Capítulo 7

Sistemas de amortización

7.1. Introducción

Un sistema de amortización es un método por el cual un capital cedido en préstamo es devuelto por una sucesión de pagos o cuotas. Estas cuotas periódicas constituyen una renta cuyo valor actual deberá ser igual al préstamo otorgado, y deben constituir a su vez una imposición cuyo valor final sea equivalente a la capitalización del préstamo al cabo de dichos períodos.

Se puede suponer que cualquier sistema de amortización es una anualidad o renta con pagos vencidos, ya que si la primera cuota se pagara al momento del préstamo sería equivalente a considerar un préstamo de menor valor con cuotas vencidas. Lo dicho anteriormente equivale a decir que si el préstamo es V y las cuotas son $c_1, c_2, \cdots, c_n$, entonces el valor actual de dicha renta deberá ser V y el valor final de las mismas será $V \cdot (1 + r)^n$.

Existen diferentes sistemas de amortización. Dos de los más sistemas más conocidos son el *sistema alemán*, que utiliza cuotas variables, decrecientes en forma aritmética, y el *sistema francés* en el cual la deuda se amortiza con cuotas constantes.

7.1.1. Características comunes de los sistemas de amortización

En todo sistema de amortización existe un préstamo V, el cual será devuelto en n cuotas equiespaciadas en el tiempo: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cada una de estas cuotas se compone de dos partes:

$$c_i = v_i + s_i$$

donde v_i se denomina *cuota de amortización real* y s_i es la *cuota de interés*. La suma de las cuotas de amortización real es igual al valor del préstamo: $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. La cuota de interés se calcula como el interés sobre las cuotas de amortización aún no pagadas: $s_i = r \cdot (v_i + \cdots + v_n)$.

Esto significa que en cada cuota el deudor paga una parte del capital prestado, v_i, y los intereses sobre el capital aún adeudado.

En particular, justo después de pagar la i-ésima cuota, el valor actual de la renta que resta pagar es igual a

$$V_A^{(i)} = v_{i+1} + \cdots + v_n \qquad 1 \leq i < n$$

Ejemplo 7.1 Supóngase un préstamo de $ 1.000 que se amortiza en tres cuotas cada 30 días, y cuyas cuotas de amortización real son de $ 300, $ 300 y $ 400 respectivamente. La tasa de interés mensual es del 2 %.

Las cuotas a pagar estarán conformadas de la siguiente manera:

Cuota i	Amortización real v_i	Cuota de interés s_i	Cuota c_i	Saldo adeudado $V_A^{(i)}$
1	$300	$ 1.000 · 0,02 = $ 20	$ 320	$ 700,00.
2	$300	$ 700 · 0,02 = $ 14	$ 314	$ 400,00.
3	$400	$ 400 · 0,02 = $ 8	$ 408	$ 0,00.

Como ejemplo, la fila correspondiente a la cuota 2 debe leerse así: *en la cuota 2, paga $ 300 de amortización real más $ 14 de interés, por lo que la cuota es de $ 314. El saldo adeudado luego de pagar la cuota resulta de $ 400.*

El valor actual de la renta es

$$V_A = 320 \cdot \frac{1}{1{,}02} + 314 \cdot \frac{1}{1{,}02^2} + 408 \cdot \frac{1}{1{,}02^3} = \$\ 1.000.$$

El valor actual de la renta calculado inmediatamente después de pagar la primera cuota es:

$$V_A^{(1)} = \frac{314}{1{,}02} + \frac{408}{1{,}02^2} = \$\ 700,$$

es decir, el saldo adeudado a ese momento.

7.1.2. Sistema alemán

El sistema alemán es un sistema de amortización donde las cuotas de amortización reales son todas iguales. Es decir, si se prevén n cuotas, entonces cada cuota de amortización real es igual a

$$v_i = \frac{V}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por lo tanto, el interés que se paga en cada cuota está dado por

$$s_i = r \cdot (v_i + \cdots + v_n) = r \cdot (n + 1 - i) \cdot \frac{V}{n}$$

Como se puede observar, los valores $s_1, s_2, \ldots,$ decrecen en forma aritmética: $s_{i+1} = s_i - r\, V/n$.

