Capítulo 3
El Interés

3.1. El fundamento del préstamo con interés

Podemos decir que toda operación financiera es un préstamo, en el que un *prestamista* entrega a un *prestatario* una cierta cantidad de dinero, a cambio de que este último lo devuelva al cabo de un cierto tiempo con un recargo o *interés*.

Por ejemplo, si se pide dinero prestado a una entidad financiera, éste deberá ser devuelto en un cierto plazo con un interés acordado previamente. Del mismo modo, si se deposita dinero en una cuenta bancaria, este capital se irá incrementando con el correr del tiempo. En este último caso, el prestamista es quien deposita el dinero y el prestatario es la entidad financiera.

A lo largo de la historia, siempre que el hombre ha prestado algo a otro, ya sea dinero u otros bienes, ha exigido que se le devuelva una cantidad superior a la prestada. Por otro lado, quien recibe el préstamo acepta devolverlo bajo esas condiciones. ¿Significa esto que la transacción es siempre beneficiosa para el prestamista? ¿Por qué entonces el prestatario acepta estas condiciones?

Ya en el siglo XVIII, Jeremy Bentham (1748-1832) formuló la doctrina *utilitarista* según la cual todo acto debe ser juzgado y valorado según la utilidad que brinda. Útil era aquello que aumentaba el placer y disminuía el dolor. Por lo tanto, el individuo que prestaba un bien también sacrificaba la utilidad que el mismo le podría dar si lo hubiera conservado. Por ello era razonable que, finalizado el préstamo, exigiera el valor del bien más el valor de la utilidad perdida.

La lógica de este comportamiento fue retomada por los economistas neoclásicos a comienzos del siglo XX, y en particular por Irving Fisher (1867-1947). Fisher expuso en su obra "Teoría del Interés" (1930) la razón de la exigencia de intereses en la devolución de cualquier préstamo, fundamentando que no sólo el interés se basa en la utilidad del bien en préstamo sino también en el tiempo que el mismo es prestado. Es decir, no sólo influyen aspectos cuantitativos del bien, sino también temporales. Fisher introduce en su obra la noción de tasa nominal y la tasa real de interés, relacionando a ambas con la tasa de inflación.

Las contribuciones de Irving Fisher a la teoría económica fueron muy importantes, y es considerado como uno de los economistas científicos más importantes de la historia.

3.2. Interés

Como ya se ha visto hasta ahora, el hombre no es indiferente al tiempo en el cual puede disponer de una cierta cantidad de dinero. Si se le ofrece disponer de $ 1.000 ahora o $ 1.300 quién sabe cuándo, no sabrá qué elegir. Si los $ 1.300 son para dentro de 1 mes, seguramente aceptará esta opción. Si son para dentro de 10 años preferirá recibir los $ 1.000 ahora, si es que existe alguna forma de invertirlos de modo de producir más de $ 1.300 durante 10 años. Por esto, no sólo importa cuánto dinero más se devolverá a cambio, sino también cuándo será la devolución.

Definición 3.1

En un intercambio no simultáneo de capitales, se llama *interés* a la diferencia neta entre lo que se devuelve y lo que se presta, independientemente del tiempo transcurrido.

En una operación financiera intervienen distintos elementos:

- C_I : capital inicial, o capital prestado,
- C_F : capital final, o capital devuelto,
- I: interés,
- *UM*: unidad monetaria, por ejemplo, pesos, dólares, euros, libras, etc.
- *UT*: unidad de tiempo, por ejemplo, días, meses, años, semestres, etc.

La relación existente entre el capital inicial, el capital final y el interés se expresa de la siguiente manera:

$$I = C_F - C_I$$

Ejemplo 3.1

Juan Pérez realizó un depósito a plazo fijo de $ 30.000 y al cabo de 30 días había en su cuenta la suma de $ 30.497.

En este caso, Juan Pérez presta dinero al banco, y el interés pagado por el banco al término de 30 días es de $ 497. Esto es, $I = C_F - C_I$ = $ 30.497 – $ 30.000 = $ 497.

Ejemplo 3.2

La empresa EMPRE S.A. solicitó un préstamo por 5 años de $ 200.000. Al cabo de dicho período deberá devolver $ 300.000.

Aquí, la entidad financiera es quien presta dinero a la empresa, y el interés que cobra por el término de 5 años es de $ 100.000 Esto es, $I = C_F - C_I$ = $ 300.000 – $ 200.000 = $ 100.000.

