Análisis matemático
Sus aplicaciones

1

MINISTERIO de EDUCACIÓN CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

serie/ciencias para la educación tecnológica

Especialistas de contenido:

- Juan Foncuberta
- Gustavo Barallobres

serie/ciencias para la educación tecnológica

1. Análisis matemático. Sus aplicaciones.

Índice

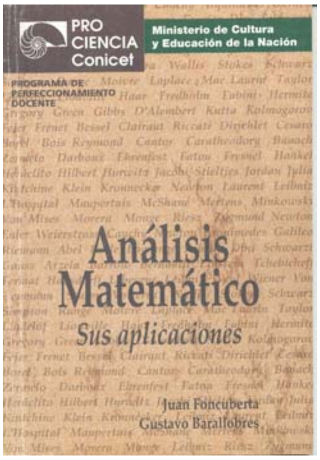
La serie "Ciencias para la educación tecnológica"

Con el título ***Ciencias para la Educación Tecnológica***, estamos planteando desde el CeNET una serie de publicaciones que convergen en el objetivo de:

> Acompañar a nuestros colegas docentes en la adquisición de contenidos científicos que les permitan una mejor definición, encuadre y resolución de los problemas tecnológicos que se enseñan en la escuela.

Porque, en Educación Tecnológica las ciencias básicas ocupan "una posición importante aunque subalterna e instrumental (...) La tecnología es un modo de ver el fenómeno de la artificialidad, y de analizar 'sistémicamente' los objetos tecnológicos desde su finalidad y no desde los fundamentos científicos en que se basa su funcionamiento." (Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. Contenidos Básicos Comunes para la Formación Docente de Grado. Tercer Ciclo de la Educación General Básica y Educación Polimodal. "Contenidos Básicos Comunes del Campo de la Formación de Orientación de la Formación Docente de Educación Tecnológica". Buenos Aires.)[1]

Análisis matemático. Sus aplicaciones, el material que usted tiene en sus manos es una versión digital de la publicación del mismo nombre que, en 1996, elaboró el Programa de Perfeccionamiento Docente Prociencia-CONICET[2], del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina y al que desde el CeNET nos proponemos continuar distribuyendo[3].

