Capítulo 10

La matemática financiera moderna

10.1. Las bases del modelo

Como decíamos en la introducción, se considera a Louis Bachelier como el pionero de la matemática financiera moderna. Fue él quien instaló el uso de modelos matemáticos probabilísticos para representar el precio de las acciones. ¿Qué es un modelo matemático?

Louis Bachelier

Definición 10.1

Un modelo matemático representa mediante ecuaciones un aspecto de la realidad.

Por ejemplo $A = l^2$ es un modelo que nos permite representar el área de un cuadrado cuyos lados miden l.

Ejemplo 10.1

$C(n) = C_0(1 + r)^n$ es un modelo mediante el cual representamos el crecimiento de un capital C_0 en n períodos con una tasa de crecimiento por período r.

En estos modelos todo esta determinado y nada queda librado al azar: si un lado del cuadrado mide 2 entonces su área medirá indefectiblemente 4. En cambio, en un modelo probabilístico interviene el azar, por lo cual debemos leer las ecuaciones como probabilidades de que ocurra cada resultado posible.

Ejemplo 10.2

La tirada de un dado común se puede representar mediante el siguiente modelo probabilístico:

$$X = i \text{ con probabilidad } 1/6 \text{ para } 1 \leq i \leq 6$$

Tipos de dados

Este modelo dice que la variable X toma el valor que se obtiene al arrojar un dado, como sabemos, este puede ser 1, 2, 3, 4, 5, ó 6. También nos dice que cada una de las caras del dado puede aparecer con idéntica probabilidad 1/6. Esto último significa que el dado que modelamos no está cargado (ninguna cara aparecerá con mayor frecuencia que otra).

En adelante, cuando hablemos de probabilidad, lo haremos en el sentido más intuitivo de la palabra.

Ejemplo 10.3 Si extraemos una carta de un mazo de naipes español de 40 cartas la probabilidad de obtener una espada es $p = 10/40 = 1/4$ ya que de las cuarenta cartas que componen el mazo sólo diez son espadas. Asimismo, la probabilidad de obtener un siete es $p = 4/40 = 1/10$ porque hay exactamente 4 sietes en todo el mazo.

Naipe español

Ejemplo 10.4 Si arrojamos una moneda, esta tiene una probabilidad p de salir cara.

Para fijar ideas consideraremos que este número p surge de arrojarla al aire 1.000 veces y tomar

$$p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos cara}}{1.000}$$

Un teorema fundamental de la probabilidad nos dice que el resultado así obtenido debería estar muy cerca del valor teórico de p, por ello acá no haremos diferencia entre dichos valores.

Resulta claro que

$$1 - p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos ceca}}{1.000}$$

y puede tomarse como la probabilidad de obtener ceca.

Definición 10.2 Si la probabilidad p de salir cara es igual a la de salir ceca, diremos que la moneda no tiene sesgo. En tal caso $p = 1 - p$ y por lo tanto $p = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 10.5 Deseamos modelar un experimento que consiste en arrojar una moneda y observar su resultado: cara o ceca. Esto podemos hacerlo mediante el uso de una variable X que tomará el valor 1 si la moneda cae cara y 0 si la moneda cae ceca. Supongamos que la moneda tiene una probabilidad p de caer cara.

El modelo nos permite agregar este dato. Para esto diremos que la variable X toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Esta variable X se llama *de Bernoulli* y se suele escribir de la siguiente forma:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Ejemplo 10.6

Ahora queremos un modelo que nos dé información sobre el resultado de arrojar una moneda 1.000 veces. Podemos pensar entonces que para cada tirada tenemos una variable de Bernoulli X_i que modela la i-ésima tirada, y valdrá 1 con probabilidad p si la moneda sale cara y 0 en caso contrario.

Así tendremos que:

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

valdrá exactamente n cuando haya salido n veces cara y $1.000-n$ veces ceca. Notemos que Y es una variable que toma valores entre 0 y 1.000.