Si bien es claro que en el Ejemplo 3.2 se ha cobrado un interés mayor en cuanto al monto de dinero que representa, también es importante notar que el monto del préstamo y el tiempo transcurrido también son mayores. En realidad, el interés es un concepto relativo al dinero o capital en préstamo y también al tiempo que dura dicho préstamo.

Entonces, es más preciso comparar cuál es el interés que se cobra por una unidad de capital prestada en cada caso, considerando una misma unidad de tiempo. Esto nos conduce al concepto de **tasa de interés**.

Definición 3.2

En una operación financiera, la **tasa de interés** r por unidad de tiempo es el interés que corresponde a una unidad de capital en la unidad de tiempo considerada.

Ahora bien, el interés es directamente proporcional al capital en préstamo. Es decir, si por \$ 1 se pagan \$ 0,10 de interés por mes, entonces por \$ 50 se pagarán \$ 5, y por una cantidad \$ X el interés será de \$ $X \cdot 0{,}10$. Luego la tasa de interés se puede calcular como:

$$r = \frac{1{,}10 - 1}{1}, \qquad \text{o} \qquad r = \frac{55 - 50}{50} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{(X + X \cdot 0{,}10) - X}{X}.$$

En todos los casos el resultado es 0,10. La tasa de interés se puede calcular como el cociente entre el interés y el capital inicial en la unidad de tiempo considerada.

$$r_{UT} = \frac{C_F - C_I}{C_I}$$

En el Ejemplo 3.1, la tasa de interés por 30 días es

$$t_{30\,d} = \frac{497}{30.000} = 0{,}16566$$

En el Ejemplo 3.2, la tasa de interés por 5 años es

$$t_{5\,a} = \frac{100.000}{200.000} = 0{,}5$$

Aún no es posible comparar estas dos tasas de interés puesto que una de ellas está expresada en 30 días y la otra en 5 años. Para determinar cuál es la tasa mayor es necesario expresar ambas en una misma unidad de tiempo.

Es importante notar que las tasas de interés son independientes de la unidad monetaria utilizada. Es decir, si la operación financiera se expresa en otra unidad monetaria, la tasa de interés sigue siendo la misma.

Ejemplo 3.3

Supóngase una situación en la que un dólar (1 U\$D) equivale a tres pesos (\$ 3). Si por un préstamo de 100 dólares se cobra un interés mensual de 30 dólares, la tasa de interés (en dólares) es $\frac{130 - 100}{100} = 0{,}30$.

Si se considera la situación con el equivalente en pesos, se tiene que por un préstamo de \$ 300 se cobra un interés mensual de \$ 90 pesos. Por lo tanto la tasa de interés en pesos es

$$\frac{390 - 300}{300} = \frac{90}{300} = 0{,}30$$

Es así que la tasa de interés es una magnitud *adimensional*, es independiente de la unidad monetaria elegida.

Tanto por uno y tanto por ciento. Es frecuente emplear la notación de porcentajes cuando se trata de tasas de interés, indicando que "la tasa es del tanto por ciento". En este caso, una tasa de interés r se expresa en porcentajes como una tasa del $100r$ %. A modo de ejemplos:

- una tasa de interés del 3% anual es lo mismo que una tasa de interés anual de 0,03; puesto que $3 = 100 \cdot 0{,}03\%$.
- una tasa de interés del 0,125% mensual es una tasa del 12,5 mensual, ya que $0{,}125 \cdot 100 = 12{,}5\%$.
- en el Ejemplo 3.1 la tasa de interés es del 16,566% cada 30 días, mientras que en el Ejemplo 3.2 la tasa de interés por 5 años es del 50 %.

3.3. El interés simple y el interés compuesto

Al realizar una compra en cuotas, al depositar dinero en el banco, al pedir un crédito, y en cualquier operación financiera que involucre el cobro de intereses, siempre se enuncia una tasa de interés de la operación. Esta tasa permite calcular el interés que se cobrará en la operación, si la duración de la misma es una unidad de tiempo.

Ahora bien, si se quiere calcular el interés cobrado en un intervalo de tiempo arbitrario, no es suficiente con conocer la tasa. Es necesario conocer además la fórmula o tipo de interés que se aplica. Existen dos fórmulas diferentes de calcular el interés en base a la tasa, que dan lugar a dos *tipos* de interés: el *interés simple* y *el interés compuesto*.

