Capítulo 11

El número *e* y la función exponencial

11.1. Introducción

En el Capítulo 3 El Interés, vimos que existen dos formas de aplicar interés: el simple y el compuesto. Un capital sometido a interés simple crece *linealmente*, esto es, aumenta de manera directamente proporcional al tiempo en que fue depositado. Así por ejemplo, un capital de $ 100 depositado a un 2% de interés mensual, aumenta en $ 2 en cualquier intervalo de un mes. Por lo tanto los montos en meses sucesivos serán: $ 100, $ 102, $ 104, $ 106, $ 108, ...

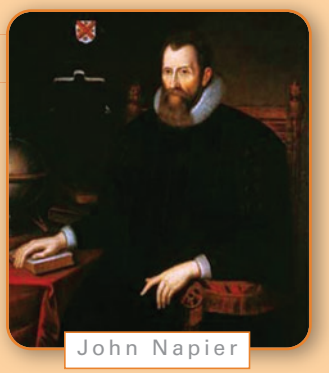
En el caso del interés compuesto, la tasa de interés indica cómo crece porcentualmente el capital en un determinado lapso. Así, si un capital de $ 100 es depositado al 2% mensual, significa que cada mes aumentará un 2% con respecto a su valor. Por lo tanto, los montos sucesivos serán $ 100,00; $ 102,00; $ 104,04; $ 106,12; $ 108,24; . . . . Este tipo de crecimiento se denomina *exponencial.* Las funciones cuyo crecimiento porcentual es constante se llaman **funciones exponenciales**.

Las funciones exponenciales están íntimamente relacionadas con la constante e, que es un número irracional *trascendente* cuyas primeras cifras decimales son 2,718281828. . . . . Esta constante aparece en múltiples áreas y ramas de la ciencia, pero fue el matemático Jacob Bernoulli [1654-1705] quien lo descubrió, justamente estudiando la aplicación del interés compuesto.

11.2. El número *e*

11.2.1. Los logaritmos

La primera referencia histórica al número *e* es en una publicación de John Napier (1550-1617), matemático, físico y astrónomo reconocido científicamente como el descubridor de los *logaritmos*. Si bien se sabe que los logaritmos ya habían sido usados en tiempos más remotos, fue Napier quien por primera vez publicó, en un apéndice de su obra, una tabla de logaritmos.



John Napier

La palabra *logaritmo*, nombre dado por Napier a estos números, proviene del griego: $\lambda o\gamma o\sigma$ (razón o cociente), $\alpha\rho\iota\theta\mu o\sigma$ (número), y significan números que indican una razón, proporción o relación. La razón de esta denominación era que la serie de números dados por los logaritmos constituían una progresión aritmética que a su vez se correspondía con otra en progresión geométrica, y la diferencia entre dos logaritmos indicaba la relación entre los correspondientes números en la progresión geométrica.

Ejemplo 11.1

La siguiente tabla muestra un fragmento de dos series: una en progresión aritmética y otra en progresión geométrica.

Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	17	
Geométrica	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...	131.072	...

Los números de la primera fila (Aritmética) son los *logaritmos en base* 2 de los números de la segunda fila (Geométrica), que como puede verse son potencias del número 2. La notación utilizada es $\log_2(x) = y$ que indica que $2^y = x$. Así se tiene que $\log_2(16) = 4$, pues $2^4 = 16$.

La particularidad de estas tablas es que si se calcula la diferencia entre dos logaritmos, por ejemplo:

$$5 - 2 = 3$$

la razón o cociente entre los correspondientes números es 2^3. En efecto,

$$\frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

A su vez, si se suman dos números de la primera fila, por ejemplo $2 + 7 = 9$, el producto de los correspondientes números de la segunda fila es 2^9. En efecto, $4 \cdot 128 = 512$. Estas propiedades se resumen en las siguientes fórmulas:

$$\log_2(y) - \log_2(x) = \log_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \log_2(y) + \log_2(x) = \log_2(y \cdot x)$$

y son ciertas para los logaritmos en cualquier otra base.

