Solución de los ejercicios

Capítulo 2

Ejercicio 2.1
Usamos la fórmula $a_n = a_1+(n-1)R$. El enunciado nos dice que $7 = a_3 = a_1+(3-1)R$ y $27 = a_7 = a_1 + (7 - 1)R$. Luego $27 - 7 = a_7 - a_3 = (6 - 2)R$. Así tenemos que $20 = 4R$, es decir $R = 5$, por lo cual $7 = a_1 + 2 \times 5$ y se tiene que $a_1 = -3$. Finalmente, $a_{10} = a_1 + 9R = -3 + 9 \times 5 = 42$.

Ejercicio 2.2
Dada una progresión aritmética $\{a_n\}$, la sucesión que se obtiene descartando los primeros k términos, también forma una progresión aritmética. Entonces podemos suponer en este caso que $a_1 = 13$ y $a_5 = 25$, luego $25 - 13 = a_5 - a_1 = 4R$, de donde obtenemos que la razón debe ser $R = 12/4 = 3$.

Ejercicio 2.3
Calculamos como en el ejercicio anterior y obtenemos la razón $R = 7$. Luego el promedio será: $P = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4 = (7 + 14 + 21 + 28)/4 = 35/2$.

Ejercicio 2.4
Primero calculamos el promedio P en términos de a_1 y R:

$$P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_1 + (j-1)R) = \frac{1}{n}(na_1 + \frac{n(n-1)}{2}R) = a_1 + \frac{n-1}{2}R$$

De las hipótesis obtenemos que $a_1 = p$ y $R = (f-p)/(n-1)$. Reemplazamos y simplificamos.

Entonces $P = p + (f - p)/2 = (p + f)/2$. Observemos que es independiente de n.

Verifiquemos que usando esta fórmula en el ejercicio anterior obtenemos el mismo resultado:

$$p = 7, f = 28 \text{ luego, } P = (7 + 28)/2 = 35/2$$

Ejercicio 2.5

Vemos que el primer múltiplo de 13 que es mayor que 20 es 26 = 13 × 2 y el mayor múltiplo de 13 que es menor que 400 es 390 = 13 × 30. Debemos calcular entonces la suma S de 13 × 2, 13 × 3, . . . , 13 × 30:

$$S = \sum_{j=2}^{30} 13j = 13(\frac{30(30+1)}{2} - 1) = 6.032$$

Ejercicio 2.6

Para demostrar la afirmación notemos que los números de n dígitos están comprendidos entre el 10^{n-1} y el $10^n - 1$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j=10^{n-1}}^{10^n-1} j &= \frac{(10^n-1)10^n}{2} - \frac{(10^{n-1}-1)10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^n}{2} - \frac{10^{2n-2}-10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^{2n-2}}{2} - \frac{10^n-10^{n-1}}{2} \\
&= 10^{2n-3}(\frac{10^3-10}{2}) - 10^{n-2}(\frac{10^2-10}{2}) \\
&= 10^{2n-3}495 - 10^{n-2}45
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.7

Los únicos factores de 10^6, son productos de potencias de 2 y potencias de 5. Cada vez que usamos un dos y un cinco aparecerá un factor diez y por lo tanto un cero. Por lo tanto la única combinación que no produce ceros es: $10^6 = 5^6 \times 2^6 = 15.625 \times 64$

Ejercicio 2.8

a) Dividimos por 4 y tenemos 2009 = 4×502+1 y 2999 = 4×749+3, de donde vemos que los años bisiestos serán: 4 × 503, 4 × 504, . . . , 4 × 749 menos los 7 que son divisibles por 100 pero no por 400. Así tenemos 749 − 502 − 7 = 240 años bisiestos.

b) Como 365 = 7×52+1 y 366 = 7×52+2, cada año que pasa, el día se corre en dos o uno según sea o no bisiesto. Así, en 808 años se correrá en 808 más la cantidad de bisiestos entre 2009 y 2816 (2008 no cuenta pues julio viene después de febrero). Tenemos así un corrimiento de 808 + 196 = 1.004 = 7 × 143 + 3. Quiere decir que se correrá en tres días.

   El 9 de julio de 2816 será entonces sábado.

Ejercicio 2.9

La hipótesis nos dice que se trata de dos progresiones aritméticas de razón $R = 2$. Podemos tomar, por ejemplo, $\{a_n\}$ la sucesión de los números pares y $\{b_n\}$ la de los impares.

Ejercicio 2.10
En este caso tenemos $a'_n = a_{n+1} - a_n$, por lo tanto $a_{n+1} = 2a_n$. Podemos tomar, por ejemplo, $a_n = 2^n$.

Ejercicio 2.11

$$\begin{aligned} P_n = \sum_{j=1}^{n}(3j+1) &= 3n(n+1)/2 + n \\ &= n(3n+5)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n = \sum_{j=1}^{n}(4j+1) &= 4n(n+1)/2 + n \\ &= n(2n+3) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.12
Tenemos en total $10T_n/60 = 10(2^{65} - 1)/60 = (2^{65} - 1)/6$ minutos.

Ejercicio 2.13
De \$ 100 en mercadería pagamos \$ 85 y el banco nos devuelve \$ 8,5. Por lo tanto pagamos \$ 76,5 en lugar de \$ 100, es decir un 23,5% de descuento.

Ejercicio 2.14
Si el artículo nos costase \$ 121 serían \$ 100 más 21% de IVA y el gobierno nos devolvería \$ 5 de los \$ 121 pagados. Esto es, pagaríamos \$ 116 de los 121 abonados en el comercio, lo cual da un 95,87% .

Ejercicio 2.15
Si ganaban \$ 100 en marzo ganarán \$ 110 y en setiembre \$ 110 + \$ 9,9, es decir, \$ 119,9. Esto da un aumento total del 19,9 %.

Ejercicio 2.16
Probaremos la fórmula por inducción. La fórmula es verdadera para $n = 1$:

$$a_1 = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(1-1)}$$

Asumiendo que vale para $n = k$ veamos que vale para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = qa_k = qa_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(k-1)} = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(k+1-1)}$$

donde en la última igualdad usamos que $q = a_2/a_1$.

Ejercicio 2.17

a) Los cocientes deben ser potencias de q : $12/2 = 6 = q^k$ y $20/2 = 10 = q^j$ como q divide a ambos, debería ser $q = 2$ pero 6 no es potencia de 2, por lo tanto la terna no puede formar parte de una progresión geométrica de enteros.

b) Aquí $12/3 = 4 = q^k$ y $24/12 = 2 = q^j$, podemos tomar $q = 2$, $k = 2$, $j = 1$ y la terna forma parte de $\{3, 6, 12, 24, \ldots\}$.

Ejercicio 2.18

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, 232, 375, 607

b) $\varphi^{11}/\sqrt{5} \sim 88,997755$

Ejercicio 2.19

La longitud de los lados, $a < a\sqrt{\varphi} < a\varphi$, expresada en decímetros puede ser: $(1, \sqrt{\varphi}, \varphi)$; $(1/\sqrt{\varphi}, 1, \sqrt{\varphi})$ o $(1/\varphi, 1/\sqrt{\varphi}, 1)$. Los tres casos se obtienen tomando $a = 1$, $a\sqrt{\varphi} = 1$ y $a\varphi = 1$ respectivamente.

