6. Números complejos

1. Introducción

Ya vimos en el capítulo de números reales que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada. Los números negativos, en cambio, no tienen una raíz **real**. Uno de los grandes avances de la matemática se produjo al *inventar* raíces cuadradas de los números negativos. Esto lo hicieron fundamentalmente Girolamo Cardano y Lodovico Ferrari alrededor de 1540. No obstante, esto significaba un salto de abstracción que no todos los matemáticos de la época estaban en condiciones de dar. La definición moderna de los números complejos es muy posterior, y se debe a William Rowan Hamilton, en el año 1833. Para definir los complejos, Hamilton introdujo un nuevo símbolo, la letra i, que corresponde a un número cuyo cuadrado es -1. Claro, si queremos operar con este nuevo número, tenemos que ser capaces de sumarle otros números reales, y también de multiplicarlo por ellos. Por ejemplo, tenemos que permitir números como $2{,}34 \cdot \pi \cdot i - 4{,}5 \cdot (2 + 3 \cdot i)$. ¿Cuáles son, exactamente, todos los números que estamos agregando al introducir i? Si b es un número real, agregamos $b \cdot i$. Y si a es un número real, agregamos $a + b \cdot i$. Y podemos ver que con esto basta.

Si tenemos dos números de esta forma, $a + b \cdot i$ y $a' + b' \cdot i$, entonces los podemos sumar y obtenemos un número de esta forma: $(a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) = a + a' + b \cdot i + b' \cdot i = (a + a') + (b + b') \cdot i$. Y también los podemos multiplicar. Usando la propiedad distributiva, la conmutativa y que $i^2 = -1$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}(a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) &= a \cdot a' + a \cdot b' \cdot i + b \cdot i \cdot a' + b \cdot i \cdot b' \cdot i \\ &= a \cdot a' + (a \cdot b' + b \cdot a') \cdot i + b \cdot b' \cdot i^2 \\ &= a \cdot a' + (a \cdot b' + b \cdot a') \cdot i + b \cdot b' \cdot (-1) \\ &= a \cdot a' + (a \cdot b' + b \cdot a') \cdot i - b \cdot b' \\ &= (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + b \cdot a') \cdot i\end{aligned}$$

Es decir, el producto de dos números de la forma $a + b \cdot i$ es de la forma $\bar{a} + \bar{b} \cdot i$. Quiere decir que podemos definir nuestro nuevo conjunto de números, el de los números complejos, como aquellos que se escriben en la forma $a + b \cdot i$, donde a y b son números reales. Usualmente, omitimos el punto y escribimos $a + bi$. El conjunto de los números complejos se escribe $\mathbb{C}$.

Ejemplo. Los siguientes son números complejos: $2 + 3i$; $2 + 3{,}14i$; $-17 + 3/7i$; $-2 + i$ (que es igual a $-2 + 1i$); $2i$ (que es igual a $0 + 2i$); 1 (que es igual a $1 + 0i$). Si $z = 2 + 3i$ y $w = 1 + 4i$, entonces:

$$\begin{aligned}z + w &= (2 + 3i) + (1 + 4i) \\ &= 3 + 7i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
zw &= (2 + 3i) \cdot (1 + 4i)\\
&= 2 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 1 + 3i \cdot 4i\\
&= 2 - 12 + (8 + 3)i\\
&= -10 + 11i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z - w &= (2 + 3i) - (1 + 4i)\\
&= 2 + 3i - 1 - 4i\\
&= 1 - i
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6.1. Si $z = -2+6i$ y $w = \frac{1}{2} + 2i$, calcular $z - w$, $w - z$, $2z$, $4w - 3z$, $z \cdot w$, z^2.

Así como los números reales, salvo el 0, tienen inverso, los números complejos, salvo el 0, también tienen inverso. Pero para encontrar el inverso de un número complejo hay que aprender un poco más de la estructura de los números complejos.

Se dice que un número complejo tiene una *parte real* y una *parte imaginaria*. La parte real es la que no acompaña a i, mientras que la parte imaginaria es el número real que acompaña a i. Si $z = 2 + 7i$, la parte real de z es 2 y la parte imaginaria de z es 7. Escribimos $\mathrm{Re}(z)$ la parte real de z, e $\mathrm{Im}(z)$ la parte imaginaria de z. Es decir, $\mathrm{Re}(2 + 7i) = 2$ e $\mathrm{Im}(2 + 7i) = 7$. Otros ejemplos: $\mathrm{Re}(\pi - i) = \pi$, $\mathrm{Im}(\pi - i) = -1$, $\mathrm{Re}(i) = \mathrm{Re}(0 + 1 \cdot i) = 0$, $\mathrm{Im}(1) = \mathrm{Im}(1 + 0 \cdot i) = 0$.

Observación. Los números reales son también números complejos; por ejemplo $4 = 4 + 0i$, y 4 es un número natural, por lo tanto también entero, racional y real, y por lo tanto también complejo. En términos de conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Vistos como números complejos, los reales son aquéllos que tienen parte imaginaria igual a 0.

Si $z = a + bi$ es un complejo, llamamos *conjugado* de z al complejo $a - bi$, y lo escribimos $\bar{z}$. Es decir:

$$\overline{a + bi} = a - bi, \quad \text{y entonces } \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$$

Ejercicio 6.2. El conjugado de $7 + 2i$ es $7 - 2i$. ¿Cuál es el conjugado de $7 - 2i$? Calcular además $\bar{4}$, $\bar{i}$, $-\bar{i}$.

La principal utilidad de conjugar números complejos es que $z \cdot \bar{z}$ es un número real, como podemos ver en esta cuenta, en la que $z = a + bi$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bia - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Y no sólo es un número real: es un real positivo, distinto de 0 a menos que z sea 0. Esto es porque como a y b son números reales, $a^2 \geq 0$ y $b^2 \geq 0$. Y la única manera en que $a^2 + b^2$ puede ser 0 es que tanto a como b sean 0, es decir que z sea 0.

