Capítulo 6

Capitalización y actualización

6.1. Introducción

En una operación financiera con capital inicial y final C_I y C_F respectivamente, se llama *capitalización* al proceso para obtener el capital final a partir del inicial, y *actualización* al proceso de obtener el capital inicial a partir del capital final.

En una operación financiera simple existe un capital inicial C_I y un capital final C_F relacionados por una tasa de interés i y un tiempo de duración de la operación t. Dado que asumiremos un tipo de interés compuesto, tenemos la siguiente relación entre estos elementos:

$$C_F = C_I\,(1+i)^t \quad \text{o equivalentemente} \quad C_I = C_F\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

Estas ecuaciones permiten obtener el valor del capital interviniente, al final y al principio de la operación; es decir que cada una de estas fórmulas muestra el proceso de capitalización y de actualización, respectivamente para una operación financiera simple.

Fijada una tasa de interés r, los símbolos u y r denotarán $u = (1 + r)$ y $\nu = \frac{1}{1+r}$. Si el plazo de la operación es por un período t, se llama factor de capitalización al factor u^t y factor de actualización a ν^t. Las relaciones anteriores se pueden describir entonces como

$$C_F = C_I u^t \qquad \text{y} \qquad C_I = C_F \nu^t.$$

Ejemplo 6.1

El Sr. Antonio Sánchez realizó un depósito en caja de ahorro, a una tasa de interés mensual del 4 %. Al cabo de medio año había en su cuenta \$ 27.800,00 ¿Cuánto dinero había depositado el Sr. Sánchez?

En este caso se desconoce el capital inicial C_I. La tasa de interés mensual es 0,04 y la duración de la operación en meses es $t = 6$. El factor de actualización es $\left(\frac{1}{1,04}\right)^6 = 0,9615^6 = 0,7901$, y por lo tanto el capital inicial es:

$$C_I = \$\ 27.800,00 \times 0,7901 = \mathbf{\$\ 21.964,78}$$

En general, las operaciones financieras suelen ser más complejas e involucran diferentes tasas de interés en distintas unidades de tiempo, o bien no se cuenta sólo con un capital inicial sino que el capital final se forma a partir de una sucesión de pagos o depósitos efectuados en distintos momentos. Ejemplos de esta situación son los pagos de hipotecas, pagos de intereses sobre bonos de deuda, las primas de seguros, etc.

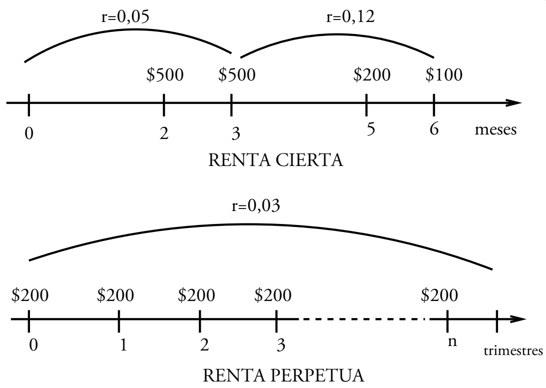
Una sucesión de pagos realizados a intervalos preestablecidos de tiempo, se denomina una *renta* o *anualidad*. Si el período de tiempo durante el cual se realizan estos pagos está preestablecido, se dice que es una renta *cierta*, y si es indeterminado, por ejemplo, durante la vida de una persona, la renta se dice *perpetua*. Cada uno de los pagos se denomina *cuota*, y el tiempo de duración de la operación es el *término* o *plazo* de la misma.

Así como en una operación financiera simple interesa conocer tanto el capital final como el capital inicial, lo mismo ocurre con el caso de las anualidades ciertas. En ciertos casos, estas rentas tienen como objetivo acumular un monto de dinero determinado al cabo de cierto tiempo y, por lo tanto, se necesitan herramientas matemáticas para calcular el valor final de una renta en términos de una tasa de interés, del número de cuotas y del monto de las mismas. En otras ocasiones una renta se utiliza para saldar una deuda en cuotas y, por lo tanto, es necesario saber calcular el valor actual de la renta en términos de los elementos que la conforman.

Para el caso particular de las rentas perpetuas, su objetivo suele ser el de amortizar el gasto en una determinada inversión, como es el caso de las empresas de peaje de rutas o puentes. Así es que estas empresas imponen un costo de peaje de modo de obtener un ingreso periódico de dinero, y que la renta así conformada salde, como mínimo, el gasto inicial de la inversión.

En la práctica no existen rentas que se extiendan indefinidamente en el tiempo, pero al desconocerse el término de las mismas se asumen de duración infinita. Es claro entonces que, para el caso de las rentas perpetuas, no es un objetivo conocer el valor acumulado de la misma. Más aún, matemáticamente sería imposible calcularlo a priori debido a que se desconoce el momento final de las mismas.

6.2. Rentas o anualidades



Renta cierta y renta perpetua

Figura 6.1

Toda renta es un conjunto de cuotas que se suceden unas a otras en el tiempo. Se conviene denotar con $t = 0$ al momento inicial de la renta. Este instante puede coincidir con el pago de la primera cuota o puede ser anterior.

Para representar gráficamente una renta, se suele trazar una recta que representa la línea de tiempo, se marca el origen de la renta, los momentos de las cuotas y el monto de las mismas. Si la renta es perpetua o se desea omitir un período de tiempo, se interrumpe con una línea discontinua. La Figura 6.1 representa dos casos particulares de rentas: una renta cierta de cuatro cuotas pagaderas en los meses 2, 3, 5 y 6, cuyos montos son respectivamente \$ 500, \$ 500, \$ 200 y \$ 100, y una renta perpetua con cuotas trimestrales de \$ 200. En el caso de la renta cierta, se asume una tasa de interés del 5% hasta el tercer mes de iniciada la operación y luego la tasa cambia al 12 %, mientras que la renta perpetua está sujeta a una tasa del 3 %.

Definición 6.1

Dada una renta cierta, se llama *valor final* de la renta en $t = T$ a la suma de las capitalizaciones de cada una de las cuotas al momento $t = T$.

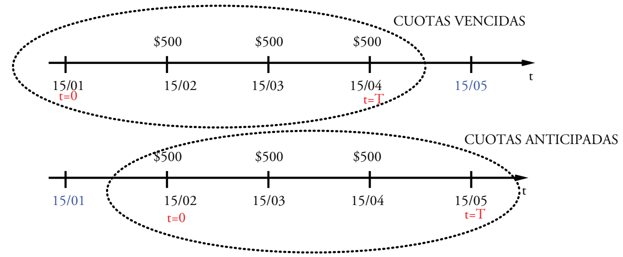
Asimismo, el *valor actual* o *valor presente* de una renta, cierta o perpetua, es la suma de los valores actuales de cada una de las cuotas en $t = 0$.

En esta definición se menciona la suma de valores actuales de cuotas de una renta perpetua, esto es, de infinitas cuotas. Si bien pareciera no tener sentido, es posible darle una explicación matemática a esta situación y se hará referencia a esto más adelante.

Según esta suposición, las anualidades pueden clasificarse de acuerdo a distintas características. Algunas de ellas son:

- **según los intereses que devengan:** rentas sujetas a interés simple o a interés compuesto, aunque usualmente se aplica el interés compuesto;
- **según los momentos de pago:** cuotas anticipadas si se pagan al comienzo de cada período, o cuotas vencidas si se pagan al final;
- **según el importe de la cuota:** constantes, si todas las cuotas son iguales, o variables en caso contrario.

