7. Ejercicios resueltos

☐ CAPÍTULO 0. Conjuntos y relaciones

Ejercicio 1.
La lista (1) es el conjunto de alumnos que pueden integrar ambos equipos, o sea los alumnos que tienen entre 14 y 16 años y también tienen entre 15 y 17 años, es decir que pertenecen a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

La lista (2) es el conjunto de aquellos alumnos que puedan integrar alguno de los equipos. Esto es, son los alumnos que tienen entre 14 y 16 años o entre 15 y 17 años. Éste es el conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

La lista (3) es el conjunto de alumnos que puede integrar sólo el equipo de fútbol. Esto es, son los alumnos que están en la lista del equipo de fútbol (con lo cual tienen entre 14 y 16 años), pero no están en la lista del equipo de básquet (con lo cual no tienen entre 15 y 17 años). Éste es el conjunto $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$.

Análogamente, la lista (4) es el conjunto de alumnos que pueden integrar sólo el equipo de básquet. Este es el conjunto $\mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$.

Ejercicio 2. Queremos obtener el conjunto de combinaciones de ropa para Lorena como un producto cartesiano de conjuntos. Para abreviar, escribiremos por *JA* el jean azul, por *JG* el jean gris, por *PB* el pantalón blanco, por *MB* la musculosa blanca, por *MN* la musculosa negra, por *RR* la remera rosa, por *RC* la remera celeste, por *S* el par de sandalias y por *Z* el par de zapatos. Luego, el conjunto de combinaciones de ropa es:

$$\{JA, JG, PB\} \times \{MB, MN, RR, RC\} \times \{S, Z\}$$

Expresado por extensión, es el siguiente conjunto de 24 elementos:

$$\begin{array}{l}
\{(JA,MB,S), (JA,MB,Z), (JA,MN,S), (JA,MN,Z) \\
(JA,RR,S), (JA,RR,Z), (JA,RC,S), (JA,RC,Z) \\
(JG,MB,S), (JG,MB,Z), (JG,MN,S), (JG,MN,Z) \\
(JG,RR,S), (JG,RR,Z), (JG,RC,S), (JG,RC,Z) \\
(PB,MB,S), (PB,MB,Z), (PB,MN,S), (PB,MN,Z) \\
(PB,RR,S), (PB,RR,Z), (PB,RC,S), (PB,RC,Z)\}
\end{array}$$

Ejercicio 3. El conjunto $\mathcal{A}$ es el conjunto de cantidades de goles, por lo tanto es el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. La operación utilizada para calcular el número de goles luego de dos fechas es la suma $+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Se debe sumar el número de goles del primer partido (que es un elemento del conjunto $\mathcal{A}$) con el número de goles del segundo partido (que es otro elemento del conjunto $\mathcal{A}$).

EJERCICIO 4. Comencemos viendo si la operación $\circ$ es conmutativa. Para esto debemos verificar si es cierto que $a \circ b = b \circ a$ para todo par de elementos a, b del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Si miramos las distintas posibilidades, tenemos que:

$0 \circ 1 = 0 = 1 \circ 0$	$1 \circ 3 = 3 = 3 \circ 1$
$0 \circ 2 = 0 = 2 \circ 0$	$1 \circ 4 = 4 = 4 \circ 1$
$0 \circ 3 = 0 = 3 \circ 0$	$2 \circ 3 = 1 = 4 \circ 2$
$0 \circ 4 = 0 = 4 \circ 0$	$2 \circ 4 = 3 = 4 \circ 2$
$1 \circ 2 = 2 = 2 \circ 1$	$3 \circ 4 = 2 = 4 \circ 3$

Esto muestra que la operación es conmutativa. La operación no es asociativa, ya que $(2 \circ 2) \circ 3 = 2 \circ 3 = 1$, mientras que $2 \circ (2 \circ 3) = 2 \circ 1 = 2$. Por último, es claro que la operación tiene elemento neutro, ya que $a \circ 1 = 1 \circ a = a$ para todo $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ como puede verse en la tabla que define $\circ$.

La operación - claramente no es conmutativa ya que $0 - 1 = 4$, mientras que $1 - 0 = 1$. Tampoco es asociativa, ya que $(0 - 1) - 2 = 4 - 2 = 2$, mientras que $0 - (1 - 2) = 0 - 4 = 1$. Por último, la operación - no tiene neutro, pues si e es un neutro para la operación, valdría que $e - 0 = 0 - e = 0$. Mirando la tabla, vemos que el único número e tal que $0 - e = 0$ es $e = 0$. Pero $0 - 1 = 4 \neq 1$, luego no puede existir un elemento neutro.

EJERCICIO 5. Debemos hallar una fórmula cerrada para la sucesión cuyos términos son 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... Vimos que la sucesión $a_n = (-1)^n$ toma valores -1, 1, -1, 1, -1, 1, ... Si a cada miembro de esta sucesión le sumamos 3, obtenemos la sucesión 2, 4, 2, 4, 2, 4, ... Esta nueva sucesión no es exactamente la sucesión que estamos buscando, pero es el doble de ella. Luego la sucesión:

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot (3 + (-1)^n)$$

cumple lo pedido.

CAPÍTULO 1. Números naturales

EJERCICIO 1.1.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\ &= a^3 + a^2 b + 2a^2 b + 2ab^2 + b^2 a + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.2. Tenemos que probar por inducción que $1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo natural n. Entonces, debemos probar $P(1)$ primero. Cuando $n = 1$, el miembro izquierdo de la igualdad, $1 + 2^2 + \ldots + n^2$ es simplemente 1. El miembro derecho, por otra parte, es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, por lo que la igualdad vale. Ahora, debemos suponer que es cierta $P(n)$ y probar $P(n + 1)$. Pero $P(n + 1)$ afirma que:

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

es decir, $1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

La hipótesis inductiva, $P(n)$, nos permite escribir:

$$\begin{aligned}
1 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + n^2 + 2n + 1 \\
&= \frac{(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n) + 6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\
&= \frac{(2n^3 + 3n^2 + n) + (6n^2 + 12n + 6)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

lo que finalmente prueba $P(n + 1)$.

Ejercicio 1.3. Probamos primero $P(10)$; es decir, que vale $2^{10} \geq 10^3$. Como $2^{10} = 1.024$ y $10^3 = 1.000$, $P(10)$ es verdadera. Ahora, si vale $P(n)$, debemos probar que vale $P(n + 1)$, esto es, que $2^{n+1} \geq (n + 1)^3$. Es decir, debemos probar que $2 \cdot 2^n \geq n^3+3n^2+3n+1$. Como vale $P(n)$, podemos escribir $2 \cdot 2^n = 2^n+2^n \geq n^3+2^n$, por lo que para probar $P(n + 1)$ es suficiente que probemos que $2^n \geq 3n^2 + 3n + 1$ para todo $n \geq 10$. Ésta es una nueva afirmación, que probamos por inducción en la sección 3 del capítulo 1.