Cada una de estas fórmulas indica cómo debe calcularse el interés sobre un capital inicial C_I después de un cierto tiempo T. Por ejemplo, si se hace un depósito de \$1.000 a plazo fijo por 3 meses a interés compuesto, con una tasa de interés del 2% mensual, se obtendrá un interés diferente a si se aplica un interés simple, aún con la misma tasa de interés y por el mismo período.

Para cualquiera de las fórmulas, es necesario conocer el capital inicial C_I , el tiempo en que se aplicará la tasa de interés y por supuesto, la tasa de interés r.

3.3.1. Interés simple

En el caso del interés simple, se asume que en cada unidad de tiempo transcurrida se suma una cantidad proporcional al capital inicial, siendo la constante de proporcionalidad la misma tasa de interés. Así, el interés simple luego de n unidades de tiempo está dado por:

$$I = C_I \cdot n\, r$$

y el capital final obtenido es

$$C_F = C_I + I = C_I \cdot (1 + n\, r)$$

Ejemplo 3.4

Un capital de \$ 4.000 es depositado a una tasa de interés simple del 5% mensual durante dos meses. Esto significa que el interés ganado será, en pesos, igual a $I = 4.000 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 400$, es decir de \$ 400.

En una operación en la que se aplica el interés simple, el capital inicial se incrementa a lo largo del tiempo de acuerdo a una progresión aritmética. Es decir, si el capital inicial es C_I y la tasa de interés por unidad de tiempo es r, entonces en las sucesivas unidades de tiempo el capital será:

$$C_I\,,\ C_I + r\,C_I\,,\ C_I + 2\,r\,C_I\,,\ C_I + 3\,r\,C_I\,,\ C_I + 4\,r\,C_I\,, \ldots .$$

Ejemplo 3.5

Un capital de \$ 1.000 se deposita a una tasa de interés simple del 3% mensual durante 5 meses. Esto significa que al finalizar cada mes se agrega al capital una suma igual a \$ 1.000 · 0,03 = \$ 30. Por, lo tanto el capital se irá incrementando mensualmente de acuerdo a una progresión aritmética de razón 30:

\$ 1.000, \$ 1.030, \$ 1.060, \$ 1.090, \$ 1.120, **\$ 1.150**,

siendo el capital final al cabo de 5 meses igual a \$ 1.150.

En la Figura 3.1 se ilustra el incremento del capital en los sucesivos meses. Se puede apreciar en la figura que el crecimiento del capital sujeto a un tipo de interés simple es lineal, es decir, que es posible unir con una línea o recta los puntos correspondientes a los sucesivos capitales.

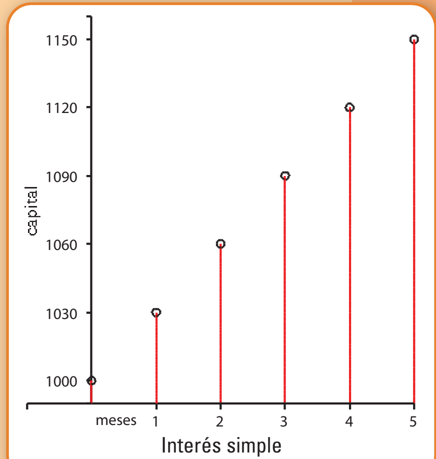

Figura 3.1

3.3.2. Interés compuesto

En el caso del interés compuesto, el interés obtenido en cada unidad de tiempo se *capitaliza*, es decir, pasa a formar parte del capital; de manera que en el período siguiente el interés se calcula sobre el monto formado por el capital inicial y el interés obtenido hasta ese momento.

En el caso del Ejemplo 3.5, los intereses se capitalizan una vez al mes. Así, para obtener el monto al final del primer mes se debe calcular

$$1.000 + 1.000 \cdot 0{,}03 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03) = \mathbf{1.030}$$

al finalizar el segundo

$$1.030 \cdot (1 + 0{,}03) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = \mathbf{1.060{,}90}$$

al finalizar el tercero

$$1.060{,}90 \cdot (1 + 0{,}03) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = \mathbf{1.092{,}727}$$

y así, sucesivamente. De este modo, los sucesivos montos mensuales son:

$ 1.000 $ 1.030 $ 1.060,90 $ 1.092,727 $ 1.125,5088 **$ 1.159,2741**.