10.2. Luz, cámara,... acción

Este tipo de variables nos servirán para modelar el comportamiento del valor de una acción. Recordemos que una acción representa una fracción del valor de una Sociedad Anónima y otorga diversos derechos a su poseedor, entre ellos, el derecho a participar en el reparto de utilidades.

Las acciones de una Sociedad Anónima pueden cotizar en la Bolsa de Valores. Eso permite que los interesados puedan comprarlas y venderlas. Estamos pensando en una acción de cualquier empresa que cotice en la Bolsa de Comercio. Para nuestro modelo supondremos que en un período T (un día, una hora, un minuto) el valor de la acción puede subir un porcentaje fijo s con probabilidad p o bajar un porcentaje fijo b con probabilidad $1-p$. Esto lo podemos representar de la siguiente forma: si V_0 es el valor de la acción al comienzo del período y V_1 al final, tendremos:

$$V_1 = \begin{cases} V_0(1+s) & \text{con probabilidad } p \\ V_0(1-b) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Al final del segundo período tendremos:

$$V_2 = \begin{cases} V_0(1+s)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ V_0(1+s)(1-b) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ V_0(1-s)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Estamos haciendo la siguiente hipótesis: la suba o baja del valor de la acción en el primer período no tiene influencia sobre lo que ocurra con éste en el segundo período. Más concretamente, la probabilidad de que suba en el segundo período, si subió en el primero, es la misma que la probabilidad de que suba en el segundo, si bajó en el primero (en ambos casos es igual a p).

De esta hipótesis podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{probabilidad de subir en los dos períodos} &= p \cdot p \\
\text{probabilidad de subir en el primero y bajar en el segundo} &= p(1-p) \\
\text{probabilidad de bajar en el primero y subir en el segundo} &= (1-p)p \\
\text{probabilidad de bajar en los dos períodos} &= (1-p)(1-p)
\end{aligned}$$

Podremos representar el valor al cabo de n períodos usando la variable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde X_i es una variable de Bernoulli. Entonces:

$$V_n = V_0(1 + s)^Y (1 - b)^{n-Y}$$

Observemos qué nos dice esta fórmula para el valor de la acción al cabo de n períodos: hay una probabilidad p_k de que la acción valga $V_0(1 + s)^k(1 - b)^{n-k}$. La probabilidad p_k es justamente la probabilidad de que la variable Y tome el valor k. Es posible calcularla y ver que es igual a $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Ahora, pensemos que el intervalo de tiempo en que transcurre todo es un número fijo T y lo subdividimos en períodos más pequeños, todos de duración T/n. En este caso, el aumento o disminución que puede ocurrir desde un período al siguiente se representará multiplicando por $1 + sT/n$ o $1 - bT/n$.

10.3. Opciones

¿Qué es una *opción de compra* de una acción?

Es un derecho a comprar una acción dentro de un cierto lapso de tiempo, a un determinado precio K.

Las *opciones de compra* forman parte de la categoría de instrumentos financieros conocidos con el nombre de *derivados* ya que su valor no está ligado a algo concreto, como en el caso de la acción que representa una porción de una sociedad. El objetivo de estos instrumentos es moderar el riesgo.

Ejemplo 10.7

Un inversor posee 10.000 acciones del Banco de la Plaza que cotizan a $ 0,85 cada una. No quiere arriesgarse a perder más de $ 1.000 en los próximos dos meses. Entonces por $ 500 compra una opción de vender a $ 0,85 cada acción del Banco dentro de dos meses. Así él se asegura su objetivo, ya que si sus acciones valen menos de $ 0,85 dentro de dos meses, él hará uso de su opción, las venderá a $ 0,85 y habrá perdido sólo lo que pagó por la opción. Por su parte, quien le vende la opción de venta a $ 0,85 asume el riesgo de que la acción baje a menos de $ 0,80, en cuyo caso sufrirá una pérdida. En cambio, si la acción vale más de $ 0,85 habrá ganado lo que cobró por la opción.

