Capítulo 8

Flujos de caja

8.1. El concepto de valor actual

¿Cómo se hace para comparar una cantidad de dinero obtenida en este momento con otra que recibiremos en el futuro? Si la actual es mayor que la futura, obviamente preferiremos la primera, ya que podríamos utilizar la diferencia en cualquier momento y reservar el resto para hacer con ello lo mismo que haríamos con la cantidad que íbamos a recibir en el futuro.

La única contra que tiene una cantidad mayor en el presente es que puede ser perdida más fácilmente que la futura, por ejemplo, alguien nos dice que prefiere que le paguemos la semana que viene que es cuando necesitará realmente el dinero, y no ahora que se expone a gastarlo innecesariamente o ser robado. Sin embargo, estos casos son relativamente poco frecuentes, por lo cual, no serán tomados en cuenta.

Si la cantidad futura es mayor que la actual, la decisión no será tan sencilla. Evaluar qué podremos hacer con esa suma en el futuro dependerá de la evolución de los precios. Esto permitirá comprobar hasta qué punto es válido el refrán: "más vale pájaro en mano que cien volando".

Una forma sencilla de hacer una comparación entre una cantidad C_0 hoy y otra C_1 dentro de seis meses consiste en pensar que pedimos un préstamo a un banco por una cantidad que se pueda pagar exactamente con C_1 dentro de seis meses. Si la tasa de interés del préstamo bancario es de r, la cantidad que podemos recibir ahora es de $C_1(1+r)^{-1}$ y esta se puede comparar directamente con C_0.

Otra forma de hacer la comparación es pensar que con $\$C_0$ podríamos buscar un banco y hacer un plazo fijo a seis meses a una tasa de interés r' en el período. De esta forma el banco nos devolverá dentro de seis meses una cantidad $C_0(1 + r')$ y podemos comparar esta suma directamente con C_1.

Notemos que ambas formas coinciden sólo si $r = r'$. En general se tiene que $r > r'$, por lo que será importante, al establecer comparaciones, tener en claro cuál es la tasa de interés que se tomará como referente.

Definición 8.1

Un capital C_0 disponible hoy y otro capital C_1 que estará disponible al finalizar un período, son equivalentes si $C_0(1+r) = C_1$ donde r es la tasa de interés del período

Ejemplo 8.1 La pregunta más usual que nos planteamos es ¿conviene pagar \$ 1.000 ahora o \$ 1.100 dentro de seis meses? Supongamos que la tasa de interés bancaria para préstamos es de 24% anual y la tasa para depósitos a plazo fijo es de 12% anual.

Para responder esta pregunta es necesario considerar dos casos.

1. Dispondremos de \$ 1.100 dentro de seis meses. Entonces, nos podemos plantear, en lugar de esperar seis meses para recibir los \$ 1.100 y pagar nuestra deuda, tomar un préstamo por \$ 1.000 para pagar la deuda ahora y dentro de seis meses pagar el préstamo. Según lo visto \$ 1.100 dentro de seis meses equivalen a $\$\ 1.100(1+0{,}12)^{-1}$ ahora lo que es menor que \$ 1.000. Por lo tanto no conviene tomar el préstamo.

2. Tenemos los \$ 1.000. En este caso la alternativa que se nos presenta es usarlos para hacer el pago ahora o hacer un depósito a plazo fijo por seis meses y pagar con lo que se obtenga. Si hacemos esto último, \$ 1.000 ahora equivalen a \$ 1.000(1+0,06) dentro de seis meses, que es menor que \$ 1.100. Por lo tanto, nos conviene usar nuestro dinero para pagar ahora.

Con esta idea de equivalencia entre capitales podemos definir la noción de **valor presente**.

Definición 8.2 El valor presente o actual de un capital C que estará disponible dentro de n períodos o estuvo disponible hace m períodos, en ambos casos con una tasa de interés r por período, es de $V_A = C(1 + r)^{-n}$ en el primer caso y $V_A = C(1 + r)^m$ en el segundo.

Si $r > 0$, en el primer caso el valor actual será menor que C ya que lo estamos multiplicando por un número menor que 1 (el inverso de $(1 + r)^n$). En cambio, en el segundo caso será mayor que C ya que multiplicamos por un número mayor que 1.

En los casos que hay que actualizar un valor pasado, se suele utilizar una tasa de interés que refleje la inflación del tiempo transcurrido.

