempo al cono y al plano; una por arriba y otra por debajo. Esto significa que cada esfera toca al cono en una circunferencia, y al plano en un punto.

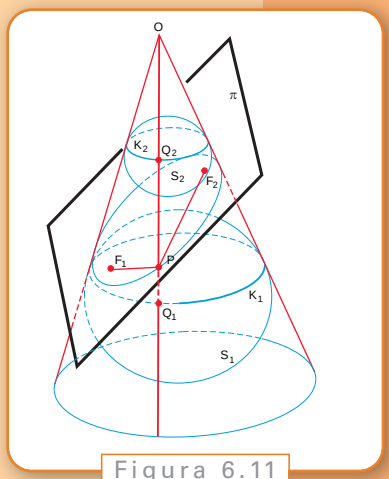


Figura 6.11

Llamemos S_1 a la esfera inferior, K_1 a la circunferencia que comparte con el cono y F_1 al punto donde toca al plano. Y de la misma manera, sean S_2 la esfera superior, K_2 la respectiva circunferencia de tangencia y F_2 la intersección con el plano.

Probemos que F_1 y F_2 cumplen la propiedad que se pide a los focos de una elipse. Para eso elijamos un punto P cualquiera que pertenezca a la intersección del plan con el cono. Tenemos que mostrar que la distancia

$$D = F_1P + PF_2$$

no depende del punto P elegido, o sea que es constante.

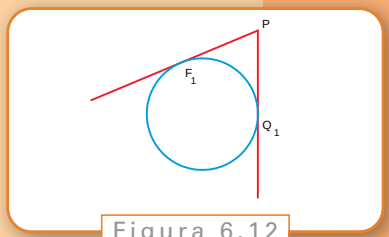


Figura 6.12

Tracemos una recta que una a P con el vértice del cono O, y llamemos Q_1 al punto donde esta recta cruza a la circunferencia K_1 y Q_2 al punto donde cruza a la circunferencia K_2.

Consideremos los segmentos PF_1 y PQ_1, que pertenecen a rectas tangentes a S_1 y que pasan ambas por P. Por la simetría radial de la esfera, tenemos que ambos segmentos deben medir lo mismo.

Trabajando de la misma manera con la esfera superior, tenemos que las distancias PF_2 y PQ_2 son iguales.

Entonces tenemos

$$PF_1 = PQ_1 \qquad\qquad PF_2 = PQ_2$$

Si sumamos ambas ecuaciones nos queda

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2$$

O sea

$$\begin{aligned} D &= PQ_1 + PQ_2 \\ &= Q_1Q_2 \end{aligned}$$

Como las circunferencias de tangencia son perpendiculares a la recta que une al vértice con P para cualquier punto P, tenemos que Q_1Q_2 sólo depende de la inclinación del plano, como queríamos ver.

Ejercicio 1 | **Analizar las propiedades geométricas que definen a la parábola y a la hipérbola. Hallar las ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares y cartesianas.**

6.1.3. Anamorfosis

Figura 6.13

Hemos empezado a descubrir cuál es la geometría oculta detrás de nuestro primer dibujo pero, ¿qué pasa con los rectángulos de la figura 6.2? ¿Cómo se deforman?

Si miramos detenidamente el cuadro *Los embajadores* de Hans Holbein (figura 6.13.), ¿Qué es lo que se ve a los pies de los embajadores? ¿Y si se mira desde la parte inferior derecha de la hoja? Se ve la calavera de la figura 6.14

En este famoso cuadro Holbein usa la técnica de la *anamorfosis*. La anamorfosis es un tipo de representación de un objeto. En esta representación la perspectiva está deformada de modo tal

que obliga al espectador a colocarse en un punto especial y único (que no es el usual frente a la pintura) para verlo bien. El rectángulo a la derecha en la Figura 6.2 es una representación anamórfica de un cuadrado.

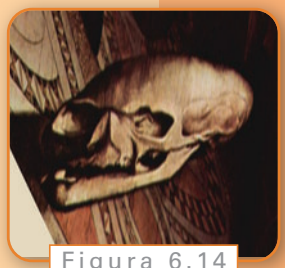


Figura 6.14

De esta forma, la geometría puede enseñarnos cómo "deformar" los objetos, o ayudarnos a saber si existe algún punto desde el cual mirar una pintura para encontrar figuras "ocultas".

¿Cómo hacer un dibujo anamórfico? Se traza una cuadrícula sobre el dibujo que se quiere convertir en imagen anamórfica, numerando cada uno de los cuadrados y señalando la diagonal del cuadrado que conforma el contorno externo de la cuadrícula (ver figura 6.15).

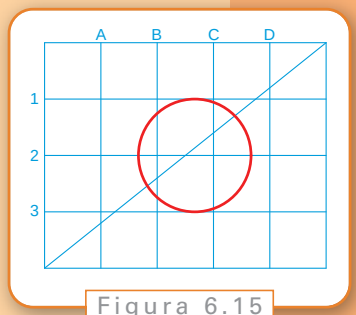


Figura 6.15

A continuación, se procede a distorsionar la red de la forma siguiente: se traza un lado del mismo tamaño y número de divisiones que el de la imagen original. Se elige un punto *X* a considerable distancia de dicho lado y se unen las divisiones con el punto *X,* como en la figura 6.16.

Desde el punto *X* se traza una recta vertical ligeramente menor a la altura de la cuadrícula original y se une su punto extremo, que denominaremos como *Y*, con el punto inferior izquierdo de la nueva cuadrícula, ver figura 6.17.

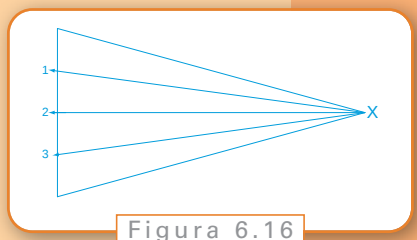


Figura 6.16

Esta última línea cortará las líneas que concurren en *X* en varios puntos. A partir de los puntos así obtenidos, se trazarán unas rectas verticales, paralelas entre sí, que formarán la cuadrícula distorsionada, como en la figura 6.18.

A continuación, se irá dibujando la imagen, trasladando todos los puntos básicos a sus lugares correspondientes en la nueva red distorsionada (figura 6.19). Para poder ver el dibujo sin distorsiones, tal y como es en la realidad, se debe colocar el papel en forma casi perpendicular a la cara y mirar la imagen desde la derecha.

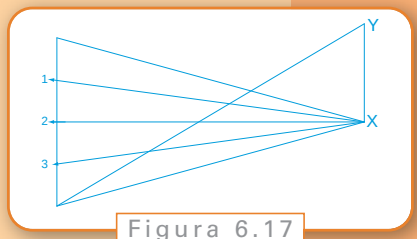


Figura 6.17

Cuanto más lejos se halle del punto *X*, mayor será la distorsión de la imagen, que aparecerá estrecha y aplastada.

