Capítulo 2

Progresiones aritméticas y geométricas

Muchas veces escuchamos hablar de un crecimiento aritmético o geométrico y lo asociamos con un crecimiento lento o rápido, respectivamente. ¿Qué significan estos términos?

Se dice que algo crece (o decrece) aritméticamente, si en cada etapa se le va sumando (o restando) una cantidad constante.

Por ejemplo, si durante la semana pasada la temperatura creció un grado por día, podemos decir que creció aritméticamente.

Si las reservas del BCRA (Banco Central de la República Argentina) suben 200 millones de dólares por semana, se habla de un crecimiento aritmético.

Si el peso de una persona que realiza una dieta, reduce un kilogramo por mes, decimos que decrece en progresión aritmética.

Se dice que algo crece (o decrece) geométricamente si en cada etapa se multiplica por una cantidad constante mayor que 1 (o menor que 1).

Algunos ejemplos de crecimiento geométrico son:

- Una población de bacterias con suficiente alimento que se multiplica 8 veces por hora.
- Una cantidad de carbono-14, donde el radioisótopo del carbono se multiplica por 0,5 cada 5.730 años.

Otro ejemplo clásico de crecimiento geométrico es el siguiente:

Cuenta la historia que un rey quedó tan contento con el juego del ajedrez que había sido diseñado para él, que ofreció a su creador regalarle lo que quisiera. Este le contestó que “sólo” quería obtener como recompensa un grano de trigo por el primer casillero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente hasta llegar al casillero 64. El rey quedó sorprendido por tan modesto pedido y mandó a su visir que trajera una bolsa con los granos reclamados. Mayor fue su sorpresa cuando el visir hizo los cálculos y vio que no había tal cantidad de granos en toda la tierra.

Un crecimiento geométrico similar ocurre en los primeros días después de la concepción, cuando de una célula original se producen dos y de cada una de las obtenidas se vuelven a obtener dos, y así sucesivamente, aunque sólo por unos días.

1. Progresiones aritméticas

Definición 2.1 Llamamos progresión aritmética a una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ que tiene la propiedad de que la diferencia entre dos consecutivos es igual a una constante R, que llamaremos razón de la progresión.

En otras palabras, si se cumple que $a_{n+1} - a_n = R \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una progresión aritmética.

Ejemplo 2.1 La sucesión de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = 1$.

Ejemplo 2.2 La sucesión constante $\{2, 2, 2, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = 0$

Ejemplo 2.3 La sucesión de los números naturales $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = -1$.

1.1. El enésimo término de una progresión aritmética

Luego de considerar los ejemplos anteriores, la primera pregunta que nos planteamos es la siguiente:

¿Cómo se calcula el enésimo término de una progresión aritmética $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ de razón R?

Vemos que: $a_2 = a_1 + R$, $a_3 = a_2 + R = a_1 + R + R = a_1 + 2R$, razonando de la misma forma $a_4 = a_1 + 3R$, en general intuimos que $a_n = a_1 + (n-1)R$. Esto se puede expresar con el concepto de *suma telescópica,* esto es, una suma que colapsa. Observemos que

$$\begin{aligned} R + R + \cdots + R &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) \\ &= a_n + (-a_{n-1} + a_{n-1}) + (-a_{n-2} + a_{n-2}) + \cdots + a_2) - a_1 \\ &= a_n - a_1 \end{aligned}$$

de donde $a_n = a_1 + (n-1)R$

Si bien el razonamiento es muy convincente, no llega a ser una demostración (el punto débil son los puntos suspensivos que se usaron). En el ejemplo 2.6 se demostrará que la fórmula es verdadera cualquiera sea el n.

En un país sólo ingresan 1.000 inmigrantes por año. Si llamamos con I_1 la cantidad de inmigrantes que hay actualmente, y con I_{n+1} la que habrá dentro de n años, se ve que $\{I_i\}$ es una progresión aritmética.