Ejemplo 10.8

Un inversor tendrá que aportar 10.000 acciones de Pampa dentro de dos meses, que actualmente cotizan a $ 1 cada una. Ahora, no tiene los $ 10.000 necesarios para comprarlas y no quiere correr el riesgo de que suban más allá de $ 1,1. Una alternativa que se le presenta es adquirir por un módico precio, alrededor de $ 1.000, la opción de comprar esas acciones dentro de dos meses a $ 1, y así asegurar su negocio contra el riesgo de suba de la cotización. Por otro lado, el que vende la opción toma el riesgo de que la acción suba a cambio de lo que le paga el inversor.

Este efecto de acercar dos partes, una que quiere seguridad y otra que asume riesgo, puede verse también con otros *instrumentos derivados* como son los *futuros*: dólar a futuro, soja a futuro, etc.

Ejemplo 10.9

Un importador planea un negocio y calcula que obtendrá una ganancia razonable si el valor del dólar, que actualmente se encuentra en $ 3,4, no pasa los $ 3,6. El necesitará U$S 10.000 para pagar los productos. Una alternativa es asegurarse comprando con $ 34.000 los dólares que necesita. Lamentablemente, espera recibir ese capital con la venta de la mercadería importada, por lo cual aún no lo posee. Se le presenta la alternativa de comprar los U$S 10.000 a futuro, a una cotización de $ 3,60, pagando una seña. De esta manera, él se asegura el negocio y quien le vende asume el riesgo de que el dólar suba más allá de los $ 3,60, recibiendo como compensación la seña entregada.

Algo similar sucede con la compra y venta de soja.

Ejemplo 10.10

Un agricultor calcula sus costos y observa que si el precio de la soja no baja de $ 500 obtendrá una ganancia conveniente. Para evitar riesgos, decide venderla a $ 500, pero como aún no la tiene lo hace a futuro. Quien le compra toma el riesgo de que el precio baje más allá de $ 500.

Las opciones tienen la propiedad de concentrar el riesgo inherente a los cambios bruscos de cotización. Por ejemplo, si invertimos en una acción que vale $ 10 y esta sube $ 1 habremos ganado un 10 %. Por el mismo dinero, $ 10, podríamos haber comprado una opción de compra de 10 acciones a $ 10, hasta dentro de dos meses. En ese lapso, si la acción sube a $ 11 ganaremos $ 10 en lugar de $ 1 como hubiera resultado si comprábamos la acción. Pero el riesgo es mayor y, en caso que no suba, perderemos los $ 10. Esto hace que de un día para otro, mientras el valor de la acción sube o baja entre uno y 5 %, el valor de la opción puede subir o bajar entre 5 y 50 %. Un punto crucial es determinar cuál sería un precio justo para el riesgo que se corre. Eso es lo que resolvieron Merton, Black y Scholes. Para dar una idea de lo que hicieron es necesario desarrollar algunos conceptos matemáticos que permiten tratar problemas de azar y riesgo.

10.4. El juego es un impuesto a quien no sabe matemática

Pensemos en un problema relativamente sencillo: decidimos participar en un juego en el que se arroja un dado que no está cargado (todas sus caras son igualmente probables) y si sale el lado k se recibe $ k. ¿Cuánto deberíamos pagar por participar de este juego?

Es claro que si no pagamos nada, no importa qué lado del dado salga, con seguridad ganaremos algo. De la misma forma, si pagásemos \$ 7, perderemos algo sin importar como caiga el dado. ¿Y si pagáramos un término medio, por ejemplo \$ 3,5? Recordemos que los valores que toma el dado se pueden modelar con una variable X que vale 1, 2, 3, 4, 5, 6 con igual probabilidad $p = \frac{1}{6}$.

Si tiráramos 600 veces el dado ¿cuánto recibiremos? Para resolver esto podemos considerar la variable $Z = \sum_{k=1}^{100} X_k$ donde $X_k = X$ es la variable que modela la tirada k-ésima. Esta variable Z puede tomar valores entre 600 (si sale siempre uno) y 3.600 (si sale siempre seis).