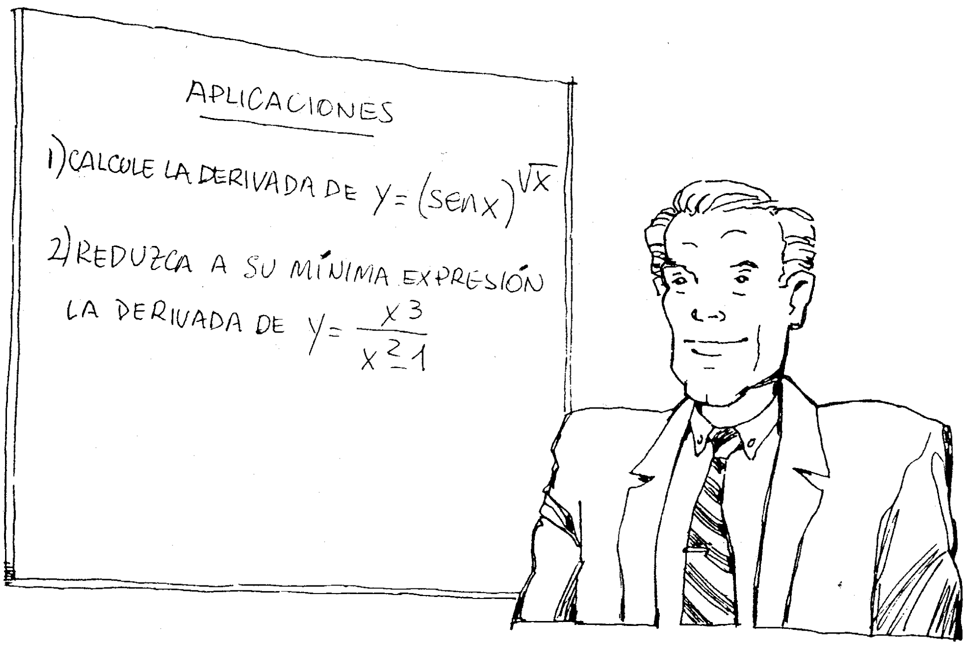


---

[1] Puede usted encontrar la versión completa en el sitio web del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología; específicamente, en la página:
- http://www.me.gov.ar/curriform/servicios/publica/publica/fordoc/index.html
[2] El CONICET es el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, de la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva –Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología–.
[3] La versión de este libro en soporte papel formaba parte del Proyecto Matemática del Programa Prociencia –CONICET–.
- La coordinación del proyecto estaba asumida por la profesora Mirta Grines de Hanfling, la profesora María Teresa Diñeiro y el profesor Camilo Díaz.
- El asesoramiento científico, desarrollado por el doctor Luis Santaló.

1. ALGUNAS APLICACIONES DEL ANÁLISIS

Es conveniente que los alumnos tengan idea de cómo puede utilizarse el cálculo para plantear y resolver problemas. Después de todo, esa es la manera como el cálculo fue desarrollándose con muchísimo éxito aunque, de tanto en tanto, se cometieran errores que impulsaron las investigaciones teóricas. Creemos que, en la mayoría de los cursos, se insiste demasiado en la parte teórica y no en las aplicaciones, salvo que se entienda por aplicaciones la ejercitación de mecanismos. De esta manera, aún la parte teórica sólo es captada por pocos alumnos y olvidada rápidamente. Por esta razón veremos algunos ejemplos.



¿Es éste el tipo de aplicaciones al cual nos referiremos?

Enseguida encontrará la respuesta.

El cálculo diferencial e integral nos proporciona herramientas matemáticas para estudiar el cambio.

Y, como sabemos, este concepto aparece íntimamente ligado con la física, la biología, la economía...

Intentaremos mostrar algunos ejemplos interesantes:

Dinámica poblacional

Algunos países deberían percibir que los trabajos de los científicos pueden ser utilizados para lograr un mejor nivel de vida de sus habitantes.

Por ejemplo: Si es posible estimar el crecimiento de la población, puede planearse el uso de recursos públicos, programar la construcción de viviendas, etc. También hay otras preguntas: ¿Seremos capaces de producir la cantidad necesaria de alimentación para abastecer a todos los habitantes? El mercado de trabajo, ¿absorberá la mano de obra que se formará? Etcétera.

Un economista inglés, Thomas Malthus fue uno de los primeros que se encargó de estudiar el problema de la población mundial. Según él, si la población no fuese controlada, crecería de tal manera que los medios de subsistencia no alcanzarían para abastecerla.

En 1798, Malthus publicó un polémico **Ensayo sobre el principio de la población**, relativo a la manera en que ésta afecta el progreso de la sociedad. En éste decía que la población se encuentra limitada necesariamente por los "frenos del vicio y la miseria" y que estos frenos no debían ser concebidos como "obstáculos insuperables" para el progreso social. Malthus consideraba positivos para el desarrollo armónico de la población a las epidemias, las guerras, las plagas...

"Con la aparición del SIDA, la discusión sobre los argumentos de Malthus ha vuelto a aparecer: El problema de la población humana es más complicado que lo que sugieren las primeras aproximaciones que veremos (Malthus, Verhulst...). En realidad, hay bandos inconciliables cuando se discute el problema.