Como se puede observar, el monto obtenido al cabo de dos o más unidades de tiempo, calculado según el interés compuesto, es mayor que el obtenido según el interés simple. En la Figura 3.2 se ha ilustrado esta situación superponiendo los puntos correspondientes al monto obtenido según se aplique el interés simple o el interés compuesto. Los puntos superiores son los que corresponden al interés compuesto.

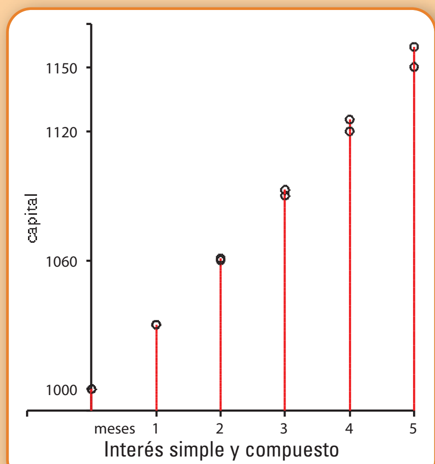

Figura 3.2

Para el interés compuesto, la fórmula general para obtener el capital final, con una tasa de interés r, luego de n unidades de tiempo (n un número natural) es

$$C_F = C_I \cdot (1 + r)^n$$

de donde deducimos que el interés producido está dado por

$$I = C_F - C_I = C_I \cdot ((1 + r)^n - 1)$$

En el caso del interés compuesto con una tasa de interés r, los sucesivos montos obtenidos al final de cada período constituyen una progresión geométrica, siendo la razón igual a $(1 + r)$.

Ejemplo 3.6

Un capital de $ 4.000 es depositado a una tasa de interés compuesto del 5% mensual durante dos meses. Esto significa que al cabo de dos meses, el capital final será de $C_F = 4.000 \cdot (1{,}05)^2 = 4.000 \cdot 1{,}1025 =$ $ 4.410 pesos y el interés ganado será $ 410.

Ejemplo 3.7

Se ha realizado un depósito de $ 1.000 por tres meses con una tasa del 20% mensual. ¿Cuál es el monto a retirar al cabo de tres meses?

En esta situación el depósito se incrementará en un 20% cada mes. Esto significa que los importes sucesivos serán:

$$\text{final del primer mes} = \$1.000 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.200$$

$$\text{final del segundo mes} = \$1.200 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.440$$

$$\text{final del tercer mes} = \$1.440 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.728$$

El monto a retirar es de $ 1.728. También podríamos haberlo calculado haciendo $1.000 \cdot (1{,}20)^3 = \$\ 1.728$.

Importante: En la práctica es muy poco frecuente hablar de interés simple o de tasas de interés simple. La razón es que el interés compuesto, a partir de la segunda unidad de tiempo, produce un interés mayor. Por lo tanto, a lo largo de este texto asumiremos que se aplica la fórmula del interés compuesto, a menos que indiquemos lo contrario.

El gráfico de la Figura 3.3 muestra el incremento de un capital de $100 sometido a una tasa de interés mensual del 20% para cada uno de los tipos de interés, simple y compuesto. Puede apreciarse que la diferencia entre los sucesivos capitales es cada vez mayor. Precisamente, el crecimiento de un capital sometido a un tipo de interés simple es *lineal*, mientras que el interés compuesto produce un crecimiento de tipo *exponencial*.

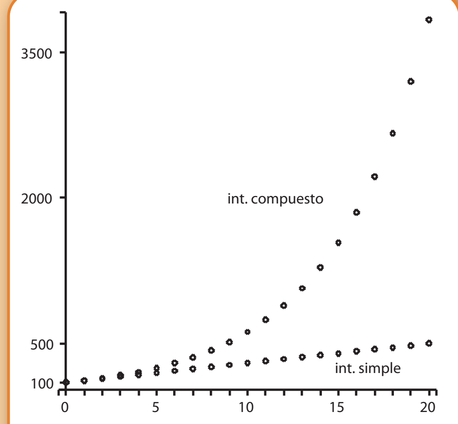

Gráfico comparativo de interés simple y compuesto

Figura 3.3

3.3.3. Tasas de interés proporcionales y equivalentes

Las tasas de interés pueden expresarse en diferentes unidades de tiempo: mensuales, o anuales, o cada 30 días, etc. A la hora de efectuar una operación financiera en la que es posible optar por diferentes tasas, es importante saber distinguir cuál es la tasa más conveniente. Si un individuo debe cobrar un interés, le interesará conocer cuál es la tasa que da mayor rendimiento, es decir, aquella que una misma unidad de tiempo produce un mayor interés. En cambio, si debe pagar un interés, optará por la tasa de menor rendimiento. Sea cual fuera el caso, es importante saber comparar dos tasas de interés.