Intuitivamente, el valor más probable de Z será aquel donde cada número ocurre según su probabilidad, es decir en 600 tiradas el uno debería aparecer $600.\frac{1}{6} = 100$ veces al igual que el resto. Si esto ocurriese, el valor que obtendríamos para Z sería 2.100 = 100+200+300+400+500+600. Para que el juego fuese justo deberíamos pagar \$ 2.100 por las 600 tiradas, y así lo más probable es que terminaríamos sin ganancia ni pérdida. Como hicimos el cálculo para 600 jugadas, en cada jugada deberíamos pagar $\frac{2.100}{600} = 3{,}5$.

Definición 10.3 El *valor esperado* de una variable X que toma valores $x_k \in \mathbb{R}$ $1 \leq k \leq n$ con probabilidades p_k es el número $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

Ejemplo 10.11 Si X es la variable que modela la tirada de un dado sin sesgo se tiene:

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

Ejemplo 10.12 Un ejemplo cotidiano es el juego de la quiniela. En este juego se extrae un número de cuatro cifras, y antes de que esto ocurra uno puede apostar desde \$ 1 a que la última cifra del número será *x*, o que las dos últimas serán *xx*, o las tres últimas serán *xxx*, o finalmente a que el número es *xxxx*. En caso de acertar, se recibe respectivamente, 7; 70; 500 ó 3.500 veces lo apostado. ¿Cuál es el valor esperado de este juego? Consideremos el caso de una cifra: la probabilidad de que acertemos es 1/10 ya que de las diez posibles sólo una nos favorece y la de perder es 9/10. ¿Cuál es nuestra ganancia si apostamos un peso?

$$G_1 = \begin{cases} 7 - 1 & \text{con probabilidad } 1/10 \\ -1 & \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

Ahora podemos calcular el valor esperado de la ganancia.

$$EG_1 = 6 \cdot 1/10 - 1 \cdot 9/10$$

$$= -3/10$$

Esto nos dice que se espera que perdamos el 30% de lo apostado. Concretamente, si tenemos \$ 100 y jugamos durante cien sorteos distintos, no debería sorprendernos que terminemos con algo cercano a los \$ 70.

Los otros casos son similares, mostraremos el de cuatro cifras para ver que es menos conveniente aún. En este caso tenemos:

$$G_4 = \begin{cases} 3.500 - 1 & \text{con probabilidad } 1/10.000 \\ -1 & \text{con probabilidad } 9.999/10.000 \end{cases}$$

Y el valor esperado nos queda:

$$\begin{aligned} EG_4 &= 3.499 \cdot 1/10.000 - 1 \cdot 9.999/10.000 \\ &= -6.500/10.000 \end{aligned}$$

Es decir que lo más probable es que perdamos el 65% de lo apostado.

Podemos preguntarnos ¿cuál sería el valor justo c de la apuesta a una cifra? Para esto calculamos:

$$G_1 = \begin{cases} 7 - c & \text{con probabilidad } 1/10 \\ -c & \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} EG_1 &= (7 - c) \cdot 1/10 - c \cdot 9/10 \\ &= 7/10 - c \end{aligned}$$

Si esta cantidad fuera mayor que cero, el juego sería favorable a nosotros en el sentido que a lo largo de muchos juegos sería muy probable que terminásemos con una ganancia. Asimismo, si fuese negativo lo más probable sería terminar con pérdida. Si $EG_1 = 0$ sería igualmente probable terminar con pérdida o ganancia. Esto es lo que consideramos justo.

En este caso, el juego sería justo si pagásemos sólo 70 centavos por apuesta.

10.5. Riesgo calculado

Nos planteamos el siguiente problema: queremos modelar el precio c que hay que pagar por una opción de comprar a \$ 10 dentro de un período una acción que vale ahora \$ 10 pero que al cabo de un período, cuando debamos ejercer nuestra opción, puede valer el doble \$ 20 o la mitad \$ 5. Cada una de estas posibilidades ocurre con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente. Como vimos en la primera parte, podemos representar el valor de la acción al fin de un período como:

$$V_1 = \begin{cases} 20 & \text{con probabilidad } p \\ 5 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

En tal caso, si compramos una acción hoy y la vendemos al finalizar el período el valor actual de la ganancia o pérdida queda representada por:

$$G_a = \begin{cases} 20(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } p \\ 5(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Notemos que como los $ 10 son pagados al comienzo del período y el precio que se recibe por la venta de la acción se recibe al final, si queremos calcular el valor actual, al inicio del período, del resultado de la operación debemos tomar el valor presente de la venta. Para esto usamos una tasa de descuento r por el período.