Ejemplo 8.2 Si la inflación de 2005, 2006 y 2007 fue de 9%, 15% y 20% respectivamente

¿A cuánto equivalen \$ 1.000 del 1° de enero de 2005, al 1° de enero de 2008?

Podemos actualizar año a año para obtener $V_A = (1 + 0{,}20)(1 + 0{,}15)(1 + 0{,}09)1.000 = \$\ 1.504{,}2$. Esto equivale a una actualización en todo el período con una tasa del 50,42%.

También se pueden actualizar pagos en varios períodos a la vez.

Ejemplo 8.3 Si la tasa de interés bancaria para depósitos a plazo fijo es de 12% anual, ¿cuál es el valor actual de cuatro pagos trimestrales de \$ 1.000.

La tasa trimestral es del 3%. Por lo tanto el primer pago, que se realiza al finalizar el primer trimestre, será equivalente a \$ $1.000(1{+}0{,}03)^{-1}$ al comienzo del trimestre, el segundo a $1.000(1{+}0{,}03)^{-2}$ y así podemos calcular el valor actual como:

$$\begin{aligned} V_A &= 1.000(1+0{,}03)^{-1} + 1.000(1+0{,}03)^{-2} + 1.000(1+0{,}03)^{-3} + 1.000(1+0{,}03)^{-4} \\ &= 1.000(1+0{,}03)^{-1}(1 + (1+0{,}03)^{-1} + (1+0{,}03)^{-2} + (1+0{,}03)^{-3}) \\ &= 1.000(1+0{,}03)^{-1}\frac{1-(1+0{,}03)^{-4}}{1-(1+0{,}03)^{-1}} \\ &= \$\ 3.619{,}69 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.4

Si en el ejemplo anterior deseáramos conocer el valor actual que tendrán los pagos al finalizar el año, tendríamos que el primer pago será equivalente a $1.000(1 + 0{,}03)^3$, ya que transcurren tres trimestres desde que el primer pago es realizado. El segundo pago equivaldrá a $1.000(1 + 0{,}03)^2$, el tercero a $1.000(1 + 0{,}03)$ y el último simplemente 1.000.

Así, el valor actual al finalizar el año será de:

$$\begin{aligned} V_A &= 1.000(1+0{,}03)^3 + 1.000(1+0{,}03)^2 + 1.000(1+0{,}03) + 1.000 \\ &= 1.000((1+0{,}03)^3 + (1+0{,}03)^2 + (1+0{,}03) + 1) \\ &= 1.000\frac{1-(1+0{,}03)^4}{1-(1+0{,}03)} \\ &= \$\ 4.183{,}62 \end{aligned}$$

De una manera análoga, también se podría calcular el Valor actual al momento de realizar cualquiera de los pagos.

Félix de Samaniego (1745-1801) narra en un poema que una lechera llevaba un cántaro de leche para vender en el mercado, mientras pensaba en como podría invertir el dinero recibido. Podré comprar un canasto de huevos, se decía, para luego empollarlos y cambiar a los 100 pollos ya crecidos, por un lechón que al engordar se pueda vender y obtener dinero suficiente para comprar una vaca con ternero. En un salto que dió por la alegría que esto le provocaba, cayó el cántaro al suelo y se rompió junto a sus sueños. En este ejemplo, a partir de una inversión equivalente a un cántaro de leche o un canasto de huevos, en el primer período obtiene la diferencia entre 100 pollos menos el canasto de huevos, en el segundo un cerdo menos los 100 pollos, y por último la vaca con el ternero menos el cerdo.


La lechera de Vermeer

Los ejemplos anteriores son casos particulares de lo que se conoce como **flujos de caja**.

Definición 8.3

Una sucesión de pagos y cobranzas $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n)$ se conoce con el nombre de *flujo de caja*. Se conviene que $c_i < 0$ corresponde a un pago y $c_i > 0$ corresponde a una cobranza.

Si aceptamos valores $c_i = 0$ podemos suponer que c_k corresponde al final del k-ésimo período y que todos los períodos tienen la misma duración.