☐ 2. Dibujos

Para trabajar con números complejos resulta útil graficarlos en el plano. Para eso, dibujamos un complejo $z = a + bi$ con coordenadas a y b. Es decir, sus coordenadas están dadas por su parte real y su parte imaginaria. En la figura 1 dibujamos 3; $1 + i$; $2 - i$; $-3 + 2i$; $-3 - 2i$; i y $-i$. Si queremos medir la distancia en el plano de un número complejo al 0, debemos usar el teorema de Pitágoras. En la figura 2 se calcula la distancia de $3 + 2i$ al 0, que es $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Dado un complejo $z = a + bi$, su módulo $|z|$ es la distancia al 0. Es decir:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Antes vimos que si $z = a + bi$, entonces $z\,\bar{z} = a^2 + b^2$. Lo que vemos, entonces es que:

$$z\bar{z} = |z|^2. \text{ En particular, } z\bar{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ y}$$
$$z\bar{z} = 0 \text{ si y sólo si } z = 0$$

Y esto dice cómo encontrar los inversos de los números complejos, ya que si $z \neq 0$, entonces $z\,\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, por lo que:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Ejemplos.

$$\begin{aligned}(3+4i)^{-1} &= \frac{3-4i}{9+16}\\ &= \frac{3-4i}{25}\\ &= \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+3i)/(3+4i) &= (2+3i)\cdot(3+4i)^{-1}\\ &= (2+3i)\cdot(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i)\\ &= \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 4}{25} + \frac{-2\cdot 4 + 3\cdot 3}{25}i\\ &= \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i\end{aligned}$$

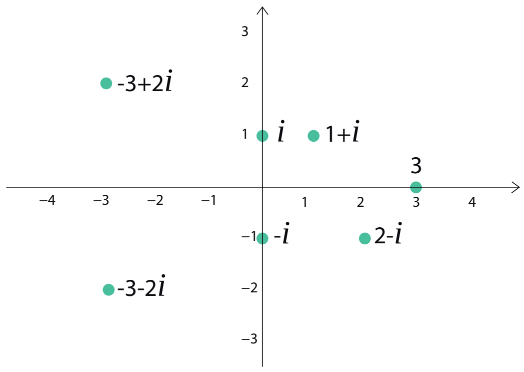

***Figura 1.** Algunos números complejos.*

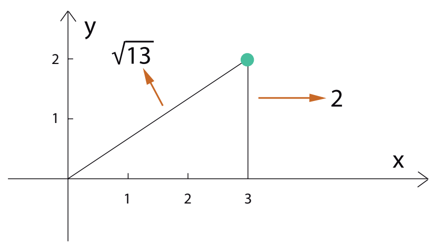

***Figura 2.** El módulo es la distancia al 0.*

Ejercicio 6.3. Verificar que $(3 + 4i) \cdot (3/25 - 4/25\, i) = 1$ y que $(2 + 3i) = (18/25 + 1/25\, i) \cdot (3 + 4i)$.

☐ 3. Distancia y desigualdad triangular

Dado que los complejos se dibujan en el plano y el módulo da una noción de distancia, podemos con los números complejos recuperar parte de la geometría en dos dimensiones.

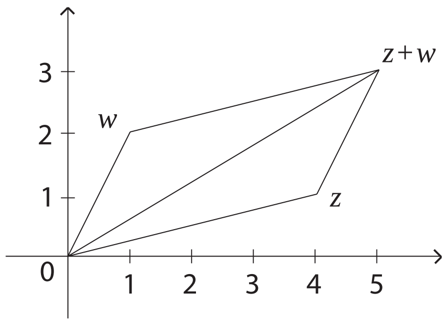

Figura 3. *Suma de $z = 4 + i$ más $w = 1 + 2i$.*

Lo primero que debemos hacer es entender la suma de dos complejos de manera geométrica. Lo que resulta, es algo que muchos denominan *regla del paralelogramo*; podemos verlo en la figura 3. Allí se suman $z = 4 + i$ con $w = 1 + 2i$. Para hacerlo analíticamente, simplemente sumamos la parte real y la imaginaria: $(4 + i) + (1 + 2i) = 5 + 3i$. Para hacerlo geométricamente, se puede pensar que en el punto $4 + i$ se para un vector[15] paralelo a w. Este vector termina en $1+2i$ pero corrido en $4+i$; esto es, termina en $5 + 3i$. Pero la suma es conmutativa; también puede pensarse que en el punto $1 + 2i$ paramos un vector paralelo a z, que terminará también en $5 + 3i$. Las dos formas de hacer la cuenta dan los lados de un paralelogramo que tiene vértices 0, z, w y $z + w$.

Pensemos ahora en el triángulo con vértices en 0, z y $z + w$. Como en todo triángulo, la longitud de uno de sus lados es menor a la suma de las longitudes de los otros dos. De hecho, es claro que ir de 0 a $z + w$ directamente es más corto que ir de 0 a z y luego de z a $z + w$. En términos de módulos, la distancia de 0 a $z +w$ es $|z + w|$, la distancia de 0 a z es $|z|$ y la distancia de z a $z + w$ es $|w|$. Resulta entonces que:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Esto vale para cualquier z y w en $\mathbb{C}$. Si ahora reemplazamos z por $x - w$ en la desigualdad anterior, resulta $|x - w + w| \leq |x - w| + |w|$. Es decir:

$$|x - w| \geq |x| - |w|$$

Esto vale para cualquier x y w en $\mathbb{C}$.

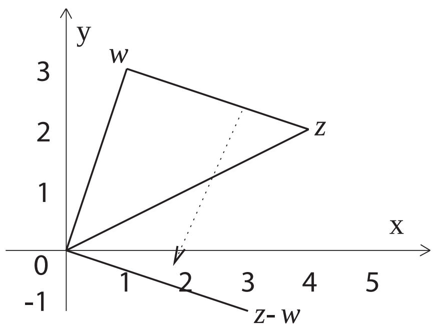

Figura 4. *Diferencia y distancia.*

En el párrafo anterior utilizamos un concepto clave, que permite obtener la distancia entre dos complejos cualesquiera. Ya vimos que el módulo $|z|$ da la distancia de z a 0. ¿Cómo se puede obtener la distancia entre dos complejos z y w ? La solución es cambiarle el nombre a z y w. Lo que vimos es que la distancia de x a $x + y$ es $|y|$. Si ahora x es z y $x + y = w$, entonces $y = w - x = w - z$, con lo que obtenemos que la distancia de z a w es $|y| = |w - z|$. Esta deducción que hicimos algebraicamente también se puede hacer de manera geométrica, como en la figura 4. En la figura calculamos geométricamente $z - w$ que, visto como vector, es paralelo al vector que nace en w y termina en z. Luego, la distancia de w a z, que es el módulo de ese vector, coincide con $|z - w|$.

[15] Un *vector* es un segmento con un sentido. Esto es, *comienza* en un punto y *termina* en otro. En un *segmento*, en cambio, no se distingue un extremo de otro.

4. Los complejos forman un cuerpo

Así como los racionales o los reales, el conjunto de los números complejos forma un *cuerpo*. Es decir, la suma es conmutativa, asociativa y con elemento neutro (el 0), y todo elemento tiene un opuesto. Además, el producto es conmutativo y asociativo, con elemento neutro y todo elemento distinto del 0 tiene inverso. Y el producto distribuye sobre la suma. De todas estas propiedades, nos queda por verificar la asociativa y la conmutativa del producto, y la propiedad distributiva. Veamos que el producto es conmutativo. Para probarlo, usamos que el producto *de números reales* es conmutativo.

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i = ca - db + (da + cb)i = (c + di)(a + bi)$$

De la misma manera, usando que el producto de números reales es distributivo sobre la suma, tenemos:

$$\begin{aligned}(a + bi)\,((c + di) + (e + fi)) &= (a + bi)\,((c + e) + (d + f)i)\\ &= a(c + e) - b(d + f) + (a(d + f) + b(c + e))i\\ &= ac + ae - bd - bf + (ad + af + bc + be)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) &= (ac - bd + (ad + bc)i) + (ae - bf + (af + be)i)\\ &= ac - bd + ae - bf + (ad + bc + af + be)i\end{aligned}$$

y vemos que ambas expresiones coinciden.