Ejercicio 1.4. Si $n = 3$, tenemos que probar que $3^3 \geq 2^4 + 3$, es decir, que $27 \geq 19$, cosa que es cierta. Y si vale la afirmación $P(n)$, debemos probar $P(n+1)$, es decir que $3^{n+1} \geq 2^{n+2} + n + 1$. Pero:

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\
&= 3^n + 3^n + 3^n \geq 2^{n+1} + n + 2^{n+1} + n + 3^n \\
&\geq 2 \cdot 2^{n+1} + n + n + 3^n \geq 2^{n+2} + n + n + 3^n
\end{aligned}$$

Como $n + 3^n \geq 1$, entonces

$$3^{n+1} \geq 2 \cdot 2^{n+2} + n + 1$$

Ejercicio 1.5. Utilizaremos el lenguaje Python para mostrar las definiciones, que es el que hemos estado usando en los ejemplos. El siguiente algoritmo calcula, dado n, el número de Lucas n-ésimo L_n.

```
def lucas(n):
   if n==1:
        return 2
   elif n==2:
        return 1
   else:
        return lucas(n-1) + lucas(n-2)
```

El siguiente algoritmo calcula dado n, la variante del número de Lucas n-ésimo L'_n.

```
def variantelucas(n):
   if n==1:
        return 1
   elif n==2:
        return 5
   else:
        return variantelucas(n-1) + variantelucas(n-2)
```

Ejercicio 1.6. Calculamos los primeros términos de la sucesión:

$$a_3 = 4\sqrt{4} + 1 = 9,\ a_4 = 4\sqrt{9} + 4 = 16,\ a_5 = 4\sqrt{16} + 9 = 25$$

Podemos conjeturar, entonces, que $a_n = n^2$ (al menos esto es cierto para los primeros cinco términos de la sucesión). Para demostrar que esta conjetura es cierta, debemos probar que para todo n natural es cierta la afirmación $P(n) : a_n = n^2$. Ya sabemos que $P(1)$ y $P(2)$ son ciertas. Y si son ciertas las afirmaciones $P(k)$ para todo $k < n$, debemos probar que vale $P(n)$. Pero $a_n = 4\sqrt{a_{n-1}} + a_{n-2} = 4\sqrt{(n-1)^2} + (n-2)^2 = 4(n-1) + (n^2 - 4n + 4) = n^2$, que es precisamente la afirmación $P(n)$.

Ejercicio 1.7. La afirmación a probar es $P(n) : a_n \leq 3^n$. Para $n = 1$ la afirmación dice $2 \leq 3$, que vale. Para $n = 2$ la afirmación dice $3 \leq 3^2 = 9$, que también vale. Entonces, si son ciertas las afirmaciones $P(k)$ con $k < n$, probemos $P(n)$. Tenemos:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \leq 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-2} < 2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Ejercicio 1.8. Vamos a empezar con un caso más sencillo. Si hay 4 piedritas, Martín puede sacar 1, 2 ó 3, y van a quedar, respectivamente, 3, 2 ó 1. En cualquier caso, Pablo quita las que quedan y gana. Esto muestra que si comienzan con 4 piedritas y comienza a jugar Martín, entonces Pablo tiene una estrategia ganadora. En realidad, lo que prueba esto es más general: no depende ni de Pablo, ni de Martín. Si hay 4 piedritas, aquél al que no le toca jugar tiene una estrategia ganadora. Por lo tanto, si cualquier jugador logra dejar 4 piedritas, va a ganar. Y esto es lo que sucede con 8 piedritas: Martín puede sacar 1, 2 ó 3 piedritas y van a quedar respectivamente 7, 6 ó 5. Entonces, Pablo puede sacar las que sobran y dejar 4 piedritas. Y ganará en la jugada siguiente. La respuesta, entonces, es afirmativa: si le toca jugar a Martín y hay 8 piedritas, Pablo tiene una estrategia ganadora: dejar 4 piedritas.

Entonces, hemos visto que si un jugador logra dejar 4 piedritas, tiene una estrategia ganadora. Y lo mismo pasa si logra dejar 8 piedritas. O 12, porque en este caso logrará dejar 8 en la jugada siguiente. Esto da un indicio de que si un jugador deja un múltiplo de

4 piedritas, tiene una estrategia ganadora. Por el contrario, si un jugador deja una cantidad que no es múltiplo de 4, el otro jugador logrará dejar un múltiplo de 4 y podrá ganar.

En otras palabras, nuestra afirmación $P(n)$ es que si Martín debe empezar con n piedritas entonces Pablo tiene una estrategia ganadora en el caso en que n sea múltiplo de 4, y Martín tiene una estrategia ganadora en otro caso. Es claro que esta afirmación es cierta si $n = 1$, $n = 2$ ó $n = 3$, porque Martín simplemente saca todas las piedritas y gana. Y si $n = 4$, ya hemos visto que es Pablo quien tiene una estrategia ganadora, es decir que vale $P(4)$. Supongamos ahora que vale $P(k)$ para todo $k < n$. Si n no es múltiplo de 4, al dividirlo por 4 puede tener resto 1, 2, ó 3. Es decir, n puede ser de la forma $4m + 1$, $4m + 2$ ó $4m + 3$. En cualquiera de estos casos, Martín quita respectivamente 1, 2 ó 3 piedritas y deja $4m$, es decir un múltiplo de 4. La hipótesis inductiva $P(4m)$ dice que es Martín quien tiene una estrategia ganadora. Por otra parte, si n es múltiplo de 4, entonces $n = 4m$. Martín puede quitar 1, 2 ó 3 piedritas, y Pablo quitará 3, 2 ó 1 respectivamente, dejando $4m - 4 = 4(m - 1)$, que es un múltiplo de 4 menor que n. Entonces, Pablo tendrá una estrategia ganadora.

Ejercicio 1.9. La afirmación vale cuando $n = 1$, pues en este caso $2^n - 1 = 2 - 1 = 1 = H_1$. Y si vale que $H_n = 2^n - 1$, entonces $H_{n+1} = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, que es precisamente la afirmación para $n + 1$.

☐ CAPÍTULO 2. Números enteros

Ejercicio 2.1. Los números impares son aquellos que no son divisibles por 2. Por lo tanto, se los puede describir como los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $2 \nmid n$. Otra posibilidad es decir que son aquellos números de la forma $2k + 1$, donde k recorre todos los números enteros. Esto es así porque los números de la forma $2k$ son pares (y son todos los pares), por lo que al sumarles una unidad a los pares nos quedan los impares.

Ejercicio 2.2. El número $(\mathrm{DEBE1CAFE})_{16}$ es igual a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{E})_{16} \cdot 16^0 + (\mathrm{F})_{16} \cdot 16^1 + (\mathrm{A})_{16} \cdot 16^2 + (\mathrm{C})_{16} \cdot 16^3 + (1)_{16} \cdot 16^4 + (\mathrm{E})_{16} \cdot 16^5 + \\
&\qquad + (\mathrm{B})_{16} \cdot 16^6 + (\mathrm{E})_{16} \cdot 16^7 + (\mathrm{D})_{16} \cdot 16^8 = \\
&= 14 \cdot 16^0 + 15 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^4 + 14 \cdot 16^5 + \\
&\qquad + 11 \cdot 16^6 + 14 \cdot 16^7 + 13 \cdot 16^8 \\
&= 14 + 240 + 2.560 + 49.152 + 65.536 + 14.680.064 + \\
&\qquad + 184.549.376 + 3.758.096.384 + 55.834.574.848 \\
&= 59.792.018.174
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. Sea $d = (2^n + 7^n : 2^n - 7^n)$. Queremos probar que $d = 1$. Como $d \mid 2^n + 7^n$ y $d \mid 2^n - 7^n$, entonces $d \mid (2^n + 7^n) + (2^n - 7^n)$, es decir $d \mid 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Pero los únicos enteros que dividen a 2^{n+1} son los de la forma 2^j con $0 \leq j \leq n+1$. Por otra parte, también tenemos que $d \mid (2^n + 7^n) - (2^n - 7^n)$, es decir $d \mid 2 \cdot 7^n$. Como las únicas potencias de 2 que dividen a $2 \cdot 7^n$ son 2^0 y 2^1, hemos probado que $d = 1$ o $d = 2$. Pero $2^n + 7^n$ es impar, pues 2^n es par y 7^n es impar, así que no es cierto que $2 \mid 2^n + 7^n$. Esto prueba que $d = 1$.