Ejemplo 2.4

¿Es posible tener triángulos rectángulos cuyos lados sean enteros y estén en progresión aritmética? Supongamos que los lados son de longitud a, $a + R$ y $a + 2R$, entonces debe cumplirse el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (a+2R)^2 &= (a+R)^2 + a^2 && \text{de donde} \\ a^2+4aR+4R^2 &= a^2+2aR+R^2+a^2 && \text{por lo tanto obtenemos} \\ 3R^2+2aR-a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si despejamos R tenemos $R = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+3a^2}}{3}$ esto nos da las posibilidades $R = -a$ y $R = \frac{a}{3}$. La primera nos da un lado de longitud 0, por lo tanto no sirve. En la segunda como a y R deben ser enteros a es múltiplo de 3 y se tiene entonces las ternas $\{3n, 4n, 5n\}$, que corresponden a todos los triángulos que tienen lados enteros y son equivalentes al clásico triángulo de lados 3, 4 y 5.

Ejemplo 2.5

2. Inducción completa y el efecto dominó

Existe un método muy ingenioso para probar que una fórmula es válida para todos los números naturales. Para ilustrarlo visualmente, podemos pensar que cada natural corresponde a una ficha de domino y que éstas se colocan en fila de tal manera que al caer la primera, ésta hace caer la segunda y así sucesivamente. (Ver figura 2.1). Se llama método de inducción completa y consiste en lo siguiente:

Figura 2.1

Supongamos que tenemos dos funciones $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y queremos probar que $F(n) = G(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ entonces:

Primero, se prueba que la fórmula es válida para $n = 1$, es decir se verifica que $F(1) = G(1)$.

Segundo, se hace una *hipótesis inductiva*, es decir, se asume que la fórmula es válida para un natural $n = k$ y, a partir de allí, se prueba que eso implica que será válida para el siguiente natural $n = k + 1$.

De esto, se concluye que la fórmula vale para todo número natural, porque si se verifica que vale para $n = 1$, entonces se podrá aplicar la segunda parte del método con $k = 1$ y así concluir que vale para $k = 2$. Si repetimos el procedimiento pero con $k = 2$, sabremos que vale para $k = 3$. De esta manera, armamos una maquinaria que permite verificar que la fórmula será válida para todos los naturales.

En general, el método sirve para probar que una familia de propiedades P_n son verdaderas.

Paso uno: probar que P_1 es verdadera.
Paso dos: probar que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

Ejemplo 2.6

Una progresión aritmética $\{a_n\}$ cumple $a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1)$.

Primero verificamos que $a_1 = a_1 + (1-1)(a_2 - a_1)$.

Luego, suponemos que vale $a_k = a_1 + (k-1)(a_2 - a_1)$, y probaremos que entonces debe ser cierta la igualdad $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)(a_2 - a_1)$.

Para esto usamos que, por ser una progresión aritmética la diferencia entre dos consecutivos debe ser la misma. Por lo tanto $a_{k+1} - a_k = a_2 - a_1$.

Despejando, se obtiene $a_{k+1} = a_k + (a_2 - a_1)$ y ahora reemplazamos a_k usando la hipótesis inductiva.

Tenemos entonces $a_{k+1} = a_1 + (k-1)(a_2 - a_1) + (a_2 - a_1)$ finalmente llegamos a que $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)(a_2 - a_1)$ deberá ser cierto.

Del ejemplo se sigue que toda progresión aritmética queda determinada por sus dos primeros términos.

Una progresión $\{a_n\}$, puede pensarse como una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada natural n el número a_n.

Si graficamos una progresión aritmética, observaremos que los valores que va tomando están alineados. Ellos se encuentran sobre el gráfico de la recta $y = a_1 + Rx$.

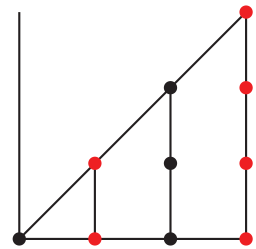


Gráfico 2.1

Una famosa anécdota sobre el gran matemático Karl F. Gauss cuenta que, un día su profesor de primaria (aparentemente con el objetivo de descansar un rato) pidió a sus alumnos que sumaran todos los números del 1 al 100. El pequeño Gauss entregó la respuesta velozmente, sorprendiendo al profesor. ¿Cómo hizo tan rápidamente el cálculo? Según le explicó al maestro, observó que si sumaba el primero y el último obtenía 101, el segundo y el anteúltimo también 101, y así hasta llegar a 50+51=101. En total obtuvo 50 veces 101 es decir 5.050, que es la respuesta exacta.

