4. Números racionales

Los alumnos Juan y Leandro de la Escuela 314 van a veranear a la costa atlántica. Una mañana deciden participar de un torneo de beach voley en el cual no tienen un buen desempeño. Por esto, les dan como premio consuelo un sandwich de milanesa para ambos. ¿Cómo hacen para repartir el premio entre los dos?

La respuesta resulta bastante simple si estamos acostumbrados a trabajar con números. Deberían tomar medio sandwich cada uno, pero ¿qué quiere decir la mitad?, ¿qué representa el número 1/2 ?

En el primer capítulo estudiamos los números naturales y vimos aplicaciones de los mismos a distintos problemas. En el segundo capítulo vimos la utilidad que presenta agregar al conjunto de los números naturales un elemento neutro (el cero) y un inverso aditivo por cada número natural y obtuvimos el conjunto de números enteros. Como el conjunto de números naturales tiene dos operaciones importantes, podemos tratar de agregar inversos para el producto.

Si comenzamos con los números enteros y estudiamos el producto en este conjunto nos encontramos con un problema importante: multiplicar por cero mata a todos los elementos. Así:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 &= 0 \\ 0 \cdot 2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esto hace que, si queremos agrandar el conjunto de números enteros de forma tal que todo número tenga inverso, no vamos a poder hacerlo. Esto es porque el cero no puede tener inverso si queremos que el conjunto construido siga teniendo las propiedades que tiene el conjunto de números enteros, (a saber, que sea un grupo para la suma, y que valga la propiedad distributiva con respecto al producto). A pesar de parecer muy intuitivo que el cero no puede tener inverso, a veces la intuición nos falla, con lo cual precisamos dar una demostración de tal afirmación. Supongamos que agregamos un símbolo ♠ que sirve como inverso multiplicativo del cero, o sea:

$$0 \cdot \spadesuit = 1 \text{ y } \spadesuit \cdot 0 = 1$$

Usando la propiedad asociativa para el producto tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot \spadesuit \\ &= (2 \cdot 0) \cdot \spadesuit \\ &= 2 \cdot (0 \cdot \spadesuit) \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, dado que el número natural 1 y el número natural 2 son distintos.

Como no hay manera de construir un conjunto que contenga los enteros y en el cual el número cero tenga inverso multiplicativo, tratemos de agrandar el conjunto de números enteros de manera tal que en el conjunto construido todos los números enteros, salvo el cero, tengan inverso multiplicativo. La manera intuitiva de hacerlo es considerar fracciones, esto es cocientes de la forma n/d donde n y d son enteros y d no es cero (dado que el cero no puede tener inverso). En tal expresión, al número n se lo llama numerador y al número d se lo llama denominador de la fracción.

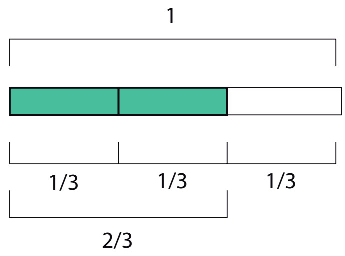

Figura 1. *El número 2/3.*

Tenemos una buena interpretación de las fracciones, la fracción $1/d$ representa tomar el elemento unidad 1 y partirlo en d pedazos iguales, como en el ejemplo del sandwich de milanesa. Siguiendo la definición de los números naturales, si n es positivo, la fracción n/d representa tomar n veces la fracción $1/d$. La figura 1 muestra la manera de interpretar al número 2/3.

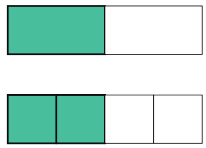
Figura 2. *Igualdad entre 1/2 y 2/4.*

Si nos detenemos a jugar con las fracciones, vemos que hay un problema en la definición que dimos. La fracción 1/2 representa tomar la mitad de la unidad, y la fracción 2/4 representa tomar dos veces la cuarta parte de la unidad. A pesar de que son dos fracciones distintas, ¡representan la misma cantidad!, como puede observarse en la figura 2.

A pesar de que la definición formal de número racional la daremos más adelante, los números racionales representan cantidades. Es por esto que la idea de que un número racional es una fracción no es del todo correcta, porque fracciones distintas pueden representar el mismo número racional. En la siguiente sección veremos cómo solucionar este problema, pero por ahora quedémonos con la idea de que a cada fracción le podemos asociar un número racional, aunque distintas fracciones pueden representar lo mismo.

Consideremos el conjunto de fracciones n/d con n un número entero y d un número entero no nulo. Podemos ver al conjunto de números enteros como un subconjunto del conjunto de fracciones, donde $2 = \frac{2}{1}$, $-1 = \frac{-1}{1}$, etc. Dado que sabemos sumar y multiplicar números enteros, nos gustaría hacer lo mismo con las fracciones. ¿Cómo multiplicamos 1/2 con 1/2 ?

El producto de números naturales se basa en la idea de tomar varias veces la misma cantidad. Así, multiplicar $2 \cdot 3$ representa tomar dos veces el número 3. Pensando que las fracciones representan tomar una cierta cantidad de una fracción del elemento unidad, multiplicar 1/2 con 1/2 representa tomar la mitad del elemento unidad 1 y a esto tenemos que tomarle la mitad nuevamente. Entonces, lo que queda será la cuarta parte de la unidad, con lo cual es natural definir el producto: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Más generalmente, el producto de dos fracciones a/b y c/d lo definimos como:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejercicio 4.1. Verificar que el producto de números naturales adentro del conjunto de fracciones coincide con el producto usual.

Juan y Leandro, no contentos con el premio consuelo que les dieron por la mañana en el torneo de beach voley, deciden participar por la tarde en un torneo de tejos organizado en el mismo balneario. Como su desempeño fue otra vez bastante pobre, recibieron otro sandwich de milanesa. ¿Cuántos sandwiches de milanesa recibió cada uno?

Sabemos que ganaron 1/2 sandwich por la mañana y 1/2 sandwich por la tarde, con lo cual la respuesta esperada es que cada uno recibió un sandwich. Dicho de otro modo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La pregunta natural, es ¿cómo hacer para sumar dos fracciones cualesquiera?

Podemos deducirlo pensando las fracciones como partes de una unidad. Supongamos que queremos sumar las fracciones 1/3 y 1/2, ¿cuánto da?

El problema que tenemos es que estamos sumando partes del elemento unidad que están expresadas en escalas distintas. Consideremos el siguiente problema para entender qué está pasando: si caminamos dos kilómetros por la mañana y tres cuadras por la tarde (asumiendo que las cuadras tienen exactamente 100 metros cada una), ¿cuánto caminamos en todo el día?