Ahora podemos calcular cuánto se esperaría ganar con la compra de una acción al comienzo de un período y su venta al final.

$$\begin{aligned} EG_a &= (20(1+r)^{-1} - 10) \cdot p + (5(1+r)^{-1} - 10) \cdot (1-p) \\ &= (20p + 5(1-p))(1+r)^{-1} - 10 \\ &= (15p + 5)(1+r)^{-1} - 10 \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se representa el resultado que podemos obtener con la compra de la opción: si la acción sube ejercemos nuestro derecho de comprarla a $ 10 y la vendemos por $ 20, así obtenemos una ganancia de $ 10 a los que hay que descontar los $ c que pagamos por la opción. Recordemos que como los $ 10 de ganancia son al final del período y los $ c los pagamos al comienzo al hacer el cálculo debemos utilizar la tasa de descuento r y obtenemos $10(1+r)^{-1}-c$. Si la acción baja, no nos conviene comprarla a $ 10, y simplemente perdemos lo que pagamos por la opción. Así, tenemos la siguiente variable que modela el resultado de la compra de la opción:

$$G_o = \begin{cases} 10(1+r)^{-1} - c & \text{con probabilidad } p \\ -c & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

El valor esperado de esta variable es:

$$\begin{aligned} EG_o &= (10(1+r)^{-1} - c) \cdot p - c \cdot (1-p) \\ &= 10p(1+r)^{-1} - c \end{aligned}$$

Así, tenemos representados los valores esperados de los resultados G_a y G_o, de comprar respectivamente una acción y una opción. Estos han quedado en términos de p, la probabilidad de que la acción suba o baje. ¿Hay alguna forma de determinar p ? Si uno supiera de antemano p, sería como jugar a los dados con un dado cargado ya que si p es tal que hace positivo el valor esperado de G_a nos conviene comprar la acción y si es negativo nos conviene venderla[1].

[1] Aunque suene raro, podemos vender acciones que no poseemos

Paradójicamente, esto permite determinar p: supondremos que p es el valor que hace que uno no pueda sacar ventajas de la suba o baja de la acción, es decir, el valor de p hace que sea cero el valor esperado de la ganancia por comprar o vender la acción. En el ejemplo de los dados, la hipótesis de que el dado no está cargado dice que ninguna cara tiene más probabilidad que otra, y esto hace que sus caras tengan igual probabilidad $p_i = 1/6$ para $1 \leq i \leq 6$.

En nuestro ejemplo el valor de p resulta de la ecuación:

$$0 = G_a = (15p + 5)(1 + r)^{-1} - 10$$

De aquí obtenemos:

$$p = \frac{10(1+r) - 5}{15} = \frac{5 + 10r}{15}$$

Entonces, en general se supondrá que mediante la compraventa de acciones no hay *arbitraje*, esto es, una forma de obtener una ganancia segura. Un resultado conocido como *teorema del arbitraje*, nos asegura que si no hay arbitraje existen probabilidades que hacen cero el valor esperado de la ganancia. Conociendo esas probabilidades, podremos calcular el correspondiente valor esperado del resultado de comprar la opción. Finalmente, un valor justo para la opción será aquel que anule al valor esperado de la ganancia G_o. En nuestro ejemplo tendremos:

$$0 = G_o = 10p(1+r)^{-1} - c = 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} - c$$

Finalmente resulta que:

$$\begin{aligned} c &= 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} \\ &= \frac{10+20r}{3(1+r)} \end{aligned}$$

Pudimos calcular un valor justo para la opción suponiendo que las probabilidades involucradas hacen que no haya arbitraje en la compraventa de acciones.

El siguiente objetivo será dar un precio justo al derecho de compra de una acción dentro de n períodos a un precio determinado.