□ **CAPÍTULO 3.** Aritmética modular

Ejercicio 3.1. Calculamos (84 : 270) aplicando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 270 &= 3 \cdot 84 + 18 \\ 84 &= 4 \cdot 18 + 12 \\ 18 &= 1 \cdot 12 + 6 \\ 12 &= 2 \cdot 6 \end{aligned}$$

Entonces (84 : 270) = 6. Como $6 \mid 66$, la ecuación $84 \cdot x + 270 \cdot y = 66$ tiene soluciones enteras. Para hallar una solución, escribimos a 6 como combinación lineal entera de 84 y 270:

$$\begin{aligned} 6 &= 18 - 1 \cdot 12 \\ &= 18 - 1 \cdot (84 - 4 \cdot 18) \\ &= 5 \cdot 18 - 1 \cdot 84 \\ &= 5 \cdot (270 - 3 \cdot 84) - 1 \cdot 84 \\ &= (-16) \cdot 84 + 5 \cdot 270 \end{aligned}$$

Multiplicamos la igualdad por 11, obteniendo que:

$$66 = (-176) \cdot 84 + 55 \cdot 270$$

Por lo tanto, $(x_0, y_0) = (-176, 55)$ es una solución particular de la ecuación.

Así, todas las soluciones de la ecuación son los pares de enteros (x, y) de la forma $x = -176 + \frac{84}{6} \cdot k$, $y = 55 - \frac{270}{6} \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir:

$$x = -176 + 14 \cdot k, \quad y = 55 - 45 \cdot k \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3.2.

- Criterio de divisibilidad por 3: *un número natural n es múltiplo de* 3 *si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de* 3. La demostración de este criterio es igual a la dada en el texto para el criterio de divisibilidad por 9, teniendo en cuenta que $10 \equiv 1 \pmod 3$.

- Criterio de divisibilidad por 4: *un número natural n es múltiplo de* 4 *si y sólo si el número formado por las dos últimas cifras de n (decenas y unidades) es múltiplo de* 4.

  Si $n = (n_s \dots n_2 n_1 n_0)_{10}$ es la representación decimal de n, entonces $n = n_s \cdot 10^s + \dots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0$. Ahora, como $10^2 = 100 \equiv 0 \pmod 4$, tenemos que $10^k \equiv 0 \pmod 4$ para todo $k \geq 2$. Por lo tanto,

  $$n \equiv n_1 \cdot 10 + n_0 \pmod 4$$

  Luego, n tiene el mismo resto en la división por 4 que el número cuya representación decimal es $(n_1 n_0)_{10}$; en particular, n es múltiplo de 4 si y sólo si $(n_1 n_0)_{10}$ lo es.

- Criterio de divisibilidad por 5: *un número natural es múltiplo de* 5 *si y sólo si termina en* 0 *ó en* 5. En efecto, si $n = (n_s \dots n_1 n_0)_{10}$, entonces $n = n_s \cdot 10^s + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0 \equiv n_0$ (mód 5), ya que $10^k \equiv 0$ (mód 5) para todo $k \geq 1$. Entonces será divisible por 5 si y sólo si n_0 lo es; como $0 \leq n_0 \leq 9$, esto equivale a que $n_0 = 0$ ó $n_0 = 5$.

- Criterio de divisibilidad por 8: *un número natural n es múltiplo de* 8 *si y sólo si el número formado por las tres últimas cifras de n (centenas, decenas y unidades) es múltiplo de* 8. La demostración de este criterio es igual a la del criterio de divisibilidad por 4, teniendo en cuenta que $10^3 \equiv 0$ (mód 8).

- Criterio de divisibilidad por 11: *un número natural es múltiplo de* 11 *si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es múltiplo de* 11. Si $n = (n_s \dots n_1 n_0)_{10}$, como $10 \equiv -1$ (mód 11), resulta que

$$\begin{aligned} n &= n_s \cdot 10^s + \cdots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0 \\ &\equiv_{(11)} n_s \cdot (-1)^s + \cdots + n_2 \cdot (-1)^2 + n_1 \cdot (-1) + n_0 \\ &= n_s \cdot (-1)^s + \cdots + n_2 - n_1 + n_0 \end{aligned}$$

Luego, n es múltiplo de 11 si y sólo si lo es $n_0 - n_1 + n_2 - \dots + (-1)^s \cdot n_s$ (los dígitos con subíndice par se suman y los de subíndice impar, se restan).

Ejercicio 3.3.

(a) Aplicando el algoritmo de Euclides a 17 y 45, obtenemos que $1 = (17 : 45) = 8 \cdot 17 - 3 \cdot 45$. En consecuencia, $(8 \cdot 20, 3 \cdot 20) = (160, 60)$ es una solución particular a la ecuación diofántica $17 \cdot x - 45 \cdot y = 20$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $17 \cdot x \equiv 20$ (mód 45) son los enteros x tales que $x \equiv 160$ (mód 45), o equivalentemente, $x \equiv 25$ (mód 45).

(b) Como $(84 : 270) = 6$, la ecuación dada es equivalente a $(84/6) \cdot x \equiv 66/6$ (mód 270/6), es decir, $14 \cdot x \equiv 11$ (mód 45). Aplicando el algoritmo de Euclides a 14 y 45, obtenemos que $1 = (-16) \cdot 14 + 5 \cdot 45$. Multiplicando por 11, resulta que $11 = (-176) \cdot 14 + 55 \cdot 45$. Como $-176 \equiv 4$ (mód 45), las soluciones de la ecuación dada son los enteros x tales que $x \equiv 4$ (mód 45).

(c) La ecuación $28 \cdot x \equiv 30$ (mód 60) no tiene soluciones, ya que $(28 : 60) = 4$ y 4 no divide a 30.

Ejercicio 3.4. El problema equivale a encontrar las soluciones $a \in \mathbb{Z}$ de la ecuación $45 \cdot a \equiv 9$ (mód 27). Como $(45 : 27) = 9$, podemos dividir toda la ecuación por 9, obteniendo $5 \cdot a \equiv 1$ (mód 3), y como $5 \equiv -1$ (mód 3) nos queda la ecuación $-a \equiv 1$ (mód 3), que es equivalente a:

$$a \equiv 2 \pmod{3}$$

Luego, los enteros a tales que el resto de la división de $45 \cdot a$ por 27 es 3 son los de la forma $a = 3 \cdot k + 2$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.5. Las tablas de suma y producto pedidas son las siguientes:

- En $\mathbb{Z}_2$:

$+_2$	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

$\cdot_2$	[0]	[1]
[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]

- En $\mathbb{Z}_4$:

$+_4$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$\cdot_4$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

- En $\mathbb{Z}_7$:

$+_7$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

$\cdot_7$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[0]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[0]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[0]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[0]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Ejercicio 3.6.

1. Para cada $a \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq 0$, buscamos $x \in \mathbb{Z}_7$ tal que $a \cdot x = 1$ en $\mathbb{Z}_7$. Podemos hacer esto mirando la tabla del producto de $\mathbb{Z}_7$ construida en el ejercicio 3.5 (para hallar el inverso de a, miramos la fila encabezada por a y buscamos el elemento que corresponde a la columna donde está ubicado el 1 en dicha fila): $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 4$, $3^{-1} = 5$, $4^{-1} = 2$, $5^{-1} = 3$ y $6^{-1} = 6$.
2. Sabemos que $a \in \mathbb{Z}_{14}$ tiene inverso multiplicativo si y sólo si $(a : 14) = 1$, es decir, si y sólo si a no es múltiplo ni de 2 ni de 7. Por lo tanto, los elementos de $\mathbb{Z}_{14}$ que tienen inverso multiplicativo son: 1, 3, 5, 9, 11, 13. Como en $\mathbb{Z}_{14}$ vale que $1 \cdot 1 = 1$, $13 \cdot 13 = 1$, $3 \cdot 5 = 1$ y $9 \cdot 11 = 1$, tenemos que los inversos multiplicativos de estos elementos son:

$$1^{-1} = 1,\ 3^{-1} = 5,\ 5^{-1} = 3,\ 9^{-1} = 11,\ 11^{-1} = 9,\ 13^{-1} = 13 \text{ en } \mathbb{Z}_{14}.$$

Ejercicio 3.7.