Para poder dar una respuesta debemos usar la misma escala de distancia en ambos datos, ya sean cuadras, metros, etc. Si pensamos en cuadras, el resultado es fácil, porque caminamos 20 cuadras por la mañana y 3 por la tarde, en total caminamos 23 cuadras.

Al sumar fracciones pasa exactamente lo mismo, para poder sumar dos fracciones debemos tener los números en la misma escala. En nuestro problema queremos sumar 1/3 con 1/2, que dan escalas distintas. Si recordamos lo que dijimos antes de que las fracciones no tienen una representación única, podemos decir que da lo mismo 1/3 que 2/6 y 1/2 que 3/6. Al expresar los números en la misma escala sumar es fácil, así:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{1}{2} &= \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Más generalmente, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, podemos definir su suma como:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d}\\ &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\end{aligned}$$

Queremos ver que la suma en el conjunto de números racionales es asociativa, conmutativa, tiene un elemento neutro y que todo elemento tiene inverso. Además, el producto en el conjunto de número racionales quitando el cero satisface las mismas propiedades, y que vale la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto. Para poder probar esto, primero necesitamos tener una definición correcta de los números racionales.

□ 1. Definición formal

Al comenzar el estudio de los números racionales, vimos que las fracciones resultaban muy útiles. El problema que tenemos es que distintas fracciones pueden representar lo mismo. Por ejemplo: la fracción 1/2 y la fracción 2/4 representan la misma cantidad. Podemos pensar el conjunto de fracciones como:

$$\{(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;:\; d \neq 0\}$$

donde el par (n, d) representa la fracción $\frac{n}{d}$. ¿Cómo sabemos si dos fracciones representan la misma cantidad?

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma cantidad, vamos a escribir $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$.

Es fácil convencerse de que las fracciones 1/2 y 2/4 representan la misma cantidad, porque si partimos el elemento unidad en 4 y tomamos dos pedazos, terminamos tomando la mitad del elemento unidad. De igual modo, es claro que las fracciones 1/2 y 3/6 también representan la misma cantidad. Pero si nos dan las fracciones 2/4 y 3/6, a pesar de que representan la misma cantidad, no es tan claro el porqué. Nuevamente, tenemos el problema que las proporciones que consideramos no son las mismas, en un caso partimos la unidad en 6 y en el otro en 4.

Asumamos el siguiente principio: si $p \in \mathbb{N}$, las fracciones $\frac{n}{d}$ y $\frac{p \cdot n}{p \cdot d}$ representan la misma cantidad. Esto es bastante intuitivo, dado que lo que estamos haciendo es a cada parte d-ésima de la unidad la partimos en p pedacitos, y tomamos todos ellos.

Esto nos alcanza para determinar si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma cantidad o no. Simplemente, tomamos una escala que sirva para las dos (como hicimos al sumar fracciones). El denominador natural para considerar es $b \cdot d$, aunque el mínimo común múltiplo de b y d también sirve y, en varios casos, es más útil.

Ahora:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \sim \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$$

Pero las fracciones $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ y $\frac{b \cdot c}{b \cdot d}$ representan el mismo número racional solamente cuando $a \cdot d = b \cdot c$. En conclusión, probamos que:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \qquad \text{si y sólo si} \qquad a \cdot d = b \cdot c \tag{4}$$

Luego, en el conjunto $\{(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : d \neq 0\}$ definimos la siguiente relación: decimos que el par (a, b) está relacionado con el par (c, d) (y escribimos $(a, b) \sim (c, d)$) solamente cuando $a \cdot d = b \cdot c$.

Veamos que la relación que acabamos de definir es una relación de equivalencia:

- **Reflexiva**: por definición, $(n, d) \sim (n, d)$ si $n \cdot d = d \cdot n$, lo que es cierto porque el producto es conmutativo.
- **Simétrica**: Si $(a, b) \sim (c, d)$, ¿vale que $(c, d) \sim (a, b)$? Por definición:

  $$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c$$
  $$(c, d) \sim (a, b) \text{ si y sólo si } c \cdot b = d \cdot a$$

  Es claro que si $a \cdot d = b \cdot c$, entonces $c \cdot b = d \cdot a$ por ser conmutativo el producto de números enteros.
- **Transitiva**: Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, ¿vale que $(a, b) \sim (e, f)$? Por definición:

  $$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c$$
  $$(c, d) \sim (e, f) \text{ si y sólo si } c \cdot f = d \cdot e$$
  $$(a, b) \sim (e, f) \text{ si y sólo si } a \cdot f = b \cdot e$$

  El dato es que valen las igualdades:

  $$a \cdot d = b \cdot c$$
  $$c \cdot f = d \cdot e$$

  Si multiplicamos la primera ecuación por f (que es $\neq 0$) y la segunda por b (que también es $\neq 0$), tenemos que:

  $$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f$$
  $$b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e$$

  Luego: $a \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e$, y como d es no nulo tenemos que $a \cdot f = b \cdot e$, o sea $(a, b) \sim (e, f)$.

Como vimos en el Capítulo 0, una relación de equivalencia en un conjunto parte al mismo en clases de equivalencia. Luego, definimos el **conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales** como el conjunto de clases de equivalencia del conjunto de fracciones por la relación $\sim$, o sea:

$$\mathbb{Q} = \{(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : d \neq 0\}/\sim$$

Dentro de todas las fracciones que representan el mismo número, hay una que se destaca sobre las otras. Cuando vamos a comprar al supermercado pedimos medio kilogramo de pan, y no dos cuartos de kilogramo. Elegimos la fracción 1/2 por sobre la fracción 2/4 por tener denominador lo más chico posible. Esto hace que tengamos que partir la unidad lo menos posible.

Decimos que la fracción $\frac{a}{b}$ es **irreducible** si b es positivo y $mcd(a, b) = 1$.

¿Será cierto que toda fracción es equivalente a una única fracción irreducible?

La respuesta es *sí*, pero debemos demostrar este hecho formalmente. La mejor manera de demostrarlo es dar el algoritmo que lleva una fracción a su irreducible.

Supongamos que queremos hallar la fracción irreducible equivalente a la fracción 15/21, ¿qué hacemos?

Lo primero que uno se debe preguntar es si esta fracción ya es irreducible o no. Cumple que el denominador es positivo, con lo cual la primera condición se satisface. Luego debemos calcular $mcd\,(15, 21)$. Si factorizamos ambos números, tenemos que $15 = 3 \cdot 5$ y $21 = 3 \cdot 7$, con lo cual $mcd(15, 21) = 3$.