Ejemplo 8.5

Supóngase que cobraremos mensualmente ciertas cantidades (en miles de pesos) durante los próximos cuatro años. ¿Cuál de las siguientes tres posibilidades es más conveniente?

a = (10, 11, 12, 13, 14)

b = (12, 12, 12, 12, 12)

c = (14, 13, 12, 11, 10)

Si llamamos x_i al pago que recibiremos al finalizar el i-ésimo mes y r la tasa de interés mensual, el valor presente de la sucesión de cinco pagos se puede representar por la fórmula:

$$V = \sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i$$

Intuitivamente, mientras mayor sea la tasa menos importante serán los pagos futuros y convendrá más la alternativa que realiza mayores pagos al comienzo. Si multiplicamos la fórmula por $(1+r)^k$ obtenemos el valor que tendrán los pagos al finalizar el k-ésimo mes. Como multiplicar las cantidades por un mismo número positivo no altera la relación de orden podemos comparar los valores al finalizar el tercer mes y obtenemos:

$$V_a = 10(1+r)^2 + 11(1+r) + 12 + 13(1+r)^{-1} + 14(1+r)^{-2}$$

$$V_b = 12(1+r)^2 + 12(1+r) + 12 + 12(1+r)^{-1} + 12(1+r)^{-2}$$

$$V_c = 14(1+r)^2 + 13(1+r) + 12 + 11(1+r)^{-1} + 10(1+r)^{-2}$$

De donde

$$V_a - V_b = -2(1+r)^2 - (1+r) + (1+r)^{-1} + 2(1+r)^{-2}$$

$$= ((1+r)^{-1} - (1+r))(1 + 2((1+r)^{-1} + (1+r)))$$

De esta ecuación deducimos que V_a será menor que V_b siempre que la tasa r sea positiva.

De la misma forma, podemos ver que V_b será menor que V_c siempre que r sea positivo. En este ejemplo, la suma de los pagos era la misma en cada caso. Un pequeño cambio en las cantidades puede producir cambios radicales. En los ejercicios se verán casos donde distintos valores positivos de la tasa hacen cambiar la elección de pagos, por ejemplo, cuando $r = 0{,}1$ convendrá más un flujo y cuando $r = 0{,}2$ convendrá más el otro.

Una manera más constructiva de hacer la comparación entre dos flujos de caja es la siguiente: consideremos los flujos **a** y **b** del ejemplo anterior, vemos que el flujo **b** posee 2 unidades más que el **a** el primer mes, además es claro que **b** es equivalente a **b'** = (10, 2(1+r) + 12, 12, 12, 12).

Esto corresponde a ahorrar las dos unidades que le sobran el primer mes. Por otra parte, cuando tenemos dos flujos cuyos primeros pagos son iguales, la preferencia estará determinada por los restantes pagos.

De esta forma comparar **a** con **b'** dará el mismo resultado que comparar **a'**= (11, 12, 13, 14) con **b''**= $(2(1 + r) + 12, 12, 12, 12)$. Si se realiza el mismo razonamiento, se puede reducir la comparación a dos flujos de 3 meses, luego a flujos de dos meses, y finalmente a flujos de un mes cuya comparación es obvia.

En general se tiene:

Propiedad 1.1

Dados dos flujos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$*, si el valor presente de* **a** *es menor que el de* **b** *se puede obtener un flujo* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *equivalente a* **b** *con* $c_i = a_i$ $1 \leq i < n$ *y* $a_n < c_n$.

Un tipo de problemas que se pueden resolver con los conceptos de valor actual y flujo de caja es el de reemplazo de maquinaria. Es usual que en una fábrica u oficina, con el paso del tiempo, la maquinaria requiera mayores gastos de mantenimiento. Entonces, se plantea la compra de un nuevo equipo, que insumirá un gasto inicial mayor pero menores egresos futuros. Para comparar las distintas alternativas será necesario establecer los correspondientes flujos de caja y sus respectivos valores presentes.

Ejemplo 8.6

Una compañía necesita para su producción una máquina por los siguientes cinco años. Actualmente posee dicha máquina cuyo valor es de $ 18.000 pero se depreciará $ 6.000 en los próximos tres años, tras lo cual quedará sin valor de venta ni posibilidad de uso. El costo operacional (a principio de año de esta máquina) es de $ 27.000 y se espera que este se incremente en $ 6.000 por año mientras siga siendo usada.

Al comienzo de cada año, se tiene la alternativa de comprar una máquina nueva cuyo costo es de $ 66.000. La vida útil de una máquina nueva es de seis años, su valor se deprecia $ 9.000 cada uno de los primeros dos años, y de allí en adelante $ 12.000 por año. Esta nueva máquina tiene un costo operacional de $ 18.000 el primer año y luego se va incrementando $ 3.000 por año.

¿Si la tasa de interés es del 10 %, cuándo le conviene comprar la nueva máquina a la compañía?