NOTA: Los conceptos de cuota anticipada y cuota vencida son, si se quiere, un tanto subjetivos y están asociados a los momentos que se consideren inicio y final de la operación financiera. Por ejemplo, si un individuo paga 3 cuotas los días 15 de febrero, 15 de marzo y 15 de abril respectivamente, no puede saberse a priori si son cuotas vencidas o anticipadas. Ahora bien, si estas cuotas pertenecen a un plan de pagos por una compra realizada el 15 de enero, puede interpretarse como una renta de cuotas vencidas, pues los pagos son "a fin de mes". Pero, si el individuo ha realizado estos aportes con el objetivo de acumular un determinado capital al 15 de mayo se considera una renta de cuotas anticipadas. Ver Figura 6.2. Para cualquier día del año, el valor de la renta será único, independientemente de que las rentas se consideren vencidas o anticipadas.



Cuotas anticipadas y cuotas vencidas para una misma renta

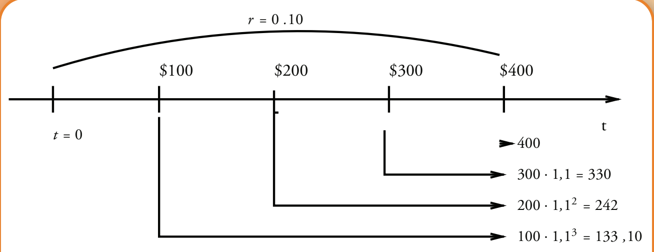
Figura 6.2

A continuación se estudiará cómo calcular el valor obtenido por la capitalización y la actualización de anualidades ciertas. En un principio, y para que la introducción al tema no resulte complicada, se asumirá que las cuotas se pagan equiespaciadamente en el tiempo y se tomará como unidad de tiempo al lapso entre dos cuotas. Por ejemplo, si las cuotas son mensuales, la unidad de tiempo será el mes. Además se considerará que la tasa de interés actuante es constante en toda la renta.

Para este tipo de rentas se pueden obtener fórmulas cerradas que permiten calcular explícitamente el valor final y el valor actual de las mismas. En todos los casos se ubicará el origen del tiempo $t = 0$ en el momento que comienza la operación financiera. Se denotará n al número total de cuotas, por lo cual $t = n$ es el término y final de la operación. Si las cuotas son anticipadas, la primera cuota se paga en $t = 0$ y la última en $t = n - 1$. Si son vencidas, la primera cuota se paga en $t = 1$ y la última en $t = n$.

6.3. Capitalización de una renta

En la Figura 6.3 se ha representado el caso de una renta de cuatro cuotas vencidas, y el cálculo del capital al momento del pago de la última cuota. Para ello, se debe capitalizar tres períodos a la primera cuota de \$ 100, dos períodos a la segunda de \$ 200, y un período a la de \$ 300. En este ejemplo, la última cuota no se capitaliza pues coincide con el momento final de la operación. El capital final de la renta es $V_F = 133{,}10 + 242 + 330 + 400 = \$\ 1.105{,}10$.



Renta cierta con cuotas vencidas

Figura 6.3

Aquellas rentas en las cuales interesa el valor del capital final, suelen llamarse también *imposiciones*. Cabe aclarar que el término imposición no hace referencia a un tipo de renta, sino al objetivo de la misma que es el de acumular una cierta cantidad de dinero final.

Los siguientes párrafos se refieren a anualidades sujetas a interés simple. Este tipo de rentas no es de uso frecuente, sin embargo, es útil entender el procedimiento para el cálculo del valor final de una anualidad.

6.3.1. Valor final de una anualidad a interés simple, con cuotas constantes y anticipadas

Asumamos que se realizarán n pagos o cuotas iguales de valor c, sobre los cuales se aplicará un interés simple de tasa periódica r. Sabiendo que los pagos comienzan en $t = 0$ y que se realizan siempre a comienzo de cada período, se desea saber cuál es el capital que se ha formado al finalizar el n-ésimo período a partir de las n cuotas.

Para esto se debe calcular el monto o capital final producido por cada una de estas cuotas en $t = n$. Así, el monto producido por la primera cuota c en $t = 0$ al cabo del n-ésimo período es $c\,(1 + r\,n)$, puesto que transcurren n unidades de tiempo. El producido por la segunda cuota en $t = 1$ es $c\,(1 + r\,(n - 1))$; y así sucesivamente, el monto producido por la i-ésima cuota en $t = i$ al cabo del n-ésimo período es:

$$c\,(1 + r\,(n - i))$$

La última cuota se paga en $t = n - 1$, que es el comienzo del último período, y el capital final producido por la misma es $c\,(1 + r)$.

Por lo tanto, el capital formado por la suma de estas cuotas en $t = n$ se obtiene sumando:

$$c\,(1+rn)) + c\,(1 + r\,(n - 1)) + \cdots + c\,(1 + r\,(n - i)) + \cdots + c\,(1 + r).$$

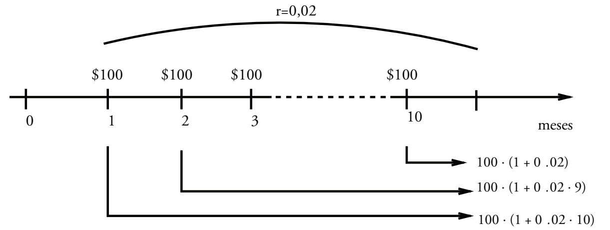
Invirtiendo el orden de la suma y escrita ésta en términos de sumatoria se obtiene:

$$V_F = \sum_{t=1}^{n} c(1 + r\,t) = c\,n + c\,r\,\frac{n(n+1)}{2} = c\left(n + r\,\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

El Sr. López ha depositado 10 cuotas mensuales de \$ 300 en una entidad que aplica un interés simple mensual de 2 %. Calcular el capital acumulado un mes después del pago de la última cuota.

Ejemplo 6.2

Solución: La Figura 6.4 representa la capitalización de las cuotas 1, 2 y 10 de esta renta.



Renta a interés simple, con cuotas anticipadas

Figura 6.4

Según la fórmula anterior, el valor final de esta renta al momento del último pago es:

$$V_F = c\left(n + r\,\frac{n(n+1)}{2}\right) = 300\left(10 + 0{,}02\,\frac{10\cdot 11}{2}\right) = 3.\,330,$$

es decir, de \$ 3.330.

6.3.2. Valor final de una anualidad a interés simple, con pagos constantes y vencidos

Este caso es análogo al anterior, a excepción que no se paga una cuota en $t = 0$ y sí se paga una cuota en $t = n$. De este modo, y siguiendo un análisis similar al anterior, el capital final formado por la suma de las cuotas en $t = n$ es:

$$\sum_{t=0}^{n-1} c(1 + r\,t) = c\,n + c\,r\,\frac{(n-1)n}{2} = c\left(n + r\,\frac{(n-1)n}{2}\right).$$

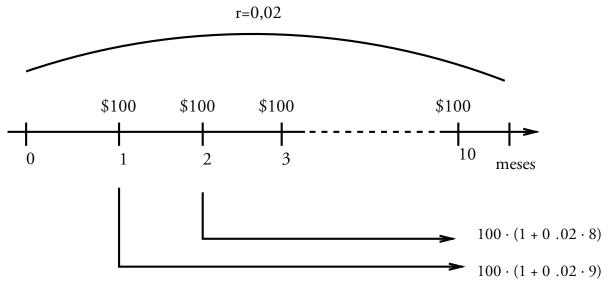
Notemos que las fórmulas obtenidas en los dos casos son muy similares, difiriendo en el factor $n + 1$ o $n - 1$.

El Sr. López ha depositado 10 cuotas mensuales de \$ 300 en una entidad que aplica un interés simple mensual de 2 %. Calcular el capital formado al momento de pagar la décima cuota.

Ejemplo 6.3

Solución: Este ejemplo es similar al Ejemplo 6.2, sólo que las cuotas se consideran anticipadas. La Figura 6.5 representa la capitalización de las cuotas 1 y 2 de esta renta.