- $5 \cdot x = 4$ en $\mathbb{Z}_{14}$: esta ecuación tiene una única solución en $\mathbb{Z}_{14}$, ya que 5 tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_{14}$ (ver ejercicio 3.6). La solución es $x = 5^{-1} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12 \in \mathbb{Z}_{14}$.
- $6 \cdot x = 10$ en $\mathbb{Z}_{21}$: como $(6 : 21) = 3$, que no divide a 10, esta ecuación no tiene solución.
- $20 \cdot x = 12$ en $\mathbb{Z}_{24}$: como $(20 : 24) = 4$, que divide a 12, esta ecuación tiene 4 soluciones en $\mathbb{Z}_{24}$. Para hallarlas resolvemos la ecuación $5 \cdot x = 3$ en $\mathbb{Z}_6$ (que se obtiene dividiendo todo por $(20 : 24) = 4$); esta ecuación tiene como única solución a $x_0 = 3$ en $\mathbb{Z}_6$. Luego, las 4 soluciones de la ecuación original en $\mathbb{Z}_{24}$ son $x = 3 + 6 \cdot k$ con $k = 0, 1, 2, 3$, es decir:
  - $x = 3$
  - $x = 3 + 6 = 9$

- $x = 3 + 2 \cdot 6 = 15$
- $x = 3 + 3 \cdot 6 = 21$

Ejercicio 3.8. Llamemos c al costo en pesos de la cena. Según el enunciado, si cada una de las 10 personas presentes al comienzo pone la misma cantidad de dinero, pagan los c pesos y les quedan, además, 6 pesos. Como el total reunido sería un múltiplo de 10, esto nos dice que $c + 6 \equiv 0 \pmod{10}$ o, equivalentemente, que:

$$c \equiv 4 \pmod{10}$$

Análogamente, si al repartir entre 11 personas, pagan c pesos y quedan 10 es porque $c + 10 \equiv 0 \pmod{11}$, o sea, equivalentemente:

$$c \equiv 1 \pmod{11}$$

En definitiva, el costo c de la cena es una solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c \equiv 4 & \pmod{10} \\ c \equiv 1 & \pmod{11} \end{cases}$$

De la primera ecuación, deducimos que $c = 10 \cdot k + 4$ para algún entero k. Reemplazando en la segunda, nos queda que $k \in \mathbb{Z}$ debe cumplir $10 \cdot k + 4 \equiv 1 \pmod{11}$, o sea que debe ser solución de:

$$10 \cdot k \equiv -3 \pmod{11}$$

Como $10 \equiv -1 \pmod{11}$ esta ecuación es equivalente a que $-k \equiv -3 \pmod{11}$, es decir:

$$k \equiv 3 \pmod{11}$$

Luego k es de la forma $k = 11 \cdot q + 3$, con $q \in \mathbb{Z}$, y en consecuencia, el costo de la cena es un entero de la forma:

$$\begin{aligned} c &= 10 \cdot k + 4 \\ &= 10 \cdot (11 \cdot q + 3) + 4 \\ &= 110 \cdot q + 34 \end{aligned}$$

Dado que sabemos que el dinero reunido fue más de 100, el mínimo valor posible de la cena es $c = 144$.

Ejercicio 3.9.

1. Un entero x tiene resto 1 en la división por 3, si y sólo si $x \equiv 1 \pmod{3}$. Análogamente, su resto en la división por 5 es 2, si y sólo si $x \equiv 2 \pmod{5}$, y su resto en la división por 7 es 5 si y sólo si $x \equiv 5 \pmod{7}$. Luego, los enteros buscados son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones de congruencia:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \pmod{3} \\ x \equiv 2 & \pmod{5} \\ x \equiv 5 & \pmod{7} \end{cases}$$

Como los módulos que aparecen son coprimos de a pares, por el teorema chino del resto, el sistema tiene una única solución x_0 módulo $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ y podemos hallarla aplicando el algoritmo visto en la sección 6 del capítulo 3.

De la primera ecuación, deducimos que $x = 3 \cdot Q_1 + 1$ con $Q_1 \in \mathbb{Z}$. Ahora, buscamos Q_1 de manera que se cumpla la segunda ecuación, es decir:

$$3 \cdot Q_1 + 1 \equiv 2 \pmod{5}$$

o, equivalentemente, $3 \cdot Q_1 \equiv 1 \pmod{5}$. Resolviendo esta ecuación (por ejemplo, multiplicando ambos miembros por 2), obtenemos que:

$$Q_1 \equiv 2 \pmod{5}$$

Es decir, $Q_1 = 5 \cdot Q_2 + 2$ y, en consecuencia, $x = 3 \cdot (5 \cdot Q_2 + 2)+1 = 15 \cdot Q_2 + 7$ con $Q_2 \in \mathbb{Z}$. Finalmente, determinamos los enteros Q_2 que hacen que se cumpla la tercera ecuación:

$$15 \cdot Q_2 + 7 \equiv 5 \pmod{7}$$

o, equivalentemente, $Q_2 \equiv 5 \pmod{7}$. Por lo tanto, Q_2 se escribe como $Q_2 = 7 \cdot Q_3 + 5$ con $Q_3 \in \mathbb{Z}$; luego, $x = 15 \cdot (7 \cdot Q_3 + 5) + 7 = 105 \cdot Q_3 + 82$, con $Q_3 \in \mathbb{Z}$. En resumen, los enteros que cumplen las condiciones pedidas son los $x \in \mathbb{Z}$ tales que $x \equiv 82 \pmod{105}$.

2. Un entero x tiene resto 8 en la división por 12 y resto 6 en la división por 20, si y sólo si:

$$\begin{cases} x \equiv 8 & \pmod{12} \\ x \equiv 6 & \pmod{20} \end{cases}$$

Ahora:

$$x \equiv 8 \pmod{12} \iff \begin{cases} x \equiv 8 & \pmod{4} \\ x \equiv 8 & \pmod{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0 & \pmod{4} \\ x \equiv 2 & \pmod{3} \end{cases}$$

$$x \equiv 6 \pmod{20} \iff \begin{cases} x \equiv 6 & \pmod{4} \\ x \equiv 6 & \pmod{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 2 & \pmod{4} \\ x \equiv 1 & \pmod{5} \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones obtenidas dice que x debe ser múltiplo de 4, mientras que la tercera dice que debe tener resto 2 en la división por 4. Como no existen enteros que cumplan estas dos condiciones simultáneamente, el sistema no tiene soluciones, es decir, no existe ningún entero que tenga resto 8 en la división por 12 y resto 6 en la división por 20.

Ejercicio 3.10. Para hallar el resto en la división de $a \in \mathbb{Z}$ por $m \in \mathbb{N}$ buscamos el único entero r tal que $0 \leq r < m$ y $a \equiv r \pmod{m}$.

- $a = 129^{111}$, $m = 7$. Como $129 \equiv 3 \pmod{7}$, tenemos que:

$$129^{111} \equiv 3^{111} \pmod{7}$$

Por otro lado, como 7 es primo y $111 \equiv 3$ (mód 6), por el pequeño teorema de Fermat, sabemos que:

$$3^{111} \equiv 3^3 \pmod 7$$

Finalmente, dado que $3^3 = 27 \equiv 6$ (mód 7), concluimos que:

$$129^{111} \equiv 6 \pmod 7$$

y entonces 6 es el resto de la división de 129^{111} por 7.

