5. Números reales

Alejandro Petrovich

En este capítulo introduciremos el conjunto de los números reales. Nos proponemos dar una construcción de este sistema numérico utilizando un método particular para aproximar dichos números mediante fracciones o números racionales. Mostraremos mediante algunos ejemplos de carácter geométrico la forma de construir los números reales a partir de esta aproximación.

Algunos resultados de este capítulo serán enunciados sin demostración dado que la prueba matemática formal de los mismos requiere el manejo de ciertas técnicas que están fuera del alcance del presente libro.

Si c y d son dos números racionales con $c \leq d$, notaremos con $[c, d]$ al intervalo cerrado determinado por c y d, esto es:

$$[c, d] = \{x : c \leq x \leq d\}$$

Recordamos que para un número x, escribimos $|x|$ su valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En términos geométricos, el valor absoluto de un número racional expresa cuánto dista dicho número del 0. Si a es un número racional positivo, entonces $|x| = a$ si y sólo si $x = a$ o bien $x = -a$. Más aún, si x e y son dos números racionales, entonces el número $|x - y|$ expresa la distancia entre x e y. Por ejemplo, ¿cuál es la distancia entre 4 y -7? La respuesta es: $|4 - (-7)| = |11| = 11$.

Propiedad 5.1. *Una propiedad importante que verifican los números racionales referida al valor absoluto es la llamada* desigualdad triangular. *Esta desigualdad expresa lo siguiente:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

para todo par de números racionales x, y.

Demostración. Para demostrarla debemos separar en casos de la siguiente manera:

Primer caso: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Luego $x + y \geq 0$ lo que implica $|x + y| = x + y$, $|x| = x$ y $|y| = y$. Por lo tanto $|x + y| = |x| + |y|$.

Segundo caso: $x < 0$, $y < 0$. Luego $x + y < 0$ lo que implica $|x + y| = -x - y$, $|x| = -x$ y $|y| = -y$. Por lo tanto $|x + y| = |x| + |y|$.

Tercer caso: $x \geq 0$, $y < 0$. Notar que en este caso no podemos determinar el signo de $x + y$. Lo que sí sabemos es que $|x| = x$ y $|y| = -y$. Si $x+y \geq 0$, entonces $|x + y| = x + y$.

Por lo tanto $|x + y| \leq |x| + |y|$ si y sólo si $x + y \leq x - y$, o equivalentemente, $y \leq -y$ y esta desigualdad se cumple ya que $y < 0$. Si $x+y < 0$, entonces $|x + y| = -x - y$. Por lo tanto $|x + y| \leq |x|+|y|$ si y sólo si $-x - y \leq x - y$, o equivalentemente, $-x \leq x$ y esta desigualdad se cumple pues $x \geq 0$.

Cuarto caso: $x < 0$, $y \geq 0$. La prueba es similar al caso anterior y la omitiremos.

Ejercicio 5.1. Mostrar que si a es un número racional positivo ó 0, entonces $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

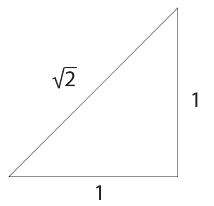

Figura 1. *Un triángulo con catetos que miden 1 e hipotenusa que mide $\sqrt{2}$*

Los números reales surgen como necesidad de resolver ciertas ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. Entre dichas ecuaciones se encuentran las que nos permiten calcular ciertas raíces cuadradas. En efecto, una de las múltiples aplicaciones del número real es la de poder demostrar la existencia de raíces cuadradas de números positivos. En primer lugar, debemos precisar qué significa que un número admita una raíz cuadrada. Consideremos, para ilustrar este concepto, el siguiente ejemplo que aparece en geometría. Tomemos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cm de longitud. ¿Qué longitud tiene la hipotenusa? Si llamamos h a la longitud de la hipotenusa, entonces según el Teorema de Pitágoras tenemos que $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Es decir h debe ser un número que elevado al cuadrado dé como resultado el número 2. Luego h debe ser solución de la ecuación $x^2 = 2$. Es claro que si esta ecuación admite una solución x, entonces $-x$ también es solución ya que $x^2 = (-x)^2 = 2$. Como la longitud de la hipotenusa debe ser positiva, la solución que estamos buscando debe ser única, en el sentido que dicha ecuación no puede admitir dos soluciones positivas. Diremos en este caso que *la raíz cuadrada* de 2 es la única solución positiva de la ecuación $x^2 = 2$ y dicha solución será denotada por $\sqrt{2}$. Sin embargo, para asegurarnos de que esta definición es correcta debemos garantizar que la ecuación $x^2 = 2$ admite solución. Comenzaremos probando que si dicha solución existe, entonces no puede ser un número racional.

Teorema 5.2. *Si x es un número racional, entonces $x^2 \neq 2$.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. Por lo dicho anteriormente, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x es positivo. Luego, existen dos números naturales p, q tales que $x = p/q$ donde además p/q es una fracción irreducible. Como $x^2 = 2$, entonces $p^2/q^2 = 2$. A partir de esta igualdad, se sigue que $p^2 = 2q^2$. Luego, p es un número natural que elevado al cuadrado nos da un número par. Por lo tanto p debe ser par, lo que implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2k$. Reemplazando p por $2k$ obtenemos $(2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$. Luego, simplificando por 2 llegamos a que $2k^2 = q^2$, lo que implicaría que q^2 es par y por ende q es par. Por lo tanto p y q son números pares, lo que es imposible ya que p/q es una fracción irreducible.

Ejercicio 5.2. Mostrar que si n es un número natural, no existe un número racional x tal que $x^2 = 2^{2n+1}$.

Tanto el teorema 5.2 como el enunciado del ejercicio 5.2 muestran que es necesario ampliar el conjunto de los números racionales para poder resolver ciertas ecuaciones. En la sección 4 mostraremos, efectivamente, que la ecuación $x^2 = 2$ admite solución en el conjunto de los números reales. En la sección 2 mostraremos otro ejemplo de carácter geométrico que ilustra cómo aparecen los números reales en el cálculo de áreas de ciertas figuras geométricas.

□ 1. Sucesiones crecientes y acotadas

Diremos que una sucesión de números racionales $(a_n)_{n\geq 1}$ es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo número natural n. Si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es **estrictamente creciente**. Los conceptos de sucesión decreciente y estrictamente decreciente son análogos cambiando el orden de la desigualdad (es decir, $a_n \geq a_{n+1}$ y $a_n > a_{n+1}$).

En otras palabras, una sucesión es creciente cuando cada término es mayor o igual que el anterior, mientras que una sucesión es estrictamente creciente cuando cada término es estrictamente mayor que el anterior. Es fácil ver que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente (estrictamente creciente) si y sólo si $a_n \leq a_m (a_n < a_m)$ para todo par de números naturales n, m tal que $n < m$.

Es claro que la sucesión de los números naturales $a_n = n$ es una sucesión estrictamente creciente. Por otro lado, la sucesión $a_n = (-1)^n$ no es creciente ni decreciente.

Ejercicio 5.3.

1. Mostrar que las sucesiones $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{2^n}$ son estrictamente decrecientes.
2. Mostrar que la sucesión $c_n = \frac{n}{n+1}$ es estrictamente creciente.

Ejercicio 5.4. Dar un ejemplo de una sucesión creciente pero no estrictamente creciente.

Diremos que una sucesión de número racionales $(a_n)_{n\geq 1}$ es **acotada superiormente,** si existe un número racional d tal que $a_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso, diremos que d es una **cota superior** de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$. Análogamente, diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es **acotada inferiormente,** si existe un número racional c tal que $c \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y c se denomina **una cota inferior** de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$. Finalmente, diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es **acotada** si es acotada superiormente e inferiormente.

Para ilustrar el concepto de sucesión acotada, consideremos la sucesión de los números naturales $a_n = n$ y la sucesión $b_n = 1/n$. La primera, está acotada inferiormente pero no superiormente. Cualquier número $c \leq 1$ es una cota inferior. Sin embargo, ningún número d tiene la propiedad de ser mayor que todos los números naturales. Es decir, si d es un número racional, existe algún natural $m > d$, por lo que $a_m > d$, y luego d no puede ser una cota superior de $(a_n)_{n\geq 1}$. Por otra parte, la sucesión b_n está acotada tanto superior como inferiormente. De hecho, cualquier número ≤ 0 es una cota inferior, y cualquier número ≥ 1 es una cota superior.

Es importante destacar que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es acotada si todos sus términos están dentro de un intervalo $[c, d]$ donde c y d son cotas inferiores y superiores de $(a_n)_{n\geq 1}$, respectivamente. Esto significa que $c \leq a_n \leq d$ para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5.5.

1. Probar que toda sucesión creciente de números racionales es acotada inferiormente.
2. Probar que toda sucesión decreciente de números racionales es acotada superiormente.

Ejercicio 5.6. Mostrar cotas superiores e inferiores para las sucesiones $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$ y $c_n = (-1)^n$

□ 2. Un ejemplo geométrico

Consideremos el gráfico de la función $y = f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 2]$. ¿Cuál es el área de la región $\mathfrak{R}$ comprendida por dicho gráfico, el eje x y las dos rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$? En la figura 2 ilustramos a la región $\mathfrak{R}$ marcada con color verde.

Llamemos S al valor del área de la región $\mathfrak{R}$. Dado que no tenemos una herramienta para calcular el valor de S, desarrollaremos un nuevo mecanismo para poder aproximar dicho valor, utilizando algunos conocimientos elementales de geometría. Entre todas las figuras geométricas de las cuales sabemos calcular el área se encuentra el *rectángulo*. Recordemos que el área de un rectángulo de base b y altura h es el producto $b{\cdot}h$. Veamos cómo podemos utilizar esta fórmula para aproximar el valor de S. Observemos que, si consideramos el rectángulo R que tiene como base el intervalo cerrado $[1, 2]$ y altura $f(2) = 1/2$, dicho rectángulo se encuentra por debajo del gráfico de la función y el área del mismo es $1/2$. Es claro que este valor no va a coincidir con el valor de S que queremos calcular, ya que hay puntos de $\mathfrak{R}$ que no pertenecen a R. Estos puntos se corresponden con la región en blanco de la figura 3. Si bien no hemos calculado el valor de S, hemos aproximado dicho valor por el número $1/2$ y además $1/2 < S$. Una pregunta natural es la siguiente: ¿cuál es el error cometido al usar esta primera aproximación? Entendemos por error a la diferencia entre el valor exacto S y el valor $1/2$, es decir $S - 1/2$. Como no conocemos el valor de S, no podemos determinar el valor exacto del error cometido. Sin embargo, es importante destacar que el valor $S - 1/2$ coincide con el área de la región en blanco de la figura 3.

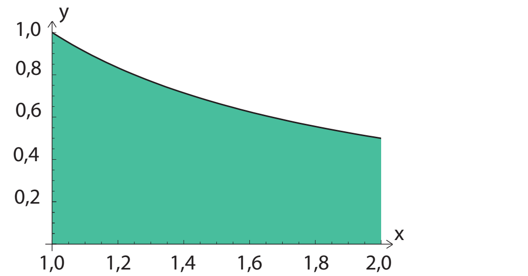

Figura 2.

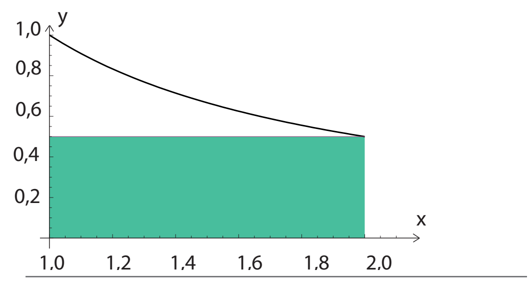

Figura 3.