Ejercicio 2.20

Aquiles tardará 10 segundos en hacer los primeros 10 metros, en ese lapso la tortuga recorrió medio metro, que Aquiles recorrerá en 0,5 segundos. Así tardará en alcanzarla $10 + 0,5 + 0,025 + \cdots = 10(1/(1 - 1/20)$ segundos. Esto es 10,526316 segundos.

Ejercicio 2.21

Debemos resolver la ecuación $2 = (1,12)^n$. Es decir $n = \log 2/\log(1,12) = 6,1162$. Aproximadamente seis años y un mes.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1

a) En este caso la tasa interés aplicada es mensual e igual a $r = 0,05 = 5\%$. Puesto que 1 año = 12 meses, se tiene que $m = 12$ y la tasa equivalente anual es entonces T.E.A.= $(1,05)^{12} - 1 = 0,79585\%$.

b) La unidad de tiempo es el bimestre, y puesto que 1 año = 6 bimestres se tiene que la tasa interés bimestral aplicada es $r = 0,10 = 10\%$. La tasa equivalente anual es T.E.A.= $(1,10)^6 - 1 = 0,77156\%$.

Ejercicio 3.2

Dado que el interés periódico o real aplicado es trimestral, y que un año equivale a 4 trimestres, se denotará $r^{(4)}$ a la tasa nominal anual. La tasa trimestral aplicada es $r = r^{(4)}/4$.

La tasa de interés anual equivalente a r es del 15 %. Esto significa que

$$(1 + \frac{r^{(4)}}{4})^4 = 1 + 0{,}15$$

de donde puede despejarse el valor de la tasa nominal anual: $r^{(4)}$ = 0,1422 = 14,22%. La tasa trimestral equivalente a 0,15 que rige la operación es entonces $r = r^{(4)}/4$ = 0,034 = 3,4%.

Ejercicio 3.3

El interés aplicado es del 0,25 %, es decir, r = 0,0025. Según las diferentes opciones, el capital final es:

Opción 1. $1.000\ (1{,}0025)^2\ (1 + 0{,}0025/2) = 1.006{,}26251$

Opción 2. $1.000\ (1{,}0025)^{2{,}5} = 1.006{,}26172$

Opción 3. $1.000\ (1{,}0025)^2 = 1.005{,}00625$

Ejercicio 3.4

Los elementos a tener en cuenta son C_I = 2.500, C_F = 2.550, n = 5. La tasa mensual r relaciona estas cantidades según la fórmula de interés simple:

$$2.550 = 2.500\ (1 + 5.\ r)$$

Por lo tanto

$$5\ .r = \frac{2.550}{2.500} - 1 \qquad \text{es decir} \qquad \boxed{r = 0,004 = 0{,}4\%}$$

Para determinar el capital final al cabo de los 8 meses, se aplica la fórmula

$$C_F = 2.500\ (1 + 8 \cdot 0{,}004)$$

que arroja un resultado de $ 2.580.

Ejercicio 3.5

Salvo que se exprese lo contrario, se asumirá un tipo de interés compuesto. En este caso los datos son C_I=20.000, r = 0,15% y n = 2. La fórmula a aplicar es $C_F = C_I\ (1 + r)^2$.

El capital final así obtenido es de $ 20.060.045.

Ejercicio 3.6

Si r es la tasa semestral, entonces la T.N.A. es $r^{(2)}$ = 0,1, por lo que $r = r^{(2)}/2$ = 0,05 = 5%. La capitalización durante tres años arroja un capital final en pesos igual a

$$C_F = 59.500\ (1{,}05)^3 = 68.878{,}6875$$

por lo que el interés obtenido es de $ 9.378,69. Se han redondeado los decimales a dos dígitos, considerando que la unidad monetaria mínima es el centavo.

Ejercicio 3.7
La tasa trimestral r es del 2,5 %, es decir, r = 0,025. Los elementos a tener en cuenta son C_F = 105.600, n = 26 (26 trimestres), y la fórmula que relaciona los datos y incógnita es la del interés compuesto.

La solución al problema es que debe depositarse un capital de $ 55.570,39.

Ejercicio 3.8
Dado que un mes equivale a 30 días, la fórmula aplicada es

$$5.304{,}50 = 5.000\ (1 + r)^2$$

De aquí se obtiene que r = 0,03, lo que corresponde a una tasa del 3% mensual.

Ejercicio 3.9
Este problema es similar al del Ejemplo 3.16. La solución es 25 meses, es decir, 2 años y un mes.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1
El plazo de la operación, esto es, el tiempo que transcurre desde el 4 de setiembre al 22 de octubre, es de 48 días. El equivalente en meses es 1,6 meses. La tasa mensual de descuento es d = 2% = 0,02, por lo que el valor efectivo E, calculado según el descuento simple racional es

$$E = \frac{N}{1 + dt} = \frac{2.730}{1 + 0{,}02 \cdot (1{,}6)} \simeq \$\ 2.645{,}35$$

y si se calcula según el descuento comercial es

$$E = N\,(1 - dt) = 2.730\,(1 - 0{,}02 \cdot (1{,}6)) = \$\ 2.642{,}64$$

Nótese que el valor descontado según el descuento racional es mayor que por el descuento comercial.

Ejercicio 4.2
En esta situación se considera que la unidad de tiempo es 90 días. Por lo tanto, la tasa de descuento es

$$d = \frac{d^{(4)}}{4} = \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675 = 6{,}75\%$$

Entonces, el descuento sobre el documento es por 10 752 · 0,0675 = 725,76, y el efectivo a cobrar es 10.752 − 725,76 = $ 10.026,24.

La tasa de interés para los 90 días es

$$r = \frac{d}{1-d} = 0{,}0724 = 7{,}24\%$$

por lo que la T.E.A. es igual a

$$r_4 = (1{,}0724)^4 - 1 = 0{,}322 = 32{,}2\%$$

La tasa de descuento equivalente anual está dada por

$$d_4 = 1 - (1-d)^4 = 0{,}244 = 24{,}4\%$$

que también podría calcularse a partir de la T.E.A.: $d_4 = \frac{r_4}{1+r_4} = \frac{0{,}322}{1{,}322} = 0{,}244 = 24{,}4\%$.