Como las cuotas de amortización son constantes, esto implica que las cuotas del sistema de amortización, c_i, también decrecen en forma aritmética: $c_{i+1} = c_i - r\, V/n$. Dado que la cuota es igual a la cuota de amortización más el interés sobre todo el préstamo: $c_1 = \frac{V}{n} + r \cdot V$, y las cuotas disminuyen en $r\,V/n$, se sigue que las siguientes cuotas están dadas por $c_i = V/n + r \cdot V - (i-1) \cdot r\,V/n$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Por otra parte, para que la anualidad determinada por las cuotas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sea un sistema de amortización, debe cumplirse que el valor actual de las mismas sea igual al préstamo V. En efecto, teniendo en cuenta la fórmula para el cálculo del valor actual de una renta en progresión aritmética con cuotas vencidas vista en el Capítulo 6, siendo la cuota inicial $c = V/n + r\,V$ y la razón $h = -r\,V/n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} V_A &= \left(\frac{V}{n} + r\,V\right) a_{\overline{n}|r} - r\,\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n}|r} - n \cdot \nu^n}{r}\right) \\ &= \frac{V}{n}\,a_{\overline{n}|r} + r\,V\,a_{\overline{n}|r} - \frac{V}{n}\,a_{\overline{n}|r} + V\,\nu^n \\ &= V\left(\nu^n + r\,a_{\overline{n}|r}\right) = V \end{aligned}$$

Es decir, el valor actual de la renta es igual al préstamo otorgado.

También debe cumplirse que el valor actual en $t = i$ de la anualidad compuesta por las cuotas $c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, c_n$ sea igual a la parte del préstamo aún no amortizado. Esto es

$$V_A^{(i)} = v_{i+1} + v_{i+2} + \cdots + v_n$$

En efecto, estas últimas cuotas también conforman una anualidad de $n-i$ cuotas, en progresión aritmética, con razón $h = -r\,V/n$ y primer término c_{i+1}. Este término es $c_{i+1} = V/n + r \cdot (n-i) \cdot V/n$, por lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} V_A{}^{(i)} &= c_{i+1} \cdot a_{\overline{n-i}|r} - r\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n-i}|r} - (n-i)\nu^{n-i}}{r}\right) \\ &= \left(\frac{V}{n} + r\,(n-i)\,\frac{V}{n}\right) a_{\overline{n-i}|r} - \frac{V}{n}\,a_{\overline{n-i}|r} + \frac{V}{n}\,(n-i)\,\nu^{n-i} \\ &= \frac{V}{n}\,(n-i)\left(r\,a_{\overline{n-i}|r} + \nu^{n-i}\right) = \frac{V}{n}\,(n-i) \end{aligned}$$

Significa que el valor actual de dicha renta es exactamente la suma de las cuotas de amortización reales que resta pagar, es decir, la parte del préstamo aún adeudado.

Hemos visto entonces que el sistema alemán cumple con las propiedades de un sistema de amortización. Una característica de este sistema es que las cuotas son decrecientes. Esto tiene la desventaja de que las primeras cuotas son de mayor valor monetario, y por lo tanto más difíciles de afrontar para el deudor. Una alternativa que suele usarse es modificar el sistema alemán variando la tasa de interés. Así, se calculan primero los valores de las cuotas para una tasa baja de interés, y luego de pagar algunas cuotas se refinancia la deuda con una tasa de interés más alta.

Ejemplo 7.2

Supóngase un préstamo por \$ 10.000 a pagar en cuatro cuotas, aplicando el sistema alemán con una tasa de interés del 2% para las dos primeras cuotas y del 4% para las dos últimas.

Para las dos primeras cuotas se tiene:

$$c_1 = \$\ 2.500 + \$\ 200 = \$\ 2.700 \qquad c_2 = \$\ 2.700 - 0{,}02 \cdot \$\ 2.500 = \$\ 2.650.$$

El saldo adeudado al finalizar la segunda cuota es de $ 5.000, y la refinanciación implica que las próximas cuotas serán $c_3 = 2.500 + 0{,}04 \cdot 5.000 = \$\ 2.700$ y $c_4 = 2.700 - 0{,}04 \cdot 2.500 = \$\ 2.600$.

La anualidad de cuotas $ 2.700, $ 2.650, $ 2.700, $ 2.600 tiene un valor actual próximo a $ 10.000 si se utiliza una tasa de interés constante del 2,6 %. Sin embargo, si se aplica el sistema alemán con una tasa fija del 2,6 %, las dos primeras cuotas serían iguales a:

$$c_1 = \$\ 2.500 + \$\ 260 = \$\ 2.760 \qquad c_2 = \$\ 2.760 - 0{,}026 \cdot \$\ 2.500 = \$\ 2.695$$

algo superiores al sistema que utiliza dos tasas.

Otra alternativa es la aplicación del sistema francés, como veremos en la siguiente sección.

7.1.3. Sistema francés

El sistema francés es un sistema de amortización en el cual las n cuotas a pagar son todas iguales: es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$.