Obsérvese que al ser las cuotas vencidas, la primera se capitaliza nueve períodos, la segunda ocho períodos, y así siguiendo hasta que la última no se capitaliza. Según la fórmula anterior, el valor final de esta renta al momento del último pago es:



Renta a interés simple, con cuotas vencidas

Figura 6.4

$$V_F = c\left(n + r\,\frac{(n-1)n}{2}\right) = 300\left(10 + 0{,}02\,\frac{9\cdot 10}{2}\right) = 3.270$$

es decir, $ 3.270.

Si cada cuota se capitaliza un mes más, por cada una de ellas se agregan 300 · 0,02 = 6 pesos. Dado que son 6 cuotas, se suman $ 60 pesos en total. En efecto, 3.270 + 60 = $ 3.330.

De aquí en adelante, se considerarán rentas sujetas a interés compuesto, y dentro de ellas se estudiarán los casos de cuotas constantes y de cuotas variables en progresión aritmética.

6.3.3. Valor final de una anualidad a interés compuesto, con pagos constantes y vencidos

Asumiendo una tasa de interés r y un tipo de interés compuesto, y cuotas constantes de valor c, se tiene que cada cuota capitaliza un cierto número de períodos, y arroja un determinado valor final en $t = n$.

Ejemplo 6.4 Una renta está conformada por 4 cuotas de $ 100, sujetas a una tasa del 3 %, y se desea conocer el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota.

Solución. El Cuadro 6.1 representa un ejemplo de una renta de 4 cuotas de $ 100, sujetas a una tasa del 3 %, y el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota. Esto es, el valor final de la renta es de $ 418,3627.

Cuota	Períodos	Valor final
1	3	$100 \cdot (1{,}03)^3 = 109{,}2727$
2	2	$100 \cdot (1{,}03)^2 = 106{,}09$
3	1	$100 \cdot (1{,}03) = 103$
4	ninguno	100
Valor final		$100 \cdot (1 + (1{,}03) + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^3 = 418{,}3627)$

Cuadro 6.1

Ahora bien, si la renta tiene muchas cuotas puede resultar tedioso calcular la capitalización de cada una de las cuotas, y luego sumar todas ellas. Siempre es conveniente contar con una fórmula cerrada, que en términos del valor de la cuota, la tasa de interés y el número de cuotas, permita obtener el valor final.

Si se considera una renta de n cuotas constantes de valor c, sujetas a una tasa de interés periódica r, ésta podría representarse como lo muestra el Cuadro 6.2.

La expresión para el valor final es una suma geométrica, con razón $(1 + r)$ y cuyo primer término es c. Por lo visto en el Capítulo 2, esta suma es igual a:

$$c + c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^{n-1} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

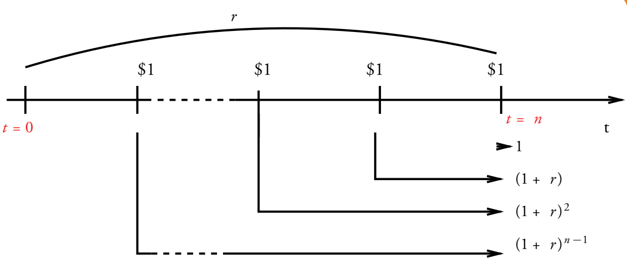
Cuota	Períodos	Valor final
1	$n-1$	$c \cdot (1+r)^{n-1}$
2	$n-2$	$c \cdot (1+r)^{n-2}$
3	$n-3$	$c \cdot (1+r)^{n-3}$
	$\vdots$	
$n-2$	2	$c \cdot (1+r)^2$
$n-1$	1	$c \cdot (1+r)$
n	ninguno	c
Valor final		$c + c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^{n-1}$

Cuadro 6.2: Valor final de una renta de n cuotas vencidas

De esta manera, se tiene que el valor final de la renta de cuotas vencidas es igual a c por una expresión que sólo depende del número de cuotas y de la tasa de interés. Esta expresión se la denota entonces $s_{\overline{n}|r}$:

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

El símbolo $s_{\overline{n}|r}$ es propio de la matemática financiera, e indica el valor final (s) de una renta de n cuotas periódicas vencidas iguales a 1, sujetas a una tasa de interés r. La Figura 6.6 ilustra esta situación:



Significado de $s_{\overline{n}|r}$

Figura 6.6

Si la renta es de cuotas iguales de valor c, entonces su valor final se obtiene multiplicando $s_{\overline{n}|r}$ por el valor de la cuota. De esta manera, el valor final de la renta es igual a c por una expresión que sólo depende del número de cuotas y de la tasa de interés constante que rige la operación.

Ejemplo 6.5

Calcular el valor final de una renta de \$ 2.000 anuales durante 5 años, asumiendo una tasa de interés anual del 9% y con cuotas vencidas.

Solución. En este caso se tiene que c = \$ 2.000, n = 5, r = 0,09 y las cuotas son vencidas. Por lo tanto el capital final será, en pesos, igual a:

$$\text{Capital final} = c \cdot s_{\overline{n}|r} = 2.000 \cdot s_{\overline{5}|0{,}09} = 2.000 \cdot \frac{1{,}09^5 - 1}{0{,}09} = \$\ 11.969{,}42$$

es decir que el capital acumulado es de \$ 11.969,42.

6.3.4. Valor final de una anualidad a interés compuesto, con pagos constantes y anticipados

En el caso de una renta con cuotas anticipadas, cada cuota se capitaliza un período más que en el caso de las rentas de cuotas vencidas. El Cuadro 6.3 ilustra el caso general.

La suma que representa el valor final es también una suma geométrica, de razón $(1 + r)$ cuyo primer término es $c\ (1 + r)$. Luego es igual a

$$c(1+r)+c(1+r)^2+\cdots+c(1+r)^n = c\cdot(1+r)\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r} = c\cdot(1+r)\cdot s_{\overline{n}|r}.$$

Ejemplo 6.6

Una persona deposita al comienzo de cada año la suma de \$ 2.000 en una cuenta que paga una tasa de interés anual del 9 %. ¿Cuál es el capital que habrá acumulado al comienzo del sexto año, antes de depositar la sexta cuota?

Solución. Esta renta puede interpretarse como una anualidad de cinco cuotas anticipadas, cada una de \$ 2.000. La tasa de interés es del 9%, y el número de cuotas es $n = 5$. El valor de esta renta al comienzo del sexto año es

$$V_F = 2.000\cdot 1{,}09\cdot s_{\overline{5}|0{,}09} = 13.046{,}66913$$

es decir, \$ 13.046,67 aproximadamente.

Cuota	Períodos	Valor final
1	$n-1$	$c\cdot(1+r)^n$
2	$n-2$	$c\cdot(1+r)^{n-1}$
3	$n-3$	$c\cdot(1+r)^{n-2}$
	$\vdots$	
$n-2$	2	$c\cdot(1+r)^3$
$n-1$	1	$c\cdot(1+r)^2$
n	ninguno	$c\cdot(1+r)$
Valor final		$c+c(1+r)+c(1+r)^2+\cdots+c(1+r)^n$

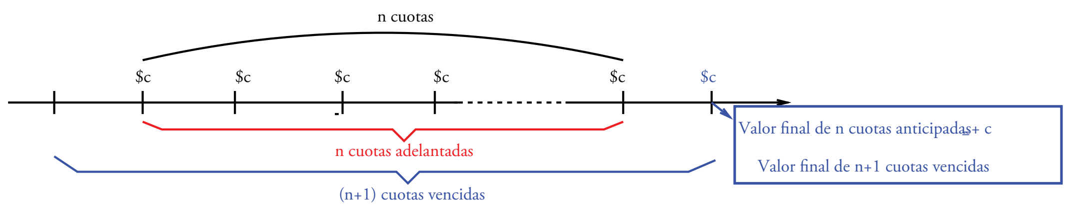
Cuadro 6.3: Valor final de una renta de n cuotas anticipadas

Este valor podría haberse obtenido también a partir del resultado del Ejemplo 6.6, capitalizando el capital final durante un período más. En efecto, 1.169 · 1,09 = \$ 13.046,67.