Esta es una forma muy elemental de generar una imagen anamórfica, en la actualidad cualquier reproductor digital de películas, o programas de procesa-

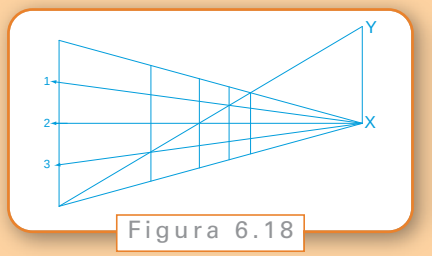


Figura 6.18

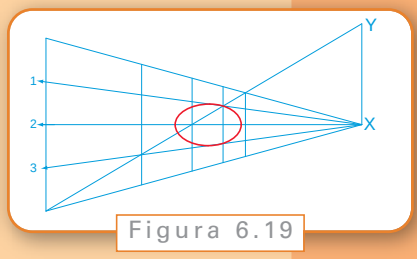


Figura 6.19

miento de imágenes, pueden cambiar las proporciones de la imagen según los formatos habituales. También se puede lograr esta clase de efectos mediante lentes especiales, como en el viejo “Cinemascope”.

En la actualidad, existen diversos usos de los dibujos anamórficos. En algunas canchas de fútbol o rugby se pueden ver imágenes publicitarias pintadas sobre el césped con la particularidad de que si son tomadas por determinadas cámaras parecen realmente carteles verticales; y pueden provocar alguna sorpresa cuando un jugador les camina por encima y parece flotar sobre un cartel.

También es muy útil la deformación anamórfica en la señalización vial. Si nos detenemos a mirar las señales que se encuentran pintadas en el pavimento vemos que se encuentran muy alargadas, y son incómodas para que un peatón las interprete. Esto se debe a que no están hechas para los peatones sino para los automovilistas, que tienen un punto de observación más bajo (figura 6.20).

Figura 6.20

6.2. Teorema de Desargues

Una vez que se desarrollaron las técnicas de perspectiva, su estudio quedó completo para los pintores del Renacimiento y por mucho tiempo también para los geómetras, hasta la llegada de Gérard Desargues (1591-1661) un arquitecto e ingeniero militar francés que encontró un nuevo camino a seguir.

Esto no quiere decir que la geometría no hubiera avanzado, sino que no había avanzado respecto del estudio de la perspectiva. En paralelo, con Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) se desarrolló la geometría analítica; lamentablemente no tenemos posibilidad de profundizar en ella en este trabajo.

En general, la geometría analiza las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio, pero no todas las propiedades de una figura tienen que referirse a las mismas “características” de la figura; podemos querer saber propiedades *cuantitativas* (por ejemplo, el tamaño de un triángulo, su área, la longitud de los lados, la medida de sus ángulos) o propiedades *cualitativas* (la forma que tiene: si es rectángulo, por ejemplo, o si todos sus ángulos son menores a un recto).

La pregunta natural es entonces: ¿cuáles son las propiedades que están relacionadas con la perspectiva, es decir, con la proyección? La Geometría Proyectiva se encarga de estudiar estas propiedades, y Desargues se considera su fundador dado que escribió el primer tratado sobre el tema, en 1639, en el cual se encuentra uno de los primeros teoremas proyectivos:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos ABC y A'B'C' en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A', B y B', C yC') se cruzan en un punto O, entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

La figura 6.21 nos puede ayudar a comprender el enunciado del teorema.

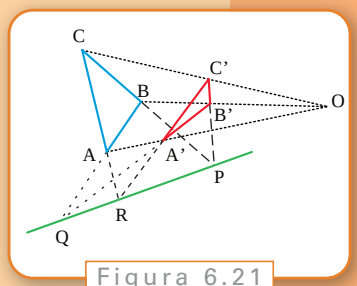


Figura 6.21

¿Qué es lo que hace a este teorema diferente a los que se prueban en la geometría euclidiana clásica? Lo principal es que su enunciado se puede considerar como una descripción de una situación tridimensional: los triángulos pueden estar en dos planos diferentes, y la figura 6.21 es una representación de cómo los ve un observador desde el punto O (en lugar de un cono, podemos pensar en una pirámide). Gracias a esto resulta un caso fácil de demostrar.

Cambiemos la perspectiva desde la que vemos la figura 6.21. En la figura 6.22 tenemos dos planos, el triángulo ABC en uno de ellos, π_1, y A'B'C' en el otro, π_2. Los dos planos se cortan en una recta (si fuesen paralelos, los pares de lados no se intersecarían). Veamos ahora la demostración.

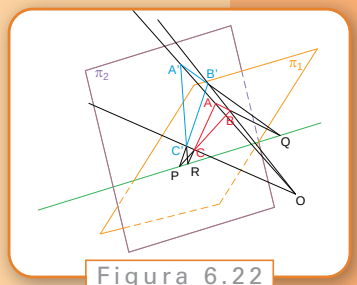


Figura 6.22

Demostración

Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' se cruzan en O entonces las rectas AB y A'B' están en un mismo plano (una cara de la pirámide) y por hipótesis se intersecan en un punto que llamaremos Q. De la misma manera AC y A'C' se intersecan en R, y BC y B'C' lo hacen en P.

Como AB, BC, CA están en π_1 entonces los puntos P, Q, y R están en π_1; además, como A'B', B'C', C'A' están en π_2, entonces P, Q, y R, están también en π_2. O sea que P, Q y R están a la vez en π_1 y π_2, entonces están en la intersección de ambos planos, que es una recta.

En definitiva, para demostrar el teorema en el plano hay que "salir" a tres dimensiones y mirar el dibujo original en el plano como una proyección. Pero para esto

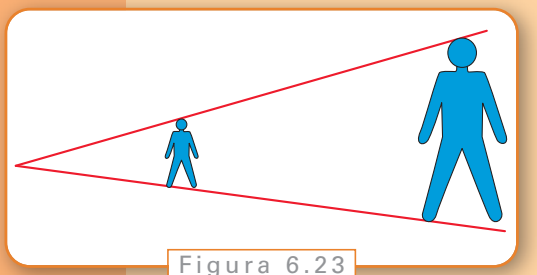


Figura 6.23

es necesario definir qué significaba una proyección en términos un poco más formales, y es lo que haremos en la próxima sección.

Antes de hacerlo, démosle una última mirada a nuestro teorema, desde otro punto de vista. Supongamos que los triángulos estuvieran pintados sobre papeles lo suficientemente grandes para que no viéramos los bordes y los fuéramos viendo uno por uno desde el punto O. ¿Podríamos distinguir cuál de los triángulos estamos viendo? No, para nuestros ojos son todos iguales ya que lo que el ojo mide es el ángulo entre los vértices y no el tamaño lineal (ver la figura 6.23).