Si la tasa nominal anual fuera del 23%, entonces la tasa de interés para 90 días sería del 6.25 %. Esto equivale a una tasa de descuento para 90 días de

$$d = \frac{0{,}0625}{0{,}9375} = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

Para obtener un valor efectivo de $ 10.026,24 para esta tasa de descuento, el valor nominal N deberá cumplir

$$N \cdot (1 - 0{,}067) = 10.026{,}24 \qquad \text{es decir} \qquad N = \frac{10.026{,}24}{0{,}933} = \$\ 10.746{,}24$$

Ejercicio 4.3

Si el descuento es simple comercial, entonces el valor efectivo se obtiene restando al valor nominal el proporcional a 78 días. Como la tasa es trimestral, se debe expresar el tiempo en términos de trimestres: 78 días = $\frac{78}{90}$ = 0,87 trimestres. Luego el valor nominal cumple que:

$$890 = N \cdot (1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

de donde sale que

$$N = \frac{890}{1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 957{,}47$$

Si el descuento es simple racional, entonces la fórmula a aplicar es

$$890 = N \cdot (1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

por lo cual

$$N = \frac{890}{1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 831{,}41.$$

Ejercicio 4.4
Sea N el valor nominal del cheque. Se sabe que el descuento D cumple $D = N/6$, y por lo tanto el valor efectivo es $E = 5/6N$. Como el tipo de descuento es racional se tiene que

$$\frac{5}{6}N = \frac{N}{1+8\,d}$$

Por lo tanto, la tasa de descuento mensual cumple

$$1 + 8\,d = 1{,}2 \qquad \text{que implica } d = \frac{0{,}2}{8} = 0{,}025 = 2{,}5\%.$$

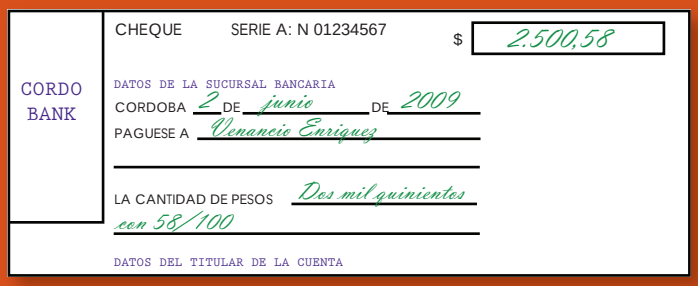
Capítulo 5

Ejercicio 5.1
Los distintos elementos que aparecen en el cheque son:

- SuBanco: banco en el que radica la cuenta bancaria.
- Domicilio del banco.
- 31 de mayo: fecha en la que se libra el cheque.
- 26 de noviembre de 2007: fecha a partir de la cual puede cobrarse el cheque. Este campo no aparece en un cheque común, ya que el mismo puede cobrarse inmediatamente.
- María Susana del Valle: nombre del portador del cheque.
- Juan Carlos Gonzalez: titular de la cuenta. También se indica su número de cuenta corriente, dirección y número de CUIT: 20-00000000-5.
- $ 1.256.71: monto del cheque, escrito en números. También el cheque posee un espacio para escribirlo en letras: mil doscientos cincuenta y seis con 70/100.
- Dorso del cheque: nombre, DNI, domicilio y firma del beneficiario del cheque.

Ejercicio 5.2
El cheque debe completarse según muestra la siguiente figura:

Ejercicio 5.2


CHEQUE SERIE A: N 01234567 $ 2.500,58
CORDO BANK
DATOS DE LA SUCURSAL BANCARIA
CORDOBA 2 DE junio DE 2009
PAGUESE A Venancio Enriquez
LA CANTIDAD DE PESOS Dos mil quinientos con 58/100
DATOS DEL TITULAR DE LA CUENTA

Ejercicio 5.3
Los datos que pueden identificarse son:

- fecha y hora de emisión del comprobante: 2 de mayo de 2009, a las 10:12:42.
- denominación de la tarjeta de débito: MAESTRO.
- denominación de la entidad en la que se ha efectuado la compra: TIENDAS S.A., junto con su dirección y CUIL.
- importe de la compra: $ 156,86
- tipo de cuenta: C.A. $, (Caja de Ahorro en pesos).
- número de factura a la que corresponde la transacción: 0000-00000000

Ejercicio 5.4
Pueden identificarse los siguientes elementos.

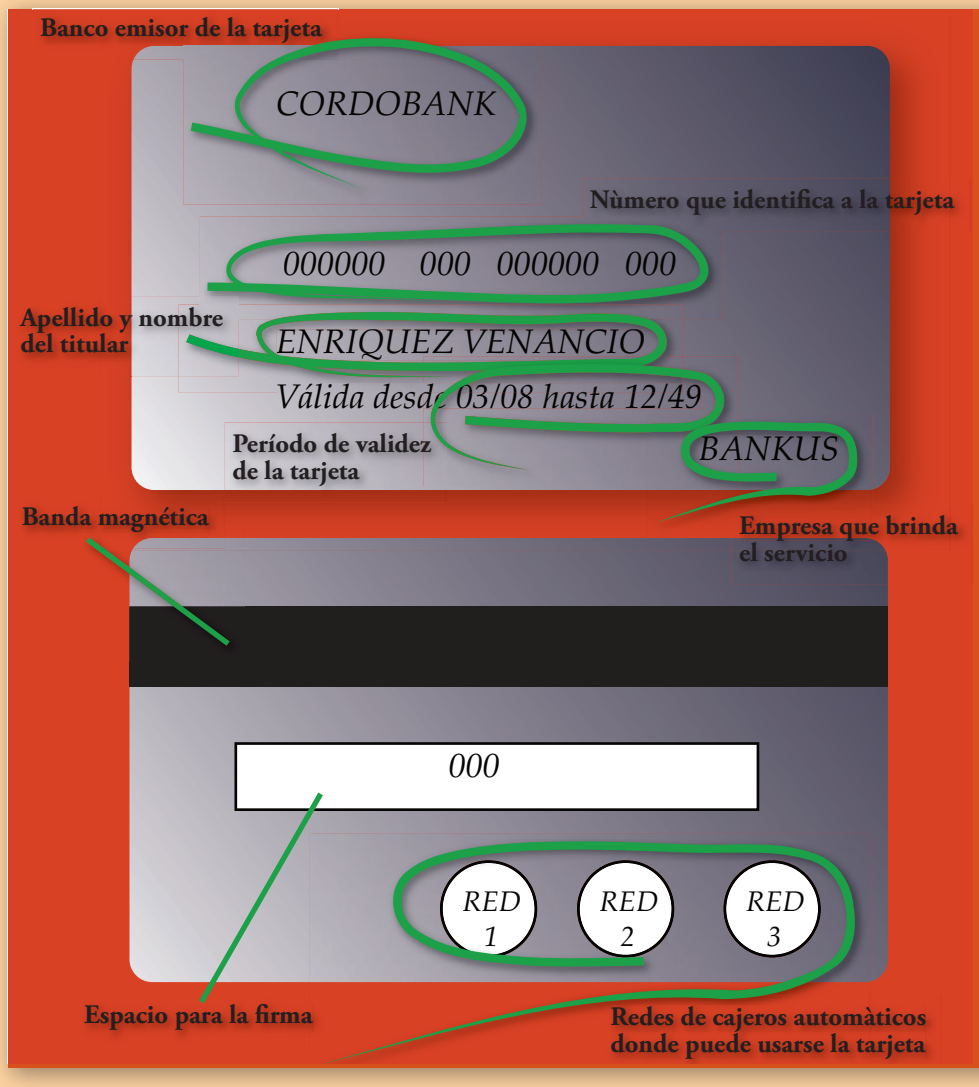


Figura 5.4

Datos en una tarjeta de débito

Capítulo 6

Ejercicio 6.1
La fórmula aplicar es $V_F = 3.000 \cdot s_{\overline{7}|r}$, para $r = 0{,}08$, $r = 0{,}1075$ y $r = 0{,}1729$. Las soluciones son, respectivamente: (a) \$ 26.768,41, (b) \$ 29.125,07 y (c) \$ 35.633,96.