10.6. El modelo para n períodos

Consideremos el valor, $V(i)$, de una acción a lo largo de n períodos. Supondremos que en cada período la acción puede subir un porcentaje fijo s o bajar un porcentaje fijo b. En principio, no sabemos con qué probabilidades sube o baja en cada período. También supondremos que la tasa de descuento para actualizar el valor de V es r en cada período. Tenemos la siguiente representación para $V(n)$:

$$V(n) = V(0)(1 + s)^{Y}(1 - b)^{n-Y}$$

En este caso Y es una variable que representa el número de subas que hubo en los n períodos. En general, no sabemos cómo son las probabilidades que gobiernan a Y, pero a partir de la hipótesis de que no hay arbitraje, puede verse que lo que ocurra en cada período será independiente de lo ocurrido en los anteriores. Más aún, la probabilidad de que la acción suba o baje es independiente del período que se considere. Así se llega a que Y deberá ser de la forma estudiada anteriormente:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde cada X_i es una variable de Bernoulli que vale 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1-p$. Podemos calcular p haciendo cero el valor esperado de la ganancia de comprar la acción y venderla al finalizar el primer período:

$$G_1 = \begin{cases} V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } p \\ V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

De aquí obtenemos el valor esperado de G_1:

$$\begin{aligned} EG_1 &= (V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0))p + (V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0))(1-p) \\ &= V(0)(1+s)(1+r)^{-1}p + V(0)(1-b)(1+r)^{-1}(1-p) - V(0) \\ &= V(0)((1+s)p + (1-b)(1-p))(1+r)^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Igualamos a 0 el valor esperado de la ganancia, simplificamos $V(0)$ y tenemos:

$$0 = \frac{EG_1}{V_0} = \frac{(1+s)p + (1-b)(1-p)}{1+r} - 1$$

Finalmente, despejamos p:

$$p = \frac{1+r-(1-b)}{1+s-(1-b)} = \frac{r+b}{s+b}$$

El siguiente paso es calcular con esta probabilidad el valor esperado del resultado de la compra de una opción. Supongamos que la opción nos cuesta \$ c y nos da derecho a comprar la acción por \$ K, dentro de n períodos. Tendremos para la ganancia G_o

$$G_o = \begin{cases} (V(n)-K)(1+r)^{-n} - c & \text{si } V(n) > K \\ -c & \text{si } V(n) \leq K \end{cases}$$

Por último, calculamos el valor esperado de la ganancia. Como el costo de la opción hay que pagarlo de cualquier forma, podemos calcular primero el valor esperado de la ganancia sin contar el costo $\$c$ y luego restarle c. Para esto multiplicamos a cada valor positivo que pueda tomar $(V(n) - K)(1 + r)^{-n}$ por la probabilidad de que tome ese valor, luego sumamos todos esos términos. Al resultado sin actualizar lo llamaremos $E(V(n) - K)^+$. Así llegamos a:

$$EG_o = E(V(n) - K)^+(1+r)^{-n} - c$$

Igualando a cero EG_o obtenemos

$$c = E(V(n) - K)^+ (1 + r)^{-n}$$

Esta expresión es muy concisa pero puede ser difícil de calcular. Para esto se usan diversos métodos entre los cuales se destaca el de *programación dinámica*.

Ejemplo 10.13

Consideremos lo que sucede con una acción que vale \$ 10, y en cada período su valor puede aumentar en un 50% o disminuir un tercio (33,33 %). Calculemos el valor de la opción de comprarla dentro de dos períodos a \$ 10.