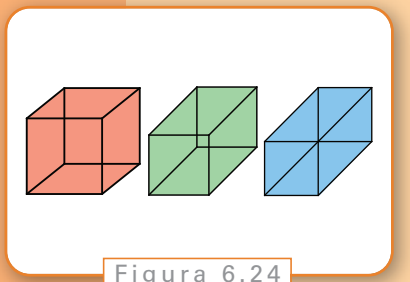


Figura 6.24

Para convencernos, hagamos el siguiente test: en la figura 6.24, ¿observa un hexágono o un cubo?

Lo que ocurre en este caso es que nuestro cerebro tiende a considerar a las figuras simétricas como bidimensionales, por lo que pierden su sentido de perspectiva. Así es como se logra el efecto de profundidad, los objetos no salen del plano pero nuestro cerebro lo interpreta de esta manera gracias a experiencias previas, a tonos de luz, comparaciones, agrupaciones y otras "herramientas" de la percepción.

Por ejemplo, cuando la Luna recién aparece sobre el horizonte nos parece que es más grande que cuando se encuentra en lo alto del cielo, pero en realidad el ángulo visual no varía. Ante un mismo estímulo el cerebro responde de dos maneras diferentes.

6.3. La geometría proyectiva

6.3.1. Proyecciones

Supongamos que tenemos dos planos π y π' en el espacio. Entonces podemos hacer una proyección central de π en π' desde un centro O dado.

Definición: (proyección central) Dado un par planos de π en π' y un punto O fuera de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P' en π', que está en la misma recta que pasa por P y por O.

Es decir, conectamos los puntos P y O con un segmento, y buscamos su intersección con el plano π'. También se puede hacer una proyección paralela, donde las rectas de proyección son todas paralelas.

Definición: (proyección paralela)

Dado un par planos de π en π′ y una recta dada que los interseque pero no pertenezca a ninguno de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P′ en π′ que está en la paralela a la recta dada que pasa por P.

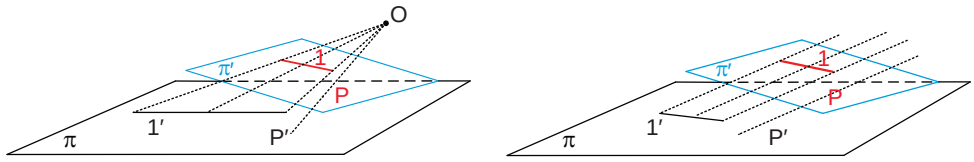
Ambas proyecciones se muestran en la figura 6.25.

Algunas propiedades básicas que surgen de estas definiciones son las siguientes:

- Un punto se proyecta en un punto.
- Una recta se proyecta en una recta.
- Si un punto está en una recta, la proyección del punto estará en la proyección de la recta y si una recta pasa por un punto la proyección de la recta pasará por la proyección del punto.
- Si tres puntos están en una misma recta, sus proyecciones estarán en una misma recta.
- Si tres rectas pasan por un mismo punto, sus proyecciones pasarán por un mismo punto.

Es importante notar que en la demostración del teorema de Desargues en el espacio se utilizó que la proyección era central, y que los pares de lados correspondientes no eran paralelos (así las prolongaciones se intersecaban). Para eliminar estas hipótesis deberíamos hacer una demostración nueva.

Este tipo de situaciones se repiten constantemente cuando se trata de teoremas de la Geometría Proyectiva, que suelen no involucrar longitudes pero sí intersecciones. El gran aporte de Desargues fue encontrar la manera de que todos esos casos especiales cayeran dentro de un único caso general. ¿Cómo lo hizo? Amplió el sentido de "punto" y de "recta" de manera que cumplieran dos objetivos esenciales:



Proyección central

Proyección paralela

Figura 6.25

- Que siguieran valiendo los primeros 4 postulados de Euclides, con lo cual valdrían todos los teoremas demostrados usando esos postulados.
- Que dos rectas paralelas se intersecaran en un único punto.

6.3.2. Las geometrías no-euclidianas.

Ya vimos los primeros cinco postulados de Euclides en el capítulo 2:

1. Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta..
2. Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.
3. Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Durante siglos los matemáticos creyeron que, en realidad, el quinto postulado podía ser demostrado en base a los demás. Gracias a estos esfuerzos lo que se consiguió fueron diferentes enunciados que eran equivalentes al original; o sea, eran verdaderos si éste lo era pero no eran demostrables en sí mismos. Ya vimos uno en el capítulo anterior, cuando analizamos la geometría esférica. Listemos aquí distintos enunciados equivalentes:

- Dos rectas paralelas son equidistantes.
- Si tres puntos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta.
- Si una recta encuentra a una de dos paralelas, encuentra necesariamente a la otra. Esto también puede enunciarse diciendo que dos rectas paralelas a una tercera son siempre paralelas entre sí.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.

- Por un punto cualquiera, tomado en el interior de un ángulo, se puede siempre trazar una recta que encuentre a los dos lados del ángulo.
- Dado un triángulo cualquiera existe siempre uno semejante de magnitud arbitraria.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.
- Existen triángulos de área tan grande como se quiera.
- Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia.

Es muy instructivo analizarlos y demostrar que son equivalentes al quinto postulado. Para demostrar esta equivalencia, se deben demostrar dos cosas: primero, que el enunciado elegido se deduce de los cinco postulados de Euclides; segundo, que reemplazando el quinto postulado por el enunciado, el quinto postulado se puede demostrar a partir de los cuatro primeros y el que hemos elegido.

El problema era que algunos de estos enunciados parecían demasiado evidentes para nuestra percepción del mundo, no podían "no ser ciertos". La "realidad" los apoyaba.

Por ejemplo; según Euclides, dos rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no se encuentran al prolongarlas indefinidamente en ambas direcciones siendo una recta "aquella línea que yace igualmente respecto de todos sus puntos". Con esta imagen, prácticamente estamos obligados a pensar en una recta como en una línea "derecha". Pero, ¿qué pasa si deformamos el plano donde está contenida esa recta? Nuestra recta podría estar "curvada", como lo vimos con los círculos máximos en el capítulo anterior. En esta nueva situación tiene mucho sentido plantearse si dos rectas podrían acercarse indefinidamente sin tocarse.

Después de siglos de tratar de demostrar el quinto postulado se empezó a pensar en probar por otro camino… suponer que no se podía demostrar. La idea era directamente negar el postulado y construir nuevamente la geometría sin él, con la esperanza de llegar a una contradicción. Lo que se logró fue la construcción de geometrías diferentes e igualmente válidas a la geometría euclidiana; todas ellas consistentes lógicamente (o compatibles) solamente si las otras también lo eran.