Esto no sólo nos dice que la fracción no es irreducible, sino que además nos está diciendo que tanto el numerador como el denominador son múltiplos de 3. Si dividimos a ambos por 3, obtenemos la fracción 5/7 que es equivalente a 15/21 y es irreducible por ser $mcd(5, 7) = 1$. Luego, nuestro algoritmo de reducción es bastante simple: si b es positivo, la manera de obtener una fracción irreducible es:

$$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{a/\,mcd\,(a,b)}{b/\,mcd\,(a,b)}$$

Así, $\frac{35}{14} \sim \frac{5}{2}$, $\frac{18}{24} \sim \frac{3}{4}$, etc. ¿Qué pasa si b es negativo?

Este caso también es bastante conocido. Al pensar en números racionales, es normal considerar que 1/-2 representa lo mismo que -1/2 . Efectivamente ambas fracciones son equivalentes. En general, $\frac{a}{-b} \sim \frac{-a}{b}$. Luego, si el denominador es negativo, cambiando el signo del numerador y el denominador obtenemos una fracción equivalente, pero ahora con denominador positivo. Así, $\frac{33}{-121} \sim \frac{-3}{11}$.

Las fracciones irreducibles satisfacen dos propiedades importantes:

- toda fracción es equivalente a una única fracción irreducible;
- si $\frac{a}{b}$ es irreducible y $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$, entonces c y d son un múltiplo entero de a y de b, o sea hay un número entero m tal que $c = a \cdot m$ y $d = b \cdot m$.

Para ver la primera propiedad, ya dimos un algoritmo que a una fracción le asocia una fracción irreducible, con lo cual sabemos que toda fracción es equivalente a una fracción irreducible. Lo que falta ver es que hay una sola. Supongamos que tenemos dos fracciones irreducibles $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ equivalentes. Por definición esto quiere decir que:

$$ad = bc \tag{5}$$

En particular, d divide a bc. Como $mcd(c, d) = 1$ (por ser $\frac{c}{d}$ irreducible), tenemos que d divide a b. Análogamente, b divide a ad y es coprimo con a con lo cual b divide a d. Vimos que si dos números se dividen mutuamente, entonces son iguales o difieren en un signo. Al ser ambos positivos, tenemos que $b = d$. Luego (5) dice que $a = c$, porque b (y d) es $\neq 0$.

EJERCICIO 4.2. Demostrar la segunda propiedad de las fracciones irreducibles.

Notemos la importancia de la primera propiedad. Nos dice que todo número racional se puede representar de forma única como una fracción irreducible. De ahí la importancia de las fracciones irreducibles, ellas son como los números racionales, ¡y sin ambigüedad!

Ahora que tenemos bien definidos a los números racionales, se nos presentan algunos problemas interesantes que a simple vista pasan desapercibidos. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} \sim \frac{2}{6}$$

o sea las primeras dos fracciones y las últimas dos representan el mismo número racional. ¿Cómo sumamos el número racional representado por 1/2 con el número racional representado por 1/3? Veamos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & = \frac{2+3}{6} & = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{6} & = \frac{6+4}{12} & = \frac{10}{12} \\ \frac{2}{4}+\frac{1}{3} & = \frac{6+4}{12} & = \frac{10}{12} \\ \frac{2}{4}+\frac{2}{6} & = \frac{12+8}{24} & = \frac{20}{24} \end{cases}$$

A pesar de que las fracciones que obtenemos son distintas, todas representan el mismo número racional, ya que:

$$5 \cdot 12 = 60 = 6 \cdot 10 \quad \text{con lo cual} \quad \frac{5}{6} \sim \frac{10}{12}$$

$$10 \cdot 24 = 240 = 12 \cdot 20 \quad \text{con lo cual} \quad \frac{10}{12} \sim \frac{20}{24}$$

Esta verificación no es suficiente, ya que hay infinitas fracciones que representan el mismo número racional. En este ejemplo:

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8} \sim \dots$$

y:

$$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6} \sim \frac{3}{9} \sim \frac{4}{12} \sim \dots$$

¿Será cierto que si sumamos una fracción cualquiera del primer renglón con una fracción cualquiera del segundo obtenemos fracciones equivalentes? Si este fuera el caso, entonces definimos la suma de la clase de la fracción 1/2 con la clase de la fracción $1/3$ como la clase de la fracción 5/6.

Como 1/2 es irreducible, las fracciones equivalentes a ella son de la forma $\frac{r}{2 \cdot r}$ con $r \in \mathbb{Z}$. Lo mismo sucede con 1/3, las fracciones equivalentes con ella son de la forma $\frac{s}{3 \cdot s}$, con $s \in \mathbb{Z}$. La suma de dos de ellas es:

$$\begin{aligned} \frac{r}{2 \cdot r} + \frac{s}{3 \cdot s} &= \frac{r \cdot 3 \cdot s + s \cdot 2 \cdot r}{2 \cdot r \cdot 3 \cdot s} \\ &= \frac{5 \cdot r \cdot s}{6 \cdot r \cdot s} \end{aligned}$$

Como $\frac{5 \cdot r \cdot s}{6 \cdot r \cdot s} \sim \frac{5}{6}$ vemos que el resultado es siempre una fracción equivalente a 5/6. Resumiendo, hemos probado que definir la suma de 1/2 o cualquier fracción equivalente con 1/3 o cualquier fracción equivalente da fracciones equivalentes a 5/6.

El mismo argumento nos sirve para definir la suma de dos números racionales cualesquiera: si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan dos números racionales, el número racional representado por la fracción $\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$ no depende de la fracción elegida en cada clase.

Dado que este punto es crucial para la suma de números racionales, veamos cómo se demuestra: supongamos que tenemos dos fracciones $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ y $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$ equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente. O sea:

$$a\cdot\tilde{b}=\tilde{a}\cdot b \qquad (6)$$

$$c\cdot\tilde{d}=\tilde{c}\cdot d \qquad (7)$$

Queremos ver que las fracciones $\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$ y $\frac{\tilde{a}\cdot\tilde{d}+\tilde{b}\cdot\tilde{c}}{\tilde{b}\cdot\tilde{d}}$ son equivalentes, o sea que:

$$\tilde{b}\cdot\tilde{d}\cdot(a\cdot d+b\cdot c)=b\cdot d\cdot(\tilde{a}\cdot\tilde{d}+\tilde{b}\cdot\tilde{c})$$

Haciendo las distributivas, lo que queremos ver es que:

$$a\cdot\tilde{b}\cdot d\cdot\tilde{d}+b\cdot\tilde{b}\cdot c\cdot\tilde{d}=\tilde{a}\cdot b\cdot d\cdot\tilde{d}+b\cdot\tilde{b}\cdot\tilde{c}\cdot d$$

Esta igualdad se deduce de multiplicar (6) por $d\cdot\tilde{d}$, (7) por $b\cdot\tilde{b}$ y sumarlas.