Ejercicio 6.2
La situación de Juan es equivalente a tener que pagar el capital acumulado por una renta de 5 cuotas vencidas, iguales a c = \$ 250, sujetas a una tasa de interés $r = 0{,}144/12 = 0{,}012 = 1{,}2\%$. Por lo tanto, Juan deberá pagar en el siguiente mes un total en pesos de:

$$250\, s_{\overline{50}|,012} = 250 \frac{(1{,}012)^5 - 1}{0{,}012} = 1.280{,}36$$

es decir \$ 1.280,36.

Ejercicio 6.3
En este caso se enuncia una tasa nominal anual del 8% con capitalización trimestral. Esto significa que la tasa real aplicada es del 2% trimestral. Dado que cada año es de 4 trimestres, el número total de cuotas al cabo de 10 años es 40. La fórmula a aplicar es

$$10.\,000 = c \cdot s_{\overline{40}|0,02}$$

de donde puede despejarse el valor de c: $c = 165{,}56$, aproximadamente.

Si al cabo de 4 años el banco cambia su tasa al 6%, entonces la tasa trimestral será del 1,5%. Ahora bien, al cabo de los 4 años se ha formado un capital V_1 igual a

$$V_1 = 165{,}56 \cdot s_{\overline{16}|0,02} = \$\ 3.085{,}92$$

Este capital, capitalizado durante 6 años más arroja un valor final igual a $V_2 = 3.085{,}92 \cdot (1{,}015)^{24} = 4411{,}33$, es decir que faltan $10.000 - 4411{,}33 =$ \$ 5. 588,67.

Por lo tanto, la renta de los últimos 6 años deberá ser tal que capitalizada, a una tasa de interés de 0,015 trimestral arroje un valor final de \$ 5.588,67. La fórmula a plantear es la siguiente:

$$5.\,588{,}67 = c_1 \cdot s_{\overline{24}|,0,015}$$

que da como resultado una cuota de \$ 195,18. Claramente, la cuota debe ascender puesto que la tasa de interés es menor.

Resumiendo, el Sr. Martínez deberá pagar 16 cuotas de \$ 165.56 y luego 24 cuotas iguales a \$ 195,18.

Ejercicio 6.4

En este caso se desconoce el número n de cuotas y la tasa de interés r a la que está sujeta la renta. Los datos se relacionan según las fórmulas:

$$5.000 \cdot a_{\overline{n}|r} = 62.311,05171 \qquad \text{y} \qquad 5.000 \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r} = 65.425,50430$$

siendo $a_{\overline{n}|r} = \dfrac{1-\nu^n}{r}$.

Despejando de ambas fórmulas $a_{\overline{n}|r}$ e igualando las expresiones resultantes, se tiene:

$$\frac{62.311,05171}{5.000} = \frac{65.425,50430}{5.000 \cdot (1+r)}$$

de donde resulta r = 0,05 = 5%, aproximadamente, y $a_{\overline{n}|r}$ = 12,46221034. Así,

$$\frac{1-(1{,}05)^{-n}}{0{,}05} = 12{,}46221034 \qquad \text{es decir} \qquad n = 20.$$

En resumen, la tasa es del 5% anual y la renta es de 20 cuotas.

Ejercicio 6.5

Se tiene una renta de cuotas constantes y vencidas de valor c = \$ 1.000. La tasa de interés mensual es del 3 %, es decir, r = 0,03. El valor final V_F se obtiene aplicando la fórmula $V_F = c \cdot s_{\overline{6}|0{,}03}$.

El cálculo a efectuar es:

$$1.000 \cdot s_{\overline{6}|0{,}03} = 1.000 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} = 1.000 \cdot 6{,}46841 = \$\ 6.468{,}41$$

es decir que el valor acumulado es de \$ 6.468,41.

Ejercicio 6.6

El valor del electrodoméstico es igual al valor del pago inicial sumado al valor actual de la renta. La tasa de interés mensual es r = 0,27/12 = 0,0225 = 2,25%. La renta es de 8 cuotas vencidas, y la última cuota difiere de las siete primeras. Así, el valor actual de esta renta está dada por:

$$V_A = 160 \cdot a_{\overline{7}|0{,}0225} + 230 \cdot \frac{1}{1{,}0225^8} = 1218{,}14$$

Luego, el valor del electrodoméstico es \$ 1.400 + \$ 1.218,15, es decir \$ 1.618,14.

Ejercicio 6.7

Para comparar las tres ofertas se debe calcular el valor de cada una en un determinado momento, y elegir la de menor valor. Una posibilidad es calcular el valor al momento de hacer la compra.

Para el caso (a), el valor es \$ 40.000.

Para el caso (b), el valor en pesos es 19.000 + 5.000 · $a_{\overline{5}|0,04}$ = $ 41.259,11162, es decir que es menos conveniente que (a).

Para (c) hay una renta de cuotas anticipadas más un último pago. La tasa sobre la renta es del 2% trimestral, por lo que el valor del auto según esta oferta es 2.000 · 1,02·$a_{\overline{9}|0,02}$+25. 000· $\frac{1}{1,02^4}$ = $ 39.747,10.

Por lo tanto, la opción más conveniente es la (c).

Ejercicio 6.8

Para que las rentas sean equivalentes, el valor final al primer año de la renta de cuotas mensuales anticipadas debe ser de $ 8.000. La ecuación a plantear es entonces

$$8.000 = c \cdot 1{,}09 \cdot s_{\overline{12}|0,09}$$

donde *c* es el valor de la cuota mensual. Despejando *c* se obtiene *c* = $ 364,41

Ejercicio 6.9

Se trata de una renta de cuotas anuales vencidas de $ 20.000, diferida en 5 años. El valor presente está dado por:

$$V_A = \frac{1}{1{,}06^5} \cdot 20.000 \cdot a_{\overline{25}|0,06} = 191.049{,}3473$$

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

El sistema de amortización aplicado es el francés, puesto que todas las cuotas son iguales. En primer lugar, se debe calcular el número de cuotas. Puesto que $V = c\ a_{\overline{n}|r}$, se tiene que

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{1.000.000}{162.745{,}40} = 6{,}1445669$$

que corresponde a *n* = 10.

Si el préstamo fue concedido hace 5 años, para cancelar la deuda el deudor deberá pagar la quinta cuota conjuntamente con el valor actual de las cinco cuotas restantes. Este último es igual a:

$$V_A^{(5)} = 162.745{,}40 \cdot a_{\overline{5}|0,1} = 616.933{,}11$$

<u>Conclusión</u>

El deudor deberá pagar $ 616.933,11 + $ 162.745,40 = $ 779.678,51.

Ejercicio 7.2

Para resolver este ejercicio no es necesario construir toda la tabla de amortización, aunque sí es una forma posible. Las soluciones son las siguientes:

1. Se obtiene resolviendo $c = V/a_{\overline{n}|r}$, para $V = 1.000.000$, $n = 4$ y $r = 0{,}1$. La respuesta es $c = 315.470{,}8037$.