Este problema puede resolverse calculando los diferentes flujos de caja que se generan al comprar la nueva máquina en distintos años. Los escribiremos usando unidades de mil. Por ejemplo si se compra al comienzo del primer año tendremos el flujo:

$$66, 21, 24, 27, 30, -12$$

Esto se debe a que el primer año desembolsamos $ 66.000 en la compra de la nueva máquina, más $ 18.000 por su costo operativo y recibimos $ 18.000 por la venta de la máquina usada. El segundo año sólo gastamos $ 21.000 por el costo de operación y los siguientes $ 24.000, $ 27.000 y $ 30.000. Finalmente, la máquina es vendida por su valor residual de $ 12.000 y, como recibimos esa cantidad, la denotamos con signo negativo.

De la misma forma se obtienen los flujos alternativos y se tiene:

• compra al comienzo del primer año	66, 21, 24, 27, 30, -12
• compra al comienzo del segundo año	27, 72, 21, 24, 27, -24
• compra al comienzo del tercer año	27, 33, 78, 21, 24, -36
• compra al comienzo del cuarto año	27, 33, 39, 84, 21, -48

Usando la tasa anual de interés del 10% tenemos que r = 0,1 y podemos calcular, por ejemplo, el valor actual del segundo flujo de caja:

$$27 + \frac{72}{1,1} + \frac{21}{(1,1)^2} + \frac{24}{(1,1)^3} + \frac{27}{(1,1)^4} - \frac{24}{(1,1)^5} = 131,382$$

De la misma forma obtenemos el valor actual de los restantes flujos de caja y obtenemos:

138,249 131,382 131,280 136, 881

Vemos que conviene comprar la nueva máquina al comienzo del tercer año. También se observa que la diferencia con hacer la compra el segundo año es muy pequeña, no así con el primero y el cuarto.

8.2. Tasa interna de retorno

Una inversión genera un flujo de caja. Una manera conveniente de comparar el rendimiento de distintas alternativas de inversión es asignarles un número llamado la **tasa interna de retorno o TIR**. Supongamos que invertimos una cantidad a y obtenemos una sucesión de pagos b_1, b_2, ... , b_n no negativos, donde b_i es la cantidad que recibimos al final del i-ésimo período y $b_n > 0$.

Definición 8.4 La tasa interna de retorno por período de dicha inversión es el valor de la tasa de interés r^* que hace que el valor actual del flujo de caja generado sea 0 cuando se usa esa tasa de descuento.

Esto se puede expresar matemáticamente si definimos la función P por:

$$P(r) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i}$$

entonces la tasa interna de retorno por período es el valor $r^* > -1$ para el cual $P(r^*) = 0$.

Este número r^* representa la tasa de interés que iguala los valores presentes de lo que entregamos con lo que recibiremos. Al usar la misma tasa r^* para calcular el valor presente de cada período estamos suponiendo que no hay riesgo de reinversión, es decir, cuando recibamos el primer pago b_1 lo podremos volver a invertir a una tasa r^*, lo mismo con los restantes pagos. La existencia de r^* está garantizada cuando:

$$P(0) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i > 0$$

Además puede demostrarse que r^* será único si $b_i \geq 0 \ \forall i$.

Ejemplo 8.7

Si entregamos \$ 100 y recibimos al cabo de un año \$ 200 tenemos $P(r) = -100 + 200(1 + r)^{-1}$ de donde $r = 1$ o sea una TIR de 100% anual.

Ejemplo 8.8

Si pagamos \$ 100 y obtenemos \$ 70 al final de cada uno de los siguientes dos semestres, tendremos $P(r) = -100 + 70(1 + r)^{-1} + 70(1 + r)^{-2}$

Debemos resolver:

$$100 = \frac{70}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2}$$

Equivalentemente:

$$100(1+r)^2 = 70(1+r) + 70$$

Desarrollando:

$$100r^2 + 130r - 40 = 0$$

Entonces:

$$r = \frac{-130 + \sqrt{130^2 + 16.000}}{200} = \frac{-130 + 181{,}4}{200} = 0{,}257$$

Es decir que la TIR es de 25,7% semestral.

En este ejemplo vemos la equivalencia entre el flujo $(-100, 70, 70)$ y el flujo que obtendríamos en caso de volver a invertir a tasa r el primer pago: $(-100, 0, 70(1 + r) + 70)$.

Ejemplo 8.9

Se desea calcular la TIR de un bono del estado que ofrece pagar 7% de interés anual durante tres años y el tercer año se devuelve el total del capital. Si el bono se consigue al 30% de su valor ¿cuál es la TIR correspondiente?