Ejercicio 4.3. Demostrar que si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes a las fracciones $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ y $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$ respectivamente, entonces la fracción $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ es equivalente a la fracción $\frac{\tilde{a}\cdot\tilde{c}}{\tilde{b}\cdot\tilde{d}}$

Luego la suma y producto usual de números racionales (haciéndolo con cualquier fracción que los represente) tiene sentido.

2. Propiedades

La suma y el producto de números racionales son operaciones asociativas y conmutativas. El 1 es el neutro para el producto y el 0 es el neutro para la suma. La suma satisface que todo elemento tiene inverso, siendo el inverso del número racional representado por la fracción $\frac{a}{b}$ el número racional representado por la fracción $-\frac{a}{b}$. Además, todo número no nulo tiene inverso para el producto. Si $\frac{a}{b}$ representa un número racional no nulo, $a \neq 0$. Luego la fracción $\frac{b}{a}$ también representa un número racional, y por cómo definimos el producto, es claro que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

También vale la propiedad distributiva. Para toda terna de números racionales $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ vale:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}\\ \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f} &= \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\end{aligned}$$

Recordemos que un conjunto con dos operaciones que satisfacen todas las propiedades enunciadas anteriormente se llama un *cuerpo*. Por eso se suele hablar del *cuerpo de números racionales* más que del conjunto de números racionales.

Consideremos el siguiente problema: en una reunión de ex-alumnos de la Escuela 314, dos viejos conocidos rememoraban sus grandes logros de la época de estudiantes. En el medio de la conversación surgió la duda de quién había conseguido comer más cantidad de pizza en una sola noche. Uno de ellos afirmó haber comido 19 porciones en la pizzería del barrio, aclarando que cada pizza traía 8 porciones. El otro involucrado afirmó haberse comido 14 porciones en una pizzería donde cada pizza traía simplemente 6 porciones. Contando las anécdotas, coincidieron en que el tamaño total de cada pizza era el mismo en las dos pizzerías, cambiando simplemente el número de porciones. ¿Quién comió más?

Si la primera persona comió 19 porciones de pizza y cada pizza traía 8 porciones, entonces comió 19/8 de pizza. Con el mismo razonamiento vemos que la segunda persona comió 14/6 de pizza. La pregunta es entonces, ¿cuál de estos dos números es más grande, 19/8 o 14/6?

La forma de comparar números racionales es muy similar a cómo definimos la suma de ellos. Es bastante claro que si queremos comparar dos números racionales dados por fracciones **con el mismo denominador**, sólo tenemos que comparar los numeradores como números enteros. Así, 2/4 es menor que 3/4. Si los denominadores de las fracciones consideradas no son iguales, podemos encontrar un par de fracciones que representen el mismo número racional, y cuyos denominadores sí sean los mismos. Así, por ejemplo, si queremos comparar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ donde b y d son positivos, tenemos:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \sim \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$$

Decimos que $\frac{a}{b}$ **es menor** que $\frac{c}{d}$ (y escribimos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$) si $a \cdot d < b \cdot c$.

Como queremos definir un orden en números racionales, debemos chequear que esta definición no depende de la fracción particular que elegimos para representar al número racional. Para simplificar la cuenta, supongamos que tenemos dos fracciones irreducibles $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ y dos fracciones cualesquiera $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ y $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$ equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ respectivamente, con $\tilde{b}$ y $\tilde{d}$ positivos. Veamos que con la definición anterior es lo mismo pedir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ que pedir $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} < \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$.

Como $\frac{a}{b}$ es irreducible, al ser equivalente a $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$, existe un número entero r tal que:

$$\tilde{a} = a \cdot r \qquad \text{y} \qquad \tilde{b} = b \cdot r$$

Además, como b y $\tilde{b}$ son positivos, r es positivo también. De forma análoga, existe un entero positivo s tal que:

$$\tilde{c} = c \cdot s \qquad \text{y} \qquad \tilde{d} = d \cdot s$$

Por definición:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} & \text{si vale que} \quad a \cdot d < b \cdot c \\ \frac{a \cdot r}{b \cdot r} < \frac{c \cdot s}{d \cdot s} & \text{si vale que} \quad a \cdot r \cdot d \cdot s < b \cdot r \cdot c \cdot \end{cases}$$

Como r y s son positivos, pedir que los números a, b, c, d satisfagan una desigualdad o la otra es lo mismo (multiplicar o dividir una desigualdad por un número positivo no la cambia).

De manera similar definimos las otras relaciones de orden (a saber >, ≤, ≥). Volviendo al problema de la pizza, queremos comparar las fracciones 19/8 y 14/6. Aunque la segunda fracción no es irreducible, al ser los denominadores positivos podemos aplicar la definición. Así, la primera persona comió más, dado que 19/8 > 14/6 porque 114 = 19 · 6 > 14 · 8 = 112.

Ejercicio 4.4. Probar las siguientes propiedades para números racionales:

- dadas fracciones $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{c_1}{d_1}, \frac{c_2}{d_2}$, con $\frac{a_1}{b_1} < \frac{c_1}{d_1}$ y $\frac{a_2}{b_2} < \frac{c_2}{d_2}$, vale que:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} < \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}$$

- dadas fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, con $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y una fracción $\frac{e}{f} > 0$, vale que:

$$\frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} < \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d}$$

3. Representación decimal de los números racionales

Representamos los números racionales como clases de equivalencia de fracciones. Hay otra manera de expresar un número racional, que a veces resulta muy útil y es la llamada **representación decimal**. Al estudiar los números enteros vimos que los podemos representar como una tira de números entre el 0 y el 9. Los números racionales tienen una representación parecida, pero la tira de números que los representa no tiene por qué ser finita, aunque sí tener un cierto período. Esto es que, a partir de un cierto lugar, comienza a repetirse indefinidamente.