Dos tasas de interés expresadas en una misma unidad de tiempo pueden compararse fácilmente: una tasa de interés mensual del 20% es mayor que una tasa mensual de 15%, y menor que una del 30 %.

En cambio, si se tienen dos tasas de interés expresadas en diferentes unidades de tiempo, la comparación no es tan sencilla. Por ejemplo, no es del todo claro si una tasa del 1% mensual produce menor, mayor o el mismo interés que una tasa del 12,5% anual, o si una tasa del 20% cada 30 días es *lo mismo* que una tasa mensual del 20 %.

Definición 3.3 Dos tasas de interés r y r' se dicen *equivalentes* si el monto producido por un mismo capital, en un mismo período de tiempo, es el mismo para cada una de las tasas.

Ahora bien, ¿cómo medir un mismo período de tiempo con dos unidades de tiempo distintas? Por ejemplo, un período de un mes, ¿cuántos días tiene? Si bien en la vida real hay meses de 30, 31, 28 y 29 días, y también años de 365 y de 366 días, en matemática financiera se convienen otras relaciones y equivalencias entre las unidades de tiempo año, mes y día. Así, el *año financiero* es de 360 días, y el *mes financiero* de 30 días. Por lo tanto, a lo largo de este texto se asumirán las siguientes relaciones, que por otro lado son las más frecuentes:

$$\begin{aligned} 1 \text{ año} &= 12 \text{ meses} \\ &= 360 \text{ días} \\ 1 \text{ mes} &= 30 \text{ días} \end{aligned}$$

También se emplean, quizás con menor frecuencia, las unidades de tiempo derivadas del mes: bimestre, trimestre, semestre y cuatrimestre. Las relaciones son:

$$1 \text{ año} = 6 \text{ bimestres} = 4 \text{ trimestres} = 3 \text{ cuatrimestres} = 2 \text{ semestres}$$

De acuerdo a esta convención, cada año tiene 12 meses, cada mes tiene 30 días y los años son de 360 días. En particular, esto dice que una tasa mensual r produce el mismo interés en un mes que en 30 días. En otras palabras, que una tasa mensual r es equivalente a una tasa r cada 30 días.

Otro concepto que se utiliza frecuentemente es el de tasas proporcionales.

Definición 3.4 Dos tasas de interés r y $\frac{r}{m}$ se dicen *proporcionales,* si la unidad de tiempo correspondiente a r es m veces la unidad de tiempo correspondiente a $\frac{r}{m}$.

El siguiente ejemplo aclara esta definición:

Ejemplo 3.8 Una tasa de interés anual del 3,6% es proporcional:

- a una tasa de interés mensual del 0,3%, pues un año son 12 meses y $\frac{3,6}{12} = 0,3$,
- a una tasa de interés bimestral del 0,6%, pues un año son 6 meses y $\frac{3,6}{6} = 0,6$,
- a una tasa diaria del 0,01%, pues un año son 360 días y $\frac{3,6}{360} = 0,01$.

(Un año de 365 días). En ciertas ocasiones se utiliza la relación

$$1 \text{ año} = 12 \text{ meses} = 365 \text{ días}$$

Esto implica que cada mes tiene más de 30 días, más precisamente, un mes equivale a 365/12 = 30.41 días, aproximadamente.

Por lo tanto una tasa mensual r no es proporcional a una tasa r cada 30 días, ni tampoco son equivalentes. Por ejemplo, una tasa del 5% cada 30 días produce un interés de $ 5 sobre un capital de $ 100 en 30 días, y en consecuencia producirá un interés un poco mayor en 1 mes = 30,41 días.

Si las tasas son proporcionales, entonces producen el mismo interés *simple* en un mismo período de tiempo.

