Apéndice

Apéndice I
Funciones trigonométricas

A lo largo de este libro hemos utilizado funciones trigonométricas. Vale la pena recordar sus definiciones y usos. Si bien estas funciones tienen propiedades muy útiles y se han elaborado aplicaciones sumamente complejas de éstas, es totalmente válido preguntarnos qué son las funciones trigonométricas.

Estas funciones fueron descubiertas por matemáticos árabes de los siglos V y VIII al analizar las propiedades entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, de allí el nombre de funciones trigonométricas. Los estudios relacionados con las propiedades de triángulos rectángulos se pueden rastrear desde la antigua Grecia, Egipto y el mundo Arabe antiguo. Dado cualquier triángulo rectángulo (**Figura 335**).

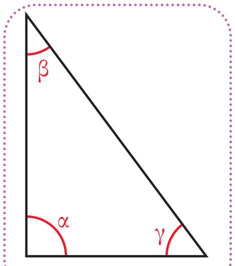

Figura 335.

vale que $\alpha = 90°$ y $\beta + \gamma = 90°$

Las funciones trigonométricas se aplican a los ángulos β y γ y se definen como relaciones entre los lados teniendo como referencia estos ángulos. Los lados de todo triángulo rectángulo reciben los nombres de la **figura 336**.

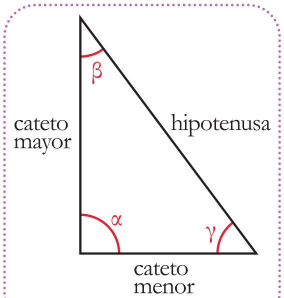

Figura 336.

La función seno (sen) se define como un cociente entre el cateto opuesto al ángulo que deseemos estudiar y la hipotenusa.

En fórmulas:
1 - para el ángulo β:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{\text{cateto opuesto a }\beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}$$

2 - para el ángulo γ:

$$\text{sen}\ \gamma = \frac{\text{cateto opuesto a }\gamma}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto mayor}}{\text{hipotenusa}}$$

La función coseno (cos) se define como un cociente entre el cateto adyacente al ángulo que deseemos estudiar y la hipotenusa.

En fórmulas:
1 - para el ángulo β:

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente a }\beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto mayor}}{\text{hipotenusa}}$$

2 - para el ángulo γ:

$$\cos \gamma = \frac{\text{cateto adyacente a }\gamma}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}$$

La función tangente (tg) se define como un cociente entre el cateto opuesto al ángulo que deseemos estudiar y el cateto adyacente.

En fórmulas:
1 - para el ángulo β:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\text{cateto opuesto a }\beta}{\text{cateto adyacente a }\beta} = \frac{\text{cateto menor}}{\text{cateto mayor}}$$

2 - para el ángulo γ:

$$\text{tg}\ \gamma = \frac{\text{cateto opuesto a }\gamma}{\text{cateto adyacente a }\gamma} = \frac{\text{cateto mayor}}{\text{cateto menor}}$$

Como podemos reconocer, la entrada a esta función es un ángulo y la salida es un valor que puede ser 0, 1 o un número entre ambos (0,…). La operación que media la entrada y la salida es la operación división. Esto quiere decir que no hay que marearse con el hecho de aplicar las funciones trigonométricas, no son más que divisiones, operación que conocemos desde la escuela primaria.

Si dado un caso en el cual conocemos las longitudes de los lados o el valor de un cociente entre lados, podemos obtener el ángulo que produce esa relación utilizando las funciones trigonométricas inversas:

Para el seno, su función inversa se llama arcoseno (arcsen).
1 - para el ángulo β:

$$\beta = \text{arcsen}\left(\frac{\text{cateto opuesto a }\beta}{\text{hipotenusa}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}\right)$$

2 - para el ángulo γ:

$$\gamma = \text{arcsen}\left(\frac{\text{cateto opuesto a }\gamma}{\text{hipotenusa}}\right) = \text{arsen}\left(\frac{\text{cateto mayor}}{\text{hipotenusa}}\right)$$