Es importante observar que la expresión decimal de un número no es necesariamente única. Por ejemplo, los números 1 y $0{,}\overline{9}$ representan el mismo número racional, donde escribimos una barra arriba de una tira de números para indicar que en el desarrollo decimal del número esta expresión se repite una vez después de otra, infinitas veces. Veremos que ésta es la única ambigüedad que puede tener una expresión decimal.

¿Cómo representamos 1/2 en expresión decimal? La idea es copiar lo que hacemos con los números enteros. La escritura 1.986 es una notación para el número:

$$1.986 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

O sea escribimos potencias de diez, y a cada potencia la multiplicamos por un número entre 0 y 9. Podemos tratar de hacer lo mismo para potencias negativas de diez, y marcar en la escritura (con una coma) el lugar a partir de donde comienzan las potencias negativas de 10.

Por ejemplo:
$$\begin{aligned}1{,}21 &= 1\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2}\\ &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}\\ &= \frac{121}{100}\end{aligned}$$

Luego la expresión 1,21 representa el número racional $\frac{121}{100}$. De forma análoga, la expresión:
$$\begin{aligned}0{,}5 &= 0\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1}\\ &= \frac{0}{1} + \frac{5}{10}\\ &= \frac{5}{10} \sim \frac{1}{2}\end{aligned}$$

O sea la fracción $\frac{1}{2}$ se puede representar por la expresión 0,5.

Ejercicio 4.5. Representar por fracciones irreducibles los números racionales dados en expresión decimal 3,25; 4,3 y 3,14.

En estos ejemplo vimos cómo pasar de una escritura decimal a una fracción (en los casos más sencillos). ¿Qué escritura decimal le asociamos a una fracción?

Como vimos en la sección de números enteros, si tomamos dos números enteros a y b, con b no nulo y positivo, entonces existen un cociente q y un resto r, tales que:
$$a = q\cdot b + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r < |b|$$

Esto nos permite escribir la fracción $\frac{a}{b}$ como:
$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{q\cdot b + r}{b}\\ &= \frac{q\cdot b}{b} + \frac{r}{b}\\ &= q + \frac{r}{b}\end{aligned}$$

y como $r < b$, la fracción $\frac{r}{b} < 1$. Así, todo número racional, se escribe como un número entero más un número racional entre 0 y 1. Por ejemplo:
$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2} < 1$, el número $\frac{3}{2}$ debe comenzar con un 1 su escritura decimal y sólo nos resta calcular qué viene después de la coma. A pesar de que ya vimos que $\frac{1}{2} = 0{,}5$, tratemos de deducir este resultado. Supongamos que $\frac{1}{2} = 0, x$ ..., o sea que en la escritura decimal, el número $\frac{1}{2}$ comienza con el dígito x luego de la coma (que debe ser un número entre 0 y 9). Veamos cómo calculamos x.

Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿qué pasa si multiplicamos el número 1,21 por 10? Si recordamos la definición del número 1,21, tenemos:
$$1{,}21 = 1\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2}$$

Luego:
$$\begin{aligned}10\cdot 1{,}21 &= 10\cdot(1\cdot 10^0+2\cdot 10^{-1}+1\cdot 10^{-2})\\ &= 1\cdot 10^1+2\cdot 10^0+1\cdot 10^{-1}\\ &= 12{,}1\end{aligned}$$

Ejercicio 4.6. Probar que multiplicar un número racional por 10 mueve la coma un lugar hacia la derecha en la expresión decimal del mismo.

Recordemos que queremos calcular el primer dígito de la expresión decimal de $\frac{1}{2}$ luego de la coma. Si $\frac{1}{2} = 0, x \ldots$, entonces:

$$\begin{aligned}10\cdot\frac{1}{2} &= 5\\ &= x,\ldots.\end{aligned}$$

Luego $x = 5$ y hay un solo dígito no nulo en la expresión decimal de $\frac{1}{2}$, o sea:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Sigamos el mismo razonamiento para calcular la expresión decimal de $\frac{1}{4}$. Como $0 < \frac{1}{4} < 1$, la expansión decimal de $\frac{1}{4}$ debe tener un cero a la izquierda de la coma, o sea:

$$\frac{1}{4} = 0,\ldots.$$

Llamemos x al primer dígito luego de la coma de su expresión decimal. Luego:

$$\begin{aligned}10\cdot\frac{1}{4} &= \frac{5}{2}\\ &= x,\ldots. \end{aligned}\tag{8}$$

Si calculamos el cociente y resto de dividir 5 por 2, tenemos que:

$$5 = 2\cdot 2+1$$

con lo cual el número $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. Ahora $0 < \frac{1}{2} < 1$. Luego $x = 2$, o sea $\frac{1}{4} = 0{,}2 \ldots$.

¿Cómo calculamos el dígito que está a la derecha del 2? Hacemos exactamente lo mismo, si lo llamamos x, vale que:

$$\frac{1}{4} = 0{,}2x\ldots \qquad \text{con lo cual} \qquad \begin{aligned}100\cdot\frac{1}{4} &= 25\\ &= 2x,\ldots.\end{aligned}$$

Luego $x = 5$ y $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Si miramos la ecuación (8), teníamos que:

$$10\cdot\frac{1}{4} = 2+\frac{1}{2}$$

como $\frac{1}{2} = 0{,}5$, de acá también se deduce que $10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ con lo cual $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

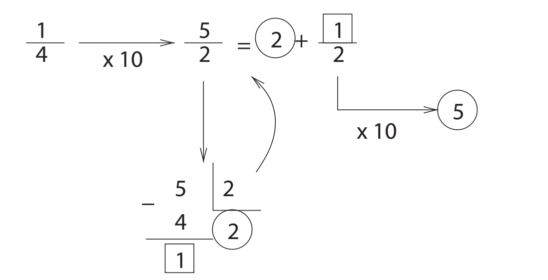

Figura 3. *Cálculo de la expresión decimal de 1/4.*

Podemos ver, gráficamente en la figura 3, lo que hicimos.

Para calcular la expresión decimal de una fracción $\frac{a}{b}$ basta considerar el caso en que a y b son positivos, dado que en caso contrario podemos considerar la fracción $|a|/|b|$ y agregar el signo correcto a la expresión decimal de esta fracción. El siguiente es un algoritmo para, dado un número racional expresado por una fracción $\frac{a}{b}$ (con a y b positivos), calcular su expresión decimal:

1. calcular el cociente y resto de la división de a por b. Llamemos q al cociente y r al resto;
2. si r es cero, terminar y mostrar q como respuesta. Caso contrario, poner q y una coma en lo que será la respuesta;
3. calcular el cociente y resto de dividir $10 \cdot r$ por b. Llamemos q al cociente y r al resto. Pegar q a la derecha de lo que será la respuesta;
4. si r es cero, terminar y mostrar la respuesta. Caso contrario, volver al paso 3.