2. Al comenzar el tercer año, se paga la segunda cuota, y se adeudan la tercera y cuarta cuota. Por lo tanto, el monto adeudado está dado por:

$$V_A^{(2)} = 315.470{,}8037 \cdot a_{\overline{2}|0,1} = \$\ 547.511{,}3122$$

3. Las cuotas de amortización reales están dadas por $v_i = c \cdot \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}}$. Por lo tanto, la tercera cuota de amortización real es:

$$v_3 = 315.470{,}8037 \cdot \frac{1}{(1{,}1)^2} = \$\ 260.719{,}6725$$

4. Las cuotas de interés son iguales a $s_i = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}})$. Por lo tanto, la cuarta cuota de interés es igual a:

$$s_4 = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)}) = \$\ 28.679{,}16$$

5. El capital amortizado en los tres primeros años es igual al monto del préstamo menos la cuarta cuota de amortización. Dado que $v_4 = c - s_4$, entonces

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1.000.000 - (315.470{,}8037 - 28.679{,}16) = \$\ 713.208{,}3563.$$

Ejercicio 7.3

Se tiene que el valor de la i-ésima cuota de amortización es $v_i = c\,\nu^{n+i-1}$, con $\nu = 1/1{,}1$, donde n es el número de cuotas y c es el valor de la cuota total. Por lo tanto, la última cuota de amortización está dada por $v_n = c \cdot \nu$. Conocido el valor de v_n, es posible obtener el valor de c:

$$c = \frac{v_n}{\nu} = 1.479{,}504 \cdot 1{,}1 = \$\ 1.627{,}4544$$

El valor del préstamo se relaciona con el valor de la cuota por la fórmula $V = c \cdot a_{\overline{n}|r}$, de donde puede despejarse el valor de $a_{\overline{n}|r}$:

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{10.000}{1.627{,}4544} = 6{,}1445$$

Esto dice que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{(1{,}1)^n}}{0{,}1} &= 6{,}1445 \\ 1 - 0{,}61445 &= \frac{1}{(1{,}1)^n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1{,}1)^n &= \frac{1}{0{,}38555} \\
n\log(1{,}1) &= -\log(0{,}38555)
\end{aligned}
$$

A este punto, puede utilizarse un logaritmo de cualquier base. Para el caso del logaritmo natural se obtiene $c = \frac{-0{,}9530}{0{,}0953} = 10$. Es decir que el número de cuotas de la anualidad es $n = 10$.

Ejercicio 7.4

Para resolver este ejercicio puede confeccionarse el cuadro de amortización y buscar los datos pedidos en el problema, o bien utilizar las fórmulas correspondientes que se derivaron en este capítulo. Es conveniente utilizar la segunda alternativa ya que implica menor número de cálculos y en consecuencia es menor el tiempo de resolución y disminuye la probabilidad de error en las cuentas.

Se trata de un sistema de amortización alemán, ya que las cuotas de amortización son constantes.

Esto indica que cada cuota de amortización es igual a la décima parte del préstamo: $v_i = 1.000$, para $i = 1, 2, \ldots, 10$. La capitalización es semestral, por lo que la tasa de interés por semestre es

$$r = \frac{r^{(2)}}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 = 5\%$$

El pago del octavo semestre es la suma de la cuota de amortización más los intereses sobre el saldo adeudado. Con la séptima cuota se habrán pagado \$ 7.000 del préstamo, por lo que el saldo es de \$ 3.000. Esto implica que en el octavo semestre se pagará una cuota de interés igual a $s_8 = 3.000 \cdot 0{,}05 = 1.500$. Por lo tanto el pago será de \$ 1.000 + \$ 1.500 = \$ 2.500.

El capital adeudado luego de pagar la segunda cuota es 8/10 del préstamo, es decir \$ 8.000.

Ejercicio 7.5

En este caso se trata de un sistema de amortización francés con tasa mensual del 1,25 %. Cada cuota tiene un valor $c = 85.000/a_{\overline{18}|0{,}0125} = \$\ 5.302{,}71$.

a) El Sr. Domínguez no ha pagado la cuota 10, y de la cuota 11 sólo paga los intereses. Eso significa que al momento del pago de la cuota 12 adeuda:

   1. una cuota $c = v_{10} + s_{10}$, correspondiente a la cuota 10, de dos meses atrás,
   2. la cuota v_{11} de un mes atrás,
   3. la cuota 12.

   Lo adeudado en las cuotas 10 y 11 debe ser capitalizado dos meses y un mes, respectivamente;por lo que se deberá pagar sobre esta deuda la can-

tidad $c \cdot 1{,}0125^2 + v_{11} \cdot 1{,}0125$. Usando que $v_i = c \cdot \nu^{n+1-i}$, siendo n el número de cuotas y $\nu = 1/1{,}0125$, se tiene que la deuda es de

$$5.302{,}71 \cdot (1{,}0125^2) + 5.302{,}71 \cdot \frac{1}{1{,}0125^{16-11}} = 10.352{,}46$$

es decir de \$ 10.352,46.

Por otro lado, corresponde pagar también la cuota 12, cantidad que debe sumarse a lo anterior.

Así, para regularizar su deuda, el Sr. Domínguez debe pagar 10.352,46 + 5.302,71 = \$ 15.655,17.

b) Si en cambio el Sr. Domínguez desea disminuir el valor de las cuotas 10 a 18 en un 10 %, entonces junto con la cuota 9 deberá pagar el valor actual del 10% de la anualidad restante, o lo que es lo mismo, el 10% de dicho valor actual.
Como restan pagar 9 cuotas, el valor actual de la anualidad restante es $V^{(9)} = 5.302{,}71 \cdot a_{\overline{9}|0{,}0125} = 44.873{,}36$, por lo cual el Sr. Domínguez deberá hacer un pago extraordinario de \$ 4.487,34.

Ejercicio 7.6

Dado que las cuotas decrecen en progresión aritmética, se trata de un sistema de amortización alemán. La razón de la progresión es $h = -200$, y a su vez $h = -r \cdot X/n$, donde $r = 0{,}08$ y $n = 10$. Por lo tanto

$$X = \frac{10 \cdot 200}{0{,}08} = \$\ 25.000$$

Las componentes del cuadro de amortización en el séptimo año son:

1. cuota de amortización: $v_7 = 25.000/10 = \$\ 2.500$;
2. cuota de intereses: $s_7 = 4 \cdot 2.500 \cdot 0{,}08 = \$\ 800$;
3. cuota total: $c_7 = v_7 + s_7 = \$\ 3.300$;
4. saldo adeudado: $V^{(7)} = 3 \cdot 2.500 = \$\ 7.500$.

Ejercicio 7.7

Este caso tiene la particularidad de no tener cuotas equiespaciadas en el tiempo. Por lo tanto no pueden emplearse las fórmulas que se derivaron para el sistema alemán, y conviene entonces construir un cuadro de amortización.

Las cuotas de amortización son de \$ 1.000, así que las cuotas de intereses serán sobre \$ 3.000 la primera, sobre \$ 2.000 la segunda y sobre \$ 1.000 la tercera.