Por último, usando que el producto de números reales es asociativo, podemos probar que el de los complejos lo es:

$$\begin{aligned}(a + bi)\,((c + di)(e + fi)) &= (a + bi)(ce - df + (cf + de)i)\\ &= ace - adf - b(cf + de) + (a(cf + de) + b(ce - df))i\\ &= ace - adf - bcf - bde + (acf + ade + bce - bdf)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a + bi)(c + di))\,(e + fi) &= (ac - bd + (ad + bc)i)(e + fi)\\ &= ace - bde - (ad + bc)f + (acf - bdf + ade + bce)i\\ &= ace - bde - adf - bcf + (acf - bdf + ade + bce)i\end{aligned}$$

y vemos que ambas expresiones coinciden.

5. Un cuerpo no ordenado

Los racionales y los reales están ordenados: hay una relación $x < y$ que dice cuándo un número es menor que otro. Ese orden se comporta bien con la suma y el producto. A diferencia de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ no se puede establecer un orden que se lleve igual de bien con las operaciones. Veamos esto. Primero vamos a definir qué entendemos por "llevarse bien con la suma y el producto".

Una relación de orden $<$ en un cuerpo es **compatible con las operaciones** si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. es una relación de orden **total**, esto es, si para todo par de elementos x, y una (y sólo una) de las siguientes afirmaciones es cierta: $x < y$, o $x = y$, o $x > y$;
2. si $x < y$ y z es un elemento cualquiera, entonces $x + z < y + z$;
3. si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x\,y > 0$.

Primero, veamos que si un cuerpo tiene un orden compatible con las operaciones entonces sucede que:

- si $a < a'$ y $b < b'$ entonces $a + b < a' + b'$;
- si $x > 0$ entonces $-x < 0$, y si $x < 0$ entonces $-x > 0$;
- para todo $x \neq 0$, es $x^2 > 0$.

Para probar la primera de estas afirmaciones, se utiliza dos veces la propiedad 1: por un lado, $a + b < a' + b$ y por el otro $a' + b < a' + b'$, así que $a + b < a' + b < a' + b'$.

La segunda afirmación se prueba por reducción al absurdo. Supongamos que $x > 0$ y que no es cierto que $-x < 0$. Entonces $-x \geq 0$, es decir, o bien $-x = 0$, o bien $-x > 0$. Pero si fuese $-x = 0$, entonces sería $x = 0$, que contradice $x > 0$. Y si fuese $-x > 0$, entonces como también $x > 0$ resulta $-x + x > 0+0$, es decir $0 > 0$, que es absurdo.

Por último, la tercera afirmación tiene dos posibilidades. O bien $x > 0$, en cuyo caso $x^2 = x \cdot x > 0$ por la propiedad 3, o bien $x < 0$, en cuyo caso $-x > 0$ y $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ de nuevo por la propiedad 3.

Ahora, supongamos que en los complejos hubiese un orden compatible con las operaciones. Entonces, podemos preguntarnos por i. Por la tercera de las afirmaciones anteriores, como $i \neq 0$, debe ser $i^2 > 0$, es decir $-1 > 0$. Pero entonces: $1 = -(-1) < 0$. Y por otra parte, $1 = (-1)^2 > 0$, nuevamente por la tercera afirmación. Tenemos entonces la contradicción de $1 < 0$ por un lado y $1 > 0$ por el otro.
Conclusión: no hay orden posible que sea compatible con las operaciones.

□ 6. Forma polar

Ya hemos dibujado números complejos en el plano, y definimos el módulo de un complejo como la distancia al 0. Ahora vamos a definir el *argumento,* que es un ángulo. Más precisamente, si z es un número complejo distinto de 0, su argumento es el ángulo entre la semirrecta que sale de 0 y pasa por 1 y la semirrecta que sale de 0 y pasa por z, yendo de la primera a la segunda en sentido antihorario, como se muestra en la figura 5. Al argumento del complejo z lo escribimos $\arg(z)$, y, midiendo los ángulos en radianes, se puede tomar como un número entre 0 y 2π. El argumento es 0 si z es un real positivo, y es π si es un real negativo.

Recordemos cómo se mide un ángulo en radianes. Según la explicación técnica, se toma la intersección del ángulo sobre la circunferencia de radio 1 con centro en el vértice del ángulo, como en la figura 6, y se mide la *longitud* del arco que resulta.

La explicación sencilla es que $360°$ son 2π radianes y otros ángulos se obtienen proporcionalmente: $180°$ son π radianes, $90°$ son $\pi/2$ radianes, $60°$ son $\pi/3$ radianes, $120°$ son $2\pi/3$ radianes, etc.

Ejercicio 6.4. Calcular los argumentos de 4; $1 + i$; $2 + 2i$; $8i$; $-8i$; -7; $2-2i$.

Teniendo el argumento y el módulo de un complejo, se puede saber cuál es el complejo. Efectivamente, mirando la figura 7, se observa que el coseno y el seno del argumento de z se pueden calcular en términos de a y b.

Si $z = a + bi$ y $z \neq 0$, entonces $\cos(\arg(z)) = \dfrac{a}{|z|}$, y $\operatorname{sen}(\arg(z)) = \dfrac{b}{|z|}$.

Obtenemos que:

$$a = |z| \cos(\arg(z)),\ b = |z| \operatorname{sen}(\arg(z))$$

Entonces, un complejo se puede expresar por medio de su módulo y su argumento. Usaremos en este libro la notación $z = (|z|\ ;\ \arg(z))$. Es decir, $(r\ ;\ \alpha)$ es el complejo que tiene módulo r y argumento α. Esta forma de expresar un complejo se llama *forma polar*, para distinguirla de la *forma binómica* $z = a + bi$.

Como dijimos antes, de la forma polar a la binómica se pasa con senos y cosenos: $(r\ ;\ \alpha) = r \cos \alpha + ir \operatorname{sen} \alpha$. De la binómica a la polar se hace con las inversas: arcoseno y arcocoseno. Si $z = a + bi \neq 0$, entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y α es el ángulo tal que $\cos \alpha = a/r$ y $\operatorname{sen} \alpha = b/r$. Se puede tomar $\arccos a/r$, que dará un ángulo entre 0 y π, es decir con parte imaginaria ≥ 0. Si $b \geq 0$, ése es el argumento, $\alpha = \arccos a/r$. En cambio, si $b < 0$ se debe tomar $\alpha = 2\pi - \arccos a/r$.