A título de ejemplo, damos un extracto de un trabajo denominado **Sida y control de la población:**

"Algunos ven al SIDA como una solución al del crecimiento de la población (en África, especialmente). Cálculos muy elementales muestran que esto no es cierto. Por ejemplo, en el siglo XIV, la peste negra eliminó más de la mitad de la población de Europa; pero, a mitad del siglo XVII la población llegó al número que hubiera alcanzado, en esa misma época, sin que hubiese habido la peste negra. La violencia desde 1914 a 1945 mató a 200 millones de personas; sin embargo, el efecto apenas se notó con los censos de 1970. En el tiempo de Malthus, el aumento de la producción debida a la revolución industrial, produjo un aumento explosivo de población. Pero, después del gigantesco cambio producido, actualmente, la población de países ricos –incluso Japón–, se acerca al índice cero de crecimiento, habiendo pasado de expectativas de vida de 25 años a 75 años. Otros países están desarrollándose y parecen entrar en la fase anterior a la disminución de las tasas de natalidad y de mortalidad. Por ejemplo, China e India. China ha reducido su mortalidad infantil a 42 por mil y la India a 142 por mil. El analfabetismo femenino ha caído al 66% en India y al 38% en China. El número medio de hijos por familia en India ha caído de seis a cuatro y en China es de 2,3 (muy cerca del crecimiento cero = 2,1). Como acelerar el paso de estos países es la principal tarea de las organizaciones; el Sida no debe interferir. La solución a la conclusión de Malthus está en la vida y no en la muerte'."[1]

[1] *Piel, Gerard. "Sida y control de la población".* Scientific American*. Febrero 1994.*

El modelo de Malthus

Malthus, para construir su modelo, supuso que, en un intervalo de tiempo Δt, las cantidades de nacimientos y de muertes son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo Δt.

En una primera aproximación, la suposición de Malthus es razonable, porque es de esperar que el número de nacimientos aumente con la población y lo mismo el número de muertes.

Intentaremos traducir en términos matemáticos estas reflexiones.

Llamaremos P (t) a la población existente en el instante t.

número de nacimientos	=	α P(t) . Δt	α constante
número de muertes	=	β . P(t) . Δt	β constante

¿Qué representan las constantes α y β?

- la constante α es la tasa de natalidad.
- la constante β es la tasa de mortalidad.

En nuestro país, el INDEC, Instituto Nacional de Estadísticas y Censos, se encarga de determinar estos valores para diferentes períodos de tiempo.

Conociendo el número de nacimientos y de muertes en el intervalo Δt, podemos calcular cuánto varió la población en dicho intervalo:

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = \alpha.P(t).\Delta t - \beta.P(t).\Delta t$$

Entonces:

$$\Delta P = (\alpha - \beta)P(t).\Delta t$$

O

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t)$$

Si hacemos tender Δt a cero, obtenemos:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P(t) \qquad (1)}$$

Las ecuaciones en las que aparecen derivadas se llaman ecuaciones diferenciales. La ecuación recuadrada (1) expresa que la variación instantánea de la población es directamente proporcional a la población en cada instante: Si multiplicamos P (t) por 2, el primer miembro se multiplica por 2. Es muy frecuente que, al intentar construir un modelo de un fenómeno, aparezcan ecuaciones que envuelvan variaciones de cantidades.

Observación: Se comprende que α y β varían cuando el período es prolongado; pero, para períodos razonablemente cortos se pueden tomar constantes, lo que permite obtener conclusiones.

ACTIVIDAD 1.1. [1]

¿Qué le parece a usted que sucederá con una población si su tasa de natalidad es mayor que la de mortalidad, en un período de tiempo? Y, ¿si es menor? ¿Qué sucederá si ambas tasas son iguales?

Veamos si las conclusiones que pueden extraerse de la ecuación están de acuerdo con lo que nos indica la intuición.

Si la tasa de natalidad α es mayor que la tasa de mortalidad β, la población deberá crecer.

En la ecuación (1), P (t) es positiva para todo t

ACTIVIDAD 1.2.

¿Por qué?

También $\alpha - \beta > 0$.

Entonces, nos queda:

$$\frac{dP}{dt} > 0 \quad \text{para todo t}$$

Pero, sabemos que si la derivada de una función P es positiva para todo t, entonces la función P es una función creciente.