Ejemplo 3.9

Una tasa del 20% mensual aplicado a un capital de $ 1.000, produce un interés simple de $ 600 al cabo de tres meses: 1.000 · 0,2 · 3 = 600.

A su vez, la tasa del 60% trimestral también produce $ 600 de interés al cabo de 3 meses, como lo muestra el cálculo 1.000 · 0,6 · 1 = 600.

Sin embargo, si consideramos la fórmula de interés compuesto, el capital producido por estas dos tasas no es el mismo a lo largo de tres meses. Si volvemos al Ejemplo 3.7, vemos que una tasa trimestral del 60% (proporcional a la tasa mensual del 20 %) producirá un capital final de $ 1.600, mientras que la tasa del 20% mensual produce un capital final de $ 1.728. Esto significa que la tasa del 20% mensual produce un interés del 72,8% trimestral. Por lo tanto, una tasa del 20% mensual es *equivalente* a una tasa del 72.8% trimestral.

Ejemplo 3.10

Si se considera un capital de $ 1.000 sujeto a una tasa de interés del 2% mensual, al cabo de un año se tendrá un capital igual a

$$\$\ 1.000 \cdot (1{,}02)^{12}$$

por lo que el interés producido es

$$\$\ 1.000 \cdot \left((1{,}02)^{12} - 1\right)$$

La tasa de interés anual es entonces

$$r = (1{,}02)^{12} - 1 = 0{,}2682\%$$

Por lo tanto una tasa del 2% mensual es proporcional a una tasa del 24% anual, y equivalente a una tasa del 26,82% anual.

Ejemplo 3.11

El Ejemplo 3.11 es útil para remarcar que, si bien un año tiene 12 meses, la tasa equivalente anual no se obtiene multiplicando por 12 a la tasa mensual cuando se trata de un interés compuesto.

Una tasa del 3% mensual es proporcional a una tasa del 36% anual. Para determinar la tasa equivalente anual calculamos el interés producido por una unidad de capital en un período de un año. Esto es $I = (1{,}03)^{12} - 1 = 0{,}42576$, es decir que es equivalente a una tasa del 42,576% anual.

Ejemplo 3.12

Existe una notación usual para referirse a las tasas proporcionales y equivalentes de una tasa de interés r determinada. La notación es la siguiente:

Notación: Si r es una tasa de interés asociada a una unidad de tiempo u, denotaremos con $r^{(m)}$ a la tasa de interés proporcional asociada a m unidades de tiempo y $r_{(m)}$ a la tasa equivalente a r asociada a m unidades de tiempo. Las fórmulas correspondientes son:

$$\boxed{r^{(m)} = m \cdot r \,,\; r_{(m)} = (1 + r)^m - 1}$$

Si $m = 1$, entonces tenemos que $r^{(1)} = r_{(1)} = r$.

Ejemplo 3.13

Consideremos una tasa r del 5% mensual, es decir, $r = 0{,}05$. Entonces:

1. La tasa proporcional anual es $r^{(12)} = 12 \times 0{,}05 = 0{,}6$, o sea, del 60% anual.
2. La tasa equivalente anual es $r_{(12)} = (1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}795856$, es decir del 79,5856% anual.
3. La tasa proporcional diaria es $r^{(1/30)} = \frac{0{,}05}{30} = 0{,}001667$, es decir del 0,1667% diario.

3.3.4. Relación entre $r^{(m)}$ y $r_{(m)}$

En el Ejemplo 3.11 se puede observar que si $r = 1$ es la tasa mensual, entonces la tasa proporcional anual $r^{(12)}$ es menor que la tasa equivalente anual $r_{(12)}$. Esto no es un hecho casual. Puede demostrarse que la tasa equivalente a m períodos de tiempo (con $m > 1$) es mayor que la tasa proporcional correspondiente.

La aclaración $m > 1$ es importante, pues de lo contrario se da la relación inversa.

Ejemplo 3.14

Si $r = 0{,}6$ es una tasa anual, entonces $r^{(1/12)} = \frac{0{,}6}{12} = 0{,}05$ es la tasa proporcional mensual. La tasa equivalente mensual se obtiene planteando la ecuación:

$$(1 + r_{(1/12)})^{12} = 1 + 0{,}6$$

cuya solución es

$$r_{(1/12)} = \sqrt[12]{1{,}6} - 1 = 0{,}03994411$$

una tasa inferior a 0,05.