- $a = 129^{111}$, $m = 35$: En este caso, no podemos aplicar directamente el pequeño teorema de Fermat porque $m = 35 = 5 \cdot 7$ no es primo. Ahora bien, si hallamos r_1 y r_2 tales que:

$$\begin{cases} a \equiv r_1 & \pmod 7 \\ a \equiv r_2 & \pmod 5 \end{cases}$$

por el teorema chino del resto, podremos encontrar un único r tal que $0 \leq r < 7 \cdot 5 = 35$ con la propiedad:

$$\begin{cases} r \equiv r_1 & \pmod 7 \\ r \equiv r_2 & \pmod 5 \end{cases}$$

y tal que cualquier otra solución del sistema, en particular a, es congruente a r módulo 35. Esto implica que r es el resto de a en la división por 35.

Por el primer inciso de este ejercicio, sabemos que $a \equiv 6$ (mód 7). Para calcular el resto de a en la división por 5, observemos que $129 \equiv -1$ (mód 5), y entonces:

$$129^{111} \equiv (-1)^{111} \pmod 5$$

Luego, $a \equiv -1 \equiv 4$ (mód 5). Tenemos entonces que:

$$\begin{cases} a \equiv 6 & \pmod 7 \\ a \equiv 4 & \pmod 5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones de congruencia nos queda que:

$$a \equiv 34 \pmod{35}$$

Es decir, que el resto de la división de 129^{111} por 35 es 34.

□ CAPÍTULO 4. Números racionales

Ejercicio 4.1. Queremos verificar que el producto de números naturales pensados como fracciones coincide con el producto usual. Para ello, si $a, b \in \mathbb{N}$, las fracciones que les asociamos son $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{1}$. Al producto de ambos, $a \cdot b$, le asociamos la fracción $\frac{a \cdot b}{1}$ que coincide con el producto $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$.

Ejercicio 4.2. Debemos probar que si $\frac{a}{b}$ es irreducible, y $\frac{c}{d}$ es una fracción equivalente a $\frac{a}{b}$, entonces existe un número entero m tal que $c = a \cdot m$ y $d = b \cdot m$. La definición de la relación de equivalencia dice que:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c.$$

Como $\frac{a}{b}$ es irreducible, $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. Luego $b \mid a \cdot d$ y es coprimo con a, con lo cual, por la Proposición 2.4, tenemos que $b \mid d$. O sea existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d = b \cdot m$. Reemplazando en la igualdad anterior tenemos que:

$$a \cdot b \cdot m = b \cdot c.$$

Cancelando b (que es no nulo), tenemos que:

$$a \cdot m = c$$

como queríamos probar.

Ejercicio 4.3. Queremos ver que si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes a las fracciones $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ y $\frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}$ respectivamente, entonces la fracción $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ es equivalente a la fracción $\frac{\tilde{a} \cdot \tilde{c}}{\tilde{b} \cdot \tilde{d}}$. Por definición tenemos:

$$\begin{aligned} a \cdot \tilde{b} &= \tilde{a} \cdot b \\ c \cdot \tilde{d} &= \tilde{c} \cdot d. \end{aligned}$$

También por definición, $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \sim \frac{\tilde{a} \cdot \tilde{c}}{\tilde{b} \cdot \tilde{d}}$ si y sólo si:

$$a \cdot c \cdot \tilde{b} \cdot \tilde{d} = \tilde{a} \cdot \tilde{c} \cdot b \cdot d$$

Esta igualdad se obtiene simplemente multiplicando las dos igualdades anteriores.

Ejercicio 4.4.

- Dadas las fracciones $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{c_1}{d_1}, \frac{c_2}{d_2}$, podemos suponer que sus denominadores son positivos. Luego, de la definición:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{c_1}{d_1} \quad \text{implica que } a_1 \cdot d_1 < b_1 \cdot c_1 \tag{9}$$

$$\frac{a_2}{b_2} < \frac{c_2}{d_2} \quad \text{implica que } a_2 \cdot d_2 < b_2 \cdot c_2 \tag{10}$$

  Queremos probar que $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} < \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}$. Por definición de suma, queremos ver que $\frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} < \frac{c_1 \cdot d_2 + c_2 \cdot d_1}{d_1 \cdot d_2}$. Como los denominadores son positivos, la definición de que una fracción sea menor que la otra dice que esto es equivalente a:

$$(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot d_1 \cdot d_2 < (c_1 \cdot d_2 + c_2 \cdot d_1) \cdot b_1 \cdot b_2$$

Esto se obtiene multiplicando la desigualdad (9) por el número natural $b_2 \cdot d_2$, la desigualdad (10) por el número natural $b_1 \cdot d_1$ y sumándolas.

- Nuevamente podemos asumir que los denominadores de las fracciones son positivos. La definición de que una fracción sea menor que la otra implica que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si:

$$a \cdot d < b \cdot c \tag{11}$$

Por definición de producto de fracciones, $\frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} = \frac{e \cdot a}{f \cdot b}$ y $\frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d} = \frac{e \cdot c}{f \cdot d}$.

La primera fracción es menor que la segunda si y sólo si:

$$e \cdot a \cdot f \cdot d < e \cdot c \cdot f \cdot b$$

Esto se obtiene multiplicando la desigualdad (11) por el número natural e $\cdot f$ (usamos que $e/f > 0$ para poder asegurar que e es un número natural).

Ejercicio 4.5.
- $3{,}25 = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = 3/1 + 2/10 + 5/100 = 325/100 = 13/4$.
- $4{,}3 = 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} = 4/1 + 3/10 = 43/10$.
- $3{,}14 = 314/100 = 157/50$.

Ejercicio 4.6. La expresión decimal de un número racional cualquiera es de la forma

$$d_n \cdot 10^n + \cdots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0 + d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots$$

donde cada número d_i está entre 0 y 9 y corresponden a los dígitos de la representación decimal. Este número lo escribimos por:

$$d_n \ldots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \ldots$$

Además, los números con índice negativo son finitos o se repiten. Si multiplicamos dicho número por 10, obtenemos el número:

$$d_n \cdot 10^{n+1} + \cdots + d_1 \cdot 10^2 + d_0 \cdot 10^1 + d_{-1} \cdot 10^0 + d_{-2} \cdot 10^{-1} + \cdots$$

o sea obtenemos el número que escribimos por:

$$d_n \ldots d_1 d_0 d_{-1}, d_{-2} \ldots$$

Es claro que el efecto de mutiplicar el número por 10 fue simplemente mover la coma un lugar hacia la derecha.

Ejercicio 4.7. Utilizando el algoritmo, para calcular la expresión decimal de 1/8, calculamos:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 8 + 1 \\ 10 &= 1 \cdot 8 + 2 \\ 20 &= 2 \cdot 8 + 4 \\ 40 &= 5 \cdot 8 + 0. \end{aligned}$$

Luego, 1/8 = 0,125.

Ejercicio 4.8. El número racional 26,2914 se puede representar por la fracción 262.914/10.000 = 131.457/5.000 , siendo esta última irreducible.

El número racional 290,4377 se puede representar por la fracción 2.904.377/10.000, que es irreducible.

El número racional 946,17482 se puede representar por la fracción 94.617.482/10.0000 = 473.087.41/50.000, siendo esta última irreducible.

Ejercicio 4.9. El denominador de la fracción irreducible 8.729/2.000 es 2.000, que se factoriza como $2^4 \cdot 5^3$. Luego la potencia más grande es 4, con lo cual si multiplicamos por 10^4 obtenemos el número entero $5 \cdot 8\ 729$ = 43.645. Así, 8.729/2.000 = 4,6345.

El denominador de la fracción irreducible 101/2.500 es 2.500, que se factoriza como $2^2 \cdot 5^4$. Luego la potencia más grande es 4 con lo cual, si multiplicamos por 104, obtenemos el número entero $2^2 \cdot 101$ = 404. Así, 101 / 2.500 = 0,0404.