El flujo de caja generado es -30, 7, 7, 107. La ecuación a resolver es:

$$30 = 7(1 + r)^{-1} + 7(1 + r)^{-2} + 107(1 + r)^{-3}$$

Si multiplicamos ambos miembros por $(1 + r)^3$ podemos resolver el problema equivalente

$$30(1 + r)^3 = 7(1 + r)^2 + 7(1 + r) + 107$$

Desarrollando, obtenemos la ecuación polinomial en r:

$$30r^3 + 83r^2 + 69r - 91 = 0$$

Por ser una ecuación de tercer grado tiene, a lo sumo, tres soluciones que son las raíces del polinomio. Puede verse en este caso que la función es creciente para $r > 0$ y, por lo tanto, hay sólo una raíz positiva, que es la que nos interesa. Cuando el grado del polinomio es menor que cinco se puede aplicar una fórmula para encontrar las raíces. En general, hay métodos efectivos para calcular aproximaciones.

Un método básico, fácil de programar, es el de bisección. Este consiste en encontrar un intervalo $[a_0, b_0]$ donde se halla la raíz. Una forma de saber si la raíz se encuentra en un intervalo (a, b) es evaluar la función en ambos extremos y comprobar que toma valores con signos distintos en a y b. En este ejemplo el $[0, 1]$ es uno de esos intervalos, ya que

$$P(0) = -84 < 0 \text{ y } P(1) = 30 + 83 + 69 - 91 = 91 > 0$$

Una vez que conseguimos un intervalo $[a_0, b_0]$ con una raíz, calculamos su punto medio $m = (a_0 + b_0)/2$ y partimos el intervalo en dos mitades: $[a_0, m]$ y $[m, b_0]$. Ya sabemos como averiguar en cuál de ellas quedo la raíz. En nuestro ejemplo, calculamos $m = 1/2$ y evaluamos el polinomio:

$$P(1/2) = 30/8 + 83/4 + 69/2 - 91 = -32 < 0$$

Por lo tanto, la raíz se encuentra en $[1/2, 1]$. Evaluamos en $3/4 = (1/2 + 1)/2$ y vemos que:

$$P(3/4) = 15{,}27/32 + 83{,}9/16 + 69{,}3/4 - 91 = 20,\ 13 > 0$$

por lo tanto, la raíz pertenece a $[1/2, 3/4]$. De esta manera obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, que contienen la raíz.

Si nos detenemos en $[a_n, b_n]$ sabemos que $\frac{a_n+b_n}{2}$ dista de la raíz en menos que $\frac{b_n-a_n}{2}$. En nuestro ejemplo la raíz r dista de $(1/2 + 3/4)/2 = 0{,}625$ en menos de $(3/4 - 1/2)/2 = 0{,}125$. En otras palabras hemos determinado que la tasa es al menos 50% y a lo sumo 75%, y tomamos como tasa aproximada el 62,5 %. También podríamos seguir afinando el intervalo hasta obtener la precisión que deseemos.

Aquí hemos descripto sucintamente los pasos que se deben realizar para el cálculo de la tasa interna de retorno. Como se puede observar, aún en un flujo de cuatro términos, resulta necesario el uso de una calculadora dado el número de multiplicaciones que debemos realizar para obtener cada aproximación.

Al aumentar el número de períodos, la dificultad conceptual es la misma pero la cantidad de operaciones necesarias para obtener un resultado es tal, que vuelve imprescindible el uso de una calculadora financiera o, de ser posible, una computadora y con un programa (software) conocido como planilla u hoja de cálculo. En ambos casos se cuenta con funciones específicas para la matemática financiera que serán tratadas en los apéndices.

Una función que nos ahorrará mucho tiempo se llama TIR. Con ella se puede obtener la tasa interna de retorno de un flujo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ simplemente valuándola en el flujo.

Esto es:

$$\text{TIR}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = r^*.$$

En el caso de una calculadora financiera, para obtener r^*, se deberá ingresar los datos: a_i y luego buscar y aplicar la función TIR o IRR. El caso de una planilla de cálculo es similar y se facilita el ingreso de datos y el resguardo del resultado.

Ejemplo 8.10

Dado un bono como el del ejemplo anterior nos planteamos encontrar el precio p al que deberíamos comprar el bono para obtener una tasa de 50 %.

Para esto debemos resolver la ecuación: $p(1{,}5)^3 = 7(1{,}5)^2 + 7(1{,}5) + 107$ o sea $p = 39{,}48$. Es decir, si compramos el bono a menos de \$ 39,48 obtendremos una tasa mayor que el 50% anual.