Como vimos en la sección 2, el valor de la acción al cabo de dos períodos lo representamos por:

$$V_2 = \begin{cases} 10(1+1/2)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ 10(1+1/2)(1-1/3) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ 10(1-1/3)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Hemos visto también que:

$$p = \frac{r+b}{s+b} = \frac{r+1/3}{1/2+1/3} = \frac{6r+2}{5}$$

Con esta probabilidad debemos calcular $E(V_2 - 10)^+ (1 + r)^{-2}$ Ahora bien, $V_2 - 10$ puede tomar un único valor positivo $10(1 + 1/2)^2 - 10$ y lo hace con probabilidad $p^2 = (6r + 2)^2/25$, entonces tenemos:

$$E(V_2 - 10)^+ = 10(1{,}5^2 - 1)(6r + 2)^2/25 = 18r^2 + 12r + 2$$

y finalmente:

$$c = E(V_2 - 10)^+(1+r)^{-2} = \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Según esta fórmula si $r = 0$ la opción debería costar \$ 2. Si la tasa de descuento fuera del 1% tendríamos $c = 2{,}08$.

Ejemplo 10.14

En el ejemplo anterior, ¿cómo cambia el precio de c si queremos una opción de compra a \$ 11? En tal caso no hay cambio en las probabilidades que usamos y sigue habiendo un único valor positivo de $V_2 - K = 10(1{,}5^2) - 11$.

Si vemos a K como 10 + 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(V_2 - 11)^+ &= (10(1{,}5)^2 - 10 - 1)(6r + 2)^2/25 \\ &= E(V_2 - 10)^+ - (6r + 2)^2/25 \\ &= (6r + 2)^2/2 - (6r + 2)^2/25 \\ &= 23(6r + 2)^2/50 \end{aligned}$$

Así llegamos a que:

$$c = E(V_2 - 11)^+(1+r)^{-2} = \frac{46}{50} \cdot \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Es decir que el valor de la opción se reduce en un 8 %. Por ejemplo, si $r = 0$ entonces $c = 1{,}84$ y si $r = 0{,}01$, $c = 1{,}91$.

10.7. Ejercicios

Ejercicio 10.1 | **Si arrojamos dos dados sin sesgo, ¿cuál es la probabilidad de que sumen siete? ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea par?**

Ejercicio 10.2 | **Damos vuelta una carta de un mazo francés de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una figura (J, Q ó K)?**

Ejercicio 10.3 | **Si en la quiniela jugamos un peso al 48 durante 100 jugadas a dos cifras: ¿Alrededor de cuánto deberíamos perder? ¿Y si en lugar del 48 jugásemos al 348?**

Ejercicio 10.4 | **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 70 pesos por acertar dos cifras?**

Ejercicio 10.5 | **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 500 pesos por acertar tres cifras?**

Ejercicio 10.6 | **En la ruleta se puede apostar a un número del 0 al 36. Si sale se reciben 36 veces lo apostado, y en caso contrario se pierde la apuesta. También se puede apostar a rojo o negro hay 18 números rojos, 18 negros y uno verde. Si sale el color elegido se reciben 18 veces lo apostado (o 36 si apostamos al verde). Si alguien juega en la ruleta un peso al 13 durante 100 tiradas ¿Cuál es el valor esperado de la pérdida? ¿Y si en lugar de un número jugásemos al rojo?**

Ejercicio 10.7 | **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la ruleta que paga 36 pesos por acertar el número?**

Ejercicio 10.8 | **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a rojo o negro en una ruleta que paga 18 pesos por acertar el color?**

Ejercicio 10.9 | **¿Cuál es el valor después de dos períodos de una acción que vale $ 10 y en cada período puede subir un 10% o bajar un 10 %, ambas posibilidades con probabilidad 1/2?**

Ejercicio 10.10

Si el 2 de enero de 2009 compramos por $ 2 una opción de comprar el 20 de febrero a $ 20 una acción de la compañía Telecast. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el 20 de febrero la acción vale $ 16, $ 20 ó $ 23?

Ejercicio 10.11

Compramos por $ 1,20 una opción de comprar dentro de dos meses a $ 15 una acción del Banco de la Plaza. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el día de vencimiento de la opción la acción vale $ 13, $ 16 ó $ 20?

Ejercicio 10.12

En una situación como la del ejemplo 10.13 calcular el valor de la opción de compra a $ 9, es decir, cuando $K = 9$. Ayuda: Encuentre una fórmula para $E(V_2 - 9)^+$ en términos de $E(V_2 - 10)^+$.