Pero la gran importancia de los logaritmos fue poder utilizarlos en forma inversa, y por ello tuvo tanta relevancia el aporte de Napier. Con la tabla de logaritmos las multiplicaciones se podrían resolver mediante sumas, y las divisiones mediante restas.

Por ejemplo, multiplicar dos números de la segunda fila de la tabla puede involucrar muchos cálculos:

$$256 \cdot 512 = \ldots$$

Pero sumar sus correspondientes logaritmos es una cuenta muy sencilla: $8 + 9 = 17$. Este simple cálculo, teniendo el tabulado el número 17 permite obtener fácilmente el resultado:

$$256 \cdot 512 = 2^{17} = 131.072$$

El descubrimiento de los logaritmos fue de gran importancia para los científicos de la época, principalmente para los astrónomos que debían hacer cálculos con números muy grandes y que no contaban con calculadoras ni computadoras.

La tabla de logaritmos publicada por Napier utilizaba la base 10, probablemente porque el sistema decimal era el más difundido. Pero además, Napier estudió las propiedades de los logaritmos y si bien no menciona en su obra al número e, sí aparece implícitamente en sus logaritmos. Quien realmente descubrió esta constante fue el matemático Jacob Bernoulli, calculando aproximaciones de la fórmula

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

precisamente estudiando el interés compuesto.

11.2.2. El interés compuesto

Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli estudió una situación como la siguiente. Supongamos que un banco ofrece un interés del 100% anual. Si se depositan \$ 100, al año la suma habrá aumentado en \$ 100:

$$100 \cdot (1 + 1{,}0) = 100 \cdot 2$$

Ahora, si la capitalización se realiza semestralmente, al año el capital será de:

$$100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{2}\right)^2 = 100 \cdot 2{,}25$$

Y si se hace cada cuatro meses, dos meses o mensualmente, el monto al año será, respectivamente:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{3}\right)^3 &= 100 \cdot 2{,}3704 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{6}\right)^6 &= 100 \cdot 2{,}5216 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{12}\right)^{12} &= 100 \cdot 2{,}6130 \end{aligned}$$

Bernoulli notó que la sucesión de números 2,25; 2,3704; 2,5216; 2,6130; . . . ; obtenida a partir de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ iba aumentando, pero a su vez se aproximaba a un límite que no superaba. Si la capitalización era semanal (n = 52) o diaria (n = 360), los números obtenidos diferían en un poco más de dos centésimos: 2,692596954 y 2,714516025. Para valores de n más grandes la diferencia entre dos números consecutivos era del orden de los milésimos, luego diezmilésimos, y así siguiendo.

Así, la sucesión no se estabiliza en ningún valor, pero se aproxima o *converge* a un número. Las primeras cifras de este número son 2,71182818 . . . . Sus cifras decimales no son periódicas, por lo que no se trata de un número racional sino de un número irracional. Por esta razón, y por ser un número que aparece naturalmente en muchas situaciones, debe denotarse con una letra.

Los matemáticos Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens fueron los primeros en asignarles una letra, y eligieron la letra b. Leonhard Euler fue quien comenzó a utilizar la constante $\boldsymbol{e}$, en 1727. Se desconoce por qué se eligió tal letra: podría ser porque es la primera letra de la palabra e*xponencial*, ya que este número aparece ligado a las funciones exponenciales, o porque es la segunda vocal y Euler ya había utilizado la letra a para designar otra constante; o tal vez por ser la inicial de *Euler*.

Leonhard Euler

11.2.3. Otras fórmulas para el número *e*

La constante e aparece en múltiples situaciones y contextos de la matemática, y gracias a ello hay diferentes expresiones que permiten aproximar el número e. Algunas de ellas son las siguientes sucesiones de números:

Límite de una sucesión infinita de fracciones:

$$2+\frac{2}{2+3}=2{,}4;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{4}}=2{,}82;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+6}}}=2{,}69;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+\frac{5}{6+7}}}}=2{,}72$$

$$\boxed{e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{6+\cfrac{6}{7+\cfrac{7}{8+\cdots}}}}}}}$$