Para el coseno, su función inversa se llama arcocoseno (arcos):

1 - para el ángulo β:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}}\right) = \arccos\left(\frac{\text{cateto mayor}}{\text{hipotenusa}}\right)$$

2 - para el ángulo γ:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\text{cateto adyacente a } \gamma}{\text{hipotenusa}}\right) = \arccos\left(\frac{\text{cateto menor}}{\text{hipotenusa}}\right)$$

Para la tangente, su función inversa se llama arcotangente (arctg):

1 - para el ángulo β:

$$\beta = \text{arctg}\left(\frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{cateto adyacente a } \beta}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\text{cateto menor}}{\text{cateto mayor}}\right)$$

2 - para el ángulo γ:

$$\gamma = \text{arctg}\left(\frac{\text{cateto opuesto a } \gamma}{\text{cateto adyacente a } \gamma}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\text{cateto mayor}}{\text{cateto menor}}\right)$$

Lo más importante de este resultado es que tenemos tres formas de obtener un ángulo perteneciente a un triángulo rectángulo y nos basta conocer las longitudes de cualquier par de lados del triángulo para averiguarlo.

Un resultado aún más útil es que dados dos triángulos equivalentes, esto es que tienen los mismos ángulos, si conocemos por lo menos dos longitudes de los lados de uno, podemos averiguar las longitudes de los lados del otro conociendo sólo uno de sus lados, ya que se verifican las relaciones que se observan en la figura (**Figura 337**).

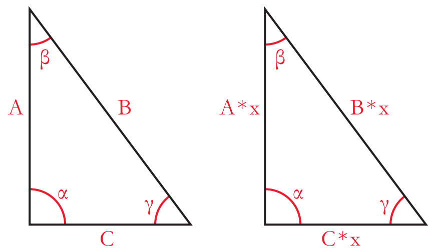

Figura 337.

Estos dos triángulos son equivalentes entre sí. El triángulo de la derecha será más pequeño o más grande según el factor "x" que multiplica a todos los lados, sea menor o mayor que uno (pero siempre positivo), respectivamente.

Cualquier función trigonométrica que apliquemos para el triángulo de la derecha es equivalente aplicarla al de la izquierda ya que cualquiera sea el cociente que debamos realizar el factor x se cancela y, por lo tanto, resulta en la misma función aplicada al triángulo de la izquierda.

Por ejemplo, para la función seno aplicada al ángulo β en el triángulo de la derecha:

sen (β) = cateto opuesto / hipotenusa
sen (β) = C * *x* /B * *x*
sen (β) = C/B

que es la función seno aplicada al ángulo β en el triángulo de la izquierda.

Apéndice II

Alfabeto griego

Es muy usual señalar entidades geométricas con letras de alfabeto griego. Para saber cómo se leen, aquí tenemos la lista completa de letras en grafía minúscula y mayúscula y su nombre en castellano (**Tabla 8**).

Grafía minúscula (en español)	**Grafía minúscula** (en griego)	**Grafía mayúscula** (en griego)	**Nombre** (en griego) [1]
a	α	Α	Alfa
b	β	Β	Beta
g	γ	Γ	Gamma
d	δ	Δ	Delta
e	ε	Ε	Épsilon
z	ζ	Ζ	Zeta
h	η	Η	Eta
q	θ	Θ	Teta
i	ι	Ι	Iota
k	κ	Κ	Kappa
l	λ	Λ	Lambda
m	μ	Μ	Mu
n	ν	Ν	Nu
x	ξ	Ξ	Xi
o	ο	Ο	Ómicron
p	π	Π	Pi
r	ρ	Ρ	Ro
s	σ	Σ	Sigma
t	τ	Τ	Tau
u	υ	Υ	Ípsilon
f	φ	Φ	Fi
Aplicar función Insertar símbolo	χ	Χ	Ji
y	ψ	Ψ	Psi
w	ω	Ω	Omega

Tabla 8.