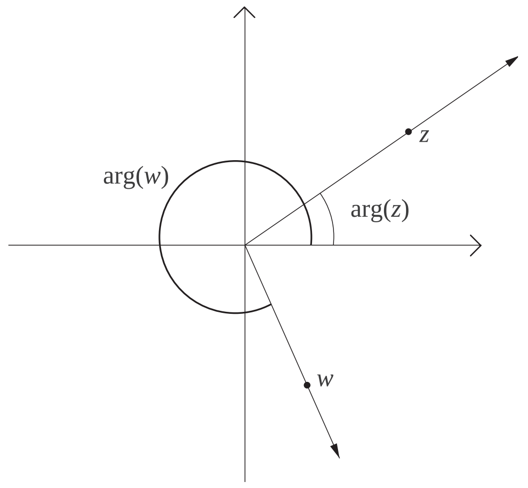

Figura 5. *El argumento es el ángulo.*

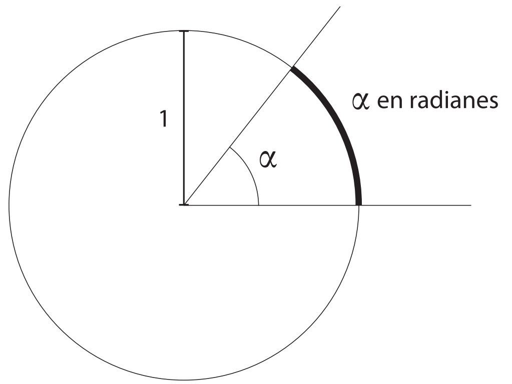

Figura 6. *Un ángulo medido en radianes.*

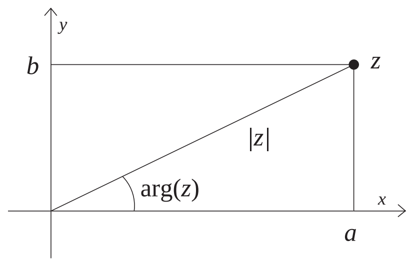

Figura 7. *Forma polar y binómica.*

Ejemplo. Si $z = 1 + i$, entonces $\arg(z) = \pi/4$ y $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, por lo que la forma polar de z es $(\sqrt{2}\ ;\ \pi/4)$.

Ejemplo. Si la forma polar de un complejo es $(3\ ;\ \pi/3)$, entonces para conocer su forma binómica calculamos $a = 3\cos(\pi/3) = 3/2$, y $b = 3\ \mathrm{sen}(\pi/3) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}i$, por lo que el complejo es $\frac{3}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Observación. Cuando hablamos de ángulos, entendemos que el ángulo 2π es igual al ángulo 0. Más generalmente, no cambia un ángulo si le sumamos 2π, ni si lo restamos. Por la misma razón, tampoco cambia si sumamos o restamos 4π, ó 6π, 8π, etc. En otras palabras, un complejo, con módulo r y argumento α, es decir con forma polar $(r\ ;\ \alpha)$, se puede escribir también con forma polar $(r\ ;\ \alpha + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 6.5. Pasar a forma polar $1 + i$; $1 - i$; $-1 + i$; $-1 - i$; $2 + 2i$; $-3 - 3i$; $4 - 4i$; 4 y -5.

□ 7. Leyes de de Moivre

Una de las ventajas de la forma polar es la simplicidad con la que permite calcular productos y cocientes. Recordemos que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$ *y* que $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta$. Ahora, si:

$$z = (r\ ;\ \alpha) \text{ y } w = (s\ ;\ \beta)$$

entonces:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\ .s\,(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= rs\,((\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) + i(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta)) \\ &= rs\,(\cos(\alpha + \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

Es decir, la forma polar de $z \cdot w$ es $(rs\ ;\ \alpha + \beta)$. Geométricamente, multiplicar por un complejo z con forma polar $(r\ ;\ \alpha)$, modifica módulos y argumentos de la siguiente manera: los módulos se multiplican por r (si $r > 1$ las cosas se agrandan, si $r = 1$ quedan igual y si $r < 1$ se achican), y los ángulos se giran α. Podemos ver el efecto en la figura 8. El efecto de multiplicar por i, cuya forma polar es $(1; \frac{\pi}{2})$, es rotar un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda, sin agrandar ni achicar. El efecto de multiplicar por $(1/2; \frac{\pi}{3})$ es rotar $\frac{\pi}{3}$ hacia la izquierda, y multiplicar los tamaños por 1/2, es decir reducirlos a la mitad. En la figura original, la cintura es horizontal y apunta al eje de coordenadas (el 0). Cuando se lo multiplica por $(1/2; \frac{\pi}{3})$ sigue apuntando hacia el 0 pero con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con respecto al eje horizontal. Por otra parte, el efecto de multiplicar por $(2\ ;\ -\frac{\pi}{6})$ es rotar hacia la izquierda $-\frac{\pi}{6}$, es decir $\frac{\pi}{6}$ hacia la derecha, y multiplicar los tamaños por 2.

Ya vimos cómo multiplicar en forma polar; veamos ahora cómo dividir. Supongamos que $w \neq 0$ (es decir, que $s \neq 0$) y calculemos la forma polar de z/w. Para eso, debemos encontrar la forma polar de w^{-1}. Pero w^{-1} es el complejo que multiplicado por w da 1, y la forma polar de 1 es $(1\ ;\ 0)$. Entonces, si la forma polar de w^{-1} es $(t\ ;\ \gamma)$, debe ser $(s\ ;\ \beta) \cdot (t\ ;\ \gamma) = (1\ ;\ 0)$, es decir, $(st\ ;\ \beta + \gamma) = (1\ ;\ 0)$, por lo que: $t = s^{-1}$ y $\gamma = -\beta$. Como se trata de ángulos, es lo mismo decir $\gamma = -\beta$ que $\gamma = 2\pi - \beta$. Entonces, la forma polar de z/w es la de $z \cdot w^{-1}$, y es $(r\,;\,\alpha) \cdot (1/s;\, -\beta) = (\,r/s;\, \alpha - \beta)$.

Ejemplo. Multiplicamos y dividimos algunos complejos en forma polar:

$$(2\,;\,\frac{\pi}{2})(3\,;\,\frac{\pi}{3}) = (6\,;\,\frac{5\pi}{6})$$

$$\begin{aligned}(2{,}23\,;\,\pi)(1{,}24\,;\,\frac{3\pi}{2}) &= (2{,}7652\,;\,\frac{5\pi}{2})\\ &= (2{,}7652\,;\,\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

$$(2\,;\,\frac{\pi}{2})/(3\,;\,\frac{\pi}{3}) = (\frac{2}{3}\,;\,\frac{\pi}{6})$$

$$\begin{aligned}(2\,;\,\frac{\pi}{2})^{-1} &= (\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\pi}{2})\\ &= (\frac{1}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2})\end{aligned}$$