Para determinar el valor de c, tendremos en cuenta que el valor actual de la renta debe ser igual al préstamo V. Por otro lado, utilizando la fórmula de actualización de una renta con cuotas constantes y vencidas, este valor actual debe ser $c \cdot a_{\overline{n}|r}$. Por lo tanto:

$$c = \frac{V}{a_{\overline{n}|r}} = V\,\frac{r}{1 - \nu^n}$$

Como hemos visto, cada cuota de la renta se compone de una cuota de amortización real v_i y una cuota de interés s_i. La cuota v_i es la parte del capital adeudado que se salda en el instante $t = i$. Así, si denotamos con $V_A^{(i)}$ el valor actual de la renta en $t = i$, entonces:

$$\begin{aligned} v_i &= V_A{}^{(i-1)} - V_A{}^{(i)} = c \cdot \left(a_{\overline{n-i+1}|r} - a_{\overline{n-i}|r}\right) \\ &= \frac{V \cdot r}{1 - \nu^n}\,\frac{\left(1 - \nu^{n+1-i} - 1 + \nu^{n-i}\right)}{r} \\ &= \frac{V}{1 - \nu^n}\,\nu^{n-i}\,(1 - \nu) \end{aligned}$$

y usando que $1 - \nu = r \cdot \nu$ concluimos que:

$$v_i = \frac{V \cdot r}{1 - \nu^n}\,\nu^{n+1-i} = c \cdot \nu^{n+1-i}$$

Además, puesto que $c = v_i + s_i$ se sigue que:

$$s_i = c \cdot \left(1 - \nu^{n+1-i}\right)$$

La sucesión de cuotas de amortización reales v_i es creciente $(1 \leq i \leq n)$ mientras que s_i es decreciente.

Naturalmente, el valor actual de esta renta es V (pues de esa manera ha sido elegido c), y el valor final es

$$\text{Valor final } = c \cdot s_{\overline{n}|r} = \frac{V \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} \, \frac{(1+r)^n - 1}{r} = V \cdot (1+r)^n$$

Concluimos esta sección con un ejemplo que muestra las cuotas de amortización de un préstamo, utilizando el sistema alemán y el francés respectivamente.

Ejemplo 7.3

Un préstamo de $ 1.000.000 es amortizable en 5 años, con el 15% de interés anual sobre saldos. Los siguientes cuadros resumen los pagos a efectuar según los sistemas alemán y francés respectivamente.

Cuadros de amortización. Los siguientes cuadros de amortización muestran el valor de las cuotas a pagar según cada sistema, la composición de las mismas, y el saldo adeudado al comienzo del período.

Puede observarse que las primeras cuotas son mayores para el caso del sistema alemán, y esta relación se invierte en las últimas cuotas.

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1.000.000	150.000	200.000	350.000
2	800.000	120.000	200.000	320.000
3	600.000	90.000	200.000	290.000
4	400.000	60.000	200.000	260.000
5	200.000	30.000	200.000	230.000
suma		450.000	1.000.000	1.450.000

Cuadro 7.1 Sistema Alemán

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1.000.000	150.000	148.315,55	298.315,55
2	851.684,45	127.752,67	170.562,89	298.315,55
3	681.121,56	102.168,23	196.147,32	298.315,55
4	484.974,24	72.746,14	225.569,42	298.315,55
5	259.404,83	38.910,72	259.404,83	298.315,55
suma		491.577,76	1.000.000	1.491.577,76 *

Cuadro 7.2 Sistema Francés

* La diferencia se debe a cálculos de aproximación.

7.2. Sistema americano y fondo de amortización

El *sistema americano* es un sistema de amortización de n cuotas en las que las $n-1$ primeras están constituidas únicamente por intereses, y en la última se devuelve el total del préstamo adeudado más los intereses correspondientes al último período. De esta forma, si el valor del préstamo es V y la tasa periódica es r, entonces las $n-1$ primeras cuotas son:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = V\,r$$

y la última cuota es $c_n = V + V\,r = V\,(1 + r)$.

Notemos que en este sistema la última cuota es considerablemente elevada, ya que su valor es aún mayor que el monto total del préstamo. Por lo tanto, este sistema se suele combinar con una serie de depósitos en un *fondo de amortización*. Esto es, al mismo tiempo que el deudor devuelve las cuotas de interés, aporta al fondo una sucesión de pagos iguales de modo que se forme finalmente un capital equivalente al préstamo. Estas cuotas están sujetas a una tasa de inter es r', usualmente distinta e inferior a r. Si llamamos f a las cuotas del fondo de amortización, entonces se debe cumplir que:

$$f\, s_{\overline{n}|r'} = V \qquad \text{es decir} \qquad f = \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

En un sistema americano combinado con el fondo de amortización, el deudor pagará una renta de n cuotas constantes iguales a $f + V\,r$, donde las cuotas f reconstruyen el préstamo. Cabe entonces preguntarse cuál es la diferencia entre el sistema americano y el sistema francés, el cual también asume cuotas constantes.

7.2.1. El sistema francés vs. el sistema americano

Sea r la tasa de interés por período sobre una deuda de valor V, tanto para el sistema francés como para el sistema americano, y sea r' la tasa de interés para la formación del fondo de amortización. Sea n el número de cuotas.