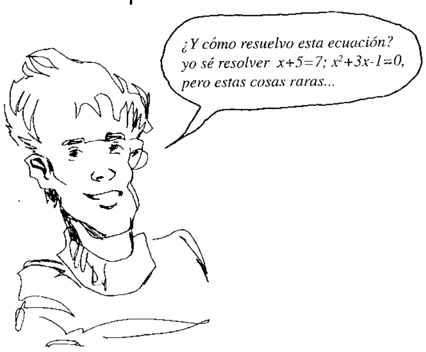
El modelo presentado concuerda con lo que la intuición decía que debería pasar.

Veamos el caso de que $\alpha < \beta$. Aquí esperamos que la población disminuya. En efecto, al ser $\alpha < \beta$, $\alpha - \beta < 0$ y, entonces, en la ecuación (1):

$$\frac{dP}{dt} < 0,$$ indicando esto que la función P es decreciente.

ACTIVIDAD 1.3.

Le dejamos para que usted analice el caso $\alpha = \beta$.



[5] *Encontrará las respuestas en la última parte del módulo.*

Resolver la ecuación diferencial planteada significa encontrar una función P(t) que cumpla:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P(t)$$

que podemos expresar:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P$$

$$\frac{dP}{P} = (\alpha - \beta)dt$$

y, si integramos entre el instante inicial t_0 y el instante t, nos queda:

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{t_0}^{t} (\alpha - \beta)dt$$

$$\text{In} \frac{P}{P_0} = (\alpha - \beta)(t - t_0)$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{(\alpha-\beta)(t-t_0)}$$

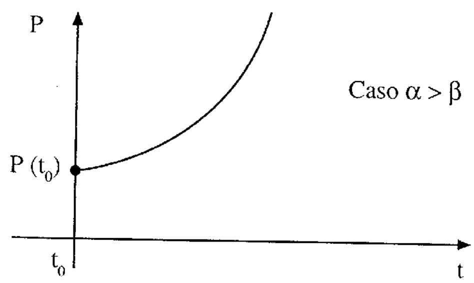
$$P = P_0 e^{(\alpha-\beta)(t-t_0)} \qquad (2)$$

Conociendo la población mundial $P(t_0)$ –población al inicio de nuestro estudio– y las tasas de natalidad y mortalidad, podemos construir una función que describa la evolución de la población, según los principios de Malthus.

Demos un gráfico aproximado de P(t) para diferente valor de α y β. Habíamos concluido que si $\alpha > \beta$, la función P (t) es creciente.

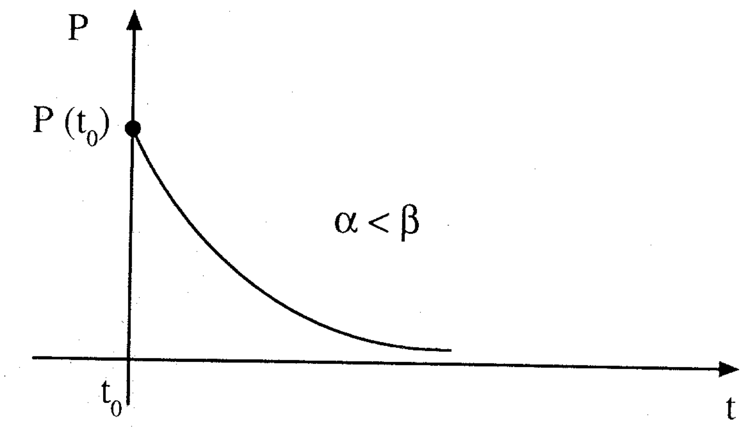
ACTIVIDAD 1.4.

Verifique desde la segunda fórmula que la función encontrada es creciente para todo t.



ACTIVIDAD 1.5.

Si $\alpha < \beta$, hemos dicho que P (t) es decreciente. ¿Cómo puede corroborar esta conclusión desde la segunda fórmula (2)?