Partiendo de la formulación "por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta" podemos elegir dos caminos para la negación del postulado. Una opción es decir que no se puede trazar ninguna paralela, con lo que llegamos a lo que se denomina geometría elíptica (la geometría esférica es un caso particular, cuando la elipse es en realidad un círculo; podemos pensar en la geometría sobre una pelota de rugby). Otra opción es admitir la existencia de paralelas, pero que no sean únicas. Si se propone que por un punto externo a una recta pasan

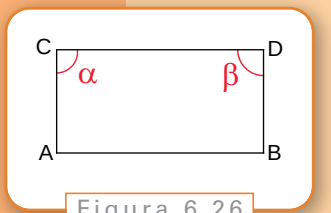


Figura 6.26

varias rectas paralelas se obtiene la geometría hiperbólica. Esta última es la que obtendríamos suponiendo que dos rectas paralelas se cruzan en un único punto.

Otra manera de llegar a las geometrías no euclidianas es usando el llamado Cuadrilátero de Saccheri (figura 6.26). Por los extremos de un segmento AB se trazan segmentos iguales AC y BD, ambos perpendiculares a AB y se unen los puntos C y D con una recta. Se demuestra que los ángulos α y β son iguales, pero las posibilidades para α y β son:

1. ambos ángulos son rectos.
2. ambos ángulos son obtusos.
3. ambos ángulos son agudos.

Éstas son conocidas como las hipótesis del ángulo recto, obtuso y agudo. Se puede demostrar que equivalen, en la forma del postulado "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos" a suponer dicha suma igual, mayor o menor que dos ángulos rectos.

Siguiendo la primera hipótesis se llega a la geometría euclidiana. Siguiendo la segunda hipótesis se deduce que las rectas deben ser finitas, lo que fue tomado en su momento como un absurdo; sin embargo, se trata de las rectas de la geometría elíptica (y en el caso particular de la geometría esférica ya vimos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor a dos rectos). Finalmente si se consideran los ángulos agudos se obtiene la geometría hiperbólica.

Observación: **cuando asociamos la geometría euclidiana a la geometría de la realidad, estamos pensando en el espacio tridimensional en el que nos movemos y medimos distancias o ángulos. Sin embargo, nuestra interpretación visual de la realidad coincide más con la geometría proyectiva, porque vemos en perspectiva; no vemos el tamaño real de los objetos (como la Luna), ni tampoco su forma verdadera. Como hemos visto en la sección de anamorfosis, nuestra ubicación -el punto de vista- influye en la forma o el tamaño que percibimos. Por otra parte, ya vimos que si necesitamos mediciones a gran escala sobre la superficie de la Tierra, su curvatura juega un papel importante y, en ese caso, la geometría que nos sirve es la esférica.**

6.4. Los axiomas de la geometría proyectiva

Para seguir adelante en la construcción de nuestra geometría tenemos que decidir cuál es el punto donde se cruzan dos rectas paralelas. Nuevamente, los ejemplos de la pers-

pectiva en el arte o el de las vías del tren nos sirven: muy lejos o en el "infinito"… y eso funciona. Agregaremos el punto del infinito. Primero, agreguemos algunas definiciones que simplifiquen el lenguaje.

Se dice que tres puntos son *colineales* si están en una misma recta. | **Definición**

Se dice que tres rectas son *concurrentes* si pasan por un mismo punto. | **Definición**

Cuando un punto pertenece a una recta, o una recta pasa por un punto, decimos que son *incidentes*. | **Definición**

Tendremos ahora otro lugar donde hacer geometría con los nuevos elementos que agregamos: será el plano proyectivo. Este plano está formado por los puntos y rectas del plano de la geometría usual (de Euclides) y los nuevos puntos del infinito.

Lo que queremos que se cumpla es lo siguiente:

- Que cada recta del plano usual tenga asociado un punto ideal (punto en el infinito).
- El punto ideal de una recta pertenecerá a todas las rectas paralelas a la dada y a ninguna otra (todas las rectas paralelas a una dada se encuentran en este punto).

Para lograrlo, basta con pedir que se cumplan los dos siguientes axiomas:

Dados dos puntos existe una única recta incidente a ambos. | **Axioma 1**

Dadas dos rectas existe un único punto incidente a ambas. | **Axioma 2**

Hasta ahora nos preocupamos porque todas las rectas pudieran intersecarse, pero también tiene que cumplirse el viejo axioma de que por dos puntos pase siempre una única recta. Cuando estos puntos son dos puntos ideales, la recta no puede ser una recta usual ya que ésta tiene un único punto ideal. Lo más sencillo es introducir una recta ideal, formada por todos los puntos ideales, la recta del infinito. Una manera muy gráfica de pensar en ella es asociarla a la recta del horizonte.

Faltaría ver si estos cambios afectan a las definiciones de proyección, pero en realidad el nuevo plano nos ayuda, ya que lo que antes era una proyección paralela ahora es una proyección central desde un punto ideal (como los rayos que proyectan son paralelos entre sí, se cruzan en el punto ideal).

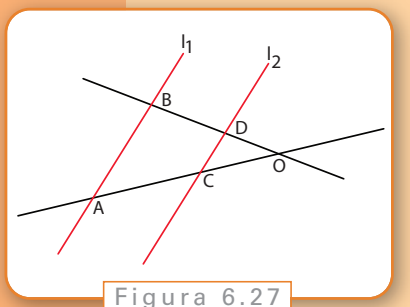


Figura 6.27

Por ejemplo, en los dibujos en perspectiva estábamos proyectando desde el punto de fuga y nuestro horizonte correspondía a la recta del infinito. En la figura 6.1, el punto de fuga es un punto ideal.

Una vez definido el espacio donde la geometría proyectiva tiene sus figuras, vamos a tratar de descubrir las propiedades que se preservan si proyectamos esas figuras desde cualquier punto. Y ya vimos que, por ejemplo, incidencia, concurrencia y colinealidad son propiedades proyectivas. O sea que el teorema de Desargues en el espacio es un teorema de la geometría proyectiva: lo único que usamos para demostrarlo fueron intersecciones (incidencias).

En el caso del teorema en el plano, proyectar puede ayudarnos más todavía. Como las propiedades se mantienen en cualquier figura a la que lleguemos usando proyecciones, si encontramos alguna para la que quede demostrado, entonces vale para todas.

Con todas estas nuevas definiciones se puede probar Desargues en el plano con poco trabajo. Para esto vamos a usar la siguiente versión del Teorema de Thales, correspondiente a la figura 6.27.

Teorema

Sean dos rectas que se cruzan en un punto O, y que intersecan un par de rectas l_1 y l_2 en los puntos A, B, C, D. Entonces, l_1 es paralela a l_2 si y sólo si

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

Ejercicio 2 | **Demostrar este teorema.**

Veamos ahora otra demostración del Teorema de Desargues:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos ABC y A'B'C' en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A', B y B', C y C') se cruzan en un punto O, entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

Demostración

Supongamos que podemos llegar a la situación de la figura 6.28 (donde Q y R están en el infinito) por alguna proyección de la figura original. Si el teorema vale en esta situación, entonces vale en general.

Para ver que P, Q, y R son colineales, como R y Q están en el infinito, bastaría con ver que P está en el infinito también (B'A' paralela a BA). Lo que queremos ver es que los tres puntos están en la recta ideal. Para eso, en la figura 6.29 introducimos las distancias a los puntos A, B, C, A', B', C' desde O.