Una variante de esta idea se puede usar para dar una fórmula para la suma de los primeros n números:

$$\begin{aligned}
S &= 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \\
S &= n+(n-1)+\cdots+3+2+1 \quad \text{sumando m. a m.} \\
2S &= (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) \\
2S &= n(n+1) \\
S &= n(n+1)/2
\end{aligned}$$

Una notación muy útil para trabajar con sumas es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Tiene la propiedad que:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i + b_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Por ejemplo, con esta notación escribimos la suma S_n de los primeros n números como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Supongamos que deseamos calcular la suma S_n de los primeros n términos de una progresión aritmética $\{a_i\}$ de razón R, esto es $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Si recordamos que $a_i = a_1 + (i - 1)R$, usando la propiedad, se tiene:

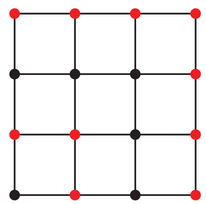
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)R \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + Rn(n-1)/2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7

Podemos calcular la suma de los primeros n números impares.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$$

Esto se puede ver en el gráfico 2.2:



$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

Gráfico 2.2

Ejemplo 2.8

La forma de los dos gráficos anteriores sugiere llamar números triangulares y cuadrangulares a la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas 1, 2, 3, . . . y 1, 3, 5, . . . , respectivamente. Denotaremos a los primeros con T_n y a los segundos con C_n. Esto se puede generalizar y definir números pentagonales P_n, hexagonales H_n; etc. como la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas que comienzan con 1 y tienen razón 3; 4; etc. Geométricamente se cuentan los puntos en los correspondientes polígonos

Ejemplo 2.9

Un problema que podemos resolver con estas sumas es calcular el número máximo a_n de regiones en que se puede dividir un plano usando n rectas. Por ejemplo, si usamos una recta partimos al plano en dos, en consecuencia $a_1 = 2$. Si usamos dos rectas, podemos partirlo en cuatro regiones si se cortan y en tres si no, por lo tanto $a_2 = 4$. Si tenemos el plano partido en a_n regiones y trazamos una nueva recta que no sea paralela a ninguna de las anteriores, esta contendrá n puntos distintos provenientes de las intersecciones con las n rectas. Estos n puntos determinan $n + 1$ segmentos (dos de ellos infinitos). Cada uno de estos segmentos, parte en dos a una de las a_n regiones agregando así una región por cada segmento. Tenemos que $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)R \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + Rn(n-1)/2\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $a_n = n\,(n + 1)/2 + 1$

Definición 2.2

Dada una sucesión de números $\{a_n\}$ podemos formar la *sucesión derivada* $\{a'_n\}$ que está definida por: $a'_n = a_{n+1} - a_n$

Ejemplo 2.10

Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R, la sucesión derivada $\{a'_n\}$ es la progresión constante R, ya que $a_{n+1} - a_n = R\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, si $\{a_n\}$ tiene sucesión derivada constante $a'_n = R$, entonces $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R. Si $R = 0$ entonces a_n es constante.

Si las sucesiones derivadas de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales, entonces la diferencia $\{a_n - b_n\}$ tiene derivada 0 y por lo tanto $a_n = b_n + R\ \forall n \in \mathbb{N}$. Geométricamente, vemos que a_n y b_n están sobre rectas paralelas.

Teorema 2.1

Teorema fundamental del cálculo discreto

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i = a_{n+1} - a_1$$

Demostración

Basta observar que la suma de las derivadas es una suma telescópica que colapsa en el miembro de la derecha.

Ejemplo 2.10

Si la sucesión derivada de $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R, ¿qué puede decirse de a_n?

Sabemos que $a'_n = a_0 + nR$

Usando el TFCD tenemos $a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + iR) = na_0 + Rn(n+1)/2$.