Una propiedad de $s_{\overline{n}|r}$ es la siguiente. Nótese que $(1 + r)\ s_{\overline{n}|r}$ es el valor final de una renta de cuotas anticipadas iguales a 1. Si a esta renta se le agrega una última cuota $c = 1$ en $t = n$, se convierte en una renta de $n + 1$ cuotas vencidas. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación:

$$\boxed{(r+1)\, s_{\overline{n}|r} = s_{\overline{n+1}|r} - 1}$$

La Figura 6.7 ilustra esta relación:



Relación entre rentas de n y $n + 1$ cuotas

Figura 6.7

6.3.5. Valor final de una anualidad con cuotas variables en progresión aritmética

En esta sección se estudiará el caso de aquellas imposiciones donde las cuotas son variables, en progresión aritmética, sujetas a interés compuesto con una tasa de interés r.

Puesto que las cuotas varían en progresión aritmética, pueden denotarse de la forma

$$c,\ c + h,\ c + 2 \cdot h,\ \ldots,\ c + (n - 1)h$$

donde c es el valor de la primera cuota, y h es el término de la progresión aritmética.

Esta sucesión de pagos puede verse como una superposición o simultaneidad de imposiciones con cuotas constantes. Por ejemplo. dada una imposición de cuatro cuotas mensuales, con $c = 100$ y $h = 15$, las sucesivas cuotas serán 100, 115, 130 y 145.

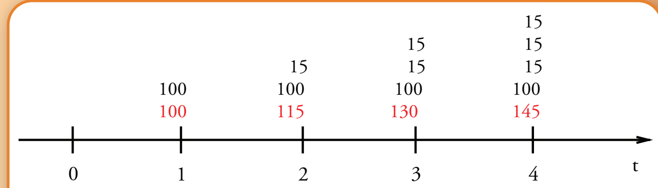
Esta imposición es equivalente a tener 4 imposiciones simultáneas, cada una de ellas de cuotas constantes, a saber:

- cuatro cuotas de \$ 100 a partir del primer mes,
- tres cuotas de \$ 15 a partir del segundo mes,
- dos cuotas de \$ 15 a partir del tercer mes, y
- una última cuota de \$ 15 el último mes.

	Mes 1	**Mes 2**	**Mes 3**	**Mes 4**
	100	100	100	100
		15	15	15
			15	15
				15
Total	**100**	**115**	**130**	**145**

La Figura 6.8 ilustra la situación en una línea de tiempo.

Por lo tanto, para calcular el capital final de esta imposición es suficiente con calcular el capital final de cada una de las imposiciones de cuotas constantes. Si se supone una tasa r a interés compuesto del 10% y cuotas vencidas, entonces se puede calcular el capital final como:



Renta en progresión aritmética

Figura 6.8

$$\text{Capital final} = 100\, s_{\overline{4}|0,1} + 15\, s_{\overline{3}|0,1} + 15\, s_{\overline{2}|0,1} + 15\, s_{\overline{1}|0,1}$$

Los sucesivos valores de $s_{\overline{n}|0,1}$ son

n	1	2	3	4
$s_{\overline{n}\|0,1}$	1	2,1	3,31	4,641

y el capital final es $100 \cdot 4{,}641 + 15 \cdot 3{,}31 + 15 \cdot 2{,}1 + 15 = \$\ 560{,}25$.

Para un caso general, se tiene una sucesión de cuotas $c, c + h, c + 2 \cdot h, \ldots, c + (n - 1)h$.

Asumiendo que h es positivo, esto puede pensarse como en el ejemplo precedente, como una superposición de imposiciones de:

- n pagos o cuotas iguales a c, a partir del primer período,
- $n - 1$ pagos iguales a h comenzando en el segundo período,
- $n - 2$ pagos iguales a h comenzando en el tercer período, y así siguiendo hasta
- 1 pago igual a h en el último período.

Si las cuotas son anticipadas, cada pago se realiza al comienzo del período y si son vencidas se realizan al final. Las fórmulas obtenidas en cada caso se analizan en los siguientes párrafos:

Cuotas vencidas. Cada una de las n imposiciones de cuotas constantes produce un valor final, acorde al número de cuotas y al valor de las mismas. Estos valores finales pueden verse en el Cuadro 6.4.

La suma que representa el valor final puede reescribirse, y para ello se reemplaza $s_{\overline{k}|r}$ por la expresión que lo representa, para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} V_F &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \sum_{k=1}^{n-1} h \cdot s_{\overline{j}|r} \\ &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \sum_{k=1}^{n-1} h \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r} \\ &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \frac{h}{r} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^k - (n-1) - 1 \right) \\ &= \boxed{c \cdot s_{\overline{n}|r} + h \cdot \frac{s_{\overline{n}|r} - n}{r}} \end{aligned}$$

Valor de la cuota	Número de cuotas	Valor final
c	n	$c \cdot s_{\overline{n}\|r}$
h	$n - 1$	$h \cdot s_{\overline{n-1}\|r}$
	$\vdots$	
h	3	$h \cdot s_{\overline{3}\|r}$
h	2	$h \cdot s_{\overline{2}\|r}$
h	1	$h \cdot s_{\overline{1}\|r} = h$
Valor final		$h + h\, s_{\overline{1}\|r} + h\, s_{\overline{2}\|r} + \cdots + h\, s_{\overline{n-1}\|r} + c\, s_{\overline{n}\|r}$

Cuadro 6.4: Valor final: renta en progresión aritmética con cuotas vencidas

En el penúltimo paso, la suma comienza desde $k = 0$ y aparece el término (-1). Esto mantiene el valor de la expresión, pues se suma y se resta 1, pero además permite encontrar una fórmula que sólo implica el cálculo de $s_{\overline{k}|r}$. Reemplazando los valores por los del ejemplo, se obtiene el mismo resultado que antes:

$$100 \cdot 4{,}641 + 15 \cdot \frac{4{,}641 - 4}{0{,}1} = 560{,}25$$

Si $h = 0$ se obtiene la fórmula correspondiente a cuotas constantes, como es esperable.

Si h es negativo la misma fórmula sigue siendo válida. El sistema de amortización alemán, que se verá en el Capítulo 7, es un ejemplo de imposición con cuotas variables, en progresión aritmética, donde el término h es negativo.

Cuotas anticipadas. En el caso que las cuotas sean anticipadas la fórmula es muy similar. Sólo se debe tener en cuenta que cada cuota se capitaliza un período más, por lo que toda la fórmula debe ser multiplicada por el factor de capitalización $(1 + r)$. Una cuota anticipada igual a c es equivalente a una vencida de valor $c \cdot (1 + r)$, por lo que el monto final es igual a:

$$c \cdot (1 + r) \cdot s_{\overline{n}|r} + h \cdot (1 + r) \cdot \frac{s_{\overline{n}|r} - n}{r}$$

Ejemplo 6.7

El Sr. González abrió en el banco una caja de ahorro y realizó los siguientes pagos mensuales: \$ 150, \$ 250, \$ 350, \$ 450, \$ 550. La T.N.A. fue del 18% con capitalización mensual. Un mes después del depósito de la última cuota retiró todo su dinero y necesitó \$ 215,23 para pagar el valor exacto de una computadora. ¿Cuál fue el precio de la computadora?