Las tasas equivalentes al 2% cada 30 días son: a) del $(1{,}02)^3 - 1 = 0{,}061$ a 90 días, b) del $(1{,}02)^{31/30} - 1 = 0{,}0206$ a 31 días y c) $(1{,}02)^{32/30} - 1 = 0{,}0213$ a 32 días. Estas tasas serán las que se aplicarán sobre el saldo adeudado a lo largo de los tres períodos, respectivamente:

Cuadro C.4

Tabla de valores de r / $((1 + r)^n - 1) / r$

Pago a los	Capital adeudado a l comienzo del período	Intereses a pagar	Amortizació real a pagar	Cuota a pagar
90 días	$ 3.000	3.000 · 0,061 = 183	$ 1.000	$ 1.183
121 días	$ 2.000	2.000 · 0,0206 = 41,20	$ 1.000	$ 1.041,20
153 días	$ 1.000	1.000 · 0,0213 = 21,30	$ 1.000	$ 1.021,30

Capítulo 8

Ejercicio 8.1

a) Para comparar debemos calcular el valor actual de ambas posibilidades: en el caso del pago al contado su valor actual es $ 10.000. En la segunda opción tenemos que la tasa de descuento semestral es del 7,5 %, entonces:

$$VA = 5.000 + 2.500(1,075)^{-1} + 2.500(1,075)^{-2} + 2.500(1,075)^{-3} = \$\ 11.501,31$$

Vemos que la segunda opción será preferible ya que nos da un mayor valor actual.

b) En este caso la tasa de descuento semestral es del 12% y debemos recalcular el valor de la segunda opción:

$$VA = 5.000 + 2.500(1,12)^{-1} + 2.500(1,12)^{-2} + 2.500(1,12)^{-3} = \$\ 11.004,58$$

En este caso seguimos prefiriendo la segunda opción.

Ejercicio 8.2

a) Si llamamos r a la tasa de descuento semestral que hace equivalentes a ambas ofertas, tenemos la ecuación:

$$10.000 = 5.000 + 2.500(1 + r)^{-1} + 2.500(1 + r)^{-2} + 2.500(1 + r)^{-3}$$

Vemos entonces que r corresponde a la TIR del flujo (—5.000, 2.500, 2.500, 2.500), esto es, 23,3752% .

b) En este caso si llamamos P al pago inicial tenemos la ecuación:

$$10.000 = P + 2.500(1,12)^{-1} + 2.500(1,12)^{-2} + 2.500(1,12)^{-3} = P - 5.000 + 11.004,58$$

De donde obtenemos: $P = \$\ 3.995,42$

Ejercicio 8.3

Un bono de $ 100 como en el ejemplo, cuando es comprado por su valor nominal produce el flujo (—100, 7, 7, 107). Si lo compramos al 50% tendremos el flujo (—50, 7, 7, 107). Debemos calcular la TIR de este flujo y eso nos da r = 37,45%

Ejercicio 8.4

a) El cálculo de la TIR no cambiará si dividimos todos los términos del flujo de caja de la inversión por 100. Así basta calcular la TIR del flujo:

(—100, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)

Que da como resultado 5% semestral.

b) En este caso tenemos el flujo:

(—90, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)

que tiene una tasa interna de retorno de 5,8621 %.

c) Aquí calculamos la TIR del flujo:

(—105, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)

que da 4,6112 %.

Ejercicio 8.5

a) Podemos calcular la cuota con la fórmula: $c = 100.000 / ((1 - 1{,}05^{-20}) / 0{,}05)$. Esto nos da c = 8024, 26

b) Si usamos la ecuación $R_k = c(1 - (1 + r)^{k-n})/r$ que fue desarrollada en el texto, tenemos:

$$R_6 = 8.024{,}26(1 - 1{,}05^{-14})/0{,}05 = 79.429{,}26$$

por lo tanto después de pagar la sexta cuota debemos aún $ 79.429,26.

c) Para obtener el usufructo U_6 usaremos las ecuaciones desarrolladas en el texto:

$$\begin{aligned} U_6 + N_6 &= c\sum_{j=1}^{20-6}(1+0,03)^{-j} \\ \frac{0,03}{0,05}U_6 + N_6 &= R_6 \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que la tasa semestral de mercado es de 3 %. Reemplazamos c y R_6 por los valores obtenidos en el inciso anterior y restamos miembro a miembro las igualdades y obtenemos:

$$(1-\frac{0,03}{0,05})U_6 = 8024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,03)^{-j} - 79.429,26$$

Así tenemos que U_6 = 2,5(8024,26 × 11,296 − 79.429,26) = $ 28.033,40 es el usufructo buscado.

d) En este caso, consideramos la fórmula usada en el inciso anterior y realizamos el cambio de 0,03 por 0,075% :

$$(1-\frac{0,075}{0,05})U_6 = 8.024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,075)^{-j} - 79.429,26$$

Entonces tenemos que U_6 = −2(8.024,26 × 8,49 − 79.429,26) = $ 22.620,18 es el usufructo buscado.

Ejercicio 8.6

Si desarrollamos una suma del tipo de la tratada, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-k}(a_{j-1}-a_j)b^{-j} &= a_0b^{-1} + a_1(b^{-2}-b^{-1}) + a_2(b^{-3}-b^{-2}) + \cdots - a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1} + a_1b^{-2}(1-b) + a_2b^{-3}(1-b) + \cdots - a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1} - (b-1)(a_1b^{-2} + a_2b^{-3} + \cdots + a_{n-k-1}b^{k-n}) - a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1} - (b-1)\sum_{j=2}^{n-k} a_{j-1}b^{-j} - a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1}b - a_0b^{-1}b + a_0b^{-1} - (b-1)\sum_{j=2}^{n-k} a_{j-1}b^{-j} - a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0 - (b-1)\sum_{j=1}^{n-k} a_{j-1}b^{-j} - a_{n-k}b^{k-n}
\end{aligned}$$

Ahora usamos $a_l = R_{k+l}$ y $b = 1 + r_m$ y tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - r_m\sum_{j=1}^{n-k} R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j} - R_n(1+r_m)^{k-n}$$

Usando que $R_n = 0$ se tiene el primer resultado. Por otra parte usando la igualdad $A_{k+j} = R_{k+j-1} - R_{k+j}$ y la definición de N_k tenemos:

$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k} A_{k+j}(1+r_m))^{-j} = \sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - \frac{r_m}{r}\sum_{j=1}^{n-k} rR_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$$

así obtenemos la ecuación $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$.

Ejercicio 8.7

Primero usamos la fórmula para la nuda propiedad con n = 84, k = 24, c = 100, r = 0,01, r_m = 0,005:

$$
\begin{aligned}
N_{24} &= 100(1,01)^{-61}\sum_{j=1}^{60}\left(\frac{1,01}{1,005}\right)^{j} \\
&= \$\,3.818,45
\end{aligned}
$$

Con la ayuda podemos calcular $R_{24} = \frac{100(1-(1+0{,}01)^{24-84})}{0{,}01} = 4.495,50$. De la fórmula $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$,, probada en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\frac{0,005}{0,01}U_{24} = R_{24} - N_{24} = 4.495,50 - 3.818,45 = \$\ 677,05$$

Luego U_{24} = \$ 1.354,10 es el usufructo.

Ejercicio 8.8
Sabemos que el número de cuotas pagadas k cumple $3252,13 = R_k = \frac{100(1-1{,}0125^{k-60})}{0{,}0125}$. Luego, 1 — 1,0125^{k-60} = 3.252,13/8000, es decir, 1,0125^{k-60} = 1 — 3.252,13/8.000. Entonces k — 60 = log(1 — 3.252,13/8.000)/ log(1,0125) = —42.