Según el sistema francés, cada cuota es igual a

$$C_1 = \frac{V}{a_{\overline{n}|r}} = V\,r + \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

y en el sistema americano las cuotas son iguales a

$$C_2 = V\,r + \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

Podemos concluir entonces que si $r > r'$, entonces $s_{\overline{n}|r} > s_{\overline{n}|r'}$ y $C_1 < C_2$. Luego es preferible el sistema francés. Si ambas tasas son iguales: $r = r'$, entonces ambos sistemas son equivalentes; y si $r' > r$, entonces es conveniente el sistema americano.

En la práctica, las tasa de interés para préstamos son superiores a las tasas de interés para depósitos. Por lo tanto es conveniente para el deudor un sistema de amortización francés.

Ejemplo 7.4

Una empresa puede pedir un préstamo de $ 200.000 a 15 años. Para devolver la misma, tiene dos posibilidades:

1. amortizar la deuda con cuotas anuales constantes a una tasa del 11 %.
2. pagar los intereses por el préstamo a una tasa anual del 10,5% y establecer un fondo de amortización con tasa anual del 7,5 %.

¿Cuál opción es más conveniente?

Solución. En este caso el interés sobre la deuda es diferente según se aplique el sistema francés o el sistema americano. Por lo tanto, debemos calcular las cuotas en cada caso. Para el sistema francés, cada una de las 15 cuotas anuales deberá ser igual a

$$C_1 = \frac{\$ \ 200.000}{a_{\overline{15}|0,11}} = \$ \ 27.813,05$$

Para el sistema americano, las cuotas de interés serán de $ 200.000 (1,105)=$ 21.000 y el depósito anual para el fondo de amortización será de

$$\frac{\$ \ 200.000}{s_{\overline{15}|0,075}} = \$ \ 7.657,45$$

Por lo tanto la empresa deberá aportar anualmente una cuota de $ 28.657,45.

La opción más conveniente es la 1.

7.3. Ejercicios

Ejercicio 7.1

Un individuo es deudor de un préstamo concedido hace cinco años, por un importe de $ 1.000.000. El préstamo debía ser amortizado con pagos constantes de $ 162.745,40 al año, siendo la tasa de interés del préstamo del 10 %. Calcular qué cantidad debería entregar el deudor al banco para cancelar el préstamo en este momento.

Ejercicio 7.2

De un préstamo de $ 1.000.000 a amortizar en 4 años por el sistema francés a una tasa anual del 10% calcular:

1. **el valor de cada cuota.**
2. **el monto adeudado al comenzar el tercer año.**
3. **la tercera cuota de amortización real.**
4. **la cuota de interés del cuarto año.**
5. **el capital amortizado en los tres primeros años.**

Ejercicio 7.3

De un préstamo de 10 mil de pesos a amortizar por el sistema francés, con pagos anuales al 10% anual, se sabe que la última cuota de amortización asciende a $ 1.479,504. Calcular la duración de la operación.

Ejercicio 7.4

Un préstamo de 10 mil pesos es concedido para ser amortizado en cinco años, con pagos semestrales, siendo la cuota de amortización real semestral constante. Si la tasa de interés nominal anual es igual al 10 %, calcular:

a) pago correspondiente al octavo semestre.

b) capital adeudado inmediatamente después de pagar la segunda cuota.

Ejercicio 7.5

El Sr. Domínguez contrae una deuda de $ 85.000, a amortizar con el pago de 18 cuotas cada 30 días iguales y vencidas a una tasa de interés del 0,15 % anual.

a) Suponiendo que no paga la cuota 10, y de la cuota 11 sólo abona los intereses. ¿de cuánto debe ser la cuota 12 para regularizar los pagos?

b) Al pagar la cuota 9 el Sr. Domínguez desea reducir el importe de las siguientes cuotas en un 10 %. ¿Qué pago extraordinario deberá hacer junto con la cuota 9?

Ejercicio 7.6

Se sabe que un préstamo de X pesos se amortiza en diez años mediante cuotas que disminuyen en progresión aritmética de manera que la diferencia entre dos cuotas consecutivas es de $ 200. Se sabe además que la última cuota asciende a $ 3.918,15 y que el préstamo ha sido concertado a una tasa de interés anual del 8 %.

Calcular las componentes del cuadro de amortización del séptimo año.

Ejercicio 7.7

En la compra de un electrodoméstico por un importe de $ 3.000 se ofrece pagarlo en 3 cuotas con amortización constante, abonando la primera cuota a los 90 días de realizada la operación, la siguiente los 31 y la tercera a los 32. La tasa de interés pactada en la operación es de 2 % para 30 días. Calcule los importes que deberán pagarse en cada cuota y la composición de las mismas.