Por lo tanto, $a_{n+1} = a_1 + na_0 + Rn(n+1)/2 = \frac{R}{2}n^2 + (\frac{R}{2} + a_0)n + a_1$

Quiere decir que la sucesión es un polinomio de segundo grado en n.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos calcular la sucesión derivada de la sucesión derivada $\{a'_n\}$ y la llamamos derivada segunda denotada por $\{a''_n\}$.

Por lo visto anteriormente $\{a_n\}$ es una progresión aritmética si y sólo sí $a''_n \equiv 0$.

Definición 2.3

3. Progresiones geométricas

Para definir una progresión geométrica sólo tenemos que cambiar diferencia por división en la definición de progresión aritmética, más precisamente tenemos:

Llamamos progresión geométrica a una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ que tiene la propiedad de que el cociente entre dos consecutivos es igual a una constante q, que llamaremos razón de la progresión.

Definición 2.4

En otras palabras, si se cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una progresión aritmética.

La sucesión de las potencias de dos $\{2, 4, 8, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $q = 2$.

Ejemplo 2.12

La sucesión constante $\{2, 2, 2, \ldots\}$ es una progresión geométrica de razón $q = 1$.

Ejemplo 2.13

La sucesión de potencias de $\frac{1}{2}$: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ es una progresión geométrica de razón $q = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.14

La población de un país crece anualmente un 2%, quiere decir que si llamamos con P_n a la población en el año n, $P_{n+1} = P_n + \frac{2}{100}P_n = 1,02P_n$ Vemos que la población forma una progresión geométrica de razón 1,02.

Ejemplo 2.15

De los ejemplos, se observa que hay una manera muy sencilla de obtener una progresión geométrica de una progresión aritmética de números enteros $\{a_n\}$. Se puede hacer tomando cualquier número positivo, por ejemplo el 2, y formando $\{2^{a_n}\}$. Esta es geométrica, ya que $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^R = q$ constante. Usamos la propiedad $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ que viene de $a^b a^c = a^{b+c}$. Esta propiedad vale también para b y c racionales (e incluso para b y c reales) si definimos a $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

El matemático escocés John Napier en 1914, independientemente el suizo Joost Bürgi seis años después, inventaron los logaritmos, tratando de relacionar las progresiones geométricas con las aritméticas. Si tenemos una progresión geométrica a_n y fijamos un número positivo como el 10, queremos hacerle corresponder una progresión aritmética b_n de tal manera que $a_n = 10^{b_n}$. En otras palabras, se busca una operación inversa a la potenciación.

Definición 2.5 Dados números a, b, c con $a > 0$ el logaritmo de b en base a es c si $a^c = b$. Se denota por $\log_a b$

El problema que trataban de resolver Napier y Bürgi a principios del siglo XVII, era agilizar los cálculos que realizaban los astrónomos de la época, que necesitaban multiplicar y dividir cantidades con muchas cifras decimales.

Dado que es mucho más fácil sumar que multiplicar y restar que dividir, la idea básica detrás del desarrollo de los logaritmos fue encontrar una conexión que permitiera pasar de multiplicaciones a sumas y de divisiones a restas. El logaritmo es la respuesta, gracias a su propiedad característica:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Su aplicación requirió publicar tablas con gran cantidad de valores de logaritmos. Por ejemplo, para multiplicar x por y se buscan en la tabla los valores de $\log_{10} x$ y $\log_{10} y$, se suman y se busca un número c cuyo logaritmo sea $\log_{10} x + \log_{10} y$, entonces $c = xy$.

El uso de los logaritmos permitió hacer cálculos mucho más precisos en astronomía, y se difundió hacia todas las áreas que requirieran de cálculos efectuados con rapidez y precisión. Durante tres siglos fue una herramienta fundamental para el cálculo.

En el siglo pasado, luego de la aparición de las calculadoras y las computadoras, se perdió completamente su uso en la práctica; pero en la matemática perdura como una función fundamental porque permite modelar crecimientos no explosivos y transformar una operación de multiplicación en una de suma.