Veamos cómo funciona el algoritmo calculando la expresión decimal de 31/25.

1. Calculamos cociente y resto de dividir 31 por 25:

$$31 = 1 \cdot 25 + 6$$

Así obtenemos que 31/25 = 1 + 6/25 = 1, ...

2. Multiplicamos 6 por 10 y calculamos el cociente y resto de dividir 60 por 25:

$$60 = 2 \cdot 25 + 10$$

Entonces el primer dígito decimal es 2, o sea 31/25 = 1,2 ....

3. Multiplicamos el resto 10 por 10 y calculamos el cociente y resto de dividirlo por 25. Así,

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 &= 100 \\ &= 4 \cdot 25 + 0 \end{aligned}$$

Como el resto es 0, terminamos, y la expresión decimal de 31/25 es 1,24.

Ejercicio 4.7. Calcular la expresión decimal del número racional 1/8.

Calculemos la expresión decimal del número racional 1/3. Usemos el algoritmo que dimos antes.

1. Calculamos el cociente y resto de dividir 1 por 3. El cociente es 0 y el resto es 1, con lo cual la expresión decimal comienza con 0.
2. Multiplicamos 1 por 10 y calculamos el cociente y resto de la división. Así:

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$

Luego el primer dígito luego de la coma es 3, 1/3 = 0,3....

3. Ahora debemos multiplicar el resto 1 por 10 y calcular el cociente y resto de dividir por 3. ¡Esto es repetir exactamente el último paso que hicimos! Es claro que continuar este proceso va a ser dividir infinitas veces 10 por 3 y agregar el cociente de esta división en la expresión decimal. O sea:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0{,}33333...\\ &= 0{,}\overline{3}\end{aligned}$$

En este ejemplo, la expresión decimal del número 1/3 no es finita. Lo que sucede es que se repite infinitamente el número 3 en dicha expresión.

¿Cómo entendemos que algunos números racionales tengan expresión finita y otros no? Lo que sucede es que los números con expresión finita son exactamente aquéllos donde el denominador de la fracción irreducible sólo posee potencias de 2 y de 5 en su factorización. Veamos esto con un ejemplo concreto. Si tenemos un número N con expresión decimal finita, después de la coma hay solamente finitos dígitos. Digamos:

$$N = 342{,}1572$$

Como multiplicar una expresión decimal por 10 mueve la coma un lugar a la derecha en dicha expresión, si movemos la coma 4 lugares tendremos el número entero 3.421.572. O sea multiplicando N por 10^4 obtenemos un número entero. Luego N se puede representar por la fracción:

$$\begin{aligned}N &= \frac{3.421.572}{10.000}\\ &= \frac{855.393}{2.500}\end{aligned}$$

La fracción 3.421.572/10.000 no es irreducible, pero satisface que la factorización de su denominador sólo tiene potencias de 2 y de 5. Luego, el denominador de la fracción irreducible (en este caso 2.500) es un divisor de 10^4 en cuyo caso en su factorización aparecen solamente potencias de 2 y 5 (aunque las potencias pueden ser menores que 4).

Esta idea que reflejamos en un ejemplo particular sirve para una expansión decimal cualquiera.

Ejercicio 4.8. Calcular las fracciones irreducibles que representen los números racionales 26,2914; 290,4377 y 946,17482.

Resta por ver la recíproca de la afirmación: si el denominador de la fracción irreducible de un número racional tiene solamente potencias de 2 y de 5 en su factorización, entonces la expresión decimal de dicho número es finita. Veamos nuevamente un ejemplo concreto para entender cómo probar esta afirmación. Miramos el número:

$$\begin{aligned}N &= \frac{1.979}{2^3 \cdot 5^4}\\ &= \frac{1.979}{5.000}\end{aligned}$$

Veamos la potencia de 2 y de 5 que aparecen en el denominador, y miremos la más grande. En nuestro ejemplo, la potencia más grande es 4, que aparece como exponente del número primo 5. Si multiplicamos a nuestro número N por 10^4, tenemos que el resultado es un número entero. Efectivamente, como $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$, y tanto la potencia del primo 2 como la potencia del primo 5 en el denominador eran menores o iguales que 4, al multiplicar N por 10^4, vemos que el denominador se cancela. Así:

$$\begin{aligned} 10^4 \cdot \frac{1.979}{2^3 \cdot 5^4} &= 2^4 \cdot 5^4 \cdot \frac{1.979}{2^3 \cdot 5^4} \\ &= 2 \cdot 1\ 979 \\ &= 3\ 958 \end{aligned}$$

En conclusión, corriendo la coma 4 lugares hacia la derecha terminamos con un número entero con lo cual el número N no puede tener más que 4 dígitos después de la coma. El argumento para un número racional cualquiera es el mismo.

Ejercicio 4.9. Mirando la factorización del denominador de los siguientes números, decir cuántos dígitos tiene su expresión decimal, y calcularla explícitamente:

$$\frac{8.729}{2.000}, \quad \frac{101}{2.500} \quad \text{y} \quad \frac{19.283}{6.250}$$

Comenzamos diciendo que los números racionales tienen expresión decimal periódica, pero no es claro por qué debe pasar esto. Calculemos algunas expresiones decimales para entender la afirmación:

1. La expresión decimal de 1/11:

   - $1 = 11 \cdot 0 + 1$
   - $1 \cdot 10 = 10 = 11 \cdot 0 + 10$
   - $10 \cdot 10 = 100 = 11 \cdot 9 + 1$

   Como nos aparece nuevamente el 1 como resto, debe ser:

   $$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$$

   Observar que al calcular las divisiones, obtuvimos el conjunto de restos {1, 10} que es un subconjunto de $\mathbb{Z}_{11}$ cerrado por multiplicación, ya que $10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$. Además, el período de la expresión decimal tiene 2 cifras. Es claro que al obtener un resto por segunda vez, el desarrollo decimal comienza a repetirse.

2. La expresión decimal de 5/11:

   - $5 = 11 \cdot 0 + 5$
   - $5 \cdot 10 = 50 = 11 \cdot 4 + 6$
   - $6 \cdot 10 = 60 = 11 \cdot 5 + 5$

   Como nos aparece nuevamente el 5 como resto, debe ser:

   $$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$$

Notar que la expresión decimal es multiplicar por 5 la expresión decimal de 1/11.