Supongamos ahora que dividimos al intervalo $[1, 2]$ en dos *subintervalos* I_1, I_2 de la misma longitud. Como el intervalo $[1, 2]$ tiene longitud 1, resulta que $I_1 = [1, 3/2]$ e $I_2 = [3/2, 2]$.

Luego, cada uno de estos intervalos tiene longitud 1/2. A continuación, construimos dos rectángulos R_1, R_2 que tienen como base los intervalos I_1, I_2 y cuyas alturas son respectivamente $f(3/2) = 2/3$ y $f(2) = 1/2$, es decir el valor de f en los extremos derechos de ambos intervalos. Si hacemos el dibujo de dichos rectángulos (Figura 4) se observa también que están por debajo de la gráfica de la función $y = 1/x$. Como el área de R_1 es $1/3$ y el área de R_2 es $1/4$ resulta que el área de la figura resultante de la unión de los dos rectángulos es $1/3 + 1/4 = 7/12$. Al igual que en el caso anterior, se observa que este valor no va a coincidir con el valor de S que queremos calcular ya que hay puntos de $\mathfrak{R}$ que no pertenecen a ninguno de dichos rectángulos. En términos conjuntistas, esto quiere decir que existen puntos de $\mathfrak{R}$ que no pertenecen a la unión $R_1 \cup R_2$. Dichos puntos son los que se corresponden con la región en blanco de la figura 4. En este segundo caso hemos aproximado el valor de S por el número racional 7/12. Como $1/2 < 7/12 < S$ se deduce que el error cometido en este caso es menor que en el caso anterior, ya que $S - 7/12 < S - 1/2$. Por lo tanto, esta segunda aproximación es mejor que la anterior. Esta propiedad se pone de manifiesto comparando las figuras 3 y 4, ya que el área de la región en blanco de la figura 4 es menor que la correspondiente en la figura 3.

A partir de estas dos primeras aproximaciones podemos obtener como generalización natural la siguiente construcción. Para cada número natural n dividimos al intervalo $[1, 2]$ en n subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de la misma longitud, $1/n$. Los intervalos construidos de esta manera serán:

$$I_1 = [1, 1 + \frac{1}{n}],\ \ I_2 = [1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}], \ldots,\ \ I_n = [1 + \frac{n-1}{n}, 2]$$

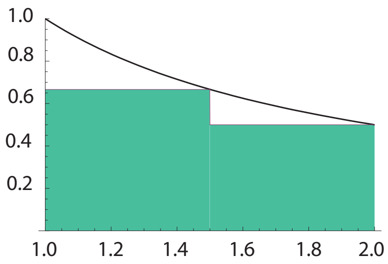

Figura 4.

A partir de estos intervalos definimos n rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que tienen como base los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ respectivamente, cuyas alturas son $h_1 = f(1+1/n) = n/n+1$, $h_2 = f(1+2/n) = n/n+2$, ..., $h_n = f(2) = 1/2$, es decir el valor de f en los extremos derechos de cada uno de estos intervalos. Vemos que si $1 \leq i \leq n$, el valor de la altura del i-ésimo rectángulo R_i es $h_i = n/n+i$, y por lo tanto el área de R_i es $1/n \cdot n/n+i = 1/n+i$. Llamemos $R(n)$ a la unión de estos n rectángulos. Por lo tanto, el área total resultante de la unión de estos n rectángulos es:

$$A(R(n)) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A(R(n))$ es un número racional. Al igual que en los casos $n = 1$ y $n = 2$, la figura resultante de unir estos n rectángulos está por debajo de la gráfica de la función $y = 1/x$ y no coincide con la región total $\mathfrak{R}$ (Figura 5). Sin embargo, a medida que le damos valores a n cada vez más grandes, *los diferentes valores de $A(R(n))$ se van acercando cada vez más al valor S*. Esto se interpreta gráficamente viendo que el área de la parte marcada en blanco va a ser cada vez más pequeña a medida que n toma valores cada vez más grandes. Para cada n se tiene, además, que dicha área coincide con el error cometido, cuyo valor está dado por la fórmula:

$$S - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

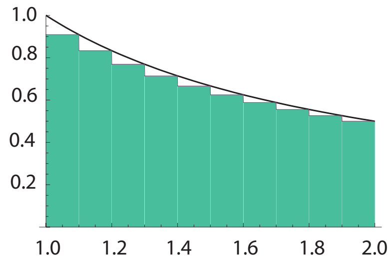

Figura 5.

A partir de estas consideraciones, podemos enunciar los siguientes resultados:

1. para cada $n \in \mathbb{N}$, $A(R(n)) < S$;
2. si $n < m$, entonces $A(R(n)) < A(R(m))$. Es decir, los números $A(R(n))$ van creciendo a medida que n toma valores cada vez más grandes;
3. para cada $n \in \mathbb{N}$, $A(R(n))$ es un número racional;
4. el error cometido $S - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$

   se acerca a 0 a medida que n toma valores cada vez más grandes.

Es muy importante destacar que cada una de estas condiciones requiere una justificación matemática rigurosa, ya que el análisis que hemos hecho para afirmar tales condiciones fue hecho en base a una idea intuitiva que proviene de una interpretación geométrica dada por el gráfico de la función. Por ejemplo, en la condición (1) se afirma que $A(R(n)) < S$. Es obvio que para justificar esto deberíamos conocer el valor de S, que no sabemos por el momento. Otro problema es determinar qué clase de número representa S. ¿S es un número racional? La respuesta es negativa: *S no es un número racional*[10]. El número S es un nuevo ejemplo de un *número real* que no es racional, es decir un número *irracional*, definición que daremos más adelante.

Lo que sí podemos justificar es lo afirmado en los ítems 2 y 3. La condición 2 nos dice que la sucesión $A(R(n))_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente. La prueba es la siguiente:

De acuerdo a la fórmula de arriba, sabemos que para cada n se tiene:
$A(R(n)) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Luego, si cambiamos n por $n+1$ tenemos que:
$A(R(n+1)) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}$. Si a esta expresión sumamos y restamos la fracción $\frac{1}{n+1}$ obtenemos $A(R(n+1)) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$
Usando el hecho que la suma de los primeros n términos de esta suma es $A(R(n))$ deducimos que:

$$A(R(n+1)) = A(R(n)) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

o bien, como $\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2n+2}$

$$A(R(n+1)) = A(R(n)) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Como $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ deducimos la fórmula:

[10] La prueba matemática de este hecho es difícil ya que se requieren técnicas que están fuera de los alcances y objetivos del presente libro, motivo por el cual la omitiremos.

$$A(R(n+1)) = A(R(n)) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Como $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ es un número positivo, concluimos que $A(R(n)) < A(R(n+1))$ para todo $n \geq 1$, mostrando de esta manera que la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$ determinada por las áreas de las regiones $R(n)$ es estrictamente creciente. Luego, si $n < m$ entonces $A(R(n)) < A(R(m))$.

La condición 3 es claramente verdadera ya que para cada número natural n los números $\frac{1}{n+i}$, con $1 \leq i \leq n$ son racionales y, por lo tanto, su suma será también un número racional.

Más aún, la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$ es acotada superiormente. En efecto, sabemos que $A(R(n)) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Como cada sumando es menor o igual que la fracción $\frac{1}{n}$, se tiene que $A(R(n)) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}$. Como la cantidad de términos de esta sumatoria es n, deducimos que $A(R(n)) \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1$, lo que prueba que 1 es una cota superior de la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$.

Tal como se ha mencionado anteriormente, tampoco podemos justificar por el momento lo afirmado en el punto 4 ya que, al no conocer con precisión el valor de S no podremos conocer el error cometido al calcular el área de la región $\mathfrak{R}$. Sin embargo, es conveniente hacer un análisis más detallado del error. Si bien no podemos conocer para cada número natural n el valor exacto de dicho error, podemos hacer una e*stimación* del mismo en el siguiente sentido:

Si fijamos un número ε arbitrariamente pequeño, entonces podemos encontrar un número natural n_0 tal que el error cometido al aproximar el valor de S por el área $A(R(n_0))$ es menor que ε. Por ejemplo, ¿cuántos rectángulos se necesitan construir para que el error cometido sea menor que 10^{-3}? En la sección 4 daremos una respuesta a este problema.

□ 3. Límite de sucesiones

Para poder definir el concepto de número real necesitaremos introducir el de límite de una sucesión. En la sección anterior dimos una idea de cómo se puede aproximar el área S de la región $\mathfrak{R}$ calculando las áreas de las regiones $R(n)$ cuyos valores están dados por la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$. Decimos, en ese caso, que el valor S representa un número real que se obtiene como *límite* de la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$. Es importante destacar que a medida que n toma valores cada vez más grandes, las áreas $A(R(n))$ de las regiones $R(n)$ se van aproximando cada vez más al valor de S, pero nunca podremos calcular el valor exacto de S mediante esta aproximación. Consideremos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Los términos de esta sucesión son las sucesivas divisiones 1, 1/2 , 1/3 , 1/4 , 1/5 , ... A medida que los denominadores se agrandan, los términos son cada vez más pequeños.

Imaginemos que queremos repartir un kilogramo de helado entre n personas de modo tal que todas las porciones tengan el mismo peso. Es claro que cuanto mayor sea el número de personas, la porción de helado que recibirá cada una será menor. Veamos el siguiente ejemplo: ¿entre cuántas personas hay que repartir el kilogramo de helado para que el peso de cada porción sea menor a 10^{-1} kilogramos (100 gramos)? Para responder esta pregunta debemos ver para qué valor de n se cumple la desigualdad $1/n < 10^{-1}$. Pero $1/n < 10^{-1}$ si y sólo si $10^{1} < n$. Luego, n debe ser un número natural mayor que 10. Por lo tanto, si repartimos el kilogramo de helado entre 11 personas o más, el peso de la porción que recibirá cada una de ellas será menor que 10^{-1} kilogramos. Notar que el valor de n no es único, ya que hay infinitos números naturales mayores que 10. Por ejemplo: si repartimos el kilogramo de helado entre 20 personas, el peso de cada porción será también menor que 10^{-1} kilogramos.

Podríamos plantear este otro problema: ¿entre cuántas personas hay que repartir el kilogramo de helado para que el peso de cada porción sea igual a 2/5? Esto lleva a resolver la ecuación $1/n=2/5$. Pero esta ecuación no tiene solución, porque n debería ser 5/2. Luego, cuando decimos que los términos de la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ van siendo cada vez más chicos a medida que n toma valores cada vez más grandes significa que, si tomamos un número ε positivo arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$ y no necesariamente $1/n_0 = \varepsilon$. Por otra parte, en este ejemplo se ve que si $1/n_0 < \varepsilon$ entonces cualquier n mayor o igual que n_0 también verifica la desigualdad $1/n < \varepsilon$.

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números racionales. Diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene límite 0 o que **converge a** 0 cuando n tiende a ∞, si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Más generalmente, si l es un número racional, diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ **tiene límite l cuando n tiende** a ∞, si la sucesión $(a_n - l)_{n\geq 1}$ converge a 0.

Escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ para indicar que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene límite l cuando n tiende a ∞.

Para una sucesión creciente (o decreciente), decir $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ equivale a decir que: a medida que n se hace cada vez más grande, los valores de a_n se acercan a l tanto como uno quiera[11].

Si n es un número natural, entonces la diferencia $|a_n - l|$ expresa el error cometido al aproximar el valor de l por el término a_n. Por lo tanto, si ε es un número arbitrariamente pequeño, la definición anterior nos dice que, a partir de un cierto momento, el error cometido al aproximar l por a_n es menor que ε. Ese momento es el menor valor posible de n_0.