Ejemplo 2.16 Queremos saber si los números 2, 6 y 42 forman parte de una progresión geométrica. Si esto fuese cierto, existirían un número real q y dos enteros n y m tales que $6/2 = q^n$ y $42/6 = q^m$. Elevando la primera ecuación a la m y la segunda a la n, vemos que:

$$3^m = (q^n)^m = (q^m)^n = 7^n$$

Pero esto es imposible, ya que el número primo 3 divide al miembro de la izquierda pero no al de la derecha.

Entonces, concluimos que 2, 6 y 42 no forman parte de ninguna progresión geométrica.

¿Cómo calcular el enésimo término de una progresión geométrica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ de razón R?

Sabemos que $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n b}{b a_1} = \frac{a_n}{a_1}$, de donde concluimos que $a_n = a_1 q^{n-1}$

Ejemplo 2.17 Se desea calcular el noveno término de una progresión geométrica que comienza con 3 y 6. La razón de esta progresión es $6/3 = 2$, luego haciendo $n = 9$ en la fórmula obtenida previamente, tenemos $a_9 = 3 \cdot 2^8 = 768$.

Ejemplo 2.18

Se quiere encontrar el número x que hace que $\{2, x, 18\}$ estén en progresión geométrica. Tenemos que hallar un x que cumpla $18/x = x/2$. Despejando, tenemos que: $x^2 = 2 \cdot 18 = 36$ y por lo tanto $x = \pm 6$.

Recordemos que en 2.2 definimos a_n' la derivada de la sucesión $\{a_n\}$. ¿Qué ocurre cuando tomamos la derivada de una sucesión geométrica de razón q?

$a_n' = a_{n+1} - a_n = a_n(a_{n+1}/a_n - 1) = a_n(q-1)$. Por lo tanto se tiene que a_n'/a_n es una constante igual a $q - 1$.

Definición 2.6

Dada una progresión geométrica $\{a_n\}$, la constante a_n'/a_n se conoce como tasa de crecimiento de la progresión $\{a_n\}$.

Ejemplo 2.19

Se hace un conteo de una población de bacterias en intervalos de una hora, y se observa que los valores se aproximan a una sucesión geométrica de razón 8. ¿Cuál es su tasa de crecimiento?

Por ser una sucesión geométrica sabemos que su tasa de crecimiento es la constante $q - 1 = 8 - 1 = 7$. Decimos entonces que la tasa de crecimiento es de 700% por hora.

Ejemplo 2.20

En 1978 había 25 millones de argentinos, 30 años después hay 40 millones. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual? Si llamamos t a la tasa de crecimiento anual debemos tener:

$$40 \cdot 10^6 = (1+t)^{30} \cdot 25 \cdot 10^6$$

entonces simplificando, debemos resolver $40/25 = (1 + t)^{30}$, por lo tanto $t = \sqrt[30]{1,6} - 1$.

Cuando la progresión no es geométrica, la tasa $t_n = a_n' = a_n$ no es constante, pero se sigue cumpliendo $a_{n+1} = (1 + t_n)a_n$.

Ejemplo 2.21

El precio P de cierto artículo aumenta 5% en julio y vuelve a aumentar 10% en diciembre. El precio a fin de año P_f se puede obtener haciendo

$$P_f = (1+0{,}1)(1+0{,}05)P$$

Observamos que el precio final hubiera sido el mismo, si el primer aumento hubiera sido de 10% y el segundo de 5 %.

También vemos que ambos aumentos son equivalentes a un único aumento de 15,5 %, ya que $(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}05) = (1 + 0{,}155)$.

Ejemplo 2.22

Compramos una herramienta que cuesta \$ 100 y pagamos en 6 cuotas sin interés con una tarjeta cuyo banco nos devuelve el 10% de la compra, pero nos cobra un seguro de 3 %. ¿Cuál es el ahorro final?

$P_f = (1 + 0{,}03)(1 - 0{,}1)100 = (1 - 0{,}073)100$, el ahorro fue de \$ 7,30.