Solución. Este es el caso de una renta de cuotas anticipadas en progresión aritmética. El primer término de la progresión es 150, y el paso es 100. Por lo tanto, el valor final de la renta un mes después de la última cuota es

$$V_F = 150 \cdot 1{,}015 \cdot s_{\overline{5}|0{,}015} + 100 \cdot 1{,}015 \cdot \frac{s_{\overline{5}|0{,}015} - 5}{0{,}015} = 1.814{,}77222$$

es decir, aproximadamente \$ 1.814,77. Puesto que tuvo que agregar \$ 215,23 para pagar la computadora, el valor de la misma fue de 1.814, 77 + 215,23 = \$ 2. 030 pesos.

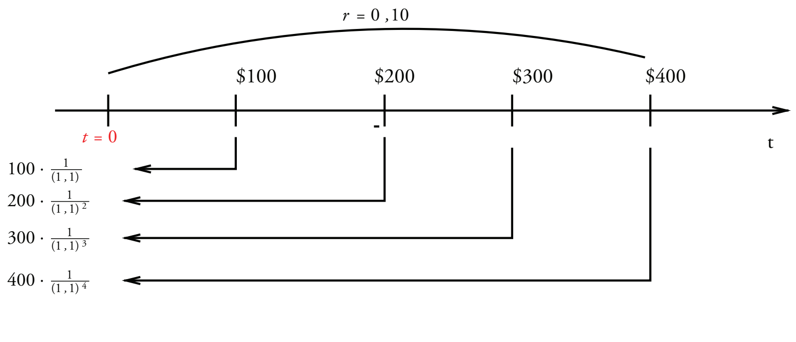
6.4. Actualización de una renta

Si un individuo solicita un préstamo de mucho valor, supongamos equivalente a veinte sueldos de los que cobra mensualmente, es muy probable que no pueda devolver este dinero de una sola vez, menos aún teniendo en cuenta el interés. Por ello es frecuente implementar la devolución de un préstamo mediante un plan de pago en cuotas. El valor de estas cuotas debe ser calculado de tal manera que la suma de sus valores actuales sea equivalente al préstamo. Para esto se asume una determinada tasa de interés. Este es un claro ejemplo de la necesidad de saber calcular el valor actual de una renta.

La Figura 6.9 ilustra el cálculo del valor actual de una renta igual a la considerada en la Figura 6.3. El valor actual de esta renta es

$$V_A = 100\,\frac{1}{1{,}1} + 200\,\frac{1}{(1{,}1)^2} + 300\,\frac{1}{(1{,}1)^3} + 400\,\frac{1}{(1{,}1)^4} = 754{,}7981695$$

es decir, \$ 754,80, aproximadamente.



Renta cierta con cuotas vencidas

Figura 6.9

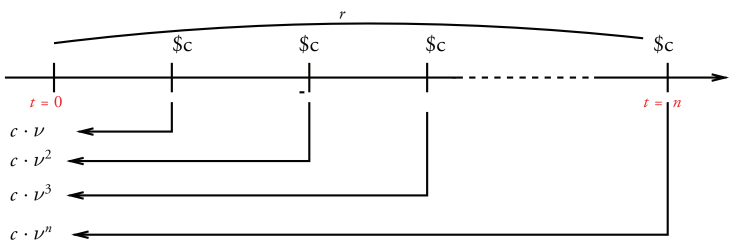
En esta sección veremos cómo calcular el valor actual o valor presente de una sucesión de pagos constantes, sujetos a una tasa de interés periódica r. Es decir, sabiendo que se realizará una sucesión de pagos periódicos, queremos averiguar la suma del valor actual de cada una de dichas cuotas.

Naturalmente, si sabemos cómo calcular el valor final de la renta, entonces el valor actual se obtiene actualizando este valor final tantos períodos como tenga la renta. De todos modos, analizaremos algunos casos a fin de introducir cierta notación muy frecuente en la literatura de la matemática financiera.

6.4.1. Valor actual de una renta con cuotas constantes vencidas

Considérese el caso en que se realizan n pagos constantes y vencidos durante n períodos, sujetos a una tasa de interés periódica r. Se indicará con $t = 0$ el comienzo de la operación, por lo que los pagos se realizan en los momentos $t = 1, 2, \ldots, n$. Asimismo, se denotará ν al factor de actualización en un período, esto es,

$$\nu = \frac{1}{1+r}$$



Actualización de una renta con cuotas vencidas

Figura 6.10

Así, si c es la cuota pagada en $t = j$, entonces $c \cdot \nu^j$ es su valor presente en $t = 0$. La Figura 6.10 ilustra la situación.

Luego, el valor actual V_A de una renta de n cuotas constantes vencidas e iguales a c es:

$$V_A = c \cdot \nu + c \cdot \nu^2 + \cdots + c \cdot \nu^n$$

Así, V_A es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $c \cdot \nu$ y su razón es ν. Por lo visto en el Capítulo 2, se tiene que:

$$V_A = c \cdot \nu \cdot \frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = c \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot 1 - \nu^n$$

Obsérvese que $\frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$. De esta manera, el numerador y el denominador de la fracción resultan positivos, puesto que $\nu < 1$.

Usando que $\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{1}{r}$, se obtiene la siguiente expresión para V_A:

$$V_A = c \cdot \frac{1-\nu^n}{r}$$

El valor actual de la renta es igual al producto de c por una expresión que sólo depende del número de cuotas n y de la tasa de interés r. Esta expresión se denotará $a_{\overline{n}|r}$.

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1-\nu^n}{r}$$

Así, dada una renta de n cuotas constantes e iguales a c, pagaderas en $t = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que $c \cdot a_{\overline{n}|r}$ es el valor actual de la renta calculado en $t = 0$, y $c \cdot s_{\overline{n}|r}$ es el valor final de la renta en $t = n$. Por lo tanto, se tienen las siguientes relaciones:

$$a_{\overline{n}|r} = \nu^n \, s_{\overline{n}|r}, \qquad \text{y} \qquad a_{\overline{n}|r}\,(1+r)^n = s_{\overline{n}|r}$$

Otra relación entre la capitalización y el valor presente se da en la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|r}} + r = \frac{r - r\,u^n - r}{u^n - 1} = \frac{r\,u^n}{u^n - 1} = \frac{r}{1-\nu^n} = \frac{1}{a_{\overline{n}|r}}$$

Ejemplo 6.8

Calcular el valor actual de una anualidad que consiste en cuotas mensuales vencidas de $ 285 durante 4 años, siendo la T.N.A. del 15% con capitalización mensual.

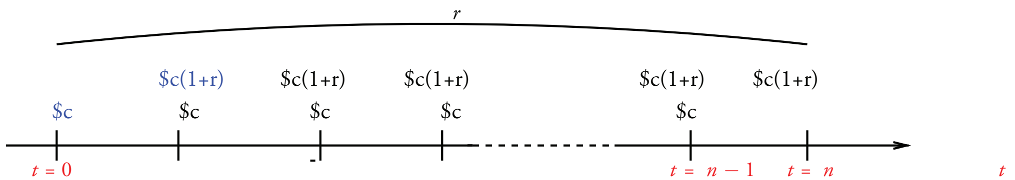
Solución. La tasa mensual aplicada es $r = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125$, y el número de cuotas es $n = 4 \cdot 12 = 48$. El valor actual V_A de la renta es

$$V_A = 285 \cdot a_{\overline{48}|0{,}0125} = 285 \cdot 35{,}9314809 = 10.240{,}47206,$$

es decir de $ 10.240,47 aproximadamente.

6.4.2. Valor actual de una renta con cuotas anticipadas

Una cuota de valor c pagada en el momento $t = j$ tendrá un valor $c\,(1 + r)$ un período más tarde, es decir, en $t = j + 1$. Por lo tanto, el valor actual de una anualidad de cuotas anticipadas iguales a c es igual al valor actual de una anualidad de cuotas vencidas iguales a $c\,(1 + r)$ (Ver Figura 6.11). Así, el valor actual V_A de una renta de cuotas constantes anticipadas, iguales a c, está dado por:



Cuotas anticipadas de valor c o cuotas vencidas de valor $c \cdot (1 + r)$

Figura 6.11

$$V_A = c \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r}$$

Ejemplo 6.9 ¿Cuál es el valor actual de 15 pagos anuales y anticipados de \$ 2.000 cada uno, considerando una tasa del 5% anual?