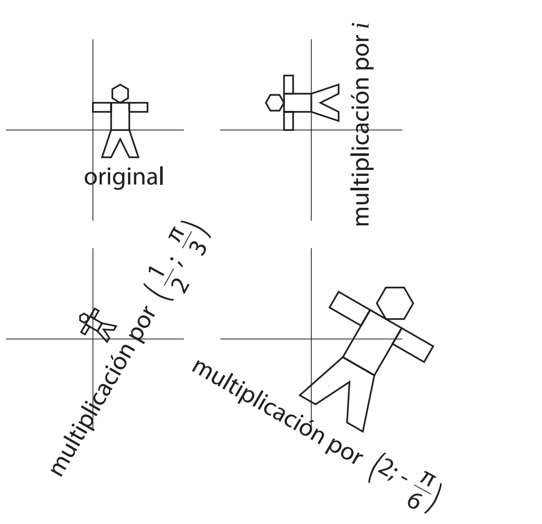

Figura 8. *Multiplicación por distintos complejos.*

□ 8. Raíces de la unidad

Si n es un número natural, el conjunto de los números complejos z tales que $z^n = 1$ tiene propiedades importantes. Vamos a usar la notación G_n para ese conjunto:

$$G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Los elementos de G_n se suelen llamar *raíces n-ésimas de la unidad*, o *raíces n-ésimas de* 1. Veamos qué forma polar tienen. Si $z = (r\,;\,\alpha)$ está en G_n, entonces $z^n = 1$. Como z^n tiene forma polar $(r^n;\, n\alpha)$, entonces:

$$(r^n;\, n\alpha) = (1\,;\,0)$$

Mirando los módulos, esto quiere decir $r^n = 1$. Como r es un número real ≥ 0, esta condición tiene como solución únicamente $r = 1$. Por otra parte, el ángulo $n\alpha$ debe ser igual al ángulo 0, es decir que pueden ser iguales como números, o diferir en 2π, 4π, etc. Esto es, puede ser $n\alpha = 0$, ó $n\alpha = 2\pi$, ó $n\alpha = 4\pi$, etc. En otras palabras, $n\alpha = 2k\pi$, donde k es un número entero. Dividiendo por n, obtenemos $\alpha = 2k\pi/n$ para un entero k. Luego, los elementos de G_n son los complejos con forma polar $(1\,;\,2k\pi/n)$, con $k \in \mathbb{Z}$. A primera vista, podría parecer que son infinitos, porque hay uno por cada k entero. Sin embargo, el complejo que corresponde a $k = n$ da como ángulo 2π, que es el mismo ángulo que 0, y por lo tanto tomando $k = 0$ y $k = n$ tenemos la misma solución. Más aún, ¿cuándo dos ángulos $2k\pi/n$ y $2j\pi/n$ son iguales?

La respuesta es que son iguales cuando existe un entero t tal que $2k\pi/n - 2j\pi/n = 2t\pi$.

Esto es, cuando $\frac{2(k-j)\pi}{n} = 2t\pi$, es decir cuando $k - j = tn$. La conclusión es que $(1\ ;\ \frac{2k\pi}{n})$ y $(1\ ;\ \frac{2j\pi}{n})$ son el mismo complejo cuando $k \equiv j$ (mód n). Por lo tanto, hay n soluciones distintas de la ecuación $z^n = 1$, que son los números complejos:

$$(1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}) = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n}), \qquad \text{con } k = 0, 1, \cdots, n-1$$

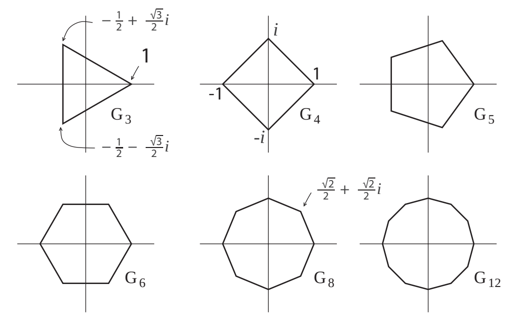

Figura 9. *El grupo G_n para distintos n.*

Todos estos números están a distancia 1 del 0, y entre uno y el siguiente hay siempre el mismo ángulo. Lo que resulta, entonces, es que son los vértices de un n-ágono regular centrado en 0, como puede verse en la figura 9. En la figura mostramos el n-ágono completo, aunque los elementos de G_n son sólo los vértices. Hay algunos valores de n para los que podemos calcular más explícitamente los elementos de G_n (es decir, sin senos ni cosenos sino sólo con raíces). Por ejemplo, como $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces:

$$G_3 = \{1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

De manera similar se obtiene que:

$$G_4 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\},$$
$$G_6 = \{1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\},$$
$$G_8 = \{1,\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\}$$

Para cada n natural, el conjunto G_n tiene las siguientes propiedades:

- $1 \in G_n$, ya que $1^n = 1$.
- Si $z \in G_n$ entonces $z^{-1} \in G_n$, ya que $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$.
- Si $z \in G_n$ y $w \in G_n$ entonces $z \cdot w \in G_n$, ya que $(zw)^n = z^n w^n = 1 \cdot 1 = 1$.

De hecho, podemos calcular explícitamente el producto y los inversos de las raíces n-ésimas. Si $z = (1\ ;\ 2k\pi/n)$ y $w = (1\ ;\ 2j\pi/n)$, entonces:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= (1\ ;\ -\frac{2k\pi}{n}) \\ &= (1\ ;\ 2\pi - \frac{2k\pi}{n}) \\ &= (1\ ;\ \frac{2(n-k)\pi}{n}) \end{aligned} \qquad\qquad zw = (1\ ;\ \frac{2(k+j)\pi}{n})$$

Una de las aplicaciones de las raíces n-ésimas es la de calcular explícitamente los vértices de algunos n-ágonos regulares (no sólo centrados en 0 y con un vértice en 1). Por ejemplo, ¿cómo podemos encontrar los vértices de un hexágono regular centrado en 0, tal que uno de sus vértices es $1 + 3i$? La solución viene de recordar que multiplicar por un complejo rota y "estira" el plano complejo. Entonces, si a cada uno de los elementos de G_6 los multiplicamos por $1 + 3i$, rotaremos el hexágono que forma G_6 y lo estiraremos de manera que $1 + 3i$ será uno de sus vértices. Hagamos la prueba, llamando $z_0, \dots, z_5$ a los elementos de G_6:

k	z_k	$z_k \cdot (1+3i)$
0	1	$1+3i$
1	$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i$
2	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}+\frac{-3+\sqrt{3}}{2}i$
3	-1	$-1-3i$
4	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}+\frac{-3-\sqrt{3}}{2}i$
5	$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i$

¿Cómo podemos encontrar el hexágono regular que tiene centro en $4 + 3i$ y que tiene un vértice en $6 + 2i$? Lo que debemos pensar ahora es que, así como multiplicar por un complejo rota y estira el plano, sumar un complejo lo traslada. Si al hexágono buscado le restamos el centro, obtendremos un hexágono regular centrado en 0 al que podemos calcularle los vértices. Y luego, a los vértices de ese hexágono centrado en 0 les sumamos nuevamente el centro, para obtener el hexágono buscado.