Como vimos, la sucesión $a_n = 1/n$ tiene límite 0. Si achicamos el valor de ε, el momento a partir del cual la sucesión distará del 0 en menos de ε será mayor. Por ejemplo, ¿entre cuántas personas hay que repartir el kilogramo de helado para que el peso de cada porción sea menor a 10^{-2} kilogramos? En este caso la respuesta será: *por lo menos* 101.

Dos sucesiones diferentes pueden tener el mismo límite. Por ejemplo, tomemos las sucesiones definidas por $a_n = 1/n$ y $b_n = 1/2n$ para todo n. Ambas sucesiones convergen a 0 pero son diferentes, ya que $a_1 = 1$ y $b_1 = 1/2$. Por otra parte, no todas las sucesiones

[11] El concepto de límite de una sucesión es delicado. Un abordaje más profundo requiere conceptos de análisis matemático que no desarrollamos en este libro. Aquí solamente estudiaremos sucesiones crecientes o decrecientes.

tienen límite. Por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene límite. En efecto si n toma valores cada vez más grandes y n es par, entonces a_n vale siempre 1, lo que indicaría que el límite debería ser 1; pero si n toma valores cada vez más grandes y n es impar, entonces a_n vale siempre -1 y luego el límite debería ser -1 lo que es imposible.

Algunas propiedades importantes de los límites de sucesiones son:

Propiedades 5.3. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones que convergen a los números racionales ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente, entonces:*

- *la suma $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión que converge a $\ell_1 + \ell_2$,*
- *si q es un número racional, la sucesión $(q \cdot a_n)_{n\geq 1}$ converge a $q \cdot \ell_1$,*
- *el producto $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión que converge a $\ell_1 \cdot \ell_2$.*

Supongamos que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de números racionales tenga límite l. Entonces, los términos de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se van acercando entre sí en el sentido de que las distancias $|a_m - a_k|$ son cada vez más pequeñas a medida que k y m toman valores cada vez más grandes. Esta propiedad se deduce de la siguiente desigualdad:

$$|a_m - a_k| = |(a_m - l) + (l - a_k)| \leq |a_m - l| + |l - a_k|$$

En efecto, cuando m y k toman valores cada vez más grandes, tanto $|a_m - l|$ como $|l - a_k|$ pueden hacerse tan chicos como uno quiera, y por lo tanto su suma $|a_m - l| + |l - a_k|$ también. Más aún, si $(a_n)_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión creciente y acotada, entonces sus términos también se van acercando entre sí a medida que n y m toman valores cada vez más grandes ¡aunque no sepamos si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene límite racional!

Podemos ilustrar este hecho con el siguiente ejemplo ficticio. Ivana Pavlova fue la única sobreviviente de un accidente aéreo ocurrido en el desierto de Sahara el 10 de septiembre de 1945. Ivana tenía la ventaja de que su organismo le permitía sobrevivir en el desierto con absorber cada día una pequeña dosis de agua, sin importar la cantidad. Pero para ello no podía dejar de tomar agua ni un solo día. Entre los restos del avión que se estrelló, Ivana encontró un bidón de agua de 10 litros. Supongamos que $C(n)$ es la cantidad medida en litros que Ivana toma el día n, siendo el primer día el 10 de septiembre de 1945. Definimos $S(n)$ a la cantidad total de agua que ha tomado Ivana desde el 10 de septiembre hasta el día n. Es decir $S(n) = C(1) + C(2) + \ldots + C(n)$. Como Ivana debe tomar agua todos los días y, siempre debe dejar algo de agua en el bidón, inferimos que $C(n) > 0$ y que $S(n) < 10$ para todo n. Luego, la sucesión $(S(n))_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente y acotada superiormente por 10.[12] Notemos que si k es un número natural, la diferencia $S(n + k) - S(n) = C(n + 1) + C(n + 2) + \ldots C(n + k)$ expresa la cantidad de agua que Ivana bebe durante k días consecutivos a partir del día n. Es obvio que Ivana no puede tomar 5 litros de agua en dos días diferentes porque se quedaría sin agua. Sin embargo, se puede afirmar algo más: *a partir de cierto día, la cantidad total de agua que*

[12] Una manera que tiene Ivana para garantizar su supervivencia es tomar cada día la mitad del agua que le queda. Esto es, el primer día toma 5 litros, es decir 10/2 litros. El segundo día toma 10/4, el tercero 10/8, y en general el enésimo día toma $10/2^n$.

Ivana va a consumir, entre ese día y cualquier otro día posterior, será menor que 5 litros. En efecto, la propiedad que acabamos de enunciar se escribe simbólicamente como sigue: debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S(n) - S(n_0) < 5$ para todo $n \geq n_0$. Veamos cómo podemos probar esto. Supongamos por el absurdo que esta propiedad no se cumple, en particular no se cumple si $n_0 = 1$, es decir el primer día. Por lo tanto, existe un número natural $n_1 > 1$ tal que $S(n_1) - S(1) \geq 5$. Como la propiedad tampoco se cumple para n_1, debe existir otro número natural $n_2 > n_1$ tal que $S(n_2) - S(n_1) \geq 5$. Luego, $S(n_2) = S(n_2) - S(n_1)+S(n_1) - S(1)+S(1) \geq 10+S(1) > 10$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, debe existir un día n_0 en el que la cantidad total de agua que consume Ivana desde el día n_0 hasta cualquier otro día es menor a 5 litros. Por ejemplo: si n_0 es el 31 de octubre de 1945, significa que para que Ivana pueda sobrevivir, está obligada a consumir menos de 5 litros durante todo el mes de noviembre. Pero también debe consumir menos de 5 litros durante los meses de noviembre, diciembre y enero de 1946.

Es importante destacar que si cambiamos el valor 5 litros por 1 litro o medio litro de agua, la misma propiedad se sigue cumpliendo, es decir se verifica lo siguiente: si ε es un número racional positivo, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S(n) - S(n_0) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. De lo contrario, como en la argumentación anterior, para todo k natural podríamos encontrar una colección de números $1 < n_1 < n_2 < ... < n_k$ tales que $S(n_1) - S(1) \geq \varepsilon$, $S(n_2) - S(n_1) \geq \varepsilon$, ... , $S(n_k) - S(n_{k-1}) \geq \varepsilon$, y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
S(n_k) > S(n_k) - S(1) &= S(n_k) - S(n_{k-1}) + S(n_{k-1}) - S(n_{k-2}) + \cdots + S(n_2) - S(n_1) + S(n_1) - S(1) \\
&\geq k \cdot \varepsilon
\end{aligned}
$$

Esto es un absurdo, porque sabemos, por otro lado, que $S(n) < 10$ para todo n, lo que implica que $10 > S(n_k) > k \cdot \varepsilon$ para todo k, pero tomando $k \geq 10/\varepsilon$ esta desigualdad no se cumple.

Esta propiedad dice que los términos de la sucesión $(S(n))_{n\geq 1}$ se van acercando entre sí a medida que n toma valores cada vez más grandes. Observemos que no hemos usado (ni tampoco lo sabemos) que la sucesión tenga límite. Los datos que hemos usado acerca de la sucesión $(S(n))_{n\geq 1}$ es que es acotada y estrictamente creciente. Observando la demostración se ve que la misma propiedad se cumple si la sucesión es acotada y creciente.

Basados en estas observaciones podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5.4. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números racionales creciente y acotada superiormente y ε es un racional positivo, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n - a_{n_0} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.*

☐ 4. El número real, definición informal

En esta sección introduciremos la noción de número real utilizando el concepto de límite de sucesiones.

4.1. La definición

Por lo visto en el capítulo anterior podemos representar a un número racional x como un número decimal periódico de la forma:

$$\begin{aligned} x &= a, x_1 x_2 \ldots x_n\, y_1 y_2 \ldots y_k\, y_1 y_2 \ldots y_k\, y_1 \ldots \\ &= a, x_1 x_2 \ldots x_n\, \overline{y_1 y_2 \ldots y_k} \end{aligned}$$

en el que la parte periódica corresponde a la sucesión finita $y_1, y_2, \ldots y_k$, y la parte decimal no periódica corresponde a la sucesión finita $x_1, x_2, \ldots x_n$, siendo a la parte entera del número x. Cuando $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 0$ diremos que el número x representa un *número decimal exacto*.

A partir de esta representación surge la idea natural de generalizar el concepto de número racional definiendo una clase más grande de números que admiten una *representación decimal arbitraria e infinita* de la forma $a,z_1z_2 \ldots z_n \ldots$, con a un número entero, y al igual que en el caso de las fracciones, los números $z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Consideremos por ejemplo el número x representado por: $x = 0{,}101101110 \ldots$ Es decir, x se define como el número decimal cuya parte entera es cero y la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ de dígitos después de la coma se obtiene concatenando los números naturales 10, 110, 1.110, ... A partir de esta construcción, se puede ver que el dígito 0 aparece en los lugares 2, 5, 9, 14, ... Los lugares en donde figura el 0 después de la coma determinan una sucesión que denotamos con $(cero_n)_{n\geq 1}$. Por lo tanto, $cero_1 = 2$, $cero_2 = 5$, $cero_3 = 9, \ldots$ Observar que las diferencias $5 - 2 = 3$; $9 - 5 = 4$; $14 - 9 = 5$; ... , dicen que la cantidad de unos que figuran entre la aparición de un 0 y la siguiente se va incrementando de uno en uno. Deducimos de esta propiedad que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $cero_{n+1} = cero_n + n + 2$ y $cero_1 = 2$. Luego, las diferencias $cero_{n+1} - cero_n = n+2$ son cada vez más grandes a medida que n va creciendo.

A partir de esta recurrencia se deduce que este número no puede representar un número racional. En efecto, si x fuese un número racional, entonces tendríamos una parte periódica que corresponde a cierta sucesión finita $y_1, y_2 \ldots y_k$. Como el 0 aparece infinitas veces en la representación decimal de x, entonces existiría algún índice i entre 1 y k tal que $y_i = 0$. Por lo tanto, existe un n_0 tal que en los lugares n_0, $n_0 + k$, $n_0 + 2k$, ... aparecerá un 0. Por otro lado, como la sucesión $cero_n$ recorre todos los lugares donde aparece el dígito 0, deducimos que, a partir de cierto momento, la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión $cero_n$ debería ser menor o igual que k, lo que es imposible ya que $cero_{n+1} - cero_n = n + 2$ para todo $n \geq 1$. Esto prueba que x no puede ser un número racional.

A partir del número x podemos construir la siguiente sucesión de números racionales:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0,1 \\ &x_2 = 0,10 \\ &x_3 = 0,101 \\ &\ldots \\ &x_n = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_n \end{aligned}$$

Es decir el enésimo término de esta sucesión es el número racional cuya parte entera es 0 y los n dígitos después de la coma coinciden con los primeros n dígitos de x. Esta sucesión posee dos propiedades importantes:

- la primera es que es una sucesión de números racionales positivos, creciente y acotada superiormente por 1;
- la segunda es que los términos de esta sucesión representan números decimales exactos y, como dijimos, para todo $n \in \mathbb{N}$ los n dígitos de x_n coinciden con los primeros n dígitos del número x.

A medida que n toma valores cada vez más grandes, los términos de esta sucesión se aproximan cada vez más al número x en un sentido que precisaremos más adelante. Esto nos dice que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente y acotada de números racionales positivos que *define* al número x.