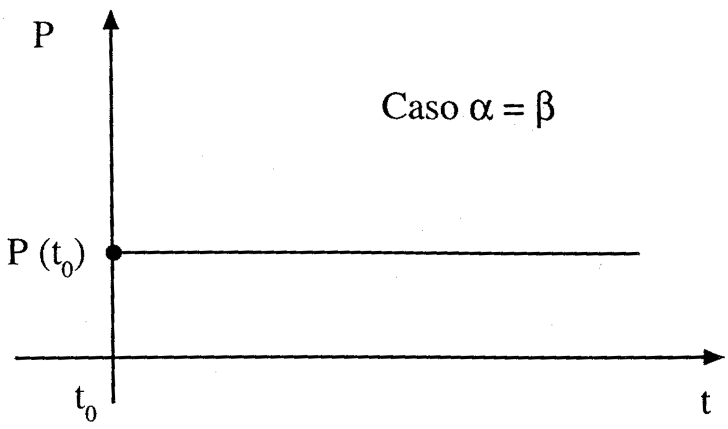
Algunos alumnos opinan que este modelo presentado no es correcto porque, siendo $\alpha < \beta$, la población debería extinguirse en algún instante, y eso no es lo que se observa en el gráfico.

ACTIVIDAD 1.6.

¿Es correcto este razonamiento? ¿Considera que el gráfico dibujado es correcto?

ACTIVIDAD 1.7.

Por último, si $\alpha = \beta$, sabíamos que la población permanece constante. La función P(t) encontrada, ¿cumple con esta conclusión? ¿Por qué?



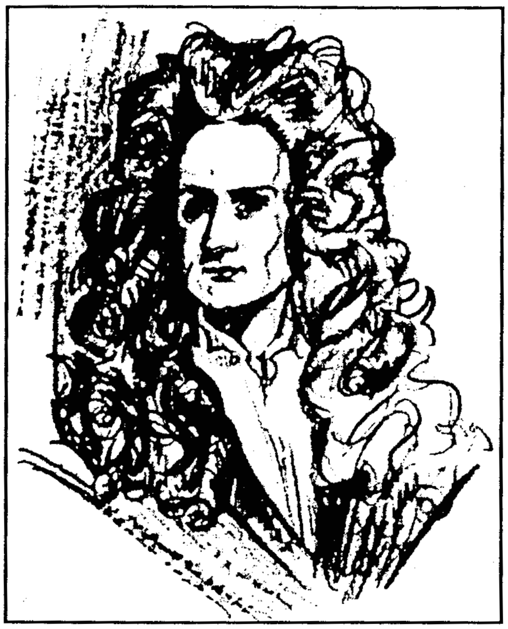
Observaciones: El análisis es similar cuando se tratan poblaciones de animales, plagas vegetales, etc.

Nos parece que éste no es el trabajo “rico” que deben realizar los alumnos. Los métodos de resolución son la parte menos interesante del trabajo que les proponemos. Claro que no siempre se dispondrá de un método para encontrar la solución explícita de una ecuación diferencial. En verdad, podríamos decir que la cantidad de ecuaciones que poseen soluciones explícitas es prácticamente nula en comparación con aquéllas que no las tienen. Pero, existe gran variedad de métodos aproximados para resolver ecuaciones diferenciales, algunos de los cua-les trataremos más adelante.

- **¿Qué significa comprender una ecuación diferencial?**

“Newton inventó las ecuaciones diferencia-les para describir movimientos de los cuerpos bajo gravedad. Su enfoque, como un lenguaje apropiado para establecer leyes físicas y construir modelos, circunda todas las ciencias.

Hay una gran discrepancia entre esta vi-sión y los cursos usuales sobre ecuaciones diferenciales que, a menudo, consisten en una serie de trucos para hallar fórmulas de solución. Pero, sucede que muchas ecuaciones di-ferenciales no admiten soluciones elementales y, aún cuando las admiten, su búsqueda oscurece la pregunta esencial: ¿Cómo se comportan las soluciones?”[6]



Isaac Newton (1642-1727). Nació en Woolsthorpe, Inglaterra. Fue un destacado matemático y físico. Desarrolló el cálculo infinitesimal en forma paralela a Leibniz.