Proposición 3.1

Dada una tasa de interés r, un entero m, siendo $m > 1$, y las correspondientes tasas proporcional y equivalente $r^{(m)}$ e $r_{(m)}$, se verifica que

$$r^{(m)} < r_{(m)}$$

Demostración

Para demostrar esto, en primer lugar debe notarse que

$$(1 + \frac{r^{(m)}}{m})^m = 1 + r_{(m)}$$

Esta relación se deduce de las correspondientes definiciones de $r_{(m)}$ y $r^{(m)}$.

Ahora bien, la potencia de un binomio del tipo $(1 + \frac{r}{m})^m$ puede desarrollarse como una suma de potencias de $\frac{r}{m}$, más precisamente:

$$(1+\frac{r}{m})^m = 1 + m\,\frac{r}{m} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (\frac{r}{m})^k$$

Esta suma es estrictamente mayor que $1 + r$ si $m > 1$, por lo tanto, si reemplazamos r por $r^{(m)}$ se obtiene que $(1+\frac{r^{(m)}}{m})^m > 1 + r^{(m)}$. Es inmediato entonces que

$$r_{(m)} > r^{(m)}.$$

3.3.5. Tasas de interés nominal, periódica o real y equivalente

Es frecuente que en las operaciones financieras se enuncia una tasa de interés, pero la capitalización de intereses, o los pagos, se efectúan en períodos menores. Por ejemplo, para un plazo fijo a tres meses se enuncia una tasa de interés del 6% anual. Esto significa que en realidad se aplica una tasa del 1,5% (es decir 6/4 %) trimestral, pero se enuncia la tasa proporcional anual: 6 %. Esta tasa del 6% se denomina *tasa nominal anual*, y se simboliza como T.N.A.

La tasa de interés equivalente anual se llama *tasa equivalente anual* y se simboliza T.E.A.

Ejemplo 3.15

Un banco enuncia una tasa de interés nominal anual del 0,6% con capitalización mensual de intereses. Esto indica que mensualmente se aplicará una tasa real del 0,05% mensual, y que la T.E.A. es del $(1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}79585\%$ anual.

Resumiendo, si se considera como unidad de tiempo la m-ésima parte de un año, y para este período se aplica una tasa de interés i, se llama tasa nominal anual a la tasa proporcional anual y tasa equivalente anual a la tasa equivalente anual:

$$\text{T.N.A.} = i^{(m)}, \ \text{T.E.A.} = i_{(m)}$$

Observemos que la T.N.A. sólo es una tasa enunciada, pero no indica nada sobre el rendimiento a lo largo del año.

3.4. El interés aplicado en fracciones de tiempo

Si se aplica una tasa de interés mensual r en un depósito de \$ 1.000, entonces el capital formado al cabo de n meses es \$1.000 $(1 + r)^n$. Ahora bien, ¿cuál es el capital al cabo de 1 mes y medio?, ¿o al cabo de 20 días? La pregunta general es: ¿cómo se calcula el interés cuando el tiempo transcurrido no es un múltiplo de la unidad de tiempo considerado?

Existen distintas opciones que se describen a continuación.

Opción 1 Capitalización mixta. Una posibilidad es aplicar el interés compuesto sobre las primeras unidades de tiempo, y en la última fracción de tiempo emplear un tipo de interés simple. Por ejemplo, si un individuo deposita a una tasa del 3% mensual un capital de \$ 500 durante 45 días, entonces la forma de calcular el capital final es aplicar interés compuesto el primer mes, e interés simple el medio mes restante. De este modo el capital final es:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03)\,(1 + \frac{0{,}3}{2}) = \$\ 522{,}725$$

Opción 2 Interés compuesto. Una posibilidad es expresar el tiempo en la unidad de tiempo considerada, y aplicar la fórmula de interés compuesto. En el caso del ejemplo anterior, dado que 45 días equivale a 1,5 meses (un mes y medio), entonces se calcula el capital final como:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03)^{1{,}5} = \$\ 522{,}6679$$

Opción 3 Una tercera opción es considerar sólo las primeras unidades de tiempo y no capitalizar en la última fracción de tiempo. En el ejemplo equivale a capitalizar los intereses sólo el primer mes y no aplicar la tasa de interés en el medio mes restante. Así el capital final será:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03) = \$\ 515$$

La representación gráfica de estos casos es la que se observa en la Figura 3.4.