Como suma infinita de fracciones:

$$1+\frac{1}{1!}=2;\qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2{,}5;\qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2{,}67$$

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.}$$

Como producto infinito de números:

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}=2{,}83;\quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}=2{,}67;\quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}=2{,}59;\ldots$$

$$\boxed{e=2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots}$$

A partir de estas fórmulas, y muchas otras que aquí no se mencionan, es posible obtener con precisión los primeros decimales del número e. Existen varios trabajos de investigación a lo largo de los años en los que se ha intentado calcular el mayor número posible de dígitos. El

primer ejemplo, y evidentemente con cálculos hechos a mano, es de Leonhard Euler en 1748 quien calculó 18^8 dígitos. Hasta ahora, el mayor número de decimales calculado, y por computadora, ha sido 100.000.000.000, por Shigeru Kondo y Steve Paglia [2007].

11.3. La función exponencial

Si q es un número real positivo y n es un número natural, entonces q^n denota la potencia n-ésima del número q, es decir:

$$q^n = \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{n \text{ veces}}.$$

El número q es la *base* de la potencia y n es el *exponente*. Así, para n natural la potencia es una abreviatura de la multiplicación iterada de un número por sí mismo.

Ahora bien, también puede definirse la potencia para exponentes no naturales, pero ya no puede interpretarse como una multiplicación repetida. Es decir, no tiene sentido decir que $3^{1/2}$ es multiplicar al 3 la mitad de veces. La definición que se utiliza para la potenciación con exponente negativo y fraccionario es la siguiente: Si m y n son naturales, entonces

$$q^{-n} = \frac{1}{q^n}, \qquad q^{1/n} = \sqrt[n]{q}, \qquad \text{y} \qquad q^{m/n} = \sqrt[n]{q^m} = \left(\sqrt[n]{q}\right)^m$$

Así por ejemplo, $2^3 = 8$, $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$ y $27^{4/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 81$. De esta manera, queda definida la potencia para exponentes enteros y racionales, distintos de cero. Para exponente nulo se conviene $q^0 = 1$.

La potenciación cumple las siguientes propiedades. Si a, b son números racionales, entonces

$$q^{a+b} = q^a \cdot q^b, \qquad q^{a-b} = \frac{q^a}{q^b}, \qquad (q^a)^b = q^{a \cdot b}.$$

Así por ejemplo, $3^6 = 3^2 \cdot 3^4$, $(2^3)^5 = 2^{15}$.

Pero también existen números reales que no son racionales. Por ejemplo, el número e, π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, son ejemplos de números *irracionales*; y en realidad existen infinitos de estos números. Dado que cualquier número irracional puede aproximarse por una sucesión de números racionales, entonces la potencia de un número real con exponente irracional se define como el número al cual se aproximan las correspondientes potencias con exponentes racionales en la sucesión.

Ejemplo 11.2

El número π es un número irracional cuyas primeras cifras son $\pi = 3{,}141592\ldots$. En particular, la sucesión de números racionales:

$b_1 = 3{,}1$ $\quad b_2 = 3{,}15$, $\quad b_3 = 3{,}141$, $\quad b_4 = 3{,}1415$, $\quad b_5 = 3{,}14159$, $\quad b_6 = 3{,}141592, \ldots$

se aproxima cada vez más a π, y así la potencia 4^π se puede calcular como el número al cual se aproximan las potencias 2^{b_n}, para $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$4^{3{,}1} = 73{,}5166$, $\quad 4^{3{,}14} = 77{,}7084$, $\quad 4^{3{,}141} = 77{,}8162$, $\quad 4^{3{,}1415} = 77{,}8702\ldots$

por lo puede verse que 4^π es un número próximo a 77,90. Cuantos más decimales se utilicen en la aproximación a π, mejor será la aproximación a 4^π.

Esta es la definición formal de potencia con exponente irracional.