Ejemplo 2.23 **La sucesión de Fibonacci**

En1202, Fibonacci plantea en su libro Liber Abaci el siguiente problema:

Un granjero tiene un corral y quiere dedicarse a la cría de conejos. Una pareja de conejos llega a su estado reproductivo en un mes y tarda un mes en engendrar una pareja de conejitos. ¿Cuántas parejas de conejos tendrá el granjero al cabo de 12 meses si comienza con una pareja de conejos recién nacidos? Vemos que el primer mes tiene una, el segundo mes sigue teniendo una pero ya en estado reproductor, al tercer mes tiene la pareja original y una recién nacida, al cuarto mes tendrá la original, una en estado reproductor y una recién nacida, en general en el mes $n + 1$ tendrá las del mes n más las recién nacidas, de las cuales hay una por cada pareja existente en el mes $n - 1$. Esto da la ecuación

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad a_1 = a_2 = 1$$

de la que se puede obtener a_{12}.

Ejemplo 2.24 **Fórmula para la sucesión de Fibonacci**

Se desea obtener una fórmula para los términos de la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8,. . . , donde cada término es la suma de los dos anteriores, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Si calculamos la sucesión derivada, vemos que cumple: $a'_n = a_{n-1}$ pero como $a_n \neq qa_{n-1}$, con q constante, observamos que no es geométrica.

Sin embargo, a_n se puede escribir como la diferencia de dos sucesiones geométricas: $a_n = b_n - c_n$. ¿Cuáles son b_n y c_n? Supongamos que son de la forma $b_n = C\lambda_+^n$ y $c_n = C\lambda_-^n$. Queremos encontrar las razones λ_+ y λ_-.

Para esto consideramos $b'_n - c'_n = (\lambda_+ - 1)b_n - (\lambda_- - 1)c_n = C(\lambda_+ - 1)\lambda_+^n - C(\lambda_- - 1)\lambda_-^n$.

Entonces si λ_+ y λ_- satisfacen las ecuaciones $(\lambda_+ - 1)\lambda_+ = 1 = (\lambda_- - 1)\lambda_-$ tendremos que $b'_n - c'_n = C\lambda_+^{n-1} - C\lambda_-^{n-1} = b_{n-1} - c_{n-1}$.

Por ser las dos raíces de $(x - 1)x = 1$, sabemos entonces que $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La constante C debe cumplir: $1 = a_1 = C(\lambda_+ - \lambda_-) = C\sqrt{5}$.

Verificamos que se cumple que $1 = a_2 = \frac{\lambda_+^2 - \lambda_-^2}{\sqrt{5}}$. Finalmente, concluimos que como $b_{n+1} - c_{n+1} = b_n - c_n + b_{n-1} - c_{n-1}$ y tiene los dos primeros términos iguales a a_1 y a_2, debe coincidir con la sucesión de Fibonacci.

Si observamos que $\lambda_-^n < 4/10$ vemos que a_n es siempre el número entero más cercano a b_n.

Para calcular a_{12} tomamos $\frac{\lambda_+^{12}}{\sqrt{5}} \sim 1,618^{12}/2,236 \sim 321,91574/2,236 \sim 143,96947$. Se tiene que el entero más cercano es 144 y este no es otro que el duodécimo término de la sucesión de Fibonacci.

Este número $\lambda_+ = 1,618\ldots$ se conoce con el nombre de razón áurea o número de oro, y se lo denota con la letra griega φ. El cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci a_{n+1}/a_n, se acerca cada vez más a φ a medida que aumenta n. Estas relaciones pueden verse en la naturaleza, por ejemplo, en una flor de girasol los granos van formando una espiral con an granos en la enésima vuelta. Algo similar ocurre en los caracoles de mar y en la distribución de hojas alrededor de un tallo. Aparece también en la construcción de un pentágono o un dodecaedro.

Ejemplo 2.25

Se quiere construir un triángulo rectángulo que tenga sus lados en progresión geométrica, ¿será esto posible? Si lo fuese, denotemos por a, aq y aq^2 las longitudes de los lados de dicho triángulo. Por el teorema de Pitágoras, cuando $q > 1$, debería cumplirse la ecuación $a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2$. Si desarrollamos los cuadrados y dividimos por a^2, vemos que la razón q deberá ser solución de $q^4 - q^2 - 1 = 0$ y $q > 1$. O sea que q^2 no es otro que el número de oro φ del ejemplo anterior. Los triángulos así construidos reciben el nombre de triángulos de Kepler, quien demostró por primera vez esta caracterización.