Por el Teorema anterior, si podemos probar que v/u=s/r entonces B'A' es paralela a BA.

Pero sabemos que A'C' es paralela a AC y que C'B' es paralela a CB entonces, utilizando nuevamente el Teorema,

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{r}$$

y también

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$$

Por lo tanto, igualando $\frac{y}{x}$ hemos obtenido que $\frac{v}{u} = \frac{s}{r}$.

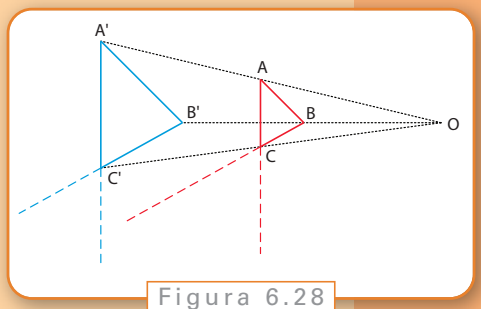


Figura 6.28

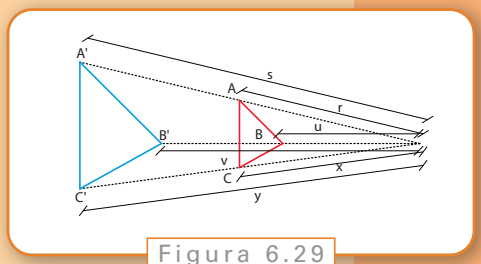


Figura 6.29

Ahora veamos cómo llegar a esta figura utilizando proyecciones.

Para que una proyección mande Q y R al infinito tenemos que elegir el centro de proyección O' de manera que esté en un plano π que también contenga a Q y R (ver figura 6.30). Entonces, si hacemos la proyección sobre un plano paralelo a π como π', las rectas que unen O' con R y Q son paralelas al plano π', y por lo tanto lo cortan en el infinito.

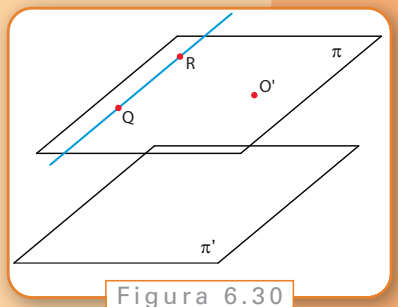


Figura 6.30

A pesar de lo novedoso de la idea de Desargues, sólo interesó a un pequeño grupo de matemáticos ya que en ese momento la geometría analítica estaba en pleno desarrollo. En ese grupo se encontraba Blaise Pascal, quien con sólo 16 años y siguiendo el trabajo de Desargues escribió su primer tratado de matemática, y en él probó un teorema que llamó *mysterium hexagrammicum* y que ahora lleva su nombre.

Teorema de Pascal

Si los vértices de un hexágono yacen alternativamente en un par de rectas que se intersecan, entonces las tres intersecciones P, Q y R de los lados opuestos del hexágono son colineales.

Como se puede ver en la figura 6.31, se trata de un hexágono en el sentido amplio, o sea que puede intersecarse a sí mismo.

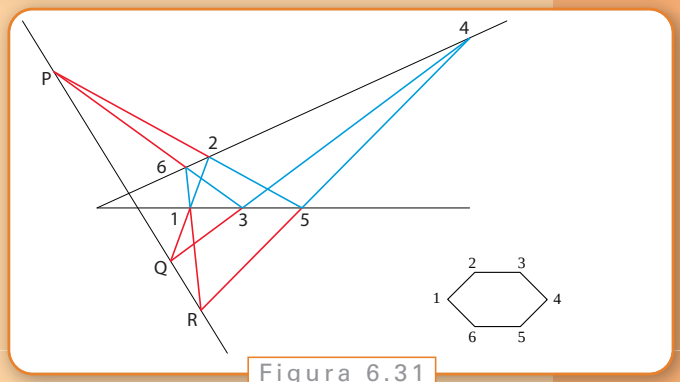


Figura 6.31

Ejercicio 3 | **Demostrar el teorema de Pascal.**

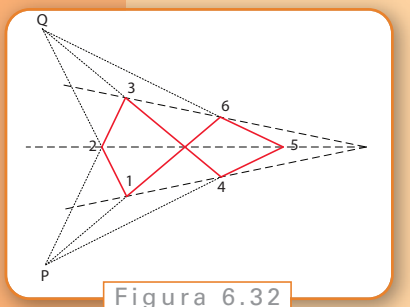


Figura 6.32

Casi 160 años después, con Gaspard Monge y su discípulo Charles Julien Brianchon, logra renacer la geometría proyectiva. En el caso de Monge, quien era oficial del ejército de Napoleón y físico además de matemático, su aporte principal fue a la geometría descriptiva, aquélla que investiga sobre técnicas de tipo geométrico que permiten representar objetos tridimensionales sobre superficies planas y la forma de recuperar las características de estas figuras en dos dimensiones en su correspondiente del espacio. Por su parte Brianchon logra demostrar el teorema dual del teorema de Pascal, que reproducimos en la figura 6.32:

Teorema de Brianchon | *Si los lados de un hexágono pasan alternativamente por dos puntos P y Q fijos, entonces las tres diagonales que unen pares de vértices opuestos del hexágono son concurrentes.*

Ejercicio 4 | **Demostrar el teorema de Brianchon**

La relación entre los teoremas de Pascal y de Brianchon, que hemos denominado *dual*, es un concepto profundo que aparece con la geometría proyectiva. Los teoremas duales surgen de reemplazar "vértices" por "lados", "yacen alternativamente" por "pasan alternativamente", "puntos" por "rectas" y "son colineales" por "son concurrentes". Todo teorema que involucra estos términos puede dualizarse, y obtenemos así un nuevo teorema.

Por ejemplo, en la geometría euclídea sabemos que por dos puntos siempre pasa una recta (dos puntos son colineales). Pero no siempre dos rectas se intersecan (no siempre son concurrentes). En cambio, en el plano proyectivo son enunciados duales:

Dos puntos son colineales
Dos rectas son concurrentes.

Esto no es casualidad, ni ocurre para estos casos particulares, sino que ocurre para todos los teoremas de la geometría proyectiva. Este hecho fue descubierto por Jean-Victor Poncelet, otro militar francés, quien escribió un tratado de geometría proyectiva en la prisión de Saratoff, durante la campaña de Napoleón contra Rusia, entre 1813 y 1814.

Poncelet descubrió esta relación dual entre puntos y rectas, así como algunas de sus operaciones. Por ejemplo, trazar una recta por un punto es la operación dual de marcar un punto en una recta.