El denominador de la fracción irreducible 19.283/6.250 es 6.250, que se factoriza como $2 \cdot 5^5$. Luego la potencia más grande es 5 con lo cual, si multiplicamos por 10^5, obtenemos el número entero $2^4 \cdot$ 19.283 = 308.528. Así, 19.283/6.250 = 3,08528

Ejercicio 4.10. El ejercicio consiste sólo en una observación. No tiene respuesta.

Ejercicio 4.11. Para calcular la expresión decimal de un número racional $\frac{a}{b}$, con a y b positivos, vimos que debemos calcular el cociente y resto de dividir por b distintos números. Si dos restos se repiten, encontramos el período. La longitud del período es justamente el número de divisiones que hicimos entre el primero y el segundo de los restos iguales. Como el resto de dividir por b es un elemento entre 0 y b - 1, al calcular b + 1 divisiones, hay dos restos iguales. Esto dice que la longitud del período es a lo sumo b. Pero podemos decir algo más: si el resto en algún momento es 0, la expresión decimal es finita (dado que todos los sucesivos restos también serán cero). En este caso, podemos decir que el período es 0, y es a lo sumo b - 1 (porque b es no nulo). Si los restos de las divisiones son siempre no nulos, ellos son todos elementos entre 1 y b - 1. Luego el período tiene longitud a lo sumo b - 1 como queríamos ver.

Ejercicio 4.12. Para calcular la longitud del período de 1/9.091 sin calcularlo explícitamente, miramos la menor potencia r tal que $10^r \equiv 1$ (mód 9.091). Hacemos una tabla de las potencias

Potencia	Congruencia Módulo 9091	Potencia	Congruencia Módulo 9091
1	10	6	9081
2	100	7	8991
3	1000	8	8091
4	909	9	8182
5	9090	10	1

Luego el período tiene longitud 10. Si uno quiere verificarlo, su expresión decimal es $0,\overline{0001099989}$.

Ejercicio 4.13.

- Si $1/p$ tiene período de longitud 2, el primo p cumple que $10^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Luego p debe dividir a $10^2 - 1 = 99$. Como $99 = 3^2 \cdot 11$, las únicas posibilidades son $p = 3$ o $p = 11$. Pero $p = 3$ no sirve, porque $3 \mid 10^1 - 1$ (lo que implica que $1/3$ tiene período de longitud 1, como ya habíamos visto). Luego el único primo es $p = 11$. Efectivamente, $1/11 = 0,0\overline{9}$, como habíamos visto.
- Para período de longitud 3, miramos la factorización de $10^3 - 1 = 999 = 3^3 \cdot 37$. Nuevamente $p = 3$ no sirve porque tiene período 1, con lo cual la única posibilidad es $p = 37$. Además, como $37 \nmid 9 = 10^1 - 1$ y $37 \nmid 99 = 10^2 - 1$, podemos asegurar que la longitud del período es exactamente 3.
- Para período de longitud 4, miramos la factorización de $10^4 - 1 = 9.999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Como $3 \mid 9 = 10 - 1$, y $11 \mid 99 = 10^2 - 1$, ninguno de ellos nos sirve. Como $101 \nmid 9 = 10 - 1$, $101 \nmid 99 = 10^2 - 1$, $101 \nmid 999 = 10^3 - 1$, podemos asegurar que $1/101$ tiene período de longitud 4.
- Para período de longitud 5, miramos la factorización de $10^5 - 1 = 99.999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$. En este caso, $p = 41$ y $p = 271$ sirven dado que ninguno de ellos divide a $10 - 1$, ni a $10^2 - 1$, ni a $10^3 - 1$, ni a $10^4 - 1$.
- Para período de longitud 6, miramos la factorización de $10^6 - 1 = 999.999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. En este caso, $p = 7$ y $p = 13$ sirven porque ninguno de ellos divide a 9, ni a 99, ni a 999, ni a 9.999, ni a 99.999. Ya vimos en los casos anteriores que $1/3$ tiene período de longitud 1, $1/11$ tiene período de longitud 2 y $1/37$ tiene período de longitud 3.

□ **CAPÍTULO 5:** Números reales

Ejercicio 5.1. Supongamos primero que $|x| \leq a$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, y luego $x \leq a$. Como $-a \leq 0$ se tiene que $-a \leq x \leq a$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$. Por hipótesis se tiene que $-x \leq a$ lo que implica $-a \leq x$. Como $x \leq 0$ y $0 \leq a$ llegamos a que $x \leq a$ lo que implica $-a \leq x \leq a$.

Ahora, supongamos que $-a \leq x \leq a$. Luego, $x \leq a$ y $-a \leq x$. Por lo tanto, $x \leq a$ y $-x \leq a$. Como $|x| = x$ o $|x| = -x$ se deduce en ambos casos que $|x| \leq a$.

Ejercicio 5.2. Supongamos por el absurdo que exista una fracción $\frac{p}{q}$ tal que $(\frac{p}{q})^2 = 2^{2n+1}$. Luego $\frac{p^2}{q^2} = 2^{2n+1}$. Como $2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2$, entonces $\frac{p^2}{q^2 \cdot 2^{2n}} = 2$ lo que implica $(\frac{p}{q \cdot 2^n})^2 = 2$. Luego $x = \frac{p}{q \cdot 2^n}$ es un número racional tal que $x^2 = 2$, llegando de esta manera a una contradicción.

Ejercicio 5.3. Sea n un número natural. Como $n < n+1$, por la definición del orden en los números racionales, se tiene que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Luego, la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es estrictamente decreciente.

Se tiene que $2^n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Nuevamente por la definición del orden entre fracciones, resulta que $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$. Luego, la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$ es estrictamente decreciente.

Tenemos que $c_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$, entonces multiplicando esta desigualdad por -1 llegamos a que $-\frac{1}{n+1} < -\frac{1}{n+2}$. Sumando 1 en ambos miembros se obtiene $1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2}$ y luego $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, lo que prueba que $c_n < c_{n+1}$ y por lo tanto c_n es estrictamente creciente.

Ejercicio 5.4. Tomar la sucesión constante $a_n = 1$ para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5.5.

1. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente, entonces a_1 es una cota inferior de $(a_n)_{n\geq 1}$.
2. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente, entonces a_1 es una cota superior de $(a_n)_{n\geq 1}$.

Ejercicio 5.6. Se tiene $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ para todo número natural n. También, $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq 1$ para todo número natural n. Por último, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ para todo número natural n.

Ejercicio 5.7.

1. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones crecientes y acotadas. Como $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_n \leq b_{n+1}$ para todo n, se sigue que $a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$. Luego $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ es creciente. Sean c, d, e, f números racionales tales que $c \leq a_n \leq d$ y $e \leq b_n \leq f$ para todo $n \geq 1$. Sumando miembro a miembro se tiene que $c + d \leq a_n + b_n \leq e + f$, lo que prueba que $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ es acotada.
2. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones crecientes y acotadas de términos positivos. Como $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \leq b_{n+1}$, $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo n se sigue que $a_n \cdot b_n \leq a_{n+1} \cdot b_n \leq a_{n+1} \cdot b_{n+1}$ lo que implica $a_n \cdot b_n \leq a_{n+1} \cdot b_{n+1}$. Sean c, d números racionales tales que $0 < a_n \leq c$ y $0 < b_n \leq d$ para todo n. Entonces $0 < a_n \cdot b_n \leq c \cdot d$ para todo n. Luego $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ es creciente y acotada.