Ejemplo 2.26

Las torres de Hanoi

Cuenta la leyenda[1], que en un lejano país del sudeste asiático hay tres postes y un conjunto de 64 discos de distinto radio. Originalmente, estaban encastrados en uno de los postes, en orden de mayor a menor contando desde la base. Un grupo de monjes tiene, como tarea, que trasladarlos hacia otro de los postes. La regla básica que deben cumplir es nunca superponer un disco de mayor radio sobre uno menor. Para esto, pueden usar al tercer poste como auxiliar. Cuando acaben de trasladarlos la vida se extinguirá. ¿Cuántos traslados deben realizar? En la figura 2.2 se puede ver una versión con 8 discos.

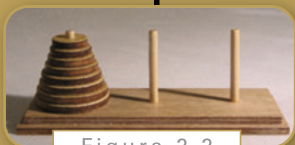


Figura 2.2

Si tuviéramos un disco, el número de traslados sería 1. Si hubiera dos, deben trasladar el más pequeño al poste auxiliar luego el mayor y finalmente el menor, es decir, 3 traslados. En general, si llamamos T_n al número de traslados necesarios para cambiar de poste n discos, tendremos:

$$T_{n+1} = T_n + 1 + T_n$$

El primer T_n corresponde a trasladar, de acuerdo a las reglas, los n discos superiores al poste auxiliar, para esto usamos el poste final como si fuera auxiliar. El 1 corresponde a trasladar el disco mayor que quedó en la base al poste de llegada que está vacío. Por último, tenemos T_n traslados para pasar al poste final los n discos que están bien ordenados en el poste auxiliar. Así tenemos la sucesión $1 = T_1$, $2T_1 + 1$, $2(2T_1 + 1) + 1, \dots$

[1] Se le acredita haber creado el juego de las Torres de Hanoi al matemático francés Edouuard Lucas en 1883

Ejemplo 2.27

La sucesión del ejemplo anterior se puede escribir como: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 2^2, 1+2+2^2 +2^3, \dots$. Cada término T_n es la suma de la progresión geométrica $\{2^i\}_{i=0}^n$. Vemos que

$$T_n = 2T_n - T_n = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Ejemplo 2.28

En general, si se desea una fórmula para la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica $\{Aq^i\}$ usamos la ecuación:

$$(q-1)\sum_{i=0}^{n} Aq^i = q\sum_{i=0}^{n} Aq^i - \sum_{i=0}^{n} Aq^i = \sum_{i=1}^{n+1} Aq^i - \sum_{i=0}^{n} Aq^i = Aq^{n+1} - A$$

y entonces obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} Aq^i = \frac{A(q^{n+1}-1)}{(q-1)}$$

Ejemplo 2.29

La Paradoja de Zenón

La fábula de Esopo sobre la liebre y la tortuga, cuenta cómo la veloz liebre perdió la carrera contra la tortuga por sobrestimar sus fuerzas. Zenón de Elea fue más allá e intentó probar "matemáticamente" que Aquiles, de los pies ligeros, nunca podría alcanzar a una tortuga si le daba 10 metros de distancia por más que corriese diez veces más rápido. Su razonamiento era el siguiente: para alcanzar a la tortuga, Aquiles debe recorrer primero los 10 metros de ventaja que la separan, pero cuando los haya cubierto, la tortuga, que corre a un décimo de la velocidad, habrá recorrido un metro. Cuando Aquiles cubra ese metro la tortuga estará 10 centímetros adelante y así siempre que Aquiles recorra la ventaja que le lleva la tortuga, esta habrá avanzado un trecho más y seguirá en ventaja.

Esta paradoja de Zenón, puede explicarse si se entiende que una suma de infinitos términos puede dar un resultado finito. Este es el caso de la suma de todos los términos de una progresión geométrica $\{q^i\}$ de razón $q < 1$. Hemos visto que la suma de los primeros n términos es $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Como a $\frac{1}{1-q}$, le restamos el número positivo $\frac{q^{n+1}}{1-q}$, el resultado siempre va a ser un número menor que $\frac{1}{1-q}$, por más que sumemos todos los términos que se nos antoje.