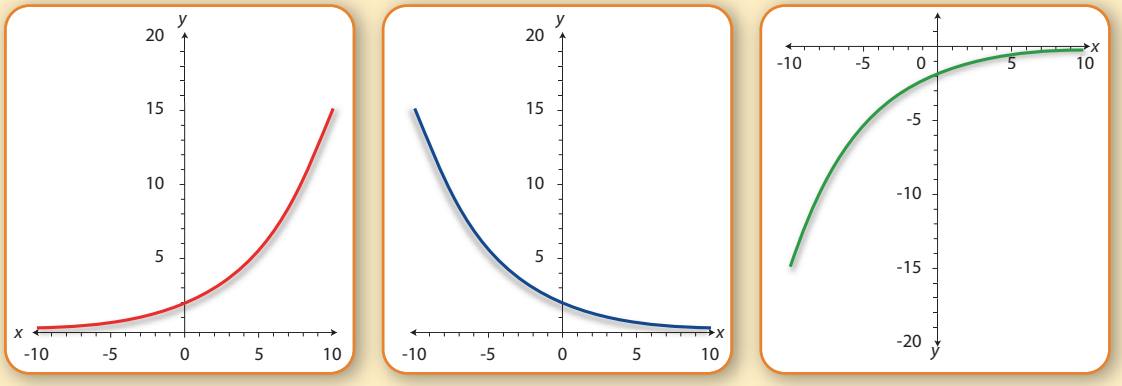
Una función exponencial es una función de la forma:

$$f(x) = a \cdot q^{rx} \qquad a \text{ real,}$$

con a, r y q reales, $q > 0$.

En la Figura 11.1, los dos primeros gráficos corresponden a las funciones $f_1(x) = 2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$ y $f_2(x) = 2 \cdot 1{,}5^{-0{,}5\,x}$, mientras que el tercer gráfico corresponde a $f_3(x) = -2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$. El signo de a determina si la función es positiva o negativa. Si $a > 0$, el gráfico queda por encima del eje x, y si $a < 0$ queda por debajo.

Si r es positivo, entonces la función se aleja del eje x a medida que x crece, y se acerca a él a medida que x decrece. Por otro lado, r está relacionado con la velocidad de crecimiento de la función.



Gráficos de funciones exponenciales

Figura 11.1

Ejemplo 11.3

Consideremos la función $f(x) = 2^{0{,}5\,x}$. Entonces:

$$f(x+1) = 2^{0{,}5\,(x+1)} = 2^{0{,}5\,x} \qquad 2^{0{,}5} = 2^{0{,}5\,x} \cdot 1{,}41$$

Significa que, independientemente del valor de x, la función crece un 41% por cada unidad en x. Este 41% proviene de $2^{0{,}5} - 1$

Para cualquier función exponencial de la forma $f(x) = a \cdot q^{rx}$, se tiene que la función crece (o decrece si $a < 0$) en un $(q^r - 1)$ 100% por cada unidad en x.

11.3.1 La función $f(x) = e^x$

De todas las funciones exponenciales, hay una sola que cumple con las siguientes propiedades:

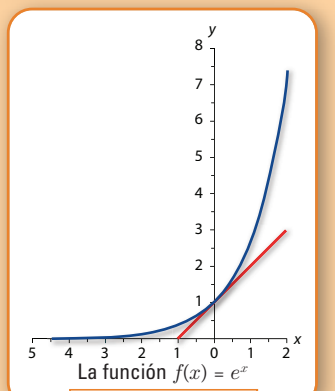
- $f(0) = 1$: es decir, pasa por el punto $(0, 1)$;
- la recta tangente al gráfico de la función por el punto $(0, 1)$ tiene pendiente 1.

Para cumplir la primera condición debe ser que $a = 1$, y para que además se cumpla la segunda debe ser $q = e$ y $r = 1$. Esto es

$$f(x) = e^x$$

donde e es el número que hemos definido como el valor límite de la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$. (Ver Figura 11.2).

Este es otro ejemplo en el cual el número e aparece naturalmente en la matemática, en este caso en el contexto del análisis matemático.