Vemos en este último ejemplo que es mucho más fácil obtener el precio para una determinada tasa, que la tasa para un determinado precio. Esto nos muestra que puede ser más sencillo hacer una tabla donde demos la TIR y el precio que le corresponde. Cuando queremos resolver el problema inverso buscamos en la tabla un precio aproximado al dato y su correspondiente TIR nos dará una aproximación de la tasa buscada. Esta es una alternativa intermedia a las calculadoras y computadoras, ya que requieren el uso de estas para su elaboración, pero luego permiten obtener una aproximación de la TIR sin usar pilas ni cables.

Otra función de mucha utilidad es la función $VAN(r, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que permite obtener el valor actual del flujo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a una tasa r. Notemos que por su definición, VAN y TIR están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$\text{VAN}(\text{TIR}(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_1, a_2, \ldots, a_n) \approx 0$$

El concepto de flujo de caja nos permite representar situaciones ya estudiadas en los capítulos anteriores. Por ejemplo, la amortización de un crédito puede verse como un flujo $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde n es la cantidad de cuotas que debemos pagar, $-a_0 = C$ es el monto que recibimos prestado y a_i con $1 \leq i \leq n$ es la cuota que debemos pagar al finalizar el i-ésimo mes. La tasa de actualización utilizada corresponde a la tasa de interés que el banco recibe por el préstamo.

Ejemplo 8.11

Tomamos un préstamo en un banco por un monto de \$ M, a una tasa anual r, pagadero en n cuotas iguales de \$ c.

¿Cuánto vale cada cuota?

¿Cuál es la deuda R_k que resta una vez pagada la k-ésima cuota?

Consideramos el flujo $(-M, c, \ldots, c)$ donde c aparece n veces y buscamos un valor de c que anule el valor presente del flujo. Esto se refleja en la siguiente ecuación:

$$M = \sum_{k=1}^{n} c(1+r)^{-k}$$

De aquí se deduce el valor de la cuota:

(1) $$c = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{-k}} = \frac{Mr}{1-(1+r)^{-n}}$$

Para calcular R_k pensemos que antes de pagar la k-ésima cuota debíamos R_{k-1} más sus intereses rR_{k-1}, restando a esto la cuota pagada nos queda lo que aun debemos. Esto es:

$$R_k = (1+r)R_{k-1} - c$$

Sabemos que $R_n = 0$, ya que después de la última cuota no deberemos nada. La relación nos dice entonces que $R_{n-1} = c/(1+r)$. Consideremos $T_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j}$ y $T_n = 0$. Estos valores cumplen:

$$T_k = (1+r)T_{k-1} - c \qquad 1 \le k \le n$$

Observemos que $T_{n-1} = c/(1+r) = R_{n-1}$ y los T_k cumplen la misma relación que los R_k.

Podemos entonces concluir que

(2) $$R_k = T_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j} = \frac{c(1-(1+r)^{k-n})}{r} \qquad 1 \le k \le n$$

Veamos ahora que sucede en un ejemplo más concreto.

Ejemplo 8.12 El Banco de la Plaza nos ofrece un crédito de \$ 1.000 a pagar en 60 cuotas iguales (sistema francés) con una tasa de 18% anual. Calculemos el valor de cada cuota y la deuda que restará al completar un año de pagos.

Usando la ecuación (1) obtenemos

$$c = \frac{1.000}{\sum_{k=1}^{60}(1,015)^{-k}} = \frac{1.000}{\frac{1-1,015^{-60}}{0.015}} = \frac{15}{0,5907}$$

Concluimos entonces que $c = 25{,}39$ es la cuota que se deberá pagar mensualmente.

En los ejemplos anteriores cada cuota c se compone de una parte A_k que amortiza el capital prestado y una parte I_k que corresponde a los intereses de la parte del capital adeudado al comienzo del período anterior. Recordemos que R_k es la deuda que aún nos resta pagar al realizar el k-ésimo pago y r la tasa de interés del préstamo. Entonces $I_k = rR_{k-1}$. Ahora podemos usar la ecuación (2) y así obtenemos:

(3) $$I_k = rR_{k-1} = c(1-(1+r)^{k-1-n})$$

Cómo $c = I_k + A_k$ deducimos:

(4) $$A_k = c - I_k = c - c(1-(1+r)^{k-1-n}) = c(1+r)^{k-1-n}$$

Si en el ejemplo 8.12, deseamos calcular la parte correspondiente a intereses y a amortización usamos las ecuaciones (3) y (4) y tenemos para los intereses:

$$I_k = c(1 - (1 + r)^{k-1-n}) = 25,39(1 - 1,015^{k-61})$$

y para las amortizaciones:

$$A_k = c(1 + r)^{k-1-n} = 25,39(1,015)^{k-61}$$

También podemos plantear los problemas de capitalización con un flujo de caja donde la tasa de actualización corresponde a la tasa bancaria de depósitos.