Tal como ha sido mencionado en la sección anterior, dos sucesiones distintas pueden tener el mismo límite. Tomemos por ejemplo la siguiente sucesión:

$$y_1 = 0,10;\ y_2 = 0,10110;\ y_3 = 0,101101110;\ y_4 = 0,10110111011110,\ldots$$

El enésimo término de esta sucesión es el número racional cuya parte entera es 0 y después de la coma es el número natural que se obtiene concatenando los números 10,110,1110,11110, ... , 10^n+10^{n-1} +...+10. La sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ es diferente de $(x_n)_{n\geq 1}$, ya que por ejemplo x_3 = 0, 101 mientras que y_3 = 0, 101101110, pero ambas sucesiones definen al número x.

Otro ejemplo, que ya hemos visto, en el que un número se define a partir de una sucesión de números racionales creciente y acotada es el área S de la figura 2. Según lo que hemos observado en la sección 4, las áreas $A(R(n))$ se acercan a S a medida que n se hace cada vez más grande. En otras palabras, la sucesión $A(R(n))$ debería tener como límite al número S. Pero ya hemos mencionado que S no es un número racional. Si queremos poder hablar del área S, debemos agregarle a los racionales ese número, que lo podemos definir precisamente a partir de la sucesión $A(R(n))$.

Ambos ejemplos vuelven a ilustrar que la recta racional está *incompleta* y nos conducen a pensar que deberíamos agregar números nuevos. Basados en los ejemplos, nos proponemos introducir el concepto de número real a partir de sucesiones crecientes y acotadas de números racionales. Haremos esta definición de manera formal en la sección siguiente. Por ahora, informalmente, llamaremos *número real* al "límite" de una sucesión creciente y acotada de números racionales.

Notaremos con $Sucec(\mathbb{Q})$ al conjunto de todas las sucesiones crecientes y acotadas de números racionales y con $Sucec(\mathbb{Q}_{>0})$ al conjunto de todas las sucesiones crecientes y acotadas de números racionales positivos. Sabemos que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada y creciente de números racionales positivos, entonces pueden ocurrir dos cosas:

1. la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene como límite un número racional ℓ,
2. la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no tiene límite (racional).

En el primer caso, la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ define al número racional ℓ. En el segundo caso, la sucesión define un nuevo número, que no es racional. A estos números se los llama *números irracionales*. Simbólicamente, escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ para indicar que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ define el número x. Notaremos con $\mathcal{I}$ al conjunto de los números irracionales. Llamaremos *conjunto de los números reales* al conjunto $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathcal{I}$. Observar que si q es un número racional, entonces q es también el límite de una sucesión creciente y acotada de números racionales: basta considerar la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que toma el valor constante igual a q, es decir $a_n = q$ para todo $n \geq 1$.

Si bien la definición que dimos no es muy precisa, nos alcanza para desarrollar las ideas principales de los números reales. Uno de los problemas con que nos enfrentamos es que no tenemos una "noción de distancia", o de "cercanía", para los números reales. Específicamente, dado que definimos los números reales como límites de sucesiones, ¿cómo deberíamos definir la distancia entre dos números reales? La noción de distancia en $\mathbb{R}$ es consecuencia del orden entre los reales.

4.2. El orden

Una forma de comparar dos números reales positivos cuando ambos están expresados por medio de su desarrollo decimal es la que sigue. Supongamos, por ejemplo que:

$$x = 0{,}123456101101110\ldots$$
$$y = 0{,}1237666101101110\ldots$$

En este caso los primeros tres dígitos de x e y después de la coma coinciden, mientras que el cuarto dígito de x es 4 que es menor que el cuarto dígito de y que es 7. Luego, en este caso podemos afirmar que $x < y$. Más generalmente, si $x = a{,}x_1x_2x_3 \ldots x_n\ldots$, $y = b{,}y_1y_2y_3 \ldots y_n\ldots$ y $x \neq y$, entonces $x < y$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$ y $x_1 < y_1$ o $a = b$, $x_1 = y_1$ y $x_2 < y_2$ o ..., es decir $x < y$ si $a < b$ o bien $a = b$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ y $x_j = y_j$ para todo j entre 1 y $n - 1$.

La relación de orden definida de esta manera se denomina *orden lexicográfico.* Este nombre tiene su razón de ser en la forma de determinar cuándo una palabra aparece antes que otra en el diccionario. Supongamos que tenemos las palabras *encender y encendido*. Las primeras seis letras de ambas coinciden, mientras que la séptima letra de *encender* es una e y la séptima letra de *encendido* es una i. Como en el alfabeto de la lengua española la letra e aparece antes que la letra i, deducimos que primero aparece la palabra *encender* y luego *encendido*. El orden de aparición de las letras es análogo a la forma que están ordenados los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Hay que tener cuidado y no utilizar este orden para comparar dos expresiones decimales diferentes pero que representan el mismo número. Consideremos por ejemplo $x = 0{,}\overline{9} = 0{,}999999999\ldots$ e $y = 1 = 1{,}0000000000\ldots$ Vimos en el Capítulo 4 que $x = y$. Sin embargo, si aplicáramos el orden lexicográfico a estas dos expresiones decimales llegaríamos a que $x < y$, ya que el primer dígito de x antes de la coma es 0 y el primer dígito (el único) de y es 1.

En la sección 5 precisaremos cómo extender la relación de orden $\leq$ definida entre dos números racionales x, y al conjunto de los números reales.

4.3. Las operaciones

A continuación, definiremos la suma y el producto de números reales.

Supongamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones de números racionales. Sabemos que para cada número natural n, a_n y b_n son números racionales. Por lo tanto, la suma $a_n + b_n$ y el producto $a_n \cdot b_n$ dan como resultado un número racional. De esto se desprende que, si definimos la suma y el producto de dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *término a término*, el resultado obtenido será una nueva sucesión cuyos términos son también números racionales. Más precisamente, definimos la sucesión suma $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ como la sucesión que en cada $n \in \mathbb{N}$ toma el valor $a_n + b_n$ y análogamente, definimos la sucesión producto $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ como la sucesión que en cada $n \in \mathbb{N}$ toma el valor $a_n \cdot b_n$. Por ejemplo: supongamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión dada por $b_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, la sucesión suma $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión que en cada n toma el valor $\frac{n^2+(n+1)}{n(n+1)}$. Los sucesivos valores de esta sucesión serán, entonces, 3/2 , 7/6 , 13/12, ...

Ejercicio 5.7. Probar que:

1. la suma de dos sucesiones crecientes y acotadas de números racionales es también una sucesión creciente y acotada de números racionales;
2. el producto de dos sucesiones crecientes y acotadas de números racionales positivos es también una sucesión creciente y acotada de números racionales positivos.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en $Sucec(\mathbb{Q})$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y$. Definimos

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

Del ejercicio 5.7 se sigue que la suma $x+y$ de dos números reales x, y da como resultado otro número real. Más aún, el resultado no depende de qué sucesiones converjan a x y a y respectivamente, esto es, si $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ son otras dos sucesiones que convergen a x y a y respectivamente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n)$. La prueba de esta propiedad se verá en la última sección.

Es importante destacar que cuando x e y son números racionales, la suma definida de esta manera coincide con la suma habitual de fracciones. Para ver esto basta usar las sucesiones constantes $a_n = x$ y $b_n = y$ (que convergen a x y a y respectivamente), cuya suma es la sucesión constante $a_n + b_n = x + y$.

Para ilustrar cómo se hace para sumar dos números irracionales, consideremos el número irracional $x = 0{,}101101110 \ldots$ definido al comienzo de esta sección.

Veamos cómo se calcula la suma $x + x = 2x$. Recordemos que una sucesión que converge a x es, por ejemplo, la sucesión $y_1 = 0{,}10$; $y_2 = 0{,}10110$; $y_3 = 0{,}101101110$; $y_4 = 0{,}10110111011110$; ... Luego, $2x = \lim_{n\to\infty} 2y_n$, donde $(2y_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión $2y_1 = 0{,}20$; $2y_2 = 0{,}20220$; $2y_3 = 0{,}202202220$; $2y_4 = 0{,}20220222022220$; ... En este caso se ve que $2x = 0{,}202202220$ ... es el número real que se obtiene concatenando después de la coma los números 20,220,2220, ...

¿Cómo se define la resta entre dos números reales? Para responder a esta pregunta necesitaremos un resultado que es consecuencia del Teorema 5.4, a saber:

Teorema 5.5. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente y acotada de números racionales, entonces existe una sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ decreciente de números racionales que satisface que $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$.*

Es inmediato probar este teorema en el caso que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tenga como valor límite un número racional ℓ. En efecto, en este caso basta tomar como sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ la sucesión constante igual a ℓ. Sin embargo, la prueba es difícil cuando el valor límite no es racional y requiere ciertas herramientas que están fuera del alcance del presente libro. Lo que expresa esencialmente el resultado del teorema es que si una sucesión creciente y acotada $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a cierto número real x (que puede ser racional o irracional), es posible construir otra sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ que tiene el mismo valor "límite", pero que es decreciente.

El Teorema 5.5 es útil para probar que todo número real admite un inverso aditivo, eso es, si $x \in \mathbb{R}$, existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. Para ver esto, tomemos una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ creciente y acotada de números racionales que tenga límite x. Por el mencionado teorema, existe una sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ decreciente de números racionales tal que, para todo k, c_k es cota superior de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y tal que $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. La sucesión $(-c_n)_{n\geq 1}$ es creciente y acotada, porque por ejemplo $-a_1$ es una cota superior. Luego, el número $y = \lim_{n\to\infty}(-c_n)$ es un número real y vale que $x + y = 0$ pues, por definición de suma, se tiene que $x + y = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-c_n)) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$. Por otro lado, la ecuación $x+y = 0$ tiene solución única, como veremos en la sección 5. Notaremos con $-x$ al único valor de y que es solución de la ecuación $x+y = 0$. A partir de esto podemos definir la resta entre dos números reales a, b como:

$$a - b = a + (-b)$$

Tomemos el ejemplo del número x definido al comienzo de esta sección, y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por:

$$x_1 = 0,1;\ x_2 = 0,10;\ x_3 = 0,101;\ldots;\ x_n = 0,z_1z_2z_3\ldots z_n;\ldots$$

Ya hemos mencionado que los términos de esta sucesión se van acercando cada vez más al número x a medida que n toma valores cada vez más grandes. A partir de la resta de números reales definida anteriormente, podemos justificar esta idea de aproximación del siguiente modo. Si calculamos las diferencias entre x y los diferentes valores de x_n, entonces estas diferencias son cada vez más pequeñas, es decir: si ε es un número racional positivo, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x - x_{n_0} < \varepsilon$.

Para probar esto, necesitamos saber cómo calcular la diferencia entre x y un término cualquiera de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$. Supongamos que $x_k = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots z_k$ es uno de estos términos. Entonces, la resta $x - x_k$ va a coincidir con el valor límite de la sucesión $(x_n - x_k)_{n\geq 1}$. A partir de $n = k + 1$ en adelante estas diferencias van a dar como resultado los números

$0,\overbrace{000\ldots0}^{k}z_{k+1},\ 0,\overbrace{000\ldots0}^{k}z_{k+1}z_{k+2},\ \ldots$ Por lo tanto, la diferencia $x - x_k$ da como resultado el número real $x - x_k = 0,\overbrace{000\ldots0}^{k}z_{k+1}z_{k+2}\ldots$ Entonces, deducimos que $x - x_k < \frac{1}{10^k}$ pues el desarrollo decimal de la fracción $\frac{1}{10^k}$ es $0,\overbrace{000\ldots0}^{k-1}1$

Por lo tanto, cuando n toma valores cada vez más grandes, las diferencias $x - x_n$ convergen a 0.