Apéndice III

Órdenes de magnitud

Cuando es necesario identificar magnitudes, muy grandes o muy pequeñas, es muy útil recurrir a las expresiones abreviadas utilizando potencias de base 10. Estas expresiones matemáticas se aplican a cualquier unidad de medida (**Tabla 9**).

[1] Las fuente tipográfica Symbol (minúscula y mayúscula) corresponde al alfabeto griego.

Número completo	Potencia de base 10	Nombre del prefijo
0.000000000000000000000001	10^{-24}	yocto
0.000000000000000000001	10^{-21}	zepto
0.000000000000000001	10^{-18}	atto
0.000000000000001	10^{-15}	femto
0.000000000001	10^{-12}	pico
0.000000001	10^{-9}	nano
0.000001	10^{-6}	micro
0.001	10^{-3}	mili
0.01	10^{-2}	centi
0.1	10^{-1}	deci
1	10^{0}	-
10	10^{1}	deca
100	10^{2}	hecto
1000	10^{3}	kilo
1000000	10^{6}	mega
1000000000	10^{9}	giga
1000000000000	10^{12}	tera
1000000000000000	10^{15}	peta
1000000000000000000	10^{18}	exa
1000000000000000000000	10^{21}	zetta
1000000000000000000000000	10^{24}	yotta

Tabla 9.

Es importante tener idea de estas magnitudes ya que casi todos estos múltiplos y submúltiplos de 10 pueden ser aplicados a cualquier unidad, pero pueden darse caso absurdos, por ejemplo, con la magnitud que llamamos mol.

La palabra mol se suele usar como unidad de medida de cantidad, pero como tal **es** una cantidad. Esta cantidad es $6{,}022 * 10^{23}$. Se lo utiliza, habitualmente, para designar cantidades de moléculas.

Es un número muy grande, pero no infinito y entero ya que se utiliza para contar entidades, así es posible hablar de milimol cuando queremos representar una cantidad de entidades menor a un mol (en este caso mil veces menor):

1 milimol = $1 * 10^{-3}$ mol
1 milimol = $1 * 10^{-3} * 6{,}022 * 10^{23}$

Reordenamos:
1 milimol = $1 * 6{,}022 * 10^{-3} * 10^{23}$

Resolvemos la multiplicación de números decimales:
1 milimol = $6{,}022 * 10^{-3} * 10^{23}$

Resolvemos la multiplicación de números (bases) elevadas a potencia. La multiplicación de potencias de igual base resulta en la base elevada a la suma de las potencias:

1 milimol = $6{,}022 * 10^{(-3 + 23)}$
1 milimol = $6{,}022 * 10^{20}$

Ésta es la cantidad que representa 1 milimol, 602.200.000.000.000.000.000 o sea seiscientos dos trillones doscientos mil billones, por ejemplo, si estábamos contando moléculas de glucosa.

Podemos repetir el procedimiento anterior para averiguar cuál es la cantidad de entidades que representa cada submúltiplo. Pero ¿tendrá sentido hablar de yoctomol? Veamos:

1 yoctomol = $1 * 10^{-24}$ mol
1 yoctomol = $1 * 10^{-24} * 6{,}022 * 10^{23}$
1 yoctomol = $1 * 6{,}022 * 10^{-24} * 10^{23}$
1 yoctomol = $6{,}022 * 10^{-24} * 10^{23}$
1 yoctomol = $6{,}022 * 10^{(-24 + 23)}$
1 yoctomol = $6{,}022 * 10^{-1}$
1 yoctomol = 0,6022

Un yoctomol representaría una cantidad de entidades expresada por un número decimal. Esto no tiene ningún sentido, es como decir que un partido de fútbol se juega con 0,6 pelotas. Por lo tanto el yoctomol no representa otra cosa que un absurdo uso del prefijo yocto (10^{-24}).