- **Modificaciones a los cursos sobre las ecuaciones diferenciales**

“Muchos estudiantes son eficientes para los cálculos pertinentes; pero, si los interrogamos, veremos que el conocimiento sobre los conceptos básicos es deficiente. Enseñar cómo hallar soluciones explícitas para ecuaciones cuidadosamente seleccionadas es menos importante que enseñar cómo se reconoce un problema que involucra ecuaciones diferenciales y cómo se interpretan las soluciones.”[7]

[6] *Hubbard, John. 1994.* The College Mathematics Journal*. Universidad de Yale. Noviembre. 1994.*
[7] *Blanchard, Paul. 1995.* The College Mathematics Journal*. Universidad de Yale. Noviembre. 1995.*

Pero, volvamos al modelo de Malthus. Si observamos los gráficos, para $\alpha > \beta$ la función P(t) crece indefinidamente a medida que t aumenta.

Si esto fuera así, llegaría un momento en que no habría más espacio en el planeta. La ley de Malthus resultó, en la práctica, no ser eficiente para estimar poblaciones en los países desarrollados; pero, sirve para estimar poblaciones a corto plazo en países subdesarrollados y también para ciertas poblaciones de microorganismos en períodos limitados de tiempo.

- **El modelo de Verhulst**

Teniendo en cuenta otros factores como son: condiciones sanitarias, de alimentación, de vivienda, etc., Verhulst propuso, en 1837, una modificación al modelo de Malthus.

En este nuevo modelo se supone que la población de una cierta especie, viviendo en un medio determinado, alcanza un límite máximo. Llamaremos P_L a esta población límite que cumple $\text{lím}_{t\to\infty} P(t) = P_L$, siendo P(t) la población existente en cada instante.

Las reflexiones de Verhulst mejoraban el análisis de Malthus, teniendo en cuenta la observación de que la población no puede crecer indefinidamente porque, en algún momento, la restricción de recursos, la aparición de predadores... moderará el crecimiento hasta estabilizarlo.

Intentaremos analizar cómo Verhulst ha traducido matemáticamente estos presupuestos:

$$\frac{dP}{dt} = f(P).P \qquad (3)$$

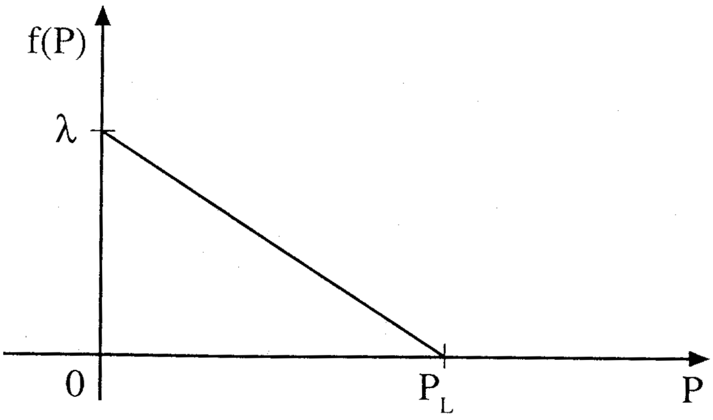
$$\text{siendo}: \quad f(P) = \lambda.\left(\frac{P_L - P}{P_L}\right), \quad \lambda > 0 \qquad (4)$$

Observemos que la diferencia entre la ecuación 1 del Modelo de Malthus y la ecuación 3 es que, en esta última, aparece una función f(P) que multiplica a P y no una constante. El factor de proporcionalidad ha sido sustituido por f(P). En el modelo de Malthus el factor de proporcionalidad (á - â) era constante durante el período de tiempo de estudio.