Para definir el producto $x \cdot y$, entre dos números reales, lo haremos primero en el caso en que x e y sean números reales positivos. Un número real x es *positivo* si está definido por una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ (creciente y acotada de números racionales) tal que existe n_0 para el que $a_{n_0} > 0$. Observemos que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que $a_{n_0} > 0$, la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ definida por:

$$b_n = \begin{cases} a_{n_0} & \text{si } n \leq n_0 \\ a_n & \text{si } n > n_0 \end{cases}$$

define el mismo número que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y tiene todos sus términos positivos. En otras palabras, si x es un número real positivo, existe una sucesión creciente y acotada de números racionales positivos que lo define.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sean $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en $Succ(\mathbb{Q}_{\geq 0})$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y$.
Definimos

$$(*) \quad x \cdot y = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$$

Al igual que en el caso de la suma, deducimos del Ejercicio 5.7 que el producto de dos números reales positivos da como resultado un número real positivo. Cuando x e y son números racionales positivos, el producto definido de esta manera coincide con el producto habitual: basta tomar (al igual que en el caso de la suma) las sucesiones constantes que toman el valor x e y respectivamente, es decir $a_n = x$ y $b_n = y$ para todo n. Por lo tanto, la sucesión producto será la sucesión constante $x \cdot y$. En la última sección se probará que esta definición de producto no depende de qué sucesiones converjan a x y a y respectivamente. Esto es, si $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ son otras dos sucesiones que convergen a x y a y, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (c_n \cdot d_n)$.

¿Cómo definir $x \cdot y$ cuando alguno de los números x o y es negativo ó 0?

Definimos que si $x = 0$ o $y = 0$ el producto $x \cdot y = 0$. Si $x < 0$ e $y < 0$, entonces definimos $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$. Como $-x > 0$ y $-y > 0$ la expresión $(-x) \cdot (-y)$ se calcula por medio de la fórmula $(*)$. Si $x < 0$ e $y > 0$, definimos $x \cdot y = -((-x) \cdot y)$. Finalmente, si $x > 0$ e $y < 0$, definimos $x \cdot y = -(x \cdot (-y))$. De esta forma tenemos definido el producto para cualquier par de números reales.

Para poder definir la división x/y, con $y \neq 0$, entre dos números reales x e y apelamos de nuevo al Teorema 5.5. En efecto, probemos primero que si y es un número real positivo, entonces existe un número real positivo z tal que $y \cdot z = 1$. Para ello tomemos una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ cuyo valor límite es y. Por el Teorema 5.5 sabemos que existe una sucesión $(c_n)_{\geq 1}$ decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = 0$ y tal que $a_n \leq c_m$ para todo par de números naturales n, m. Entonces, la sucesión $(d_n)_{n\geq 1}$ definida por $d_n = \frac{1}{c_n}$ es creciente y acotada superiormente por $\frac{1}{a_1}$. Luego el valor límite de esta sucesión es un número real positivo z. Vemos que $y \cdot z = 1$. En efecto, $y \cdot z = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{c_n}$. Por otro lado, $1 - a_n \cdot \frac{1}{c_n} = \frac{c_n - a_n}{c_n}$.
Como $a_n \leq c_n$ y $c_n \geq a_1$, deducimos que $0 \leq \frac{c_n - a_n}{c_n} \leq \frac{c_n - a_n}{a_1}$. Como la sucesión $(c_n - a_n)_{n\geq 1}$ tiende a 0, entonces la sucesión $(\frac{c_n - a_n}{a_1})_{n\geq 1}$ también converge a 0, lo que prueba que la sucesión $(1 - a_n \cdot \frac{1}{c_n})_{n\geq 1}$ tiene límite 0. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{c_n} = 1$ y por ende $y \cdot z = 1$. No pueden existir dos valores diferentes de z tales que $y \cdot z = 1$. Por lo tanto, notaremos con y^{-1} a la única solución de la ecuación $y \cdot z = 1$, que es el inverso multiplicativo de y. Esto nos muestra que la división $1/y$ está bien definida si y es un número real positivo. Si $y < 0$, definimos $\frac{1}{y} = -\frac{1}{-y}$. Más generalmente, si x e y son dos números reales, donde y es diferente de cero, definimos $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

4.4. Raíces

Veamos cómo la estructura algebraica del conjunto de los números reales nos permite demostrar que ciertas ecuaciones, que no se pueden resolver en el conjunto de los números racionales, admiten solución en $\mathbb{R}$. Nuestro próximo paso será demostrar efectivamente que la ecuación $x^2 = 2$ admite solución en $\mathbb{R}$. Más precisamente, vamos a construir una sucesión creciente de números racionales positivos, cuyo cuadrado converge a 2.
Definimos la siguiente sucesión de números racionales:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{6x_n - x_n^3}{4}$$

Es claro que es una sucesión de números racionales porque x_1 lo es y porque si x_n es racional, entonces $\frac{6x_n - x_n^3}{4}$ también es racional. Queremos probar que esta sucesión es creciente y acotada. Primero probaremos que es acotada. Más precisamente, afirmamos que para todo n natural se tiene $x_n^2 < 2$. Es decir que, por ejemplo, $|x_n| < 2$, pues si $|x_n| \geq 2$ entonces, $x_n^2 = |x_n|^2 \geq 2^2 = 4$, lo que contradice nuestra afirmación. Probemos entonces la afirmación por inducción. Vale cuando $n = 1$, pues $x_1^2 = 1$. Y si vale para n, tenemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \frac{(6x_n - x_n^3)^2}{4^2} \\ &= \frac{36x_n^2 - 12x_n^4 + x_n^6}{16} \end{aligned}$$

Entonces, $x_{n+1}^2 < 2$ si y sólo sí $\frac{36x_n^2 - 12x_n^4 + x_n^6}{16} < 2$, que a su vez vale si y sólo si $36x_n^2 - 12x_n^4 + x_n^6 < 32$, si y sólo sí $36\,x_n^2 - 12x_n^4 + x_n^6 - 32 < 0$. Esta expresión tiene un aspecto complicado, pero si ahora llamamos $y = x_n^2 - 2$, tenemos:

$$y^2 = x_n^4 - 4x_n^2 + 4$$
$$y^3 = x_n^6 - 6x_n^4 + 12x_n^2 - 8$$

por lo que $y^3 - 6y^2 = x_n^6 - 6x_n^4 + 12x_n^2 - 8 - 6(x_n^4 - 4x_n^2 + 4) = x_n^6 - 12x_n^4 + 36x_n^2 - 32$. Es decir, debemos probar que $y^3 - 6y^2 < 0$, o, en otros términos, que $y^2(y - 6) < 0$. Pero observemos que la hipótesis inductiva es, precisamente, que $y < 0$, por lo que $y^2 > 0$ e $y - 6 < 0$, y así $y^2(y - 6) < 0$.

Veamos ahora que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente. Para esto, debemos probar que $\frac{6x_n - x_n^3}{4} > x_n$. Pero esta afirmación es equivalente a $6x_n - x_n^3 > 4x_n$, que a su vez es equivalente a $2x_n - x_n^3 > 0$, y ésta a $x_n(2 - x_n^2) > 0$. Pero la hipótesis inductiva dice ahora que la sucesión es estrictamente creciente desde $x_1 = 1$ hasta x_n, por lo que $x_n > 1$ y en particular $x_n > 0$. Y por otra parte, sabemos que $2 - x_n^2 > 0$, con lo que se tiene $x_n(2 - x_n^2) > 0$.

Por último, queremos ver que la sucesión x_n^2 converge a 2. Esto es lo mismo que probar que $x_n^2 - 2$ converge a 0. Llamemos $e_n = x_n^2 - 2$. Pero:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{(6x_n - x_n^3)^2}{4^2} - 2 = \frac{36x_n^2 - 12x_n^4 + x_n^6 - 32}{16} \\ &= \frac{e_n^2(e_n - 6)}{16} \end{aligned}$$

(observando que e_n es lo que antes llamamos y). Sin embargo, ya probamos que para todo n vale $1 \leq x_n^2 < 2$, por lo que $-1 \leq x_n^2 - 2 < 0$, es decir $-7 \leq e_n - 6 < -6$. En valor absoluto, tenemos $|e_n - 6| \leq 7$, y esto dice que: $|e_{n+1}| = e_n^2 \frac{|e_n - 6|}{16} \leq e_n^2 \frac{7}{16} < \frac{e_n^2}{2}$.
Como $|e_n| \leq 1$, tenemos $e_n^2 \leq |e_n|$, por lo que:
$|e_{n+1}| \leq \frac{|e_n|}{2} \leq \frac{|e_{n-1}|}{4} \leq \frac{|e_{n-2}|}{8} \leq \cdots \leq \frac{|e_1|}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

Esto demuestra que e_n converge a 0.

Calculando los primeros términos de la sucesión x_n, podemos ver que esta sucesión aproxima muy rápidamente a $\sqrt{2}$, es decir, es posible obtener los primeros dígitos de la expresión decimal de $\sqrt{2}$ calculando unos pocos términos de la sucesión. Por otra parte, tiene la desventaja de que los numeradores y denominadores de sus términos también crecen muy rápidamente.

$x_1 = \frac{1}{1}$

$x_2 = \frac{5}{4}$

$x_3 = \frac{355}{256}$

$x_4 = \frac{94.852.805}{67.108.864}$

$x_5 = \frac{1.709.678.476.417.571.835.487.555}{1.208.925.819.614.629.174.706.176}$

$$x_6 = \frac{9.994.796.326.591.347.130.392.203.807.311.551.183.419.838.794.447.313.956.622.219.314.498.503.205}{7.067.388.259.113.537.318.333.190.002.971.674.063.309.935.587.502.475.832.486.424.805.170.479.104}$$

Si usamos los primeros 60 decimales, tenemos:

$x_1 = 1{,}0$
$x_2 = 1{,}250$
$x_3 = 1{,}386718750$
$x_4 = 1{,}4134169369935989379882812 50$
$x_5 = 1{,}414212889391814151023461353186456301465542817474840830982429$
$x_6 = 1{,}414213562372614671850871862475475730106604515369430303090371$
$x_7 = 1{,}414213562373095048801688479449619739849546778721185275386329$
$x_8 = 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875376884531681736$
$x_9 = 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679$

Ejercicio 5.8. Probar que si k es un número natural, entonces la sucesión dada por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{3kx_n - x_n^3}{2k}$ define un número real positivo $\sqrt{k}$ tal que $(\sqrt{k})^2 = k$.

Ejercicio 5.9. Probar que todo número racional positivo admite una raíz cuadrada.

Más aún, se tiene el siguiente teorema, cuya demostración es más delicada.

Teorema 5.6. *Si $x \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces existe un único $y \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $y^2 = x$. Es decir, todo número real positivo admite raíz cuadrada.*

4.5. Estimación del error

Cerraremos esta sección con el análisis de la manera de estimar el error cometido al aproximar un número real dado por una sucesión de números racionales.

Supongamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ sea una sucesión creciente de números racionales que converge a un límite ℓ, donde ℓ es un número real. Si ε es un número positivo arbitrariamente pequeño, el problema es determinar a partir de qué momento el error cometido al aproximar ℓ por los términos de la sucesión es menor o igual que ε. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente, el error cometido para cada término a_n está dado por la diferencia $\ell - a_n$. Luego, debemos encontrar un número natural n_0 que verifique $\ell - a_{n_0} \leq \varepsilon$. Como $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente, entonces $\ell - a_n \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ ya que a ℓ le estamos restando un número mayor o igual que a_{n_0}. Por lo tanto, todos los errores siguientes serán menores o iguales a ε.