En el caso de Aquiles supongamos que tarda 10 segundos en hacer 10 metros, entonces tardará un segundo en recorrer el siguiente metro y una décima de segundo los 10 centímetros siguientes. Así, el tiempo empleado en alcanzar a la tortuga no superará $10 + \frac{1}{1-1/10} = 11+\frac{1}{9}$ segundos. En realidad, el tiempo empleado tampoco podrá ser menor y, por lo tanto, será igual a $11\frac{1}{9}$ segundos.

4. Ejercicios

Ejercicio 2.1

Si sabemos que el tercer término de una progresión aritmética es 7 y el séptimo término es 27, ¿cuánto vale el décimo término?

Ejercicio 2.2

Si 13, x, y, z, 25 forman una progresión aritmética, ¿cuál es su razón?

Calcule el promedio de los números de una progresión aritmética que tiene 4 términos, comienza en 7 y termina en 28. | **Ejercicio 2.3**

Calcule el promedio de los números de una progresión aritmética que tiene n términos, comienza en p y termina en f. | **Ejercicio 2.4**

Calcule la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre 20 y 400. | **Ejercicio 2.5**

Muestre que la suma de los números de n dígitos ($n > 2$) es igual a $495 \times 10^{2n-3} - 45 \times 10^{n-2}$. | **Ejercicio 2.6**

¿Puedes descomponer 1.000.000 como producto de dos números que no tengan ningún dígito 0? | **Ejercicio 2.7**

Los años bisiestos son aquellos divisibles por 4 pero no por 100 y los divisibles por 400. | **Ejercicio 2.8**

a) ¿Cuántos años bisiestos habrá entre el 2009 y el 2999?

b) Si el 9 de julio de 2008 fue miércoles, ¿qué día de la semana será el 9 de julio de 2816?

Encuentra dos sucesiones distintas a_n y b_n cuyas derivadas cumplan $a_n' = 2 = b_n'$. | **Ejercicio 2.9**

Encuentra una sucesión a_n cuya derivada cumpla $a_n' = a_n$ | **Ejercicio 2.10**

Calcule las sucesiones P_n y H_n de números pentagonales y hexagonales. | **Ejercicio 2.11**

Si los monjes de las torres de Hanoi tardan 10 segundos para cada traslado, ¿Cuántos minutos tardarán en trasladar los 64 discos? | **Ejercicio 2.12**

Si un supermercado hace un descuento del 15% y pagando con una tarjeta de débito, el banco nos devuelve un 10% del monto pagado al supermercado, ¿cuál es el porcentaje total de descuento que recibo? | **Ejercicio 2.13**

Si cada artículo que compramos tiene incluido 21% de IVA (impuesto al valor agregado), pero pagando con tarjeta de débito, el estado nos devuelve 5 puntos de IVA, ¿cuál es el porcentaje de lo pagado por el artículo que recibo? | **Ejercicio 2.14**

Ejercicio 2.15 Si los sueldos docentes aumentan 10% en marzo y 9% en setiembre ¿cuál es el porcentaje total de aumento que recibo?

Ejercicio 2.16 Usando inducción completa como en 2.1 probar que una progresión geométrica $\{a_n\}$ cumple $a_n = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(n-1)}$.

Ejercicio 2.17 Decida si las siguientes ternas pertenecen a alguna progresión geométrica de números enteros.

a) $\{2, 12, 20\}$

b) $\{3, 12, 24\}$

Ejercicio 2.18

a) Calcule los 15 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

b) Muestre la aproximación del undécimo mediante b_{11}, el correspondiente término de la progresión geométrica dada por la razón áurea.

Ejercicio 2.19 ¿Cuánto miden los lados de un triángulo de Kepler si uno de ellos mide un decímetro? Analizar todas las posibilidades.

Ejercicio 2.20 ¿Cuánto tardaría Aquiles en alcanzar a la tortuga si fuera 20 veces más rápido que ella y corriese a una velocidad de un metro por segundo?

Ejercicio 2.21 ¿Cuántos años tardará un capital en duplicarse si está depositado y crece a una tasa del 12% anual?