Ejemplo 8.13

Nos proponemos crear un fondo de ahorro depositando \$ 500 por mes durante 36 meses para luego retirar mensualmente un monto x durante los siguientes 36 meses. ¿Qué monto podremos retirar si en el banco nos aseguran una tasa de 8% anual durante los próximos seis años?

En este caso el flujo es de la forma $(500, \ldots, 500, -x, \ldots, -x)$. De aquí se deduce la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{35} 500(302/300)^{-k} = \sum_{k=36}^{71} x(302/300)^{-k}$$

donde hemos usado que $302/300 = 1 + 2/300$ es el coeficiente de actualización correspondiente a una tasa de interés del 8/12% mensual y hemos contado los 72 meses del 0 al 71. Así obtenemos:

$$500\left(\frac{1-(300/302)^{36}}{0,006666}\right) = x(300/302)^{36}\left(\frac{1-(300/302)^{36}}{0,006666}\right)$$

Simplificando, obtenemos $x = 500(302/300)^{36} = 635,11$. En general, si la cantidad n de meses durante los que ahorramos un monto C es igual a la de los meses durante los cuales extraeremos la renta x, cuando la tasa de capitalización es r tendremos:

$$\mathrm{x} = C(1 + r)^n$$

8.3. Usufructo y nuda propiedad

A veces aparece entre los avisos clasificados, alguno donde se ofrece a la venta la nuda propiedad de un inmueble. ¿Qué quiere decir esto? Significa que se está separando por un lado el derecho a ser el dueño del inmueble, y por otro el derecho a la renta que este puede brindar durante un cierto lapso. Al primero se lo llama nuda propiedad y al segundo, usufructo. Estos conceptos también se trasladan al caso de un préstamo. Como hemos visto en el ejemplo 8.11, un préstamo de $\$M$ genera un flujo de caja $(-M, c, \ldots, c)$ donde c es el valor de cada pago. También sabemos que cada cuota se descompone en una parte que amortiza el capital y otra que consiste en el interés por el capital que resta devolver. Esto genera dos flujos $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ y $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Nos planteamos el siguiente problema: supongamos que al cabo de k meses, la tasa de interés del mercado es ahora r_m y el banco decide vender su derecho de cobranza. ¿A cuánto debería venderlo? Más aún, el banco desea vender por separado su derecho al cobro de intereses y su derecho al cobro de las amortizaciones. ¿Cuánto debe cobrar por cada uno?

La respuesta es sencilla, hay que calcular el valor presente de los flujos $(I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n)$ y $(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n)$ usando la nueva tasa de mercado r_m. Tenemos entonces:

(5)
$$U_k = \sum_{j=1}^{n-k} I_{k+j}(1+r_m)^{-j}$$

(6)
$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k} A_{k+j}(1+r_m)^{-j}$$

Definición 8.5 El valor actual U_k, del flujo de intereses $(I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n)$ se conoce con el nombre de **usufructo**. Al valor presente N_k, del flujo de amortizaciones $(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n)$ se lo llama **nuda propiedad**.

La fórmula

(7)
$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k} c(1+r)^{k+j-1-n}(1+r_m)^{-j} = c(1+r)^{k-1-n}\sum_{j=1}^{n-k}\left(\frac{1+r}{1+r_m}\right)^j$$

da el valor de la nuda propiedad N_k, con una tasa de mercado r, después de haber pagado k cuotas de n.

Como $c = I_k + A_k$, $1 \leq k \leq n$ tenemos:

$$U_k + N_k = \sum_{j=1}^{n-k} I_{k+j}(1+r_m)^{-j} + \sum_{j=1}^{n-k} A_{k+j}(1+r_m)^{-j} = \sum_{j=1}^{n-k} c(1+r_m)^{-j}$$

Ahora podemos expresar U_k en términos de N_k y la actualización de un flujo de capital constante:

(8)
$$U_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j} - N_k$$

Ejemplo 8.14 En el ejemplo 8.12, suponemos que al cabo de un año la tasa de mercado es del 12% anual y el banco decide vender la nuda propiedad del préstamo. ¿Qué precio tendrá esta?