Un problema que ya hemos mencionado es que si no conocemos el valor de ℓ, no podemos determinar el valor de los diferentes errores dados por las diferencias $(\ell - a_n)_{n\geq 1}$ tal como ocurre en el problema geométrico que hemos introducido en la sección 2. Sin embargo, podemos utilizar la siguiente propiedad: si n_0 es tal que $a_n - a_{n_0} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\ell - a_{n_0} \leq \varepsilon$. Por lo tanto, para encontrar un término de la sucesión que permita aproximar ℓ con un error menor o igual que ε basta encontrar un n_0 tal que $a_n - a_{n_0} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Para ilustrar esta propiedad consideremos el área S de la región $\mathfrak{R}$ en la figura 2 que hemos visto en la sección 2. La sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$ tiene como valor límite el número S. Además 1 es una cota superior de la sucesión $(A(R(n)))_{n\geq 1}$. Por lo tanto, todos los términos de esta sucesión son menores o iguales que 1, lo que implica que $S \leq 1$. Como S no puede ser 1, entonces $0 < S < 1$.

Para demostrar que la sucesión $A(R(n))_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente, se usó la recurrencia:

$$(\heartsuit) \quad A(R(n+1)) = A(R(n)) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Veamos cómo podemos generalizar esta recurrencia escribiendo $A(R(n+k))$ en términos de $A(R(n))$. Para lograr esto usaremos la recurrencia ($\heartsuit$) del siguiente modo. Como en esta recurrencia el n es arbitrario, podemos cambiar n por $n+1$ y obtenemos la fórmula:

$$\begin{aligned} A(R(n+2)) &= A(R(n+1)) + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \\ &= A(R(n)) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \end{aligned}$$

A su vez, si en esta última fórmula cambiamos n por $n+1$ obtenemos la fórmula:

$$\begin{aligned} A(R(n+3)) &= A(R(n+1)) + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{1}{(2n+5)(2n+6)} \\ &= A(R(n)) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{1}{(2n+5)(2n+6)} \end{aligned}$$

Siguiendo de la misma manera, obtenemos que:

$$A(R(n+k)) = A(R(n)) + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \cdots + \frac{1}{(2n+2k-1)(2n+2k)}$$

Observar que en cada uno de los denominadores de estas fracciones aparece el producto de dos enteros consecutivos, siendo el menor un número impar y, por ende, el que le sigue un número par. Notar también que la cantidad de sumandos que aparece en esta recurrencia, sin contar el término $A(R(n))$, es igual a k.

Para estimar el error, vamos a acotar la suma de las fracciones que figuran en la fórmula de arriba. Como $\frac{1}{2n+2j-1} \leq \frac{1}{2n+2j-2}$ para todo j entre 1 y k, se tiene que:

$$\begin{aligned} A(R(n+k)) - A(R(n)) &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} + \ldots + \frac{1}{(2n+2k-1)(2n+2} \\ &\leq \frac{1}{(2n)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} + \ldots + \frac{1}{(2n+2k-2)(2n+2k)} \quad k) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}\Big) \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, etcétera, obtenemos:

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$

Como los términos de esta suma se cancelan todos salvo el primero y el último, deducimos que:

$$A(R(n+k)) - A(R(n)) \leq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{n(n+k)}$$

Como $\frac{k}{n+k} \leq 1$, deducimos que:

$$A(R(n+k)) - A(R(n)) \leq \frac{1}{4n}$$

para todo n y para todo k. Notar que esta desigualdad también es válida si $k = 0$.

Luego, si fijamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ se deduce que $A(R(n_0 + k)) - A(R(n_0)) \leq \frac{1}{4n_0}$ para todo entero k no negativo. Luego, si $n \geq n_0$ y $k = n - n_0$ obtenemos la desigualdad:

$$A(R(n)) - A(R(n_0)) \leq \frac{1}{4n_0}$$

Luego, si ε es un número racional positivo, resulta que $\frac{1}{4n_0} \leq \varepsilon$ si y sólo si $n_0 \geq \frac{1}{4\varepsilon}$. Por lo tanto, deducimos que para este n_0 encontrado se tiene que:

$$S - A(R(n_0)) \leq \varepsilon$$

Como aplicación vamos a determinar cuántos rectángulos son necesarios para que el error cometido al calcular el área S sea menor o igual que 10^{-3}. En este caso $\varepsilon = 10^{-3}$. Luego, si tomamos $n_0 \geq \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}}$ la cantidad de rectángulos será el valor de n_0. Pero $\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250$con lo cual basta dividir al intervalo [1, 2] en por lo menos 250 subintervalos de la misma longitud. Por lo tanto, si tomamos 250 rectángulos o más, el error cometido en el cálculo del área será menor o igual que 1/1.000 .

□ 5. La construcción formal

En esta última parte, nos proponemos dar una construcción formal de los números reales. En la sección anterior, presentamos los números reales como aquellos que se obtienen como límite de una sucesión creciente y acotada de números racionales. Para poder justificar esta construcción, observemos primero que un mismo número x se puede aproximar por diferentes sucesiones. De hecho, existen infinitas sucesiones que convergen al mismo número x. Esto nos permite asociar a cada número irracional x un conjunto de sucesiones que comparten la propiedad de que todas tienen como límite al número x. Por otro lado, si dos sucesiones tienen el mismo límite, su diferencia tiende a 0. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones en Sucec($\mathbb{Q}$). Diremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ **son equivalentes** (y escribiremos $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1}$) si:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

Ejercicio 5.10. Probar que ~ es una relación de equivalencia definida en el conjunto *Sucec*($\mathbb{Q}$).

Llamaremos **número real** a la clase de equivalencia de una sucesión en Sucec($\mathbb{Q}$). Si en la clase de equivalencia hay una sucesión de términos positivos, diremos que el número es **positivo.**

Si $(a_n)_{n\geq 1} \in$ Sucec($\mathbb{Q}$), notaremos con $C\,[(a_n)_{n\geq 1}]$ a la clase de equivalencia de $(a_n)_{n\geq 1}$. Simbólicamente, un número real es un elemento x de la forma $x = C[(a_n)_{n\geq 1}]$, donde $(a_n)_{n\geq 1} \in$ Sucec($\mathbb{Q}$).

Consideremos por ejemplo las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ de números racionales definidas en la sección anterior dadas por:

$x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}10$; $x_3 = 0{,}101$; $x_4 = 0{,}1011$; $x_5 = 0{,}10110$; $x_6 = 0{,}101101$; ...
$y_1 = 0{,}10$; $y_2 = 0{,}10110$; $y_3 = 0{,}101101110$; $y_4 = 0{,}10110111011110$;
$y_5 = 0{,}10110111011110111110$; $y_6 = 0{,}101101110111101111101111110$; ...

Las sucesivas diferencias dan:

$y_1 - x_1 = 0$
$y_2 - x_2 = 0{,}00110$
$y_3 - x_3 = 0{,}000101110$
$y_4 - x_4 = 0{,}00000111011110$
$y_5 - x_5 = 0{,}00000111011110111110$
$y_6 - x_6 = 0{,}000000110111101111101111110$; ...

Se observa que estas diferencias se acercan cada vez más a 0, por lo que estas sucesiones son equivalentes. Su clase de equivalencia es el *número real positivo* $x = 0{,}\ 101101110\ ...$

Es importante destacar que si q es un número racional, entonces q se identifica como el número real dado por la clase de equivalencia de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ constante igual a q, es decir $a_n = q$ para todo $n \geq 1$.

5.1. Desarrollos decimales

Al comienzo del capítulo mencionamos que al conjunto de números racionales queríamos agregarle números cuya expresión decimal después de la coma fuera infinita y no periódica. Vimos cómo estos números están definidos por sucesiones crecientes y acotadas. Por ejemplo, si a es un número tal, podemos considerar la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por el número racional que tiene como expresión decimal los primeros n dígitos del número a. En esta sección pretendemos mostrar que las clases de equivalencia de sucesiones crecientes y acotadas de números racionales tienen expresiones decimales (eventualmente infinitas).

Esto nos permite pensar a los números reales de dos maneras distintas, ya sea como expresiones decimales o como clases de equivalencia de sucesiones crecientes y acotadas de números racionales.

A pesar de que el concepto de número real como un número cuya expresión decimal no es necesariamente periódica ni finita es más intuitivo, el trabajar con sucesiones crecientes y acotadas de números racionales permite operar con los números reales de manera más simple. También permite probar algunas propiedades importantes de dichos números.

No hay un algoritmo que permita calcular explícitamente la expresión decimal de una sucesión creciente y acotada de números racionales. El problema radica en que dos números pueden estar muy cerca uno del otro, pero tener varios dígitos distintos en su expresión decimal. Por ejemplo, el número 1,0001 dista del número 0,9999 en 0,0002. A pesar de que la distancia entre ambos es muy pequeña, todos los dígitos de sus representaciones son distintos.

Consideremos una sucesión creciente y acotada de número racionales $(a_n)_{n\geq 1}$. Supongamos que todos los a_n son positivos. Llamemos por ℓ el número real que representa la clase de equivalencia de esta sucesión. Para calcular la escritura antes de la coma del número ℓ, miramos el conjunto:

$$\mathscr{T}_0 = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m < a_n \text{ para algún } n\}$$

Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es acotada, el conjunto T_0 es acotado superiormente. Luego tiene un mayor elemento, o sea existe un número entero b tal que $m \leq b$ para todo $m \in \mathsf{T}_0$. Tomamos como expresión decimal del número ℓ antes de la coma al número b. Por la forma en que construimos el número b, es claro que $a_n - b \leq 1$ para todo n, pues si existe un n tal que $a_n - b > 1$, entonces $b + 1 < a_n$, en cuyo caso $b + 1$ sería un elemento de T_0, lo que no pasa por ser b el elemento más grande de dicho conjunto.

Para calcular el primer dígito luego de la coma consideramos la sucesión de números racionales $10 \cdot (a_n - b)$. Como $a_n - b \leq 1$ para todo n, $10 \cdot (a_n - b) \leq 10$ para todo n. Además, como existe algún n_0 tal que $b < a_{n_0}$, la sucesión $a_n - b$ es positiva a partir de n_0. Si miramos, como antes, el mayor elemento del conjunto:

$$\mathscr{T}_1 = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m < 10 \cdot (a_n - b) \text{ para algún } n\}$$

tenemos que ese número está entre 0 y 9. Llamamos x_1 a dicho elemento y lo tomamos como el primer dígito de la expresión decimal del número ℓ luego de la coma. El procedimiento es el mismo para calcular los dígitos subsiguientes. Supongamos que ya calculamos los primeros k dígitos después de la coma y obtuvimos la expresión $b, x_1x_2 \ldots x_k$. Para calcular el dígito siguiente, x_{k+1} consideramos el conjunto:

$$\mathscr{T}_{k+1} = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m < 10^{k+1} \cdot (a_n - b, x_1x_2 \ldots x_k) \text{ para algún } n\}$$

El máximo de este conjunto está entre 0 y 9 y ése es el dígito x_{k+1}.

Veamos en un ejemplo concreto cómo funciona este método.

Ejemplo. Consideremos la sucesión creciente y acotada $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$. Los primeros términos de la sucesión son $a_1 = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$, $a_2 = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99$, $a_3 = 0{,}999$, etc. Llamemos ℓ al número real que define esta sucesión. Intuitivamente, el número ℓ debería tener por expresión decimal $0{,}\overline{9}$; es decir que ℓ sería el número racional de período 9, que es igual al número entero 1. Veamos que éste es el caso.