Ejercicio 5.8. Primero debemos probar que si $k \in \mathbb{N}$, la sucesión definida por $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{3kx_n - x_n^3}{2k}$ es creciente y acotada. Más aún, la sucesión x_n satisface que $x_n^2 \leq k$. Probemos esta desigualdad y el hecho de que x_n es creciente por inducción: el caso $n = 1$ es cierto pues al ser k un número natural, $x_1 = 1 \leq k$. Supongamos que es cierto para n, o sea que $x_n^2 \leq k$, y veamos que vale para $n + 1$, o sea que:

$$x_{n+1}^2 = \frac{(3kx_n - x_n^3)^2}{4k^2} \leq k$$

Debemos ver entonces que $(3kx_n - x_n^3)^2 = 9k^2x_n^2 - 6kx_n^4 + x_n^6 \leq 4k^3$,equivalentemente, que $x_n^6 - 6kx_n^4 + 9k^2x_n^2 - 4k^3 \leq 0$. Como hicimos para $k = 2$, si llamamos $y = x_n^2 - k$ tenemos:

$$y^2 = x_n^4 - 2kx_n^2 + k^2,$$
$$y^3 = x_n^6 - 3kx_n^4 + 3k^2x_n^2 - k^3$$

por lo que:

$y^3 - 3ky^2 = x_n^6 - 3kx_n^4 + 3k^2x_n^2 - k^3 - 3k(x_n^4 - 2kx_n^2 + k^2) = x_n^6 - 6kx_n^4 + 9k^2x_n^2 - 4k^3$

Es decir, debemos probar que $y^3 - 3ky^2 \leq 0$, o, en otros términos, que $y^2(y - 3k) \leq 0$.

Pero observemos que la hipótesis inductiva es precisamente que $y \leq 0$, por lo que $y^2 \geq 0$ e $y - 3k \leq 0$, y así $y^2(y - 3k) \leq 0$.

Para ver que es creciente, debemos ver que:

$$x_{n+1} = \frac{3kx_n - x_n^3}{2k} \geq x_n$$

Equivalentemente, debemos ver que $3kx_n - x_n^3 \geq 2kx_n$ que es lo mismo que $kx_n \geq x_n^3$. Como por hipótesis inductiva x_n es creciente, el ser $x_1 = 1$ implica que $x_n \geq 0$. Luego, la desigualdad $kx_n \geq x_n^3$ se deduce inmediatamente del hecho de ser $x_n^2 \leq k$.

Por último, queremos ver que la sucesión x_n^2 converge a k. Esto es lo mismo que probar que $x_n^2 - k$ converge a 0. Llamemos $e_n = x_n^2 - k$. Entonces:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{(3kx_n - x_n^3)^2}{4k^2} - k \\ &= \frac{9k^2x_n^2 - 6kx_n^4 + x_n^6 - 4k^3}{4k^2} \\ &= \frac{e_n^2(e_n - 3k)}{4k^2} \end{aligned}$$

(observando que e_n es lo que antes llamamos y). Pero ya probamos que para todo n vale $1 \leq x_n^2 < k$, por lo que $1 - k \leq x_n^2 - k < 0$, es decir $1 - 4k \leq e_n - 3k < -3k$. En valor absoluto, tenemos $|e_n - 3k| \leq 4k - 1$, y esto dice que $|e_{n+1}| = e_n^2 \frac{|e_n - 3k|}{4k^2} \leq e_n^2 \frac{4k-1}{4k^2} < \frac{e_n^2}{k}$
Como $|e_n| \leq 1$, tenemos $e_n^2 \leq |e_n|$, por lo que:
$|e_{n+1}| \leq \frac{|e_n|}{k} \leq \frac{|e_{n-1}|}{k^2} \leq \frac{|e_{n-2}|}{k^3} \leq \cdots \leq \frac{|e_1|}{k^n} = \frac{k-1}{k^n}$, y esto demuestra que e_n converge a 0.

Ejercicio 5.9. Si $\dfrac{p}{q}$ es un número racional positivo, con p, q números naturales, entonces del ejercicio 5.8 sabemos que existen dos números reales positivos x, y tales que $x^2 = p$ e $y^2 = q$. Luego $(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{p}{q}$.

Ejercicio 5.10. La relación es reflexiva, porque si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en *Sucec*($\mathbb{Q}$), entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Por otra parte, si $(b_n)_{n\geq 1}$ es otra sucesión en *Sucec*($\mathbb{Q}$) tal que $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} -(a_n - b_n) = -0 = 0$. Esto dice que la relación es simétrica. Por último, si $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1} \sim (c_n)_{n\geq 1}$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + (b_n - c_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que muestra que la relación es transitiva.

Ejercicio 5.11. Para probar esta identidad observemos primero que si n y m son dos números naturales y x es un número real positivo, entonces $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$. En efecto,

$((\sqrt[n]{x})^m)^n = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m$ lo que prueba $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$. De un modo similar se demuestra que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$

Sean $k = \frac{r}{s}$, $l = \frac{p}{q}$ números racionales, donde s y q son números naturales. La identidad es obvia si $k = 0$ o si $l = 0$. Supongamos que k y l son positivos, es decir $r > 0$ y $p > 0$. Luego $(a^k)^l = \sqrt[q]{(a^k)^p}$. Usando las identidades anteriores se obtiene $\sqrt[q]{(a^k)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[s]{a^r})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[s]{a^{p\cdot r}}} = \sqrt[s\cdot q]{a^{p\cdot r}} = a^{k\cdot l}$. Si $k < 0$ ó $l < 0$ la identidad se prueba en forma análoga usando que $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

☐ CAPÍTULO 6. Números complejos

Ejercicio 6.1.

$$z - w = -\frac{5}{2} + 4i \qquad w - z = \frac{5}{2} - 4i$$

$$2z = -4 + 12i \qquad 4w - 3z = (2 + 8i) - (-6 + 18i) = 8 - 10i$$

$$z \cdot w = -1 - 12 - 4i + 3i = -13 - i$$

$$z^2 = 4 - 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6i = -32 - 24i$$

Ejercicio 6.2. $\overline{7 - 2i} = 7 + 2i$ (el conjugado del conjugado es el número original). $\overline{4} = 4$, $\overline{i} = -i$, $\overline{-i} = i$.

Ejercicio 6.3.

$$\begin{aligned}(3+4i)\cdot\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) &= \left(3\cdot\frac{3}{25} - (-1)\cdot 4\cdot\frac{4}{25}\right) + \left(-3\cdot\frac{4}{25} + 4\cdot\frac{3}{25}\right)i\\ &= \left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25} + \frac{12}{25}\right)i\\ &= \frac{25}{25} + 0\ i\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i\right)\cdot(3+4\ i) &= \left(\frac{18}{25}\cdot 3 - \frac{1}{25}\cdot 4\right) + \left(\frac{18}{25}\cdot 4 + \frac{1}{25}\cdot 3\right)i\\ &= \left(\frac{54}{25} - \frac{4}{25}\right) + \left(\frac{72}{25} + \frac{3}{25}\right)i\\ &= \frac{50}{25} + \frac{75}{25}i\\ &= 2+3\ i\end{aligned}$$

Ejercicio 6.4.

$$\arg(4) = 0, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arg(8i) = \frac{\pi}{2},$$

$$\arg(-8i) = \frac{3\pi}{2}, \qquad \arg(-7) = \pi, \qquad \arg(2-2i) = \frac{7\pi}{4}$$

Ejercicio 6.5.

$$1 + i = (\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}) \qquad 1 - i = (\sqrt{2}\ ;\ \frac{7\pi}{4}) \qquad -1 + i = (\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4})$$

$$-1 - i = (\sqrt{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4}) \qquad 2 + 2i = (2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}) \qquad -3 - 3i = (3\sqrt{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4})$$

$$4 - 4i = (4\sqrt{2}\ ;\ \frac{7\pi}{4}) \qquad 4 = (4\ ;\ 0) \qquad -5 = (5\ ;\ \pi)$$