Aplicamos al ejemplo la fórmula (7) para la nuda propiedad:

$$N_{12} = c(1+r)^{-49}\sum_{j=1}^{48}\left(\frac{1+r}{1+r_m}\right)^j$$

Reemplazamos las tasas y la cuota por su valor y desarrollamos:

$$\begin{aligned} N_{12} &= 25{,}39(1,015)^{-49}\sum_{j=1}^{48}\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}\right)^j \\ &= \frac{25{,}39(1,015)^{-49}\left(\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}\right)^{48}-1\right)}{\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}-1\right)} \\ &= 661,43 \end{aligned}$$

Para obtener el usufructo usamos la fórmula (8):

$$\begin{aligned} U_{12} &= 25,39\sum_{j=1}^{48}(1+r_m)^{-j} - N_{12} \\ &= 964,16 - 661{,}43 \\ &= 302,73 \end{aligned}$$

Una manera alternativa de calcular U_k y N_k para un préstamo de tipo francés es usar las relaciones (ver Ejercicio 8.6):

$$\begin{aligned} U_k + N_k &= c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j} \\ \frac{r_m}{r}U_k + N_k &= c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j} \end{aligned}$$

Si calculamos primero $c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j}$ y la deuda remanente $R_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j}$, nos queda planteado un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas U_k y N_k, que tiene una única solución siempre que $r_m \neq r$, y se resuelve fácilmente.

8.4. Ejercicios

Ejercicio 8.1

Tenemos a la venta un auto y nos ofrecen pagar \$ 10.000 al contado o un pago de \$ 5.000 y tres pagos semestrales de \$ 2.500

a) ¿Cuál de las ofertas nos conviene aceptar si la tasa de descuento es del 15% anual?

b) ¿Y si fuese del 24% anual?

Ejercicio 8.2

Con las mismas hipótesis que en el ejercicio 8.1,

a) ¿Cuál debería ser la tasa de descuento para que las ofertas fuesen equivalentes?

b) ¿Cuál debería ser el pago inicial de la segunda oferta para que fuese equivalente a la primera con tasa de descuento de 24%?

Ejercicio 8.3

¿Cuál es la tasa interna de retorno de un bono como el del ejemplo 8.9 si lo compramos al 50% de su valor?

Ejercicio 8.4

Calcular la tasa interna de retorno de un bono a 10 años de \$ 10.000 que paga semestralmente \$ 500 durante 20 semestres y el último semestre amortiza el total del capital, en cada una de las siguientes alternativas:

a) Si pagamos por él \$ 10.000 (A la par).

b) Si lo conseguimos a \$ 9.000. (Bajo la par).

c) Si lo compramos a \$ 10.500. (Sobre la par).

Ejercicio 8.5

Tomamos un préstamo de \$ 100.000 a pagar en 20 cuotas semestrales iguales con una tasa anual del 10 %.

a) ¿Cuál es la cuota semestral que debemos pagar?

b) ¿Cuál es la deuda remanente después de realizar nuestro sexto pago?

c) Si en ese momento la tasa de mercado es del 6% anual ¿Cuánto vale el usufructo U_6?

d) ¿Cuanto valdría U_6, si la tasa de mercado fuera del 15% anual?

Ejercicio 8.6

Teniendo en cuenta que $R_n = 0$, mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1} - R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - r_m \sum_{j=1}^{n-k} R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$$

Deducir que $N_k = R_k + \frac{r_m}{r}\sum_{j=1}^{n-k} r R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$ y por lo tanto

$$N_k = R_k + \frac{r_m}{r} U_k$$

Ejercicio 8.7

Hemos tomado un préstamo con una tasa de interés r del 12% anual a pagar en 84 cuotas mensuales de \$ 100 cada una. Cuando restan aún 60 cuotas, la tasa de mercado es del 6% anual. Calcular el valor del usufructo U_{24} y la nuda propiedad N_{24}.

Ayuda: usar $R_{24} = \frac{c\,(1-(1+r)^{24\,-84})}{r}$ y el sistema de dos ecuaciones.

Ejercicio 8.8

Hemos tomado un préstamo con una tasa de interés r del 15% anual a pagar en 60 cuotas mensuales de \$ 100 cada una. ¿Cuántas cuotas nos quedan de pagar si la deuda remanente es de \$ 3.252,13?