Principio de dualidad de Poncelet | *El dual de cualquier teorema de la geometría proyectiva, también es un teorema de la geometría proyectiva.*

Es decir, si un teorema es verdadero entonces su teorema dual también lo es. Esto sólo puede valer donde todo elemento tiene su dual. En la geometría clásica, por ejemplo, no existe el dual de un ángulo. Esto proviene de una característica particular de la construcción del plano proyectivo, pero para verlo más claramente era necesario salir de los métodos axiomáticos y de alguna manera incluir los métodos algebraicos y numéricos que siempre se habían rechazado en este tipo de geometría. Esto se logró gracias a Julius Plücker, Augustus Möbius y Étienne Bobillier, cuando alrededor de 1829 y en medio de una pelea entre matemáticos "sintéticos" (aquellos que defendían una geometría conceptual, basada en los axiomas) y "algebraicos" (quienes proponían introducir coordenadas) introdujeron el uso de las coordenadas homogéneas en la geometría proyectiva.

6.5. Coordenadas homogéneas

Hemos visto brevemente el uso de coordenadas en la geometría euclidiana y en la geometría esférica, como así también recorrimos algunos de los principales sistemas de coordenadas (cartesianas, polares). Las coordenadas homogéneas juegan el mismo papel de las coordenadas cartesianas, pero parametrizan el plano proyectivo. Son ternas de números que identifican sus puntos, por lo que pusieron al alcance de los geómetras todas las herramientas algebraicas y analíticas que antes no tenían.

En general, las coordenadas de un objeto geométrico son cualquier conjunto de números que caracterice ese objeto de forma única. En el plano usual, con las coordenadas cartesianas se necesitan dos números para identificar un punto; por ejemplo, podemos elegir el primero para la posición horizontal y el segundo para la vertical (ver figura 6.33).

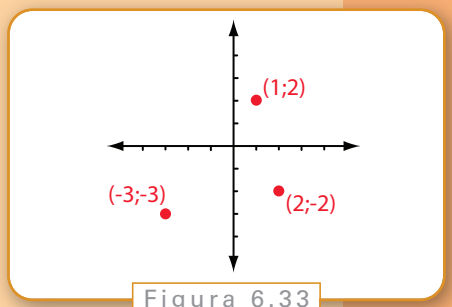


Figura 6.33

En el caso de las coordenadas polares, dábamos el ángulo con el eje X y la distancia al origen.

Pero para el plano proyectivo tendríamos problemas con los puntos del infinito. Sin embargo, la solución viene de "salir" del plano para agregar una nueva coordenada que nos diga si el punto es ideal o no.

Pensemos en el plano proyectivo π ubicado en el espacio tridimensional como se muestra en la figura 6.34

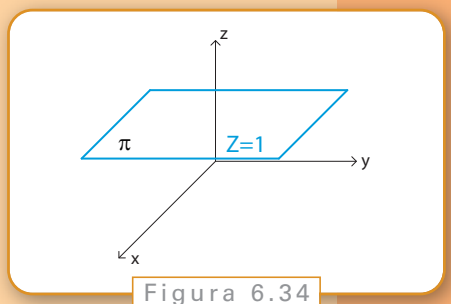


Figura 6.34

O sea, si la tercera coordenada de un punto en el espacio es la altura, los puntos del plano euclídeo usual serían de la forma (x, y, 1), pero esto no alcanza para los puntos en el infinito: si un punto del infinito estuviese indicado como (a, b, 1), coincidiría con el punto del plano de coordenadas cartesianas (a, b).

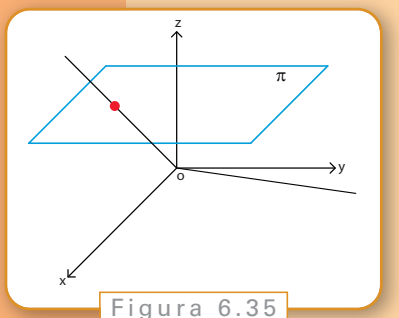


Figura 6.35

Volvamos entonces a la idea de proyección. Si nuestro centro es el origen de coordenadas O = (0,0,0), entonces para cualquier punto de π tenemos una recta que pasa por O. Y para los puntos en el infinito, tenemos rectas paralelas a π que pasan por el origen (ver figura 6.35)

Las coordenadas homogéneas de cualquier punto P del plano proyectivo van a ser las coordenadas en el espacio de cualquier punto Q (distinto del origen) que esté en la recta que une a P con O. Si el punto es ordinario podemos elegir, por ejemplo, (a,b,1); pero en general sirve cualquier terna de la forma

$$(ta, tb, t) \quad \text{con} \quad t \neq 0.$$

(Estamos usando aquí la ecuación paramétrica de una recta en el espacio.) En otras palabras, a cada punto del plano le hemos asociado una recta. En el caso de un punto en el infinito, lo representaremos como (x, y, 0). Podemos pensar que (x,y) nos da la dirección de las rectas paralelas que se cruzarían en este punto ideal P.

Entonces, a cada punto del plano le hemos asignado una recta del espacio tridimensional. ¿Y qué les toca a las rectas? Veamos la figura 6.36

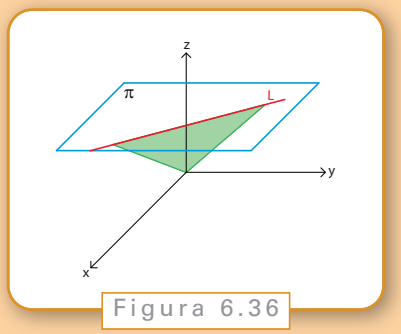


Figura 6.36

Hemos dicho que a cada punto de L le correspondía una recta del espacio pasando por el origen. Entonces, juntando todas estas rectas podemos pensar que a L le corresponde, en el espacio, un plano. Este plano pasa por el origen y contiene la recta L.

Deberíamos darle a L las coordenadas de ese plano en el espacio. Esto se aclara cuando miramos la ecuación que satisface un plano: un punto (x, y, z) está en un plano que pasa por el origen cuando es solución de una igualdad del tipo

$$ax + by + cz = 0$$

donde a, b y c son números que nos dicen cómo es el plano (qué "inclinación" tiene).

Así que podemos definir las coordenadas de L como la terna de números (a, b, c) que corresponden a la ecuación del plano que pasa por el origen y que tiene al vector (a, b, c) como normal. Esto incluye la recta en el infinito, porque en este caso el plano que da las coordenadas es el plano paralelo a π que pasa por el origen de ecuación z=0.

Estas coordenadas nos muestran cómo rectas y puntos pueden intercambiar lugares en la geometría proyectiva.

En primer lugar, puntos y rectas quedan definidos por ternas de números (distintos de (0, 0, 0)), es decir que si nos dan una terna de coordenadas, no podemos distinguir si son de una recta o de un punto.

En segundo lugar, si tenemos dos ternas de coordenadas (x, y, z) y (a, b, c) que cumplen que $ax + by + cz = 0$ (o, equivalentemente, $xa + yb + zc = 0$). ¿Diríamos que el punto de coordenadas (x, y, z) pertenece a la recta de coordenadas (a, b, c) o que el punto de coordenadas (a, b, c) pertenece a la recta de coordenadas (x, y, z)? Todo depende de la interpretación que queramos darle y no de una diferencia real.