Ejercicio 6.6. Como $2i - (-2 + i) = 2 + i$, entonces calculamos:

k	z_k	$z_k \cdot (2+i)$	$z_k \cdot (2+i) + (-2+i)$
0	1	$2+i$	$2i$
1	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-2-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-6-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$
2	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-6+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-2\sqrt{3}}{2}$

Para el segundo problema, si $x_0 = 1 + i$, $x_1 = -3 + 2i$ y x_2 es el tercer vértice, entonces $\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$ es una raíz cúbica de la unidad. Por lo tanto, hay dos soluciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (-4+i) + 1 + i \\ &= (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} - 2\sqrt{3})i, \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} x_2 &= (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (-4+i) + 1 + i \\ &= (3 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

Ejercicio 6.7. Una de las raíces es $(2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) = \sqrt{3} + i$. Las otras se obtienen multiplicando esta raíz por las raíces octavas de la unidad:

$$\begin{aligned} (1\ ;\ \frac{\pi}{4}) \cdot (2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \frac{5\pi}{12}) \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \cdot (\sqrt{3} + i) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ ;\ \frac{2\pi}{4}) \cdot (2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \frac{8\pi}{12}) \\ &= i \cdot (\sqrt{3} + i) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ ;\ \frac{3\pi}{4}) \cdot (2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \frac{11\pi}{12}) \\ &= (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \cdot (\sqrt{3} + i) \\ &= \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ ;\ \frac{4\pi}{4}) \cdot (2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \frac{14\pi}{12}) \\ &= (-1) \cdot (\sqrt{3} + i) \\ &= -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ ;\ \frac{5\pi}{4}) \cdot (2\ ;\ \frac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \frac{17\pi}{12}) \\ &= (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \cdot (\sqrt{3} + i) \\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1\ ;\ \tfrac{6\pi}{4})\cdot(2\ ;\ \tfrac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \tfrac{20\pi}{12})\\
&= (-i)\cdot(\sqrt{3}+i)\\
&= 1-\sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\ ;\ \tfrac{7\pi}{4})\cdot(2\ ;\ \tfrac{2\pi}{12}) &= (2\ ;\ \tfrac{23\pi}{12})\\
&= (\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}i)\cdot(\sqrt{3}+i)\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}i
\end{aligned}
$$

Calculamos la forma polar de $-8-8\sqrt{3}i$: $|-8-8\sqrt{3}i|=\sqrt{8^2+8^2\cdot 3}=8\sqrt{4}=16$, y si $\alpha=\arg(-8-8\sqrt{3}i)$, entonces $\cos\alpha=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$ y sen $\alpha=\frac{-8\sqrt{3}}{16}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que $\alpha=\frac{4\pi}{3}$. Las formas polares de las raíces octavas son iguales a las anteriores, pero cambiando los módulos por $\sqrt{2}$ en lugar de 2: $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{2\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{5\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{8\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{11\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{14\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{17\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{20\pi}{12})$, $(\sqrt{2}\ ;\ \frac{23\pi}{12})$

Ejercicio 6.8. Si $x=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$, entonces $x^2=\frac{9-7}{16}-2\frac{3\sqrt{7}}{16}i=\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{7}}{8}i$ por lo que $2x^2+3x+2=\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{4}i-\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{4}i+2=-\frac{8}{4}+2=0$.

Ejercicio 6.9. Calculamos *u* y *v*:

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{\frac{6}{2}+\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{729}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{3+\sqrt{9+27}}\\
&= \sqrt[3]{9}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v &= \sqrt[3]{\frac{6}{2}-\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{729}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{3-\sqrt{9+27}}\\
&= \sqrt[3]{-3}\\
&= -\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

por lo que las soluciones son:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\\
&(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\sqrt[3]{9}-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)\sqrt[3]{3}=\frac{-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})}{2}i\\
&(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)\sqrt[3]{9}-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\sqrt[3]{3}=\frac{-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})}{2}i
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6.10. La ecuación $x^3=15x+4$ es equivalente a $x^3-15x-4=0$, por lo que nuevamente calculamos *u* y *v*:

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-3.375}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}\\
&= \sqrt[3]{2+11i}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
v &= \sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{16}{4}+\frac{-3.375}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}}\\
&= \sqrt[3]{2-11i}
\end{aligned}
$$

Como está dicho al presentar la fórmula, hay tres raíces posibles tanto para u como para v. Se deben tomar u y v de manera que su producto sea $-p/3 = 5$. Podemos tomar $\alpha = \arg(2 + 11i)$ y elegir $u = (\sqrt{5}\ ;\ \frac{\alpha}{3})$ y $v = (\sqrt{5}\ ;\ -\frac{\alpha}{3})$. Las soluciones son entonces:

$$\begin{aligned} u + v &= (\sqrt{5}\ ;\ \frac{\alpha}{3}) + (\sqrt{5}\ ;\ -\frac{\alpha}{3}) \\ &= 2\sqrt{5}\cos\frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wu + w^2v &= (\sqrt{5}\ ;\ \frac{\alpha+2\pi}{3}) + (\sqrt{5}\ ;\ -\frac{\alpha+2\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{5}\cos\frac{\alpha+2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^2u + wv &= (\sqrt{5}\ ;\ \frac{\alpha+4\pi}{3}) + (\sqrt{5}\ ;\ -\frac{\alpha+4\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{5}\cos\frac{\alpha+4\pi}{3} \end{aligned}$$

Las tres raíces son reales, aunque puede verse que la primera es la única positiva, por lo que debe ser igual a 4. Para ver que la segunda y la tercera son negativas, hay que comprobar que los ángulos $\frac{\alpha+2\pi}{3}$ y $\frac{\alpha+4\pi}{3}$ están entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. Como $\alpha = \arg(2+11i)$, sabemos que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces, queremos comprobar que $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$, pero esto es equivalente, multiplicando todo por 6, a $3\pi < 2\alpha + 4\pi < 9\pi$, y a su vez esto es equivalente, restando 4π, a $-\pi < 2\alpha < 5\pi$, que es cierto.

De la misma manera, queremos ver que $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$, pero esto es equivalente, multiplicando todo por 6, a $3\pi < 2\alpha + 8\pi < 9\pi$, y a su vez esto es equivalente, restando 8π, a $-5\pi < 2\alpha < \pi$, que también es cierto.

Ejercicio 6.11. Debemos probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|m_{n,c}| \geq |c|$. Si $n = 1$, tenemos $m_{n,c} = m_{1,c} = c$, por lo que automáticamente vale $|m_{1,c}| \geq |c|$. Suponiendo ahora que vale que $|m_{n,c}| \geq |c|$, debemos probar que $|m_{n+1,c}| \geq |c|$.

Pero
$$\begin{aligned} |m_{n+1,c}| &= |m_{n,c}^2 + c| \geq |m_{n,c}^2| - |c| \\ &= |m_{n,c}|^2 - |c| \geq |c|^2 - |c| \end{aligned}$$

Por otra parte, como $|c| > 2$, resulta que $|c|^2 - |c| > 2|c| - |c| = |c|$, de donde se obtiene la desigualdad buscada.

Ejercicio 6.12. Ahora debemos probar la afirmación $|m_{k,c}| > 2$ para $k \geq n$. Si $k = n$, ya nos dicen que $|m_{k,c}| = |m_{n,c}| > 2$. Y si vale la afirmación $|m_{k,c}| > 2$, entonces
$|m_{k+1,c}| = |m_{k,c}^2 + c| \geq |m_{k,c}^2| - |c| > 2^2 - |c| \geq 2^2 - 2 = 2.$

Ejercicio 6.13. Si bien los contenidos matemáticos para hacer el programa están incluidos en el libro, los contenidos de computación no lo están. Es por eso que se deja este ejercicio sin una respuesta, y se destina a quienes tengan este conocimiento.