Cuando al vértice $6 + 2i$ le restamos el centro $4 + 3i$, nos queda $2 - i$. Entonces, primero buscamos los vértices del hexágono centrado en 0 y que tiene un vértice en $2 - i$. Eso se hace, como ya vimos, multiplicando los elementos de G_6 por $2 - i$. Y finalmente les volvemos a sumar $4 + 3i$. Obtenemos así los vértices:

k	z_k	$z_k \cdot (2-i)$	$z_k \cdot (2-i)+(4+3i)$
0	1	$2-i$	$6+2i$
1	$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{10+\sqrt{3}}{2}+i\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$
2	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{6+\sqrt{3}}{2}+i\frac{7+2\sqrt{3}}{2}$
3	-1	$-2+i$	$2+4i$
4	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{6-\sqrt{3}}{2}+i\frac{7-2\sqrt{3}}{2}$
5	$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{10-\sqrt{3}}{2}+i\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$

Los hexágonos resultantes se pueden observar en la figura 10.

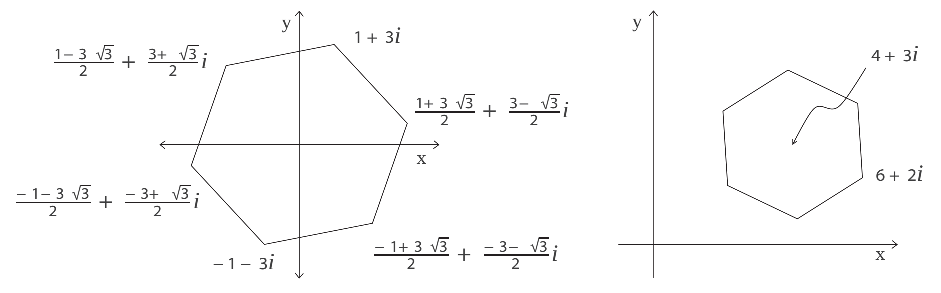

Figura 10. *Un hexágono centrado en 0 y uno centrado en 4 + 3i.*

Ejercicio 6.6. Encontrar los vértices de un triángulo equilátero con centro en -2 + i y un vértice en $2i$. Más difícil: encontrar el tercer vértice de un triángulo equilátero que tiene dos de sus vértices en 1 + i y -3 + $2i$.

□ 9. Raíces de un número complejo

Una vez que conocemos las raíces n-ésimas de la unidad, podemos conocer las raíces n-ésimas de otros números complejos si conocemos una de ellas. Supongamos que queremos conocer las raíces n-ésimas de x, es decir los números complejos w tales que $w^n = x$. Si w_1 y w_2 son dos de ellas, entonces $(\frac{w_2}{w_1})^n = \frac{w_2^n}{w_1^n} = \frac{x}{x} = 1$. Esto dice que w_2/w_1 es una raíz n-ésima de la unidad. Por lo tanto, si $z = w_2/w_1$, tenemos que $w_2 = z \cdot w_1$. Y no solo eso, si z' es una raíz n-ésima de la unidad cualquiera, entonces $z' \cdot w_1$ es una raíz n-ésima de x, porque $(z' \cdot w_1)^n = z'^n \cdot w_1^n = 1 \cdot x = x$.

Conclusión. Si x es un número complejo, n es un número natural y $w^n = x$, entonces todas las raíces n-ésimas de x son de la forma $z.w$, donde z es una raíz n-ésima de 1.

En forma polar es sencillo encontrar las soluciones. Si $x = (r\,;\,\alpha)$, $w = (s\,;\,\beta)$ y $w^n = x$, entonces $w^n = (s^n; n\beta)$. Por lo tanto, debe ser $s^n = r$ y $n\beta = \alpha$ (como ángulos). La primera igualdad es equivalente a $s = \sqrt[n]{r}$; como r es un número real positivo, tiene una única raíz real positiva $\sqrt[n]{r}$, que es s. Con respecto a la igualdad $n\beta = \alpha$, vale la misma salvedad que hicimos para las raíces n-ésimas de la unidad: la igualdad entre ángulos debe entenderse teniendo en cuenta que sumar o restar vueltas enteras (múltiplos de 2π) no afecta la igualdad. Entonces, debe ser $n\beta = \alpha + 2k\pi$, esto es, $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$. Y como con las raíces de la unidad, variando k entre 0 y n - 1 obtenemos todos los valores posibles para β.

Conclusión. Si $x = (r\,;\,\alpha)$ y n es un número natural, las raíces n-ésimas de x son los complejos:

$$(\sqrt[n]{r}\,;\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}), \quad \text{para } k = 0, \cdots, n-1$$

Como ejemplo, calculemos en forma polar las raíces sextas de $(64\,;\,\pi)$. Primero, el módulo de las raíces sextas será $\sqrt[6]{64} = 2$. Y luego, el argumento será $\frac{\pi+2k\pi}{6}$. En este caso particular las podemos listar y escribir en forma binómica:

k	forma polar	forma binómica
$k=0$	$(2\,;\,\frac{\pi}{6})$	$2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3}+i$
$k=1$	$(2\,;\,\frac{\pi+2\pi}{6})$	$2\cdot i = 2i$
$k=2$	$(2\,;\,\frac{\pi+4\pi}{6})$	$2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = -2\sqrt{3}+i$
$k=4$	$(2\,;\,\frac{\pi+6\pi}{6})$	$2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = -2\sqrt{3}-i$
$k=5$	$(2\,;\,\frac{\pi+8\pi}{6})$	$2\cdot(-i) = -2i$
$k=6$	$(2\,;\,\frac{\pi+10\pi}{6})$	$2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3}-i$

Ejercicio 6.7. Calcular las raíces octavas de $(256\ ;\ 4\pi/3\ )$ en forma polar y en forma binómica. Calcular las raíces octavas de $-8 - 8\sqrt{3}i$ (sugerencia: pasar primero $-8 - 8\sqrt{3}i$ a su forma polar).

10. Soluciones de ecuaciones de grados 2 y 3

Como vimos, los números complejos permiten encontrar raíces cuadradas de números negativos. Pero también permiten encontrar raíces de órdenes más altos, tanto de números reales como de números complejos. E incluso con números complejos se pueden resolver ecuaciones polinomiales. Veamos el ejemplo de una ecuación de grado 2. Dados tres números a, b y c, se quieren encontrar los x tales que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En $\mathbb{R}$ es bien conocida la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula da las soluciones en $\mathbb{R}$ cuando $b^2 - 4ac \geq 0$, pero si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales. Sin embargo, en los complejos podemos tomar raíces cuadradas de números negativos, y la misma fórmula sigue valiendo tomando cualquiera de las dos raíces cuadradas de $b^2 - 4ac$. Incluso podrían ser a, b y c complejos y la fórmula nos da las soluciones complejas.

Pongamos un ejemplo concreto: las soluciones de $2x^2 + 3x + 2 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

Es decir

$$x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i \text{ y}$$

$$x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

Ejercicio 6.8. Verificar que reemplazando x por $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$ o por $-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$ se tiene $2x^2 + 3x + 2 = 0$.