Por lo tanto k = 60 — 42 = 18 y nos quedan por pagar 42 cuotas.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1
Como vimos en el ejemplo 9.1 la tasa buscada es independiente del valor del crédito. En este caso la tasa de interés mensual es de r_m = 20/12% y la correspondiente tasa anual será:

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/60)^{12} - 1 = 21{,}94\%$$

Ejercicio 9.2
Este casos es similar al anterior con r_m = 15/12%. Entonces la tasa anual será:

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/80)^{12} - 1 = 16{,}08\%$$

Ejercicio 9.3
El interés total que pagaremos es 12 × 2.000/100 = 240. Este se suma al monto del crédito y se reparte en 12 cuotas iguales de c = (2,000 + 240)/12 = \$ 186,67.

Sabemos que en el sistema francés con tasa mensual r tenemos $cA_{\overline{12}|r} = 2.000$. Luego debemos resolver la ecuación

$$A_{\overline{12}|r} = 2.000/186,67$$

de la cual resulta r = 1,79% que corresponde a una tasa anual de 21,45 %.

Ejercicio 9.4
En este caso pagamos un interés total de $ 100 y al repartirlo en diez cuotas estas tendrán un valor de c = 1.100/10 = 110. Para ver la tasa equivalente resolvemos la ecuación

$$A_{\overline{10}|r} = 1.000/110$$

de donde r = 1,77% que corresponde a una tasa anual de 21,26 %.

Ejercicio 9.5
Un rápido cálculo nos indica que si depositamos $ 500.000 al 12% anual obtendremos una renta de $ 5.000 por mes y al cabo de 200 meses seguiremos siendo dueños de los $ 500.000 de capital. Luego nos conviene la oferta contado.

Ejercicio 9.6
En realidad recibimos $ 2.000 — $ 200 = $ 1.800 a pagar en 10 cuotas de $ 200. para calcular la tasa mensual equivalente resolvemos:

$$A_{\overline{10}|r} = 1.800/200$$

lo cual da r = 1,96% y la tasa anual correspondiente será de 23,55 %.

Ejercicio 9.7
El interés que nos descuentan es 1.000 × 12/100 = $ 120. Entonces recibimos $ 880 y lo pagamos en cuotas iguales de $ 83,33. Resolvemos entonces $A_{\overline{12}|r} = 880/83,33$, de donde obtenemos una tasa mensual r = 2,02% que corresponde a una tasa anual del 24,24 %.

Ejercicio 9.8
Calculamos el valor de la cuota $c = 1.000/A_{\overline{12}|0,01} = 88,85$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de $ 1.000 — $ 88,85 = $ 911,15 pagadero en 11 cuotas de $ 88,85. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{11}|r} = 911,15/88,85$, lo cual da 1,18% mensual o 14,25% anual.

Ejercicio 9.9
Calculamos el valor de la cuota $c = 3.000/A_{\overline{24}|(1/120)} = \$\ 138,43$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de 3.000 — 138,43 = $ 2.861,57 pagadero en 23 cuotas de 138,43. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{23}|r} = 2.861,57/138,43$, lo cual da 0,90% mensual o 10,90% anual.

Ejercicio 9.10
El pago p que realizamos es

$$p = 1.000.000(1 + 10/1200)^{-240} = \text{U\$S } 136.461,51$$

Ejercicio 9.11
El estudiante recibe $p = 1,5 - (10/100)1,5 = 1,35$ y deberá devolver 1,5 rublos. Por lo tanto el interés mensual r satisface la ecuación $(1 + r)1,35 = 1,5$, de donde

$$r = 1,5/1,35 - 1 = 0,1111$$

es decir un 11,11% mensual.

Ejercicio 9.12
Nos acreditarán 300(5/121) = $ 12,40.

Ejercicio 9.13
Recordemos que si gastamos $ 100 en enero, $ 2 correspondieron a pan y $ 1 a leche fluida. En febrero gastamos $ 4 en pan y $ 1,50 en leche. Si el resto se mantuvo igual, el total del gasto fue $ 102,5 ($ 2 más en pan y 50 ctvs. más en leche). El valor del índice de febrero es entonces 102,5.

Capítulo 10

Ejercicio 10.1
Para calcular la probabilidad de que sumen 7, listamos los casos favorables:

$$(1,6);\ (2,5);\ (3,4);\ (4,3);\ (5,2);\ (6,1)$$

esto da un total de 7 casos favorables sobre un total de 36 posibles. Entonces tenemos una probabilidad $p = 7/36$ de obtener el 7.

Para calcular la probabilidad de obtener un número par, en lugar de listar todos los casos favorables, razonamos que tenemos las siguientes posibilidades para los dos dados: (par, par); (impar, impar); (impar, par) y (par, impar). De estas, sólo las dos primeras producen resultado par. Como cada dado tiene tres caras pares y tres impares, el número de casos favorables es de $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$. Entonces, tenemos una probabilidad de $18/36 = 0,5$ de obtener un resultado par.

Ejercicio 10.2
Tenemos 12 figuras, 3 por cada uno de los cuatro palos. Luego la probabilidad de dar vuelta una figura será de $12/52 \sim 0,23$

Ejercicio 10.3
Si sale el 48 obtenemos una ganancia de $69 = 70 - 1$ y esto ocurre con una probabilidad de 1/100. Si no sale perdemos un peso, y esto ocurre con probabilidad 99/100. El resultado esperado en 100 veces es ganar una vez 69 y perder 1 las restantes 99. Así ter-

minaríamos con: $69 - 99 = -30$, es decir, una pérdida de \$ 30 es lo que esperamos. En el caso de tres cifras tenemos una probabilidad de 1/1.000 de ganar 499 y 999/1.000 de perder un peso. En 100 juegos tenemos un valor esperado de $100(499 \times 1/1.000 + (-1)999/1.000) = -50$, esto es, esperamos una pérdida de \$ 50.

Ejercicio 10.4

Si la apuesta tiene un costo de \$$c$, obtenemos $70 - c$ con una probabilidad de 1/100 y perdemos c con probabilidad 99/100. El valor esperado es entonces $V = (70 - c)/100 - c\ 99/100 = 70/100 - c$. El valor justo es el que hace cero a V, por lo tanto $c = 70/100$ o 70 centavos.

Ejercicio 10.5

En este caso obtenemos $500 - c$ con una probabilidad de 1/1.000 y perdemos c con una probabilidad de 999/1.000. Así el valor esperado V es $(500 - c)/1.000 - c\ 999/1.000 = 500/1.000 - c$. De aquí obtenemos que $c = 0{,}5$ es el valor justo que anula el valor esperado de la ganancia.

Ejercicio 10.6

Si jugamos un peso al 13 ganamos 35 pesos si sale, lo cual tiene una probabilidad de 1/37 y perdemos un peso con probabilidad 36/37. Por lo tanto el valor esperado de la apuesta es:

$$V = 35 \times 1/37 - 1 \times 36/37 = -1/37$$

Por lo tanto en 100 jugadas esperamos una pérdida de alrededor de \$ 100/37.

En el caso de jugar a rojo tenemos una ganancia de un peso con probabilidad 18/37 y una pérdida de un peso con probabilidad 19/37, así tenemos:

$$V = 1 \times 18/37 - 1 \times 19/37 = -1/37$$

de donde la pérdida esperada en 100 jugadas es igual a la anterior: $100/37 \sim 2,70$.