Observemos también que las ternas que definen tanto a puntos como a rectas están asociadas con direcciones, la dirección de la recta que pasa por el origen para los puntos, y la normal al plano para las rectas.

Recordemos que una de las propiedades básicas de las proyecciones era que una recta se proyectaba en otra recta. Gracias al sistema de coordenadas que introducimos, ahora podemos darle una forma matemática a la proyección. Una recta en el plano proyectivo está dada por las coordenadas (ta, tb, t) con $t \neq 0$, y queremos que su proyección sea otra recta del plano proyectivo dada por (tc, td, t) con $t \neq 0$. Las únicas funciones que cumplen con esta propiedad, sin contar las translaciones, son las transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales dilatan y contraen al espacio de una manera tal que las propiedades proyectivas se conservan. ¿Existirá algún grupo de funciones que tampoco cambien el tamaño de los objetos? La respuesta es que sí, y son los movimientos rígidos: las rotaciones y reflexiones; que son un subconjunto de las transformaciones lineales.

En 1872, y a los 23 años de edad, el matemático alemán Félix Klein presentó el llamado *Programa de Erlangen*, donde mostraba que todas las geometrías podían definirse de una manera distinta a la axiomática; cada geometría abarcaba el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes bajo un grupo dado de transformaciones. En el caso de la geometría euclidea, son los movimientos rígidos; en el caso de la geometría proyectiva, son las transformaciones lineales.

6.6. Habitación de Ames

Una habitación de Ames es una ilusión óptica tridimensional, donde una persona parece cambiar de tamaño a medida que se mueve lateralmente desde una pared a la otra.

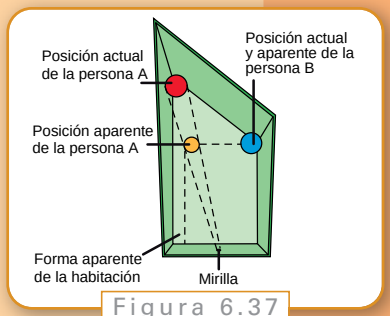


Figura 6.37

La ilusión se vale del hecho que nuestro cerebro cree ver una habitación cuadrada cuando en realidad el cuarto está deformado de manera que una esquina está más alejada. Esto sucede porque el ojo no recibe información sobre el tamaño de los objetos sino sobre el ángulo que abarca su imagen en la retina. Ya menciona-

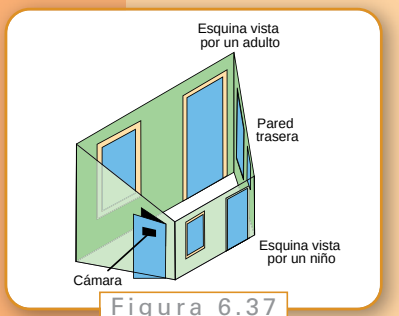
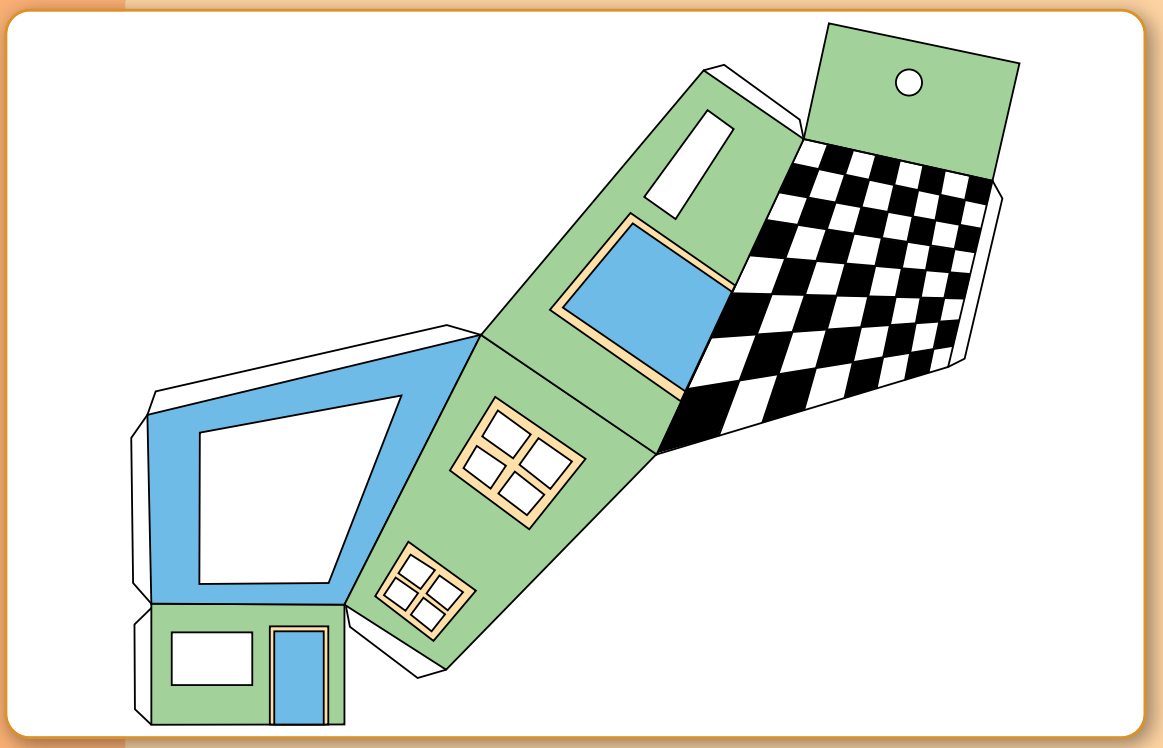


Figura 6.37

mos que vemos la Luna más grande en su proximidad con el horizonte; como la comparamos con algo que se encuentra más cerca automáticamente debe ser porque el tamaño es mayor. En este juego se basa la ilusión de la habitación de Ames, no nos damos cuenta que la persona se aleja, y por lo tanto la interpretación es que se achica.

Para construir una habitación de Ames pequeña se puede ampliar e imprimir la siguiente figura.



Una vez caladas las ventanas, el techo y el punto de observación (marcados con x), se arma y se pega. Se pueden pasar objetos no muy grandes por detrás de las ventanas para ver cómo cambian de tamaño o colocar distintos objetos dentro para compararlos.

Ahora, si se quiere construir una habitación de Ames de mayor tamaño es necesario un poco más de trabajo.

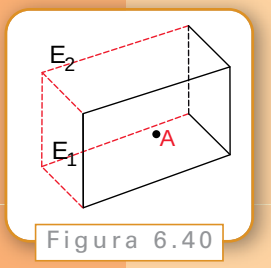


Figura 6.40

Queremos lograr que el observador situado en A vea una habitación normal. Entonces las esquinas del lado izquierdo y de la parte de atrás deberían ser E_1, y E_2. Este es el lado que se construirá más atrás.