Solución: Simplemente aplicando las fórmulas, el valor actual es igual, en pesos, a:

$$V_A = 2.000 \cdot (1{,}05) \cdot a_{\overline{15}|0{,}05} = \$\ 21.797{,}28188$$

es decir, aproximadamente \$ 21.797,28.

6.5. Cálculo del número de cuotas y de la tasa de interés de una anualidad

6.5.1. Número de cuotas

En algunas entidades financieras, el pago de una deuda en cuotas se establece de acuerdo a los ingresos mensuales o periódicos del deudor. Por ejemplo, en base al sueldo que éste cobra. Esto es así porque la entidad necesita garantizar mínimamente que el deudor podrá afrontar el pago de la deuda. Surge entonces el problema de calcular cuántas cuotas de determinado valor deberían pagarse para que el valor actual, o el valor final, de la anualidad sea un cierto monto.

Ejemplo 6.10 ¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$ 3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$ 100.000 considerando una tasa del 2% anual?

En este problema se pide establecer el número de cuotas a pagar, sabiendo el monto de cada una y el valor actual de la renta. Analicemos este problema en un caso general, siendo la renta de n cuotas constantes y vencidas iguales a c, sujetas a una tasa de interés periódica r.

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot \frac{1-\nu^n}{r}$. Despejando ν^n resulta

$$\nu^n = \frac{c - V \cdot r}{c}.$$

Para obtener el valor de n será necesario aplicar la función logaritmo en ambos miembros de la ecuación, y así se concluye que

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot r)}{\log(1+r)}}$$

Así, esta fórmula permite calcular de manera aproximada, el número de cuotas iguales a c que deberán pagarse para que su valor actual sea V, asumiendo una tasa de interés compuesto r. Este número es aproximado, ya que al calcular el logaritmo es muy posible que el resultado no sea un número entero.

Solución del ejemplo 6.10. Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3.000) - \log(3.000 - 2.000)}{\log(1{,}02)} = \frac{\log(3)}{\log(1{,}02)} \sim 55,48.$$

Este resultado no es un número entero, y se encuentra entre los enteros 55 y 56. Si se pagan 55 cuotas, no se alcanza el valor actual deseado, y si se pagan 56 se superará el mismo.

Supongamos que se decide cumplir con una anualidad de 55 cuotas iguales. Entonces el valor de la cuota debería ser $c = \frac{100.000}{a_{\overline{55}|0,02}} = 3.014{,}54$, un valor un poco mayor a \$ 3. 000.

Si en cambio la anualidad es de 56 cuotas iguales, entonces la cuota constante deberá ser de $\frac{100.000}{a_{\overline{56}|0.02}} = 2.984{,}66$, un poco menos de \$ 3.000.

Ejemplo 6.11

Mario compra un coche usado, y paga \$ 1.500 de contado al momento de la compra más \$ 182,50 mensuales durante 3 años. ¿Cuál es el precio de contado del automóvil, si la tasa de interés sobre el préstamo es del 18% nominal anual?

Solución. El precio de contado del automóvil se calcula como el monto pagado al momento de la compra más el valor actual de la renta por la cual se *amortiza* el préstamo. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}18/12 = 1{,}5\%$. Por lo tanto, el precio contado del automóvil se calcula como:

$$1.500 + 182{,}50\, a_{\overline{360}|0{,}015} = 1.500 + \frac{1 - 1{,}015^{-36}}{0{,}015} = \$\ 1.500 + \$\ 5.048{,}07 = \$\ 6.048{,}07$$

6.5.2. Tasa de interés

Si una persona deposita mensualmente \$ 300 en una cuenta, y al cabo de 4 años tiene un capital de \$ 15.000, ¿qué rendimiento tuvo su inversión? Es decir, ¿cuál fue la tasa de interés sobre dichos depósitos?

Esta es una situación en la que la incógnita es la tasa de interés, y se tienen como dato el valor final de la anualidad, el número de cuotas y el valor de las mismas. En principio, puede ocurrir que la tasa de interés haya variado a lo largo del tiempo, pero al menos se intenta conocer el valor promedio de la misma.

Si se considera el caso general de una renta de cuotas vencidas, constantes, siendo n el número de cuotas y c el valor de las mismas, se tiene la ecuación:

$$V_F = c \cdot s_{\overline{n}|r} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

que con los datos del ejemplo es:

$$15.000 = 300 \cdot \frac{(1+r)^{48} - 1}{r}$$

Este tipo de ecuaciones tiene el inconveniente de que no es posible despejar explícitamente el valor de r, a menos que n = 2 en cuyo caso se trata de una ecuación de segundo grado. ¿Cómo obtener el valor de r ? Existen varias posibilidades: una de ellas es aproximar calculando qué valor final se obtiene eligiendo algunos valores de r. Por ejemplo:

- para r = 5%, arroja un valor final de \$ 56.407,62, lo que indica que la tasa debe ser mucho menor;
- para r = 0,5% el valor final resulta ser \$ 16.229,35, lo que se aproxima bastante más al resultado;
- para r = 0,17% se obtiene \$ 14.990,67 y
- para r = 0,18% el valor final es de \$ 15.026,28.

Así que puede estimarse una tasa de interés entre el 0,17% y el 0,18% mensual.

Otra posibilidad es la utilización de tablas que contienen los valores de $s_{\overline{n}|r}$ y de $a_{\overline{n}|r}$, según si el dato es el valor final V_F o el valor actual V_A, respectivamente, de una renta de cuotas vencidas. Usando que

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{V_F}{c} \qquad y \qquad a_{\overline{n}|r} = \frac{V_A}{c}$$

y conociendo el valor de n, esto permite hallar un valor aproximado de r. El Cuadro 6.5 muestra algunos valores de $s_{\overline{n}|r}$ tabulados, y se ha resaltado con color los valores cercanos a 50 = $\frac{15.000}{300}$, que corresponden a los datos del problema y se ubican en la fila correspondiente a n = 48.

n	r	0,001	0,0015	0,002	0,0025	0,003	0,0035
1		1	1	1	1	1	1
2		2,001	2,0015 2,002	2,0025 2,003	2,0035		
3		3,003001	3,00450225	3,006004	3,00750625	3,009009	3,01051225
4		4,006004001	4,009009003	4,012016008	4,015025016	4,018036027	4,021049043
5		5,010010005	5,015022517	5,02004004	5,025062578	5,030090135	5,035122715
6		6,015020015	6,022545051	6,03008012	6,037625235	6,045180405	6,052745644
7		7,021035035	7,031578868	7,04214028	7,052719298	7,063315947	7,073930254
8		8,02805607	8,042126237	8,056224561	8,070351096	8,084505895	8,09868901
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
48		49,1454923	49,73158147	50,32676843	50,93120842	51,54505939	52,16848215
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 6.5: Tabla de $s_{\overline{n}|r}$

En los Apéndices de este libro se ha explicado cómo obtener estas tablas usando una planilla de cálculo.

6.6. Valor actual de rentas con cuotas en progresión aritmética

Ya se ha analizado como obtener el valor final de una renta en progresión aritmética. Si las cuotas son de la forma

$$c, c + h, c + 2 \cdot h, \cdots, c + (n - 1) \cdot h$$

se puede interpretar a la anualidad como la suma de n anualidades: una de n cuotas iguales a c, y $n - 1$ rentas de cuotas iguales a h cuyo número de cuotas varía de 1 a $n - 1$.

La Figura 6.12 ilustra el caso de una renta en progresión aritmética, con cuotas vencidas.