Otro ejemplo: buscamos las soluciones de $x^2 - 3x + (3 + i) = 0$. Antes de hacer las cuentas, observemos que $(1 - 2i)^2 = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$. Entonces, las soluciones son:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (3 + i)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2}$$

Es decir,

$$x = \frac{4-2i}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{2+2i}{2}$$

ó

$$x = 2 - i \quad \text{y} \quad x = 1 + i$$

Observación. Las raíces de $-3 - 4i$, que son $1 - 2i$ y $-1 + 2i$, se pueden obtener de manera analítica, aunque no lo hagamos aquí.

Las ecuaciones de grado 3 también se pueden resolver, aunque la fórmula que da las soluciones es algo más complicada. Damos aquí solo una idea de cómo se encuentran. Si la ecuación es $x^3 + px + q = 0$, definimos u y v por:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En realidad, hay tres valores distintos para u y tres valores distintos para v. Se deben tomar u y v de manera tal que $uv = -\frac{p}{3}$. Por otra parte, tomamos $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Entonces las tres soluciones de la ecuación son:

$$x = u + v,$$
$$x = wu + w^2v$$
$$x = w^2u + wv$$

Ejercicio 6.9. Encontrar las soluciones de $x^3 + 9x - 6 = 0$.

Ejercicio 6.10. Encontrar las soluciones de $x^3 = 15x + 4$. Observar que $x = 4$ es una solución. ¿Cuál de las soluciones encontradas es?

No toda ecuación de grado 3 tiene la forma $x^3 + px + q = 0$. Una ecuación general de grado 3 es de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Sin embargo, dividiendo la ecuación por a y reemplazando x por $y - \frac{b}{3a}$, obtenemos una ecuación en la incógnita y de la forma $y^3 + py + q = 0$.

También hay una fórmula como éstas, con raíces, para las soluciones de ecuaciones de grado 4. Tanto la fórmula general para ecuaciones de grado 3 como la de ecuaciones de grado 4 fueron encontradas en el siglo XVI por los italianos Scipione del Ferro[16], Tartaglia[17], Cardano[18] y Ferrari[19]. Viendo que estas ecuaciones se podían resolver, los matemáticos buscaron infructuosamente por siglos una fórmula similar a éstas para

---

[16] (1465-1526), de Bologna, fue posiblemente el primero en resolver algunas de las ecuaciones de grado 3.

[17] (1500-1557), de Brescia, resolvió de manera independiente a del Ferro las ecuaciones de grado 3 con raíces reales. Su verdadero nombre era Nicolo Fontana.

[18] (1501-1576), de Milán. Dio una forma general para las ecuaciones de grado 3. Al hacerlo, introdujo los números negativos de manera sistemática y los complejos.

[19] (1522-1565), de Bologna, alumno de Cardano. Encontró la solución de las ecuaciones de grado 4.

las ecuaciones de grado 5. A comienzos del siglo XIX, Niels Henrik Abel[20] y Evariste Galois[21] demostraron que una fórmula así es imposible para ecuaciones de grado ≥ 5.

11. Fractales

En esta sección, para cada complejo c vamos a considerar la función $f(z) = z^2 + c$. Comenzamos con $z = 0$ y le aplicamos la función repetidas veces. Por ejemplo, si $c = 4$, nos queda $z = 0$, $f(0) = 0^2 + 4 = 4$, $f(4) = 4^2 + 4 = 20$, $f(20) = 20^2 + 4 = 404$, etc.

Para que sea más cómodo de leer, escribimos $m_{n,c}$ el n-ésimo término que resulta comenzando con c. Es decir, lo que calculamos arriba es $m_{1,4} = 4$, $m_{2,4} = 20$, $m_{3,4} = 404$. Definido recursivamente es:

$$m_{1,c} = c,$$
$$m_{n+1,c} = m_{n,c}^2 + c$$

Si $c = -1$ obtenemos $m_{1,-1} = -1$, $m_{2,-1} = (-1)^2 - 1 = 0$, $m_{3,-1} = 0^2 - 1 = -1$, $m_{4,-1} = (-1)^2 - 1 = 0$, etc. En las tablas siguientes calculamos los primeros resultados para distintos valores de c (algunos números los aproximamos para que quepan en la tabla).

$m_{1,c} = c$	4	2	1	-1	$-1 + 0{,}5\,i$	$0{,}5$
$m_{2,c}$	20	6	2	0	$-0{,}25 - 0{,}5\,i$	$0{,}75$
$m_{3,c}$	404	38	5	-1	$-1{,}1875 + 0{,}75\,i$	$1{,}0625$
$m_{4,c}$	163220	1446	26	0	$-0{,}152344 - 1{,}28125\,i$	$1{,}62891$
$m_{5,c}$	26640768404	2090918	677	-1	$-2{,}61839 + 0{,}890381\,i$	$3{,}15334$

$m_{1,c} = c$	$-0{,}5$	$-0{,}5 + i$	i	$-0{,}2 + 0{,}1\,i$
$m_{2,c}$	$-0{,}25$	$-1{,}25$	$-1 + i$	$-0{,}17 + 0{,}06\,i$
$m_{3,c}$	$-0{,}4375$	$1{,}0625 + i$	$-i$	$-0{,}1747 + 0{,}0796\,i$
$m_{4,c}$	$-0{,}308594$	$-0{,}371094 + 3{,}125\,i$	$-1 + i$	$-0{,}175816 + 0{,}0721878\,i$
$m_{5,c}$	$-0{,}40477$	$-10{,}1279 - 1{,}31934\,i$	$-i$	$-0{,}1743 + 0{,}0746165\,i$
$m_{6,c}$	$-0{,}336161$	$100{,}334 + 27{,}7242\,i$	$-1 + i$	$-0{,}175187 + 0{,}0739887\,i$

Puede observarse que para algunos valores de c, como para $c = 4$ o $c = 2$, la sucesión crece muy rápidamente (en el lenguaje de sucesiones, *diverge*). Para otros valores, como $c = -1$ o $c = i$, la sucesión oscila entre distintos números. Para otros valores, como $c = -0{,}5$, la sucesión se acerca cada vez más a un número (*converge*, en el lenguaje de sucesiones).

En algunos casos es fácil decir a qué se acerca la sucesión. En el caso de $c = -0{,}5$, por ejemplo, se acerca cada vez más a un número w. Ese número w debe ser tal que si le aplicamos la función nos vuelva a dar w. Es decir, $f(w) = w$. Como para $c = -0{,}5$ la función toma la forma $f(z) = z^2 - 0{,}5$, debe ser $w^2 - 0{,}5 = w$, o en otros términos $w^2 - w - 0{,}5 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son:

$$w = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2}, \quad \text{es decir } w = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad w = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

[20] (1802-1829), noruego. Demostró la imposibilidad de resolver las ecuaciones de grado 5 con radicales. Los grupos conmutativos se llaman abelianos en su honor.

[21] (1811-1832), francés. Mostró lo mismo que Abel de manera independiente. Al hacerlo, dio comienzo a la teoría de grupos.