Analicemos un poco la función f(P):

$$f(P) = \lambda.\left(\frac{P_L - P}{P_L}\right) \qquad \text{con} \quad \lambda > 0$$

Esta función es una recta:



Del gráfico vemos que, cuanto menor es P, mayor es f(P); y que este factor de proporcionalidad decrece linealmente cuando aumenta P.

De la fórmula $f(P) = \lambda.\left(\frac{P_L - P}{P_L}\right)$

podemos deducir que, para P pequeño y $|P - P_L|$ grande, $\frac{P_L - P}{P_L}$ es aproximadamente 1.

Esto nos indica que el modelo de Verhulst, bajo estas conclusiones, se comporta como el modelo de Malthus.

Construyamos, finalmente, la ecuación diferencial para este nuevo modelo. De (3) y (4) tenemos:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \lambda.\left(\frac{P_L - P}{P_L}\right).P \qquad \lambda > 0 \qquad (5)}$$

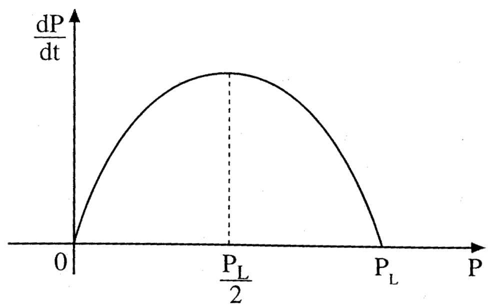
En general, en cuanto aparece una ecuación diferencial, tratamos de resolverla. Sin embargo, hay otras alternativas. Por ejemplo, en este caso, podemos hacer el gráfico de $\frac{dP}{dt}$ en función de P.

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - \frac{\lambda P^2}{P_L}$$

ACTIVIDAD 1.8.

¿De qué función se trata, en este caso?

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - \frac{\lambda}{P_L} \quad P^2$$



¿Qué nos dice este gráfico respecto a P(t)?

Cuando $P(t) = \frac{P_L}{2}$, tenemos la máxima tasa de variación de P ($\frac{dP}{dt}$ es máxima)

Llamemos t_M al instante en que esto ocurre. Entonces, $t = t_M$ es un punto de inflexión de la curva P(t), porque se anula la derivada primera de que es la derivada segunda de P (t).

Además, para $t < t_M$, es positiva, lo que indica que P(t) está creciendo.

Para $t > t_M$, es positiva; luego, P(t) continúa creciendo.

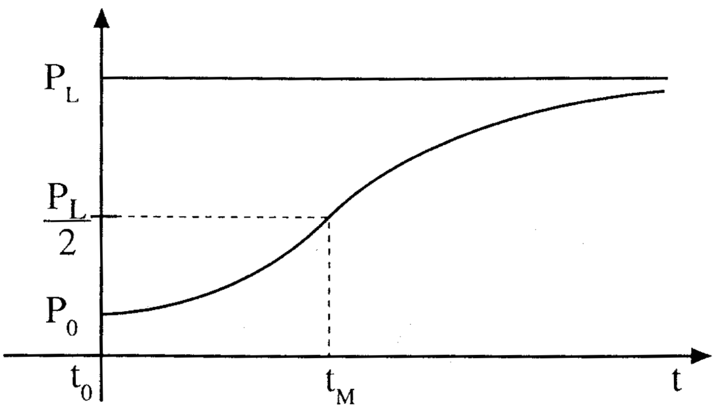
ACTIVIDAD 1.9.

¿Hay diferencia entre el crecimiento de P para $t < t_M$ y el crecimiento de P para $t > t_M$? ¿Está creciendo P en $t = t_M$?

Ahora, ¿existe siempre este punto t_M? Recordemos que un dato importante para nuestro modelo es el valor de la población inicial P_0 (población existente en el momento en que comienza el estudio).