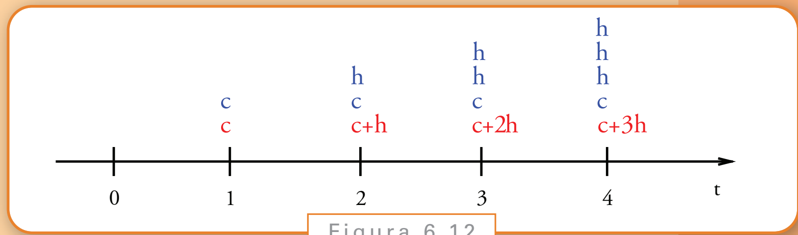


Figura 6.12

Ahora bien, las $n - 1$ rentas con cuotas iguales a h comienzan en $t = 2$ y no en $t = 1$, es decir, en el primer período no se aporta ninguna cuota. Lo mismo ocurre con todas las demás rentas de cuotas constantes iguales a h, que dejan 2, 3 y hasta $n - 1$ períodos, al comienzo sin aporte, para más adelante. Este tipo de rentas o anualidades se llaman *diferidas*.

En particular se tiene que $h \cdot a_{\overline{n-1}|r}$ es el valor actual de la renta con $n - 1$ cuotas calculado en $t = 1$, y por lo tanto debe actualizarse un período si se desea obtener el valor actual en $t = 0$. Las demás rentas que están diferidas 2, 3, y hasta $n - 1$ períodos con respecto a la de cuotas de valor c, deberán actualizarse esa cantidad de períodos. El Cuadro 6.6 muestra la situación para una renta de cuatro cuotas vencidas, en progresión aritmética.

Valor actual en $t = 0$	Rentas diferidas			
$c \cdot a_{\overline{4}|r}$	c	c	c	c
$\nu \cdot h \cdot a_{\overline{3}|r}$		h	h	h
$\nu^2 \cdot h \cdot a_{\overline{2}|r}$			h	h
$\nu^3 \cdot h \cdot a_{\overline{1}|r}$				h
	Renta en progresión aritmética			
$c \cdot a_{\overline{4}|r} + \nu \cdot h \cdot a_{\overline{3}|r} + \nu^2 \cdot h \cdot a_{\overline{2}|r} + \nu^3 \cdot h \cdot a_{\overline{1}|r}$	c	$c + h$	$c + 2h$	$c + 3h$

Cuadro 6.6. Valor actual de una renta en progresión aritmética

Para calcular el valor actual de una renta de n cuotas vencidas, en progresión aritmética, con término inicial n y paso h, debe obtenerse la suma de n términos:

$$V_A = c \cdot a_{\overline{n}|r} + (h \cdot \nu) \cdot a_{\overline{n-1}|r} + (h \cdot \nu^2) a_{\overline{n-2}|r} + \cdots + (h \cdot \nu^{n-2}) \cdot a_{\overline{1}|r}$$

Utilizando que $a_{\overline{k}|r} = \frac{1-\nu^k}{r}$, sacando factor común h y denominar común r en los últimos términos, se obtiene:

$$V_A = c \cdot a_{\overline{n}|r} + h \cdot \frac{(\nu(1-\nu^{n-1}) + \nu^2(1-\nu^{n-1}) + \cdots + \nu^{n-2}(1-\nu^2) + \nu^{n-1}(1-\nu))}{r}$$

Operando algebraicamente:

$$\begin{aligned} V_A &= c \cdot a_{\overline{n}|r} + h\frac{(\nu + \cdots + \nu^{n-1}) - (n-1)\nu^n}{r} \\ &= c \cdot a_{\overline{n}|r} + h\frac{\nu \cdot (1 + \nu + \cdots \nu^{n-1}) - n\,\nu^n}{r} \\ &= \boxed{c \cdot a_{\overline{n}|r} + h\frac{a_{\overline{n}|r} - n\nu^n}{r}} \end{aligned}$$

Si las cuotas son anticipadas, entonces cada cuota anticipada de valor c es equivalente a una cuota vencida de valor $c \cdot (1 + r)$. El valor actual de la renta se obtiene de la fórmula anterior teniendo en cuenta que la primera cuota es $c \cdot (1 + r)$ y el paso en la progresión aritmética es $h \cdot (1 + r)$ en lugar de h. El valor actual es entonces

$$\text{Valor actual} = \boxed{c \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r} + h \cdot (1+r) \cdot \frac{a_{\overline{n}|r} - n\nu^n}{r}}$$

Ejemplo 6.12

Una persona debe pagar un crédito en un plan de pagos de 12 cuotas cada 30 días, con una T.N.A. del 12% con capitalización mensual. La primera cuota es de \$ 1.000, y cada una de las siguientes es de \$ 50 menos que la anterior. Si comienza a pagarlas el 30 mayo, ¿cuál es el valor actual de esta anualidad al (a) 30 de abril, (b) 30 de mayo?

Solución. Se trata de calcular el valor actual de una renta en progresión aritmética, siendo 1.000 el primer término de la progresión y (-50) el paso de un término al siguiente. Esto es, $c = 1.000$ y $h = -50$. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}01$ y el número de cuotas es $n = 12$.

Para resolver (a), se debe calcular el valor actual de la renta considerando cuotas vencidas:

$$V_1 = 1.000 \cdot a_{\overline{12}|0{,}01} - 50\frac{a_{\overline{12}|0{,}01} - 12\nu^{12}}{0{,}01} = 8.226{,}64366$$

es decir que el valor actual al 30 de abril es de \$ 8.226,64.

Para (b), las cuotas se consideran anticipadas, por lo que el valor anterior se multiplica por 1,01, es decir que se capitaliza 30 días:

$$V_2 = 8226{,}64366 \cdot 1{,}1 = 8.308{,}910097$$

por lo que el valor presente al 30 de mayo es de \$ 8.308,91.

6.7. Rentas perpetuas

Una renta o anualidad perpetua es una renta cuyos pagos comienzan en una determinada fecha, pero nunca culminan. En la práctica no existen este tipo de rentas, pero sí hay anualidades que se desconoce hasta cuando se extenderán.

Ejemplo 6.13

La Fundación B.E.C.A. hará una inversión de capitales a una tasa del 12% anual, con el objetivo de utilizar estos fondos para pagar becas que cubran hasta \$ 20.000 anuales durante los años siguientes. ¿Cuál deberá ser el capital invertido inicialmente?

El Ejemplo 6.13 muestra una situación en la que interesa calcular el valor actual de una anualidad perpetua: aunque en la práctica no se pagarán becas eternamente, en principio esa es la intención.

Si se tratara de una renta cierta de n cuotas vencidas, el valor actual se calcularía como:

$$V_A = 20.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}12^n}}{0{,}12}$$

Ahora bien, el número $\frac{1}{1{,}12^n}$ es cada vez más próximo a 0 cuanto más grande sea el número n. Esto se debe a que 1,12 es un número mayor que 1, y por lo tanto sus sucesivas potencias son cada vez más grandes. En matemática se dice que el límite de $\frac{1}{1{,}12^n}$ cuando n tiende a infinito es 0 y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1{,}12^n} = 0$$

Esto también es cierto si se calcula $\frac{1}{(1+r)^n}$, ya que al ser r una tasa de interés (positiva), se cumple que $1 + r$ es mayor que 1. Por lo tanto, la expresión $1 - \frac{1}{1{,}12^n}$ como así también cualquiera de la forma $1 - \frac{1}{(1+r)^n}$, $n > 1$, puede considerarse igual a 1 si n es suficientemente grande. En particular, para las rentas perpetuas.

Así es que para una renta perpetua de cuotas vencidas y constantes e iguales a c, el valor actual está dado por la fórmula

$$\boxed{V_A = \frac{c}{r}}$$

Para el Ejemplo 6.13, el depósito que deberá hacer la Empresa B.E.C.A. es de $\frac{20.000}{0{,}12}$ = \$ 166.666,67 inciales.