De estas tres opciones, la que se utiliza más frecuentemente es la primera. Observemos que el monto es menor que en el segundo caso, lo cual favorece a quien debe pagar intereses (en general, al banco).

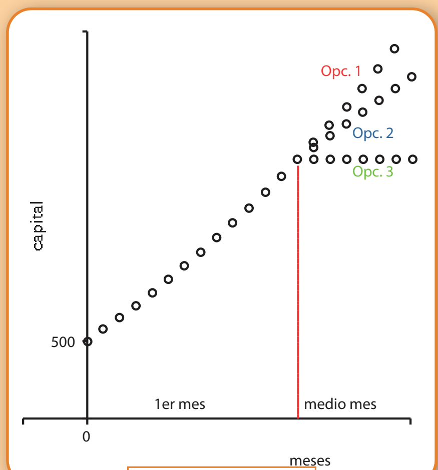

Figura 3.4

3.5. Si la incógnita es el tiempo

Puede ocurrir que un individuo desee depositar una cierta cantidad de dinero C_I en una cuenta, a una determinada tasa de interés r, y quiera saber cuánto tiempo debe depositarla para que su capital ascienda a C_F .

¿Cuánto tiempo debe depositarse un capital de $ 38.000, colocándolo a una TNA del 9% con capitalización mensual, para obtener un capital final de $ 55.833?

Ejemplo 3.16

Para resolver esta situación se debe despejar la incógnita r de la fórmula del interés compuesto: $C_F = C_I\,(1 + r)^t$. Dividiendo en primer lugar ambos miembros por C_I :

$$(1+r)^t = \frac{C_F}{C_I}$$

la forma de despejar t es aplicando logaritmo en ambos miembros, cualquiera sea la base del logaritmo:

$$\log\big((1+r)^t\big) = \log\big(\frac{C_F}{C_I}\big)$$

Hemos utilizado las propiedades conocidas de la función logaritmo:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b), \quad \log(a/b) = \log(a) - \log(b), \quad \log(a^r) = r\log(a),$$

la fórmula para obtener t es

$$\boxed{t = \frac{\log(C_F) - \log(C_I)}{\log(1+r)}}$$

En el caso del Ejemplo 3.16, se tiene que el tiempo en meses es

$$t = \frac{\log(55.833) - \log(38.000)}{\log(1{,}0075)} = 51{,}4960076$$

es decir 51 meses y medio.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios en orden de dificultad creciente.

3.6. Ejercicios

Dada una tasa nominal de interés del 0,60 = 60% anual, calcular la T.E.A. si la capitalización es

a) mensual, **b) bimestral.**

Ejercicio 3.1

Calcular la tasa nominal anual con capitalización trimestral, sabiendo que la tasa de interés equivalente anual es del 15%. Calcular además la tasa periódica que rige la capitalización.

Ejercicio 3.2

Un capital de $1.000 es depositado en una cuenta, a una T.N.A. del 1% con capitalización trimestral. Calcular el capital que será posible retirar al cabo de 225 días (2 trimestres y medio).

Ejercicio 3.3

Ejercicio 3.4

De una caja de ahorro en la que se aplica el interés simple, se sabe que hoy, 5 meses después de haberla abierto con un depósito de $ 2.500 pueden retirarse $ 2.550. ¿Cuánto podría retirarse si se espera hasta el octavo mes? ¿Cuál es la tasa de interés mensual simple que aplica dicha cuenta?

Ejercicio 3.5

¿Cuál es el capital final correspondiente a un capital inicial de $ 20.000, colocado a un interés del 15% anual, durante 2 años, si se capitaliza anualmente?

Ejercicio 3.6

Calcular el interés obtenido sobre un depósito de $ 59.500 colocados a una T.N.A. del 10 %, durante 3 años, con capitalización semestral.

Ejercicio 3.7

Calcular el capital que debe depositarse a una T.N.A. del 10% con capitalización trimestral, para que al cabo de 6 años y medio el capital sea de $ 105.600.

Ejercicio 3.8

Calcular el tanto por ciento mensual al que se debe colocar un capital de $ 5.000, para que al cabo de 60 días el monto sea de $ 5.304,50.

Ejercicio 3.9

Calcular el tiempo que debe depositarse un capital de $ 1.000, colocado a interés del 5% mensual, para transformarse en $ 3.386,46.