Para determinar el número antes de la coma, debemos mirar el mayor número entero menor que a_n para algún n. Claramente, todos los términos de la sucesión son mayores que 0 y menores que 1. Luego, el número b es 0. Es decir que la expresión decimal de ℓ tiene un 0 antes de la coma. Para calcular el primer dígito luego de la coma, debemos multiplicar por 10 la sucesión $a_n - b = a_n$. Así obtenemos la sucesión $10 \cdot a_1 = 9$, $10 \cdot a_2 = 9{,}9$, $10 \cdot a_3 = 9{,}99$, etc. El mayor número entero que sea más chico que algún término de esta sucesión es el número 9. Luego, el primer dígito del número ℓ luego de la coma es el 9.

Para calcular el siguiente dígito, debemos considerar la sucesión $100 \cdot (a_n - 0{,}9)$, cuyos términos son 0;9; 9,9; 9,99, etc. El mayor número entero más chico que algún término de esta sucesión es el 9, y por lo tanto el desarrollo decimal de ℓ hasta este punto es 0,99. Así siguiendo, vemos que todos los dígitos de ℓ luego de la coma serán nueves, o sea $\ell = 0{,}\overline{9}$.

Ejemplo. Consideremos las sucesión constante $a_n = 1$. ¿Cuál es la expresión decimal asociada al número ℓ que define esta sucesión? Intuitivamente uno espera que la expresión decimal de ℓ sea 1. Aplicando el procedimiento anterior a esta nueva sucesión, vemos que para encontrar el dígito antes de la coma, debemos mirar el mayor entero menor que 1. Claramente, el mayor entero menor que 1 es el número 0. Luego $\ell = 0, \ldots$

Para calcular el primer dígito después de la coma, debemos mirar la sucesión $(10a_n)_{n\geq 1}$. Esta sucesión toma los valores $10 \cdot a_1 = 10 \cdot 1 = 10$; $10 \cdot a_2 = 10 \cdot 1 = 10$, etcétera; o sea que es la sucesión cuyos términos son todos iguales a 10.

El mayor número entero menor que 10 es el 9, luego el primer dígito después de la coma de ℓ es 9. En todos los pasos siguientes del procedimiento obtenemos la sucesión constantemente 10, y por lo tanto todos los dígitos de la expresión decimal de ℓ son nueves. Así podemos deducir que $\ell = 0{,}\overline{9}$. Recordemos que el número racional $0{,}\overline{9}$ coincide con el número natural 1, simplemente obtuvimos una representación decimal distinta del resultado esperado.

El procedimiento que describimos anteriormente tiene la particularidad de que la expresión de los números decimales exactos termina con infinitos nueves. Por otra parte, sin importar la sucesión que se elija para representar a un número, el procedimiento va a devolver la misma expresión decimal.

Para encontrar el desarrollo decimal de ℓ supusimos que todos los términos de la sucesión a_n eran positivos. Si algunos son menores o iguales que 0 y otros son positivos, se pueden cambiar los negativos por 0 y obtendremos una sucesión equivalente. En cambio, si la sucesión no tiene términos positivos, hay dos casos posibles. En un caso, la sucesión converge al número 0, y se decreta que la expresión decimal de ℓ en este caso es simplemente 0. En el otro caso, la sucesión no converge al número 0, y se debe aplicar el Teorema 5.5. En efecto, podemos encontrar una sucesión c_n decreciente y de términos negativos tal que $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. El procedimiento se debe aplicar entonces a la sucesión creciente $(-c_n)_{n\geq 1}$ y poner un signo menos a la expresión decimal así obtenida.

Es importante destacar que este procedimiento es teórico. Es decir, nos muestra que todo número real tiene una expresión decimal, pero dada una sucesión creciente acotada de números racionales en general es imposible obtener los dígitos de manera concreta, a menos que se disponga de información adicional.

5.2. La recta real

Otra interpretación de los números reales está dada por el conjunto de puntos de la recta. Vimos en las secciones anteriores que los números racionales no llenan la recta, porque hay puntos cuya distancia al origen no podemos medir con ellos (por ejemplo la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lado 1, como vimos en la figura 1). En la sección anterior probamos que podemos ver a los números reales como tiras infinitas de números cuyos dígitos están entre 0 y 9 más un signo. Esto nos permite marcar los números reales dentro de la recta, de la misma manera en que lo hacemos con los números decimales exactos. El lugar exacto en que se debe marcar un número es en general imposible de determinar dado que nuestra precisión es acotada, pero se puede ubicar con un error tan chico como se quiera.

Recíprocamente, a cualquier punto p de la recta se le puede asociar un número real. Llamamos x_1 a un entero que esté a la izquierda de p, e y_1 a un entero que esté a la derecha. Consideramos el intervalo $I_1 = [x_1, y_1]$. Partimos este intervalo al medio y obtenemos dos intervalos, el intervalo $[x_1, \frac{x_1+y_1}{2}]$ y el intervalo $[\frac{x_1+y_1}{2}, y_1]$. Nos fijamos en cuál de estos intervalos está el punto p, y llamamos I_2 al intervalo que lo contiene. Digamos que $I_2 = [x_2, y_2]$. Continuamos partiendo sucesivamente los intervalos $I_n = [x_n, y_n]$ por la mitad y en cada paso llamamos I_{n+1} al nuevo intervalo que contiene al punto p. Consideramos ahora la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$. Como los puntos x_n, y_n se obtienen como suma y cociente de números racionales, son todos números racionales. Además, es claro que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es creciente y acotada. Es bastante intuitivo ver que p es el punto límite de la sucesión x_n, dado que estos puntos están tan cerca como uno quiera del punto p, como se puede ver en la figura 6. Luego, p se puede identificar con la clase de equivalencia de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, mostrando así que el conjunto de números reales describe todos los puntos de la recta.

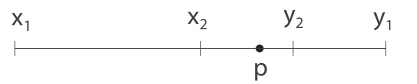

Figura 6. *Primeros intervalos que contienen a p.*

5.3. Orden

Nuestro próximo paso será definir y estudiar el orden de los números reales.

Si $x = C[(a_n)_{n\geq 1}]$ e $y = C[(b_n)_{n\geq 1}]$ son dos números reales diferentes, decimos que $x < y$ si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_{n_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, si todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ son menores que algún término de la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$.

Notar que si x e y son números racionales y las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ son las sucesiones constantes x e y respectivamente, el orden definido de esta manera coincide con el orden usual.

La definición de < es correcta en el sentido de que no depende de qué sucesiones se elijan para representar a los números reales x e y. Es decir, si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones que representan al número x, y si $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(\bar{b}_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones que representan al número y, entonces todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ son menores que algún término de la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ si y sólo si todos los términos de la sucesión $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ son menores que algún término de la sucesión $(\bar{b}_n)_{n\geq 1}$ en cada clase de equivalencia.

Por otro lado, es inmediato ver que la relación ≤ definida en $\mathbb{R}$ por la relación $x \leq y$ si y sólo si $x = y$ o bien $x < y$ es una relación de orden. Más aún, la relación ≤ es una relación de orden *total*, es decir, si x e y son dos números reales cualesquiera, entonces o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$. La demostración de estos hechos excede el nivel de este libro y la omitimos.

En resumen:

Proposición 5.7. *La relación ≤ está bien definida y es una relación de orden total en* $\mathbb{R}$.

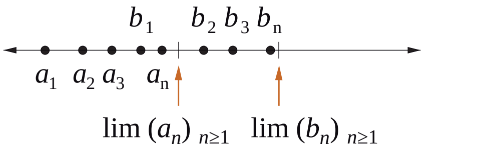

Figura 7. *Gráfico del orden de números reales.*

Como ya vimos, todo número real se puede dar por su desarrollo decimal. El orden lexicográfico descripto en la sección 4.2 para las expresiones decimales de dos números reales coincide con el orden que describimos aquí, y se puede usar como definición alternativa.

5.4. Operaciones

En esta sección definimos la suma y el producto de dos números reales. Aquí se puede apreciar la ventaja de presentar a estos números por medio de sucesiones, y no por su desarrollo decimal. En efecto, no es claro cómo, a partir de dos representaciones decimales infinitas, se puede calcular la representación de la suma o el producto. El principal obstáculo en este punto es el acarreo en la suma de expresiones infinitas.

Sean $x = C[(a_n)_{n\geq 1}]$, $y = C[(b_n)_{n\geq 1}] \in \mathbb{R}$. Definimos la suma $x + y$ como sigue:

$$x + y = C[(a_n + b_n)_{n\geq 1}]$$

En el caso en que $x > 0$ e $y > 0$, elegimos $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo n y definimos:

$$x \cdot y = C[(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}]$$

Se desprende del ejercicio 5.7 que el resultado de sumar dos números reales es un número real, y que el resultado de multiplicar dos números reales positivos es un número real positivo. Para definir el producto $x \cdot y$ para todo par de números reales utilizamos la misma técnica de la sección 4.3.

Para ver que estas operaciones están bien definidas, debemos ver que, sin importar qué sucesiones elijamos en cada clase de equivalencia, al sumar o multiplicar obtenemos sucesiones equivalentes. En efecto, sabemos que dos sucesiones distintas en *Sucec*($\mathbb{Q}$) pueden representar el mismo número real.

Proposición 5.8. *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en Sucec($\mathbb{Q}$) tales que $(a_n)_{n\geq 1} \sim (c_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1} \sim (d_n)_{n\geq 1}$. Entonces*

- $(a_n + b_n)_{n\geq 1} \sim (c_n + d_n)_{n\geq 1}$
- $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1} \sim (c_n \cdot d_n)_{n\geq 1}$

En particular la suma y el producto definidos en 5.4 no dependen del sistema de representantes, y por lo tanto son operaciones bien definidas.

Demostración. Como $(a_n)_{n\geq 1} \sim (c_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1} \sim (d_n)_{n\geq 1}$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} a_n - c_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n - d_n = 0$. Luego $\lim_{n\to\infty} (a_n - c_n)+(b_n - d_n) = 0$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) - (c_n + d_n) = 0$, probando de esta manera que $(a_n + b_n)_{n\geq 1} \sim (c_n + d_n)_{n\geq 1}$.

Para probar la segunda parte de la proposición, probemos que $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n) = 0$. Para ver esto, escribimos esta diferencia del siguiente modo:

$$(a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n) = (a_n \cdot b_n) - (b_n \cdot c_n) + (b_n \cdot c_n) - (c_n \cdot d_n)$$

Sacando factor común, obtenemos la igualdad:

$$(a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n) = b_n \cdot (a_n - c_n) + c_n \cdot (b_n - d_n)$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n - c_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n - d_n = 0$ y tanto $(b_n)_{n\geq 1}$ como $(c_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones acotadas, inferimos que $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n) = 0$. En efecto, si una sucesión es acotada y otra tiene límite 0, entonces el producto de ambas tiene también límite 0.

A partir de la suma y el producto definidos de esta manera, se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.9.

1. *Si $a \in \mathbb{R}$ entonces existe un único número real x que satisface la ecuación $a + x = 0$.*
2. *Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces existe un único número real y que satisface la ecuación $a \cdot y = 1$.*

Demostración. Si a es la clase de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, la existencia de una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $Sucec(\mathbb{Q})$ tal que $C[(a_n+x_n)_{n\geq 1}] = 0$ ya se vio en la sección 4.3. También se vio la existencia de una sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ en $Sucec(\mathbb{Q})$ tal que $C[(a_n \cdot y_n)_{n\geq 1}] = 1$. Falta ver que cualquier otra sucesión que cumpla la misma propiedad es equivalente a éstas.