3. La expresión de 1/7:

- $1 = 7 \cdot 0 + 1$
- $1 \cdot 10 = 10 = 7 \cdot 1 + 3$
- $3 \cdot 10 = 30 = 7 \cdot 4 + 2$
- $2 \cdot 10 = 20 = 7 \cdot 2 + 6$
- $6 \cdot 10 = 60 = 7 \cdot 8 + 4$
- $4 \cdot 10 = 40 = 7 \cdot 5 + 5$
- $5 \cdot 10 = 50 = 7 \cdot 7 + 1$

Como nos aparece nuevamente el 1 como resto, debe ser:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

Observar que al calcular las divisiones, obtuvimos el conjunto de restos $\{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$ que son todos los números no nulos de $\mathbb{Z}_7$ y el período de la expresión decimal tiene 6 cifras.

4. La expresión de 1/15:

- $1 = 15 \cdot 0 + 1$
- $1 \cdot 10 = 10 = 15 \cdot 0 + 10$
- $10 \cdot 10 = 100 = 15 \cdot 6 + 10$

Como nos aparece nuevamente el 10 como resto, debe ser:

$$\frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}$$

¿Por qué el período no comienza en el primer lugar como antes? El problema que tenemos es que aparece una potencia de 5 en el denominador. De la igualdad de números racionales:

$$\begin{aligned}\frac{1}{15} &= \frac{2}{30}\\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}\end{aligned}$$

vemos que la expresión decimal de 1/15 es la expresión decimal de $2/3 = 0,\overline{6}$ corriendo la coma un lugar a la izquierda.

Son justamente los números racionales cuyos denominadores en fracción irreducible son divisibles por 2 o por 5 aquellos donde el período no comienza necesariamente luego de la coma.

Veamos que todo número racional tiene una expresión decimal periódica y a la vez que toda expresión decimal periódica corresponde a la expresión de un número racional. Además, esta asociación es biyectiva, si identificamos las expresiones decimales de período $\overline{9}$ con la expresión obtenida sumándole una unidad al dígito anterior al período. Por ejemplo, $0{,}23\overline{9} = 0{,}24$.

Si $\frac{a}{b}$ es la fracción irreducible de un número racional con a y b positivos, el algoritmo para calcular la expresión decimal es dividir a por b y calcular el resto. Llamemos r_1 al primer resto y q_0 al primer cociente obtenidos en este proceso. El resto satisface $0 \leq r_1 \leq b-1$ (por definición de resto). Luego multiplicamos r_1 por 10 y volvemos a dividirlo por b. Llamemos r_2 a este segundo resto y q_1 al cociente. Continuando con el proceso, creamos una sucesión de restos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ y una sucesión de cocientes $q_0, q_1, q_2, \ldots$, donde cada uno de los restos es un número entre 0 y $b - 1$. Como el conjunto $\{0, 1, \ldots, b - 1\}$ tiene b elementos, entre $r_1, r_2, \ldots r_{b+1}$ hay dos números iguales.

Para ilustrar la idea, supongamos que el resto r_2 es igual al resto r_5. Luego $10 \cdot r_2 = 10 \cdot r_5$. Al dividir por b, los restos de ambos números también son iguales. Así, $r_3 = r_6$. Análogamente, $r_4 = r_7$, etc. O sea la tira de restos r_2, r_3, r_4 se va a repetir siempre. A la vez los cocientes de dividir $10 \cdot r_2$ por b y $10 \cdot r_5$ por b también son los mismos, con lo cual $q_2 = q_5$, o sea el segundo y el quinto lugar de la expresión decimal coinciden. Repitiendo el argumento, vemos que en la expresión decimal se repite siempre la tira $q_2q_3q_4$, o sea:

$$\frac{a}{b} = q_0, q_1\overline{q_2q_3q_4}$$

Ejercicio 4.10. Mirar los ejemplos de los cálculos de expresión decimal anteriores, y comprobar que el período se da justamente entre los primeros restos que se repiten.

Ejercicio 4.11. Deducir del argumento dado anteriormente que la longitud del período de la fracción $\frac{a}{b}$ es a lo sumo b. Más aún, probar que en realidad el período es a lo sumo $b - 1$.

El procedimiento para, dado un número en expresión decimal periódica, asociarle una fracción que lo represente, es más o menos conocido. Por ejemplo, al número:

$$0{,}23\overline{46981} \rightsquigarrow \frac{23}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{46.981}{99.999}$$

o sea: primero escribimos 0,2346981 como 0,23+0,0046981, donde al último número (salvo correr la coma) el período le comienza en el primer dígito. Escribimos 0,23 como fracción de la manera descrita anteriormente, y a un número **periódico puro** (esto es que el período comienza justo después de la coma) le asociamos la fracción cuyo numerador es el período, y cuyo denominador es poner tantos nueves como dígitos tiene el período.

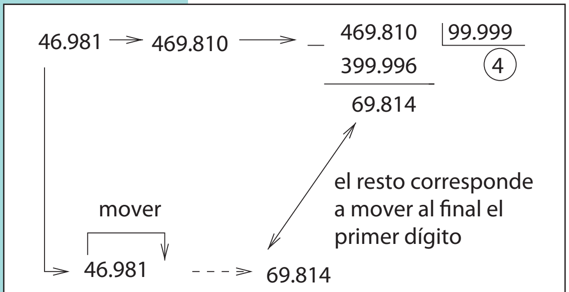

Figura 4. *Cálculo del cociente y resto de dividir 46.981 por 99.999.*

Es en este proceso donde queda claro que al número $0{,}\overline{9}$ le asociamos la fracción 9/9 = 1. De ahí la identificación de estas dos expresiones (hay un significado analítico de las expresiones decimales que también justifica esta identificación).

Veamos que las asociaciones que definimos son una la inversa de la otra (o sea que si a una expresión decimal le asociamos una fracción y a esta fracción le calculamos su expresión decimal, volvemos a la expresión con la que empezamos). ¿Qué pasa al multiplicar el número 46.981 por 10 y calcular el primer resto de dividir el resultado por 99.999? Como se ve en la figura 4, al dividir 469.810 por

99.999, el resto es 69.814, o sea se corrió el primer dígito de 46.981 (el número antes de ser multiplicado por 10) al último lugar, y el cociente es 4.