Ejercicio 10.7

Planteamos la ecuación:

$$(36 - c) \times 1/37 - c \times 36/37 = 0$$

de donde $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.8

En este caso la ecuación a resolver es:

$$(2 - c) \times 18/37 - c \times 19/37 = 0$$

por lo tanto $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.10
Si el 20 de febrero la acción vale \$ 16 o \$ 20, perdemos los \$ 2 pagados por la opción. Si la acción vale \$ 23 utilizamos la opción la compramos a \$ 20 y la vendemos a \$ 23 con lo cual ganamos \$ 3, pero hay que restar los dos pesos pagados por la opción y se tiene una ganancia neta de \$ 1.

Ejercicio 10.11
Si la acción vale \$ 13, perdemos \$ 1,20 pagados por la opción. Si vale \$ 16 ganamos un peso pero al restarle \$ 1,20 el resultado neto es una pérdida de 20 centavos. En el caso que la acción valga \$ 20 tendremos una ganancia de \$ 5 al hacer uso de la opción y una ganancia neta de \$ 3,80 al restar el costo de la opción.

Ejercicio 10.12
Definamos $E(V_2 - K)^- = E(V_2 - K) - E(V_2 - K)^+$ y recordemos que $E(V_2 - K) = E(V_2) - K$. Observemos que al igual que en el ejemplo 10.13

$$E(V_2-9)^- = (10(1-p)^2-9)(1-p)^2 = (10(1-p)^2-10)(1-p)^2+(1-p)^2 = E(V_2-10)^-+(1-p)^2$$

Luego

$$E(V_2-9)^+ = E(V_2-9) - E(V_2-9)^- = E(V_2-10)+1-E(V_2-10)^- - (1-p)^2 = E(V_2-10)^+ + p(2-p)$$

En el ejemplo citado se obtuvieron los valores: $E(V_2 - 10)^+ = (6r + 2)^2/2$ y $p = \frac{6r+2}{5}$, así:

$$\begin{aligned} E(V_2 - 9)^+ &= \frac{(6r+2)^2}{2} + (\frac{6r+2}{5})(2 - \frac{6r+2}{5}) \\ &= (6r+2)(\frac{(6r+2)}{2} + \frac{1}{5}(2 - \frac{6r+2}{5})) \\ &= (6r+2)(\frac{23(3r+1)}{25} + \frac{2}{5}) \\ &= \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11) \end{aligned}$$

Por lo tanto $c = \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11)(1+r)^{-2}$.

Capítulo 11

Ejercicio 11.1
Toda función cuyo crecimiento porcentual por unidad en x es constante, es una función exponencial. Como además $q^s = e^{s\ln(q)}$, entonces cualquier función exponencial se puede escribir de la forma

$$f(x) = a\, e^{r\,x}$$

para algún a y algún $r > 0$, ambos positivos puesto que $f(0)$ es positivo y además $f(x)$ es creciente.

Como $f(x+1) = a\, e^{r\,(x+1)} = f(x)\, e^{r}$, y $f(x)$ crece un 25% por unidad en x, debe cumplirse

$$e^{r} = 1{,}25$$

es decir, $r = \ln(1{,}25) = 0{,}2231$.

El valor de a puede calcularse a partir del dato $f(0) = 0{,}5$, y usando que $f(0) = a$. Por lo tanto la solución es

$$f(x) = 0{,}5\, e^{0{,}2231\, x}$$

Ejercicio 11.2

Este caso es similar al del Ejercicio 11.1, sólo que se trata de una exponencial decreciente. Por lo tanto $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = a\, e^{r\, x}$$

con $a = 3$ pues $f(0) = 3$, y $r < 0$ ya que $f(x)$ es decreciente; decrece un 20% cada dos unidades. Esto indica que $f(x + 2) = 0{,}80\, f(x)$ y también $f(x + 2) = f(x)\, e^{2\, r}$, luego debe ser $e^{2\, r} = 0{,}80$, es decir

$$r = \frac{\ln(0{,}8)}{2} = -0{,}1115$$

La solución es entonces:

$$f(x) = 3\, e^{-0{,}1115\, x}$$

Ejercicio 11.3

La tasa de interés nominal anual es $r = 0{,}059$. Por lo tanto, si se deposita un capital inicial C, el monto obtenido en t años será $C(t) = C\, e^{0{,}059\, t}$. En este caso, la incógnita es C, la cantidad de años es $t = 5$ y el monto final es $C(5) = 12.000$. Por lo tanto

$$C = \frac{12.000}{e^{0{,}059\, 5}} = \$\ 8.934{,}38$$

es decir que se deberá realizar un depósito inicial de \$ 8.934,38.

Ejercicio 11.4

Si la capitalización es diaria y con un año de 360 días, entonces la tasa equivalente anual está dada por

$$(1 + \frac{0{,}063}{360})^{360} - 1 = 0{,}065021$$

Si la capitalización es continua, entonces la tasa equivalente anual es $e^{0{,}063} - 1 = 0{,}065026$.

Como puede observarse, una capitalización diaria produce un interés muy cercano al de una capitalización continua, y por lo tanto el monto al cabo de un año por un capital de 3.000 será muy similar. En efecto:

para la capitalización diaria:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065021 = 3.195{,}063$$

para la capitalización continua:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065026 = \$\ 3.195{,}078$$

Apéndice A

Ejercicio A.1
Se ubica en un casillero distinto de los que se pretende sumar y se escribe = $SUMA(B2 : K2)$

Ejercicio A.2
Para escribir una tabla de valores de $A^{-1}_{\overline{n}|r}$, para $r = 0{,}005+j0{,}00125$, con $0 \leq j \leq 10$ y $1 \leq n \leq 30$ podemos efectuar los mismos pasos que en la sección 1 y a continuación escribimos el valor 1,625 en la celda K1 y el 1,75 en la celda L1. Una vez hecho esto podemos usar la función de autorrelleno horizontal para rellenar las celdas K2 y L2 partiendo desde la J2 y repetir esto para todas las filas hasta la 31 donde llenamos K31 y L31 a partir de J31. Así obtenemos la tabla requerida.

Ejercicio A.3
Llenamos la fila 1 desde A1 hasta Q1 y la fila 2 desde A2 hasta Q2 de la misma forma que en el ejemplo de la sección 2. También en C3 escribimos el valor nominal con un signo menos, es decir −10.000. A continuación en la columna B desde la celda B5 hasta la celda B12 escribimos el flujo de pagos del bono: 700; 700; 700; 700; 700; 700; 700; 10.700. Usando el autorrelleno horizontal lo extendemos hasta la columna Q. En la celda B4 ponemos la fórmula = $\$A\$3 * B1$ y usando autorrelleno horizontal la extendemos hasta la columna Q.

Finalmente podemos completar la fila correspondiente a la tasa interna de retorno. Escribimos en la celda B2:

$$= \text{TIR}(B4 : B12)$$

y usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda Q2.

Apéndice B

Ejercicio B.1
Seguimos los pasos del Ejemplo B.3 y obtenemos la siguiente sucesión:

CMPD ▽ 120 EXE 11 EXE 100000 EXE ▽ 0 EXE 12 EXE 12 EXE ΔΔΔ SOLVE