La función $f(x) = e^x$

Figura 11.2

11.3.2. Logaritmos y el logaritmo natural

El logaritmo es la función inversa a la potenciación. Ya se ha visto en el Ejemplo 11.1 la definición del logaritmo en base 2 como la inversa de la potenciación en base 2: $2^{\log_2(y)} = y$. De manera análoga se puede definir el logaritmo en cualquier base $b > 0$.

Definición 11.1

Dado un número positivo b, el logaritmo en base b del número y es el número x tal que $b^x = y$, y se escribe $\log_b(y) = x$. Esto es,

$$\log_b(y) = x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^x = y$$

Si se tienen dos bases distintas, a y b por ejemplo, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\log_a(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_a(b)}$$

Dado que $\log_a(b)$ es un número fijo, se tiene que $\log_a(y)$ y $\log_b(y)$ son proporcionales entre sí, por lo cual conociendo los valores del logaritmo para una base en particular, se pueden determinar los valores de cualquier otro logaritmo en otra base.

Cabe agregar que el logaritmo con base e se suele denominar también *logaritmo natural*, y se utiliza la notación $\log_e(x) = \ln(x)$. En particular se tiene que, para cualquier base $b > 0$,

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \qquad \text{y} \qquad b^x = e^{x \ln(b)}$$

Estas relaciones permiten calcular cualquier exponencial o logaritmo en términos de la función exponencial e^x y del logaritmo natural.

En la siguiente sección veremos el concepto de capitalización continua, que relaciona la función exponencial con el interés compuesto.

11.4. Capitalización continua

Si un capital C se deposita al 100% de interés anual, y se capitaliza cada fracción $\frac{1}{n}$ del año, al cabo de un año el capital habrá ascendido a

$$C \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A medida que n se hace más grande, puede pensarse que la capitalización se realiza en cada instante de tiempo, y este proceso se denomina *capitalización continua*.

En particular, si la tasa de interés anual es del 100%y la capitalización es continua, entonces el capital ascenderá en un año a $C \cdot e$, por lo que la tasa de interés efectiva anual será $e - 1$.

Si la T.N.A. es r, con capitalización cada n-ésima fracción del año, entonces un capital C se incrementará en un año hasta

$$C \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Esta expresión también está relacionada con el número e. En efecto, utilizando las propiedades de la potenciación, la fórmula entre paréntesis puede transformarse operando algebraicamente de la siguiente manera:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

Puesto que r es un número positivo fijo, se tiene que si n toma valores cada vez más grandes entonces lo mismo ocurre con n/r. Esto implica, aunque la demostración formal no es inmediata, que la expresión $\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}$ se aproxima al número e. Así se puede ver que:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

se aproxima al número e^r. Volviendo a la situación de un capital C sometido a una T.N.A. r con capitalización continua, lo anteriormente expuesto muestra que al cabo de un año el capital habrá aumentado a $C \cdot e^r$.

Dada una tasa de interés nominal anual r con capitalización continua, la tasa de interés efectiva anual correspondiente es $e^r - 1$.

Puesto que la T.E.A. es $i = e^r - 1$, esto indica que la capitalización de C por un período de t años está dado por

$$C \cdot (1 + i)^t = C \cdot (1 + (e^r - 1))^t = C \cdot e^{rt}$$

Un capital C sometido a una tasa de interés r con capitalización continua crece exponencialmente en el tiempo de acuerdo a la fórmula

$$C(t) = C \cdot e^{rt}$$

11.5. Ejercicios

Ejercicio 11.1

Determinar cuál es la función $f(x)$ que crece un 25% cuando x aumenta en una unidad, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0,5).

Ejercicio 11.2

Determinar cuál es la función $f(x)$ que decrece un 20% cuando x aumenta en dos unidades, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 3).

Ejercicio 11.3

Si se efectúa un depósito en un banco que ofrece una tasa de interés del 5,9% anual con capitalización continua, ¿cuál debe ser el monto a depositar para que el capital ascienda a $ 12.000 en 5 años?

Ejercicio 11.4

Una persona invierte $ 3.000 en un banco, a un interés del 6,3% con capitalización diaria. ¿Cuánto dinero tendrá en un año? ¿Cuánto tendría si la capitalización fuera continua?