Si N es un número natural de n dígitos que no es el número que posee n nueves, o sea $N \neq 10^n - 1$ (por ejemplo $N \neq 999 = 10^3 - 1$), al dividir $10 \cdot N$ por el número que tiene n nueves, el cociente es el primer dígito de N y el resto se obtiene moviendo el primer dígito de N al último lugar. Veamos el argumento en un ejemplo, supongamos que $N = 69.814$. Al multiplicarlo por 10, tenemos el número:

$$\begin{aligned}
10 \cdot 69.814 &= 698.140 \\
&= 6 \cdot 100.000 + 98.140 \\
&= 6 \cdot (99.999 + 1) + 98.140 \\
&= 6 \cdot 99.999 + 98.140 + 6 \\
&= 6 \cdot 99.999 + 98.146
\end{aligned}$$

Como 98.146 es menor que 99.999, tenemos que el cociente es 6 y el resto es 98.146 (por unicidad del cociente y resto).

Es importante notar que usamos que $N \neq 10^n - 1$ en el argumento, ya que si lo fuera el cociente sería 10 y el resto 0. Este caso se corresponde con las expresiones decimales que tienen período $\overline{9}$.

Si continuamos multiplicando los restos por 10 y calculando el cociente y resto de la división por 99.999, es claro que obtendremos la expresión decimal $0,\overline{46981}$. Luego hemos mostrado que tenemos una biyección entre números racionales y expresiones decimales periódicas con período distinto de $\overline{9}$.

De los argumentos antes dados se deduce la siguiente observación: si la fracción irreducible $\frac{a}{b}$ tiene un desarrollo periódico puro de longitud r, entonces b divide a $10^r - 1$. Esto se debe a que la fracción que representa un período puro de r lugares se obtiene tomando el período como numerador y $10^r - 1$ como denominador. Al ser esta fracción igual a la fracción irreducible $\frac{a}{b}$, debe ser $10^r - 1$ un múltiplo de b.

En particular, podemos saber el período de una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ mirando la mínima potencia de 10 que es congruente a 1 módulo b. Por ejemplo, para la fracción 1/7 tenemos:

$$\begin{aligned}
10^1 &\equiv 10 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{7} \\
10^2 &\equiv 10 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7} \\
10^3 &\equiv 10 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{7} \\
10^4 &\equiv 10 \cdot 6 \equiv 4 \pmod{7} \\
10^5 &\equiv 10 \cdot 4 \equiv 5 \pmod{7} \\
10^6 &\equiv 10 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Luego $7 \mid 10^6 - 1$ y 6 es la menor potencia con esta propiedad, con lo cual el período de 1/7 es de longitud 6, como vimos en el tercer ejemplo. De igual forma:

$$10 \equiv 1 \pmod{3}$$

con lo cual el período de 1/3 tiene longitud 1.

Ejercicio 4.12. Calcular la longitud del período de la expresión decimal de la fracción 1/9.091 sin calcular explícitamente el período.

Ejercicio 4.13. Hallar un número primo p tal que la fracción $1/p$ tenga período de longitud 2. Hacer lo mismo para períodos de longitud 3, 4, 5 y 6.

4. Curiosidades

En esta sección daremos algunas curiosidades sobre los números racionales, aunque dichos resultados no serán utilizados en el próximo capítulo.

¿Cómo se ven los números racionales en la recta? Si pensamos que la recta real es una línea llena de puntos, y en ella dibujamos los números enteros, vemos en la figura 5 que éstos están bien separados unos de otros.

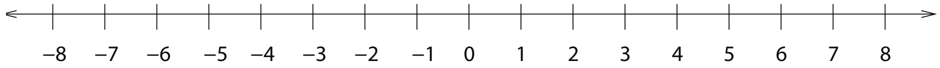

Figura 5. *Puntos enteros en la recta real.*

Si miramos los puntos racionales en la recta real no vemos agujeros entre ellos. Esto se debe a que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay un número racional. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan números racionales y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, el promedio de ambos satisface:

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d}$$

como es fácil verificar. Así, por ejemplo, si tomamos los promedios comenzando por los números 0 y 1 y repetimos este proceso en todos los promedios nuevos que nos aparecen, tenemos los números:

$$\begin{gathered} 0 < 1, \\ 0 < \tfrac{1}{2} < 1, \\ 0 < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{4} < 1, \\ 0 < \tfrac{1}{8} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{3}{8} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{5}{8} < \tfrac{3}{4} < \tfrac{7}{8} < 1 \\ \vdots \end{gathered}$$

Luego de n pasos, tenemos el conjunto de números racionales $\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, \frac{2^n}{2^n} = 1\}$ La distancia entre dos de ellos consecutivos es $\frac{1}{2^n}$. Si n es muy grande, estos números están muy amontonados entre sí. Es por esto que si tratamos de mirar los puntos racionales entre 0 y 1, para nosotros el dibujo está completamente lleno, a pesar de que faltan varios números (todos los irracionales, como por ejemplo $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Con esta noción geométrica de los números racionales, pareciera ser que los números racionales son muchos más que los números naturales, dado que “parecen llenar” la recta real, pero esto no es así. Dar una definición correcta del significado de que dos conjuntos tengan la misma cantidad de elementos está más allá del contenido de este libro por la extensión del tema, más que por la dificultad del contenido.

Es interesante, sin embargo, corregir la impresión errónea de que hay más números racionales que enteros. Para ello vamos a listar todos los números racionales en orden. Esto es: a cada número natural le podemos asociar un número racional de forma tal que cubrimos todos los números racionales. Es bastante intuitivo suponer que si un conjunto tiene *menos* elementos que otro, no vamos a poder asociarle a los elementos del segundo conjunto elementos distintos del primero. Por ejemplo, con los números {1, 2, 3} no podemos numerar el conjunto {♢, ♡, ♠, ♣}.

Una forma de numerar los números racionales se ve en la figura 6, donde los números en rojo no son tenidos en cuenta por no ser fracciones irreducibles.

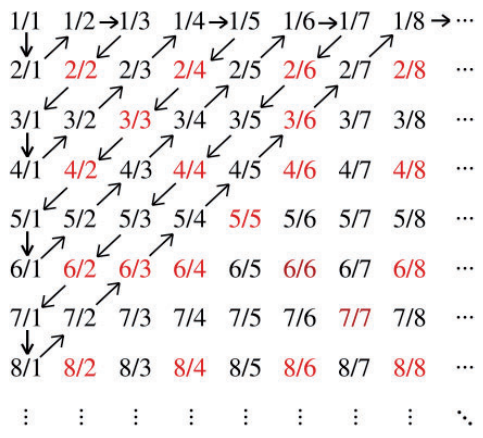

Figura 6. *Una forma de listar los números racionales.*