Marcamos la línea de visión de la esquina, L y elegimos cuán lejos queremos que se vea la esquina E_2, en el punto P.

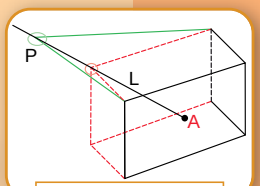


Figura 6.41

Como queremos que la unión de las dos paredes sea recta, nos queda determinada la posición de la falsa esquina E_1, Q en la intersección de la vertical que baja de P al suelo. Observemos que quedan alineados el punto donde realmente estará la esquina de la habitación, el punto donde nosotros la veremos y nuestros pies.

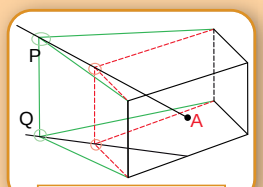


Figura 6.42

Para poder completar el diseño interior, necesitamos saber cómo se altera cada objeto que nos encontremos: las baldosas del piso, alguna ventana, una puerta. En general se utilizan objetos con bordes rectos para facilitar los cálculos.

Para lograr esto lo más conveniente es pensar que una transformación lineal T deforma el espacio de tal manera que manda las líneas rojas a las verdes. Para encontrarla usaremos que las transformaciones lineales quedan definidas dando su valor sobre una base.

Elijamos entonces un origen de coordenadas, por ejemplo nuestro origen se encontrará en la esquina inferior derecha de la parte frontal de la habitación. De esta manera es fácil interpretar la posición de todas las esquinas, en particular de E_1 y E_2.

$E_1=(x,y,0)$ $\qquad$ $E_2=(x,y,z)$ $\qquad$ $E_3=(x,0,0)$

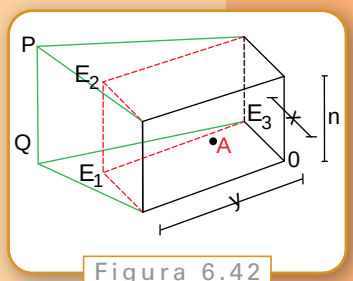


Figura 6.42

Si pensamos en estos puntos como vectores ya tenemos nuestra base y la transformación queda definida como la única transformación que cumple:

$T(E_1)=Q$ $\qquad$ $T(E_2)=P$ $\qquad$ $T(E_3)=E_3$

Veamos un ejemplo, si consideramos una habitación original de 4 m de frente, 4 m de profundidad y 2,5 m de altura tenemos

$x=4$ $\qquad$ $y=4$ $\qquad$ $z=2,5$

Entonces

$E_1=(4;4;0)$ $\qquad$ $E_2=(4;4;2,5)$ $\qquad$ $E_3=(4;0;0)$

Y por lo tanto nuestra transformación cumple que

$T(4;4;0)=Q$ $\qquad$ $T(4;4;2,5)=P$ $\qquad$ $T(4;0;0)= (4;0;0)$

Ahora tenemos que elegir P en la línea de visión que corresponde a E_2, o sea P tiene

que pertenecer a la recta que pasa por E_2 y A. Consideremos un punto de observación centrado y a 1,7m del piso, o sea

$$A=(0;2;1,7)$$

Los puntos (a,b,c) que pertenecen a la recta que pasa por E_2 y A son de la forma

$$(a,b,c) = t(4;2;0,8) + (4;4;2,5)$$

Para t>0, obtendremos puntos "detrás" de E_2. Si elegimos t=0,5 obtendremos P=(a,b,c)=(6;5;2,9) y como Q se encontraba bajando desde P en forma vertical nos queda Q=(6;5;0).

De esta manera, cuando una persona camine por el fondo de la pieza, se estará alejando 2m hacia atrás y 1m en sentido lateral.

Obtuvimos entonces los últimos datos necesarios para encontrar T

$$T(4;4;0) = (6;5;0) \qquad T(4;4;2,5) = (6;5;2,9) \qquad T(4;0;0) = (4;0;0)$$

T está dada por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+0,5x_2;1,25x_2;1,16x_3)$$

Con esta función podemos terminar de determinar la posición correcta para cada objeto o figura que queramos agregar, como por ejemplo un cuadro en la pared posterior. Basta con ubicar las coordenadas de los vértices en la habitación original y ver dónde los ubica nuestra transformación.

Veamos cómo obtener esta última expresión.

Por definición una transformación lineal cumple que:

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$

$$T(\lambda u)=\lambda\, T(u)$$

donde u y v son vectores (ternas de números en nuestro caso) y λ es un número cualquiera.

Queremos encontrar una expresión para T(x,y,z) sabiendo que

$$T(4;4;0)=(6;5;0) \qquad T(4;4;2,5)=(6;5;2,9) \qquad T(4;0;0)= (4;0;0)$$

Y que los vectores (4;4;0), (4;4;2,5) y (4;0;0) forman una base, o sea que dado un vector (x,y,z,) cualquiera, podemos encontrarle una única terna de números (α,β,γ) que cumple

$$(x,y,z) = \alpha(4;4;0) + \beta(4;4;2,5) + \gamma(4;0;0)$$

Para eso igualamos coordenada a coordenada, obteniendo un sistema de ecuaciones

$$(x,y,z) = \alpha(4;4;0)+\beta(4;4;2,5)+\gamma(4;0;0)$$

$$= (4\alpha+4\beta+4\gamma;4\alpha +4\beta;2,5\beta)$$

$$x=4\alpha+4\beta+4\gamma \qquad (I)$$

$$y=4\alpha +4\beta \qquad (II)$$

$$z=2,5\beta \qquad (III)$$

De III tenemos que $\beta=0,4z$

Reemplazando en II podemos despejar $4\alpha=y-4\beta=y-1,6z$

Entonces $\alpha=0,25y-0,4z$

Reemplazando ahora en I obtenemos $4\gamma=x-4\alpha-4\beta=x-(y-1,6z)-1,6z=x-y$

Entonces $\gamma=0,25x-0,25y$

Volvamos ahora a nuestra función T

$$T(x,y,z) = T(\alpha(4;4;0)+\beta(4;4;2,5)+\gamma(4;0;0))$$

$$= \alpha T(4;4;0)+\beta T(4;4;2,5)+\gamma T((4;0;0)$$

Por ser una transformación lineal.

Usando ahora los datos que tenemos queda

$$T(x,y,z) = \alpha(6;5;0)+\beta(6;5;2,9)+\gamma(4;0;0)$$

$$= (0,25y-0,4z)\ (6;5;0)+0,4z(6;5;2,9)+(0,25x-0,25y)\ (4;0;0)$$

$$= (1,5y-2,4z;1,25y-2z;0)+(2,4z;2z;1,16z)+(x-y;0;0)$$

$$= (x+0,5y;1,25y,1,16z)$$