6.8. Otras anualidades

En esta sección se resolverán algunos ejemplos de anualidades que no están representadas en las secciones anteriores. Si bien esto no abarcará la totalidad de los casos, sí se puede decir que cubre los más frecuentes. Las situaciones que se analizarán son las siguientes:

1. rentas con tasa de interés variable,
2. rentas con cuotas no equiespaciadas en el tiempo.

6.8.1. Rentas con tasas de interés variables

Esto significa que no hay una misma tasa de interés que gobierna la operación financiera. Por ello, al calcular el valor actual y el valor final debe tenerse cuidado al considerar cuál es la tasa de interés actuante.

Ejemplo 6.14 Se tiene una renta de 12 cuotas bimestrales vencidas de $ 200. El primer año se aplica una tasa de interés del 2% mensual, y el segundo año del 2,5% bimestral. Calcular el valor actual y el valor final de la misma.

Solución: En este ejemplo se tiene una anualidad de 12 cuotas bimestrales. La tasa bimestral correspondiente al primer año es la equivalente al 2% mensual, es decir

$$r_1 = 1{,}02^2 - 1 = 0{,}0404$$

La Figura 6.12 ilustra la situación. Para calcular el valor final V_F al momento de pagar la cuota 12 conviene seguir los siguientes pasos:

- calcular el valor final de las primeras 6 cuotas al momento de pagar la cuota 6, considerando la tasa r_1:

$$V_1 = 200 \cdot s_{\overline{6}|0{,}0404} = \$\ 1.327{,}93$$

- capitalizar V_1 al momento de la cuota 12, es decir *seis* períodos, con la tasa $r_2 = 0{,}025$:

$$V_1 \cdot 1.025^6 = \$\ 1.540$$

- calcular el valor final de las últimas 6 cuotas, con la tasa r_2:

$$V_2 = 200 \cdot s_{\overline{6}|0{,}025} = \$\ 1.277,55$$

- sumar ambos valores finales para obtener el valor final de la renta total:

$$\boldsymbol{V_1 \cdot 1.025^6 + V_2 = 1.540 + 1.277{,}55 = \$\ 2.817{,}54}$$

Como puede verse en este ejemplo, no hay dificultades matemáticas para calcular el valor final, ni tampoco para el valor presente, si la tasa de interés es variable. Sólo debe tenerse en cuenta cuál es la tasa de interés que gobierna cada período.

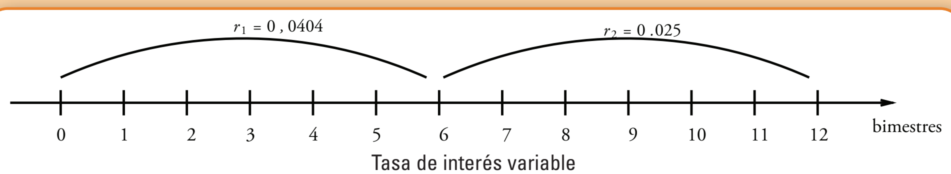


Figura 6.13

6.8.2. Rentas con cuotas no equiespaciadas

Este caso tampoco ofrece mayores dificultades, sólo que hay que adaptar cada período a la tasa de interés actuante. Por ejemplo, supóngase que un individuo deposita $ 100 en una cuenta los días 15 de cada mes del año, y la tasa de interés es del 2% mensual. Dado que se ha convenido que un mes financiero equivale a 30 días, pero no todos los meses del año son de 30 días, se tiene un caso de cuotas no equiespaciadas. En la Figura 6.14 se representa una parte de la situación. Puede verse que algunos períodos son de 28 días, otros de 30, y otros de 31 días. Así, para calcular la capitalización de una cuota en un período de 30 días se podrá utilizar la tasa del 2% mensual, pero si el período es de 31 días deberá seguirse una de las siguientes opciones:

a) utilizar una tasa cada 31 días equivalente al 2% mensual, $r = (1{,}02)^{31/30} - 1$

b) expresar 31 días en términos de un mes financiero: $31 = \frac{31}{30}$ meses financieros.

Las dos opciones son equivalentes, y conducen a los mismos cálculos. Para calcular el valor final de la renta se deberá calcular el valor final de cada una de las cuotas. Así por ejemplo, el valor final de la cuota de $ 500 al 15 de mayo se deberá calcular como:

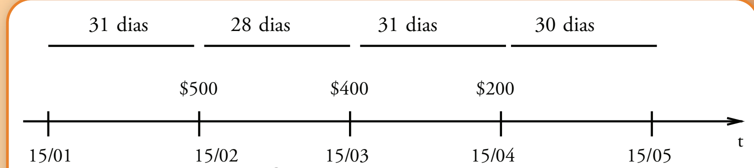


Figura 6.14

$$500 \cdot (1{,}02)^{28/30} \cdot (1{,}02)^{31/30} \cdot (1{,}02)$$

y el valor actual al 15 de enero de la cuota de $ 200 será el resultado de:

$$200 \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{31/30}} \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{28/30}} \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{31/30}}$$

6.9. Ejercicios

Calcular el valor acumulado de una renta de cuotas vencidas de $ 3.000 anuales, durante 7 años, sujeta a una tasa de interés anual del a) 8 %, b) 10,75 %, c) 17,29 %. | **Ejercicio 6.1**

Ejercicio 6.2

Juan paga una deuda de $ 250 cada 30 días. Si no paga durante cuatro meses seguidos, ¿qué pago necesitará hacer al siguiente mes para actualizar su deuda, si la T.N.A. es del 14,4% con capitalización mensual?

Ejercicio 6.3

El Sr. Martínez quiere reunir $ 10.000 al final de 10 años. Comienza haciendo depósitos trimestrales en su caja de ahorros que paga una TNA del 8% con capitalización trimestral. ¿Cuál es el monto de estas cuotas?

Si al cabo de 4 años el banco cambia la tasa al 6% nominal anual, ¿cuál deberá ser el monto de las cuotas para alcanzar los $ 10.000 al final del décimo año?

Ejercicio 6.4

Una renta de $ 5.000 al año arroja un valor actual de $ 62.311,05171 si las cuotas vencen a fin de año, y de $ 65.425,50430 si éstas vencen a principio de año. Calcular la duración de la renta y la tasa de interés anual.

Ejercicio 6.5

Calcular el capital acumulado en un semestre si se depositan $ 1.000 mensuales en cuotas vencidas, y si la T.N.A. es del 36% con capitalización mensual.

Ejercicio 6.6

La Sra. García ha comprado un electrodoméstico con el siguiente plan de pagos: un pago inicial de $ 1.400, y 7 pagos mensuales vencidos por $ 160 más un último pago al final del octavo mes por $ 230. Calcular el valor del electrodoméstico asumiendo una tasa de interés del 27% anual con capitalización mensual.

Ejercicio 6.7

Una persona recibe tres ofertas para la compra de un automóvil:

(a) $ 40.000 de contado;

(b) $ 19.000 de contado y $ 5.000 semestrales, durante 2 años y medio;

(c) $ 2.000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de $ 25.000, al finalizar el cuarto año.

¿Qué oferta es la más conveniente, si la T.N.A. es del 8% anual?

Ejercicio 6.8

Se desea reemplazar una renta de cuotas anuales vencidas de $ 8.000, por una equivalente en pagos mensuales anticipados, siendo la tasa de interés del 9% con capitalización mensual. Calcular el valor de la cuota mensual.

Ejercicio 6.9

Un agricultor plantó olivos que empezarán a producir dentro de 5 años. La producción anual se estima en $ 20.000 y ese rendimiento se mantendrá por espacio de 25 años. Calcular, asumiendo una TEA del 6 %, el valor presente de la producción.