Mirando los primeros valores de la tabla de la columna c = -0,5, observamos que la sucesión se acerca a $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ~ -0,366025403784439. Es importante hacer una salvedad aquí: estamos usando conceptos del análisis matemático, como sucesión, límite, etcétera. En rigor, es necesario *demostrar* que la sucesión correspondiente a -0,5 converge a $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Como el objeto de esta sección es otro, pasamos por alto estas demostraciones.

Sin embargo, el análisis que hicimos para -0,5 no se puede hacer para todos los valores de c. Como dijimos, el comportamiento de estas sucesiones depende mucho del valor inicial c, y a veces pequeños cambios en c significan grandes cambios en la sucesión. Pero podemos hacer algunas consideraciones, que dejamos como ejercicio.

Ejercicio 6.11. Probar por inducción que si $|c| > 2$ entonces $|m_{n,c}| \geq |c|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sugerencia: usar que $|m_{n+1,c}| = |m^2_{n,c}+c| \geq |m^2_{n,c}|-|c| = |m_{n,c}|^2-|c|$. Aquí se usa la desigualdad triangular de la sección 3.

Ejercicio 6.12. Probar por inducción que, si $|c| \leq 2$ y para algún $n \in \mathbb{N}$ vale que $|m_{n,c}| > 2$, entonces $|m_{k,c}| > 2$ para todo $k \geq n$.

La conclusión es que si para algún n es $|m_{n,c}| > 2$ entonces para todo $k \geq n$ será $|m_{k,c}| > 2$. Es decir, que si queremos estudiar el comportamiento de $m_{n,c}$ para valores grandes de n, debemos mirar si $|m_{n,c}|$ es mayor a 2 para algún n. El conjunto de los números complejos c tales que $|m_{n,c}| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ recibe el nombre de *conjunto de Mandelbrot*, en honor al matemático Benoît Mandelbrot, que en 1980 fue uno de los primeros en estudiar conjuntos de este tipo.

Usualmente, se pueden tomar varios valores de c en el plano complejo y calcular $m_{n,c}$ para valores de $n \leq$ que alguna cota N fija de antemano. Para cada c, se pinta el punto correspondiente de negro si $|m_{n,c}| \leq 2$ para todo $n \leq N$, y se pinta de otro color si para algún $n \leq N$ se tiene $|m_{n,c}| > 2$. Se puede incluso pintar de distintos colores en función de cuál es el menor n tal que $|m_{n,c}| > 2$. De esta manera, se obtiene un dibujo aproximado del conjunto de Mandelbrot. Es aproximado porque pintamos de negro un punto si $|m_{n,c}| \leq 2$ para $n \leq N$ pero no calculamos qué pasa si $n > N$. Es posible que estemos pintando de negro, como si perteneciera al conjunto, a un punto que en realidad no pertenece. Si hacemos más grande el número N obtendremos una aproximación mejor al conjunto de Mandelbrot. Vemos el resultado de cambiar N en la figura 11. Las figuras de esta sección fueron hechas con Gnofract 4D, accesible en http://gnofract4d.sourceforge.net.

El conjunto de Mandelbrot es el más popular de los *fractales*. Los fractales son conjuntos "autosimilares". Esto es, tienen sectores que, cuando se los agranda, se asemejan al conjunto original. A su vez, estos sectores tienen nuevos sectores que se asemejan al original, y así siguiendo.

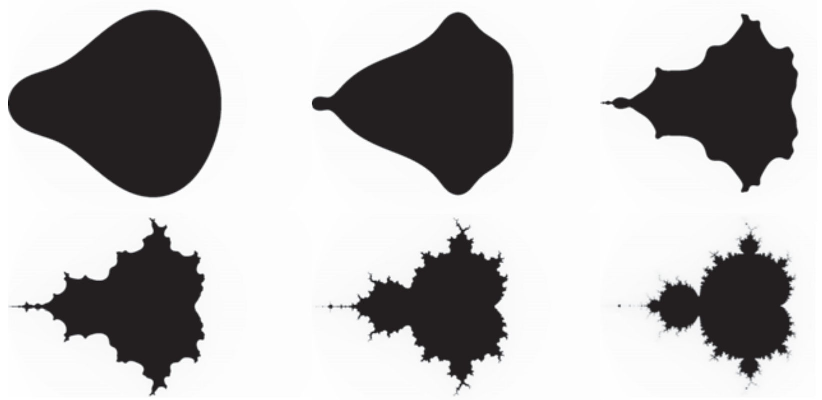

Figura 11. *Aproximaciones del conjunto de Mandelbrot con distintos valores de N: 3, 4, 6, 8, 12 y 24.*

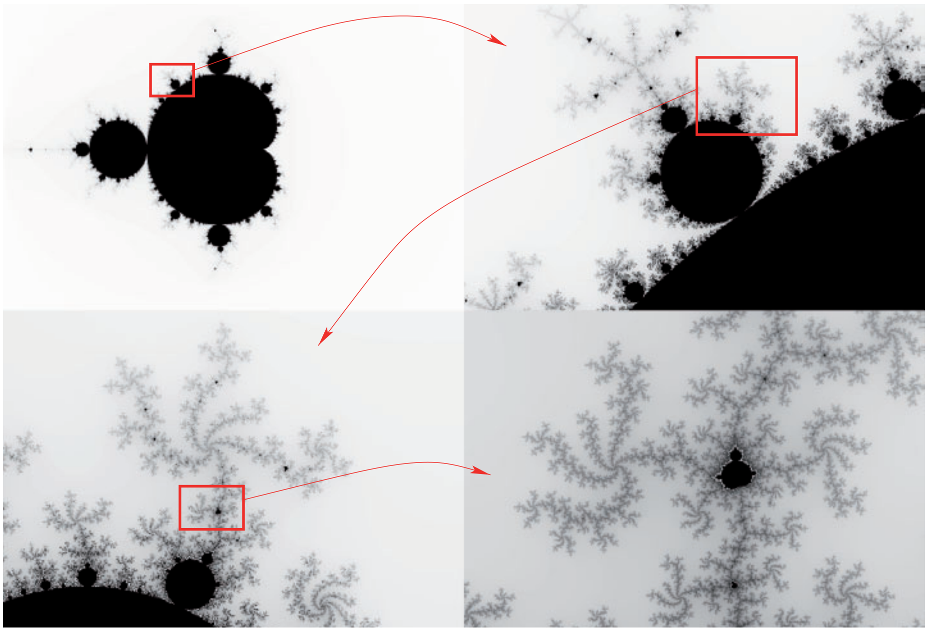

Figura 12. *El conjunto de Mandelbrot y la autosimilaridad. Con distintos tonos de gris se pintan los puntos según para qué n es* $|m_{n,c}| > 2$.

Ejercicio 6.13. (Para el lector que sabe programar). 1. Hacer un programa que dibuje aproximaciones del conjunto de Mandelbrot, variando el valor de N.

2. Modificar el programa cambiando la función f por $f(z) = z^3+c$ y observar el resultado. ¿Resulta también un conjunto autosimilar?