Sea $(x'_n)_{n\geq 1}$ otra sucesión tal que $C[(a_n+x'_n)_{n\geq 1}] = 0$. Entonces, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + x_n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + x'_n) = 0$. Por lo tanto, restando, tenemos
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} ((a_n + x_n) - (a_n + x'_n)) = 0$. Es decir, $C[(x_n)_{n\geq 1}] = C[(x'_n)_{n\geq 1}]$

La prueba para el producto es más técnica y la omitimos.

Los números reales x e y del teorema son respectivamente el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de a. A partir del teorema, se demuestra que las ecuaciones del tipo $a + x = b$ y $a \cdot y = b$ (en el caso en que $a \neq 0$) tienen solución única en el conjunto de los números reales. Es decir, podemos *restar* dos números y dividir por un número distinto de 0. Al valor de x lo notamos con $x = b - a$; al valor de y lo notamos con $y = b/a$.

A partir de las operaciones definidas en el conjunto $\mathbb{R}$, se puede probar que la suma es asociativa, conmutativa, con elemento neutro y, como dijimos, todo elemento tiene un inverso aditivo. Además, el producto es asociativo, conmutativo, con elemento neutro, y todo número real distinto de 0 tiene un inverso multiplicativo. Por último, se puede ver que el producto es distributivo sobre la suma. En resumen, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.10. *El conjunto $\mathbb{R}$ es un cuerpo, denominado el* cuerpo de números reales.

5.5. Raíces

Los números reales permiten resolver muchas ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. Ya vimos que una de estas ecuaciones es la ecuación $x^2 = 2$. Otro tipo de ecuaciones que se pueden resolver en el conjunto $\mathbb{R}$ son las ecuaciones del tipo $x^n = a$, donde a es un número real positivo y n es un número natural. En este sentido, el Teorema 5.6 se puede generalizar mostrando que *la ecuación $x^n = a$ admite una única solución positiva*.

Dicha solución se denomina *la raíz enésima de a*. Simbólicamente la raíz enésima de a se escribe con $\sqrt[n]{a}$.

A partir de este resultado se puede definir la *exponenciación fraccionaria*. En efecto, si a es un número real positivo y m/n es un número racional, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Para comprender el porqué de esta definición debemos tener en cuenta la siguiente propiedad básica de la exponenciación: si k, l son números naturales, entonces $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$. Ahora bien, si $k = \frac{m}{n}$ y $l = n$, para que esta propiedad siga valiendo, debemos tener $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$. Por lo tanto, se debe definir, como hemos hecho, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejercicio 5.11. Probar que si $a \in \mathbb{R}_{>0}$ entonces $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$ para todo par de números racionales k, l.

Como conclusión, los números reales nos permiten generalizar algunas operaciones algebraicas, como la exponenciación, cuando el exponente es un número racional en lugar de un número entero. Usando límites, también se puede definir la exponenciación cuando el exponente es un número real. Esta definición es más técnica y la omitiremos en el presente libro.

5.6. Completitud de los números reales

En las secciones anteriores introdujimos el orden y la suma (y resta) de números reales. Con estas herramientas, se puede dar una definición de límite para sucesiones de números reales, de manera análoga a como se hizo en la sección 3. Esta noción de límite coincide con la anterior cuando se la utiliza para sucesiones de números racionales con límite racional.

Consideremos ahora una sucesión $(a_n)_{n \geq 1} \in Sucec(\mathbb{Q})$. Esta sucesión representa a un número real que llamaremos ℓ. Por otra parte, cada término a_k de la sucesión se puede ver como un número real, considerando la clase de equivalencia de la sucesión constante a_k. Una propiedad interesante del límite de sucesiones de números reales es que el límite de la sucesión de los números a_k(vistos como números reales) es precisamente ℓ.

La propiedad más importante del conjunto de los números reales es que es *completo*. Esto quiere decir lo siguiente: cualquier sucesión **de números reales** $(x_n)_{n \geq 1}$ creciente y acotada tiene límite en el conjunto de los números reales.

En resumen, en este capítulo comenzamos viendo que los números racionales no son completos, en el sentido de que hay sucesiones crecientes y acotadas de números racionales que no tienen límite en el conjunto de los racionales. Entonces, agregamos al conjunto de los números racionales los límites de estas sucesiones, formando así el conjunto de los números reales. La noción de límite de los números racionales se extiende al conjunto de números reales, y, finalmente, con esta noción de límite, resulta que las sucesiones crecientes y acotadas de números reales *tienen límite* en el conjunto de los números reales. Es decir, hemos creado un conjunto de números completo.

5.7. Números importantes

Un número real importante en el análisis matemático es el *número e* [*13]. Este número aparece en diferentes áreas de la matemática como probabilidad, combinatoria, ecuaciones diferenciales, matemática financiera, entre otras.

El número e se puede definir mediante la siguiente sucesión creciente y acotada de números racionales:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Los primeros términos de esta sucesión, calculados con 60 decimales, son:

a_1 = 2,0
a_2 = 2,5
a_3 = 2,666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
a_4 = 2,708333333333333333333333333333333333333333333333333333333333
a_5 = 2,716666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
a_6 = 2,718055555555555555555555555555555555555555555555555555555555
a_7 = 2,718253968253968253968253968253968253968253968253968253968253
a_8 = 2,718278769841269841269841269841269841269841269841269841269841
a_9 = 2,718281525573192239858906525573192239858906525573192239858906
a_{10} = 2,718281801146384479717813051146384479717813051146384479717813
a_{11} = 2,718281826198492865159531826198492865159531826198492865159531
a_{12} = 2,718281828286168563946341724119501897279675057452835230613008

Puede compararse este resultado con los primeros 120 dígitos del desarrollo decimal de e:

e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967 62772 40766
30353 54759 45713 82178 52516 64274 27466 39193 20030 59921

Es claro que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de números racionales. No es tan claro que es acotada. Esto puede probarse utilizando las siguientes propiedades que se prueban fácilmente por inducción:

- $n! \geq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in$ N.

En efecto,

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está acotada superiormente por 3, con lo cual define un número real. Podemos refinar la cuenta anterior de la siguiente manera:

[*13] La primera referencia al número *e* fue publicada en una tabla en un apéndice de un trabajo del matemático escocés John Napier. A pesar de que Napier no usó la constante misma, calculó el valor de algunos logaritmos con ella. El *descubrimiento* real de la constante se debe a Jacob Bernoulli, al tratar de calcular el límite de la sucesión $b_n = (1 + 1/n)^n$. Leonhard Euler fue el primero en usar la letra e para dicha constante en 1727 y la primera publicación de *e* fue su trabajo *Mechanica* de 1736.

$$
\begin{aligned}
a_n &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\
&= 3 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} < 3 - \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

por lo que $2 < e < 3$ y entonces e no es entero.

Teorema 5.11. *El número e es irracional.*

La prueba de este hecho es un poco más técnica que otras pruebas del libro. La incluimos, de todos modos, para el lector interesado.

Demostración. Supongamos que e es un número racional m/d. Como e no es entero, $d > 1$. Llamemos N al número

$$
\begin{aligned}
N &= d! \cdot \left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{d!}\right)\right) \\
&= d!\left(\frac{m}{d} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{d!}\right)\right) \\
&= m \cdot (d-1)! - \left(d! + \frac{d!}{1} + \frac{d!}{2!} + \cdots + \frac{d!}{d!}\right)
\end{aligned}
$$

Claramente N es un número entero ya que $\frac{d!}{k!} = (k+1)\cdot(k+2)\cdots d$ es entero si $k \leq d$. Veamos que, sin embargo, $0 < N < 1$, lo que es imposible para un número entero.

Por la definición del número e, deducimos que el número real $e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{d!}\right)$ está definido por la sucesión:

$$
c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq d \\ \frac{1}{(d+1)!} + \frac{1}{(d+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} & \text{si } n > d \end{cases}
$$

Luego, el número N está definido por la sucesión $(d! \cdot c_n)_{n\geq 1}$, cuyos términos son todos positivos para $n > d$, con lo cual $N > 0$. Para ver que $N < 1$, notamos que si $k > d$,

$$
\frac{d!}{k!} = \frac{1}{(d+1)\cdot(d+2)\cdots k} \leq \frac{1}{(d+1)^{k-d}}
$$

Además, la desigualdad es estricta si $k > d + 1$. Esto implica que si $n > d + 1$,

$$
d! \cdot c_n = \frac{d!}{(d+1)!} + \frac{d!}{(d+2)!} + \cdots + \frac{d!}{n!} < \frac{1}{d+1} + \frac{1}{(d+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(d+1)^{n-d}}.
$$

Puede probarse por inducción que, para todo k natural,

$$
\frac{1}{d+1} + \frac{1}{(d+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(d+1)^k} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{(d+1)^k} < \frac{1}{d}
$$

Luego, concluimos que $N \leq 1/d < 1$ (porque $d > 1$).

Una forma alternativa con la que habitualmente se presenta al número *e* es con la sucesión:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Otro número de vital importancia en la ciencia es el número π. En geometría, π se puede definir como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro[14]. De hecho, el número π tiene su origen en el deseo de medir la longitud de una circunferencia y el área de un círculo. Las primeras aproximaciones conocidas de π, debidas a los babilonios y los egipcios, se remontan al 1900 a.C. y eran 25/8 y 256/81 respectivamente. Esta última apareció en el *papiro Rhind*, bajo la afirmación de que el área de un círculo es similar a la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro del círculo disminuido en 1/9, es decir, igual a 8/9 del diámetro. El primero en construir una sucesión que permitía aproximar π tanto como se quisiera fue Arquímedes (287-212 a.C.) en su trabajo *Medida de un círculo*.

Desde entonces, se han construido distintas sucesiones que definen al número π. Entre ellas, podemos mencionar la siguiente sucesión creciente y acotada de números racionales:

$$a_n = 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdots \frac{n}{2 \cdot n + 1}$$

Es claro que la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de números racionales.

Para ver que es acotada, basta observar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{k}{k+1} < \frac{1}{2}$, y entonces:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdots \frac{h}{2 \cdot n + 1} \\
a_n &< 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \qquad (1) \\
2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} &= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 2\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 4 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2) \\
\text{De (1) y (2), entonces: } a_n &< 4 - \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Los primeros términos de esta sucesión, calculados con 20 cifras decimales son:

a_1 = 2,66666666666666666666
a_2 = 2,93333333333333333333
a_3 = 3,04761904761904761904
a_4 = 3,09841269841269841269
a_5 = 3,12150072150072150072
a_6 = 3,13215673215673215673

[14] El primer uso de la letra griega π para esta constante se encuentra en el libro *A New Introduction to Mathematics* de William Jones, del año 1706. Esta notación se popularizó luego de que la adoptara Leonhard Euler en 1737.

$a_7 = 3,13712953712953712953$
$a_8 = 3,13946968064615123438$
$a_9 = 3,14057816968033686299$
$a_{10} = 3,14110602160137763852$
$a_{11} = 3,14135847252013627030$
$a_{12} = 3,14147964896114041355$
$a_{13} = 3,14153799317347574178$
$a_{14} = 3,14156615934494796921$
$a_{15} = 3,14157978813759582119$
$a_{16} = 3,14158639603706144639$
$a_{17} = 3,14158960558823046434$
$a_{18} = 3,14159116699150187848$
$a_{19} = 3,14159192767514692640$
$a_{20} = 3,14159229874033963270$

El número π tampoco es racional, aunque la demostración es algo más complicada que en el caso de e. Los primeros 120 dígitos del desarrollo decimal de π son:

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647

En la actualidad se conocen más de 10^{12} cifras del desarrollo decimal de π. La mejor aproximación posible de π por un número racional con numerador y denominador de hasta cuatro dígitos es 355/113 (3,1415929 ...).