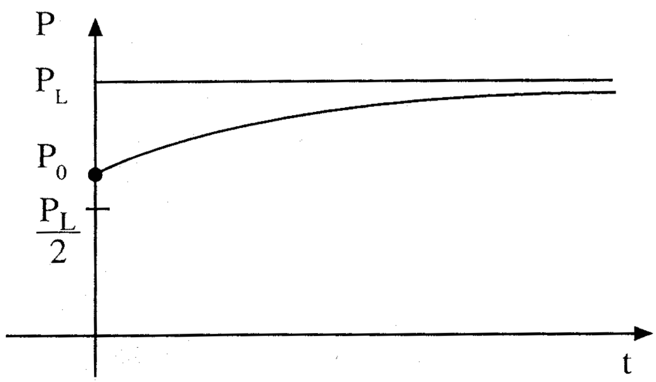
El gráfico anterior nos da nuevamente la respuesta.

Si $P_0 = \frac{P_L}{2}$, existe t_M y el gráfico de P(t) tiene un punto de inflexión.



Observemos que, para valores de P pequeños (cuando $t_0 < t < t_M$), la función P(t) crece en forma similar a lo que sucedía en el modelo de Malthus. Ya habíamos analizado que para P pequeño y $|P - P_L|$ grande, ambos modelos se aproximaban.

Si $\frac{P_L}{2} < P_0 < P_L$, no existe t_M y P(t) es una función que crece cada vez más lentamente.



Observación didáctica: Consideramos que el modelo de Malthus es sencillo y puede darse en los cursos en cuanto se conocen derivadas, porque sin hablar de integrales se puede comprender el proceso inverso de pasar de la derivada a la función. La aproximación de Verhulst es más complicada y llevaría tiempo; pero... ¿no se pierde demasiado en largos ejercicios de ecuaciones diferenciales homogéneas, por ejemplo? Recordemos que la pregunta del alumno "¿Para qué sirve?" es razonable.

¿Es verdad que los alumnos aprenden a pensar resolviendo ecuaciones diferenciales?

- **Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**

Para resolver muchos problemas es necesario resolver ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = \varphi(x) \qquad \text{con} \quad y(a) = b$$

Nos limitaremos a dar la solución general:

$$\boxed{y e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} \varphi(x)dx \qquad [(1)]}$$

La deducción puede encontrarse en cualquier texto. Nos interesan más las aplicaciones a la resolución de problemas.

Ejemplo:

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 \qquad [(2)] \quad \text{con} \quad y(1) = 2$$

$$P(x) = \frac{1}{x}\, e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

Aplicamos [(1)]

$$y.x = \int x.x^3 dx$$

$$y.x = \frac{x^5}{5} + C$$

$$y = \frac{x^4}{5} + Cx^{-1} \qquad 2 = \frac{1}{5} + \frac{C}{1}$$

La solución requerida es:

$$\boxed{y = \frac{x^4}{5} + \frac{9}{5}x^{-1}}$$

Verificación. Sustituimos en [(2)]:

$$\frac{4x^3}{5} - \frac{9}{5}x^{-2} + \frac{x^3}{5} + \frac{9}{5}x^{-2} = x^3$$

Problema: En el momento inicial (t=0), un tanque contiene Q_0 g. de sal disueltos en 5 litros de agua. En t=0, comienza a entrar en el tanque agua que contiene 1 g. de sal por litro, a razón de 2 litros por minuto. Hay un mecanismo que permite una buena disolución. También en t=0, sale la solución a 2 litros/minuto. Hallar la cantidad de sal como función del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = 1\frac{g}{l}2\frac{l}{min} - \frac{Q(t)}{5l}.2\frac{l}{min}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 2 - 0,4Q(t)$$

$$\frac{dQ}{dt} + 0,4Q(t) = 2\,*$$

Es una ecuación del tipo $\frac{dy}{dx} + y \quad P(x) = Q(x)$

Puede resolverse mediante $y \quad e^{\int P(x)dx} \quad = \quad \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx$

En el caso del problema:

$$Q \quad e^{0,4t} \quad = \quad \int 2e^{0,4t}\, dt$$

$$Q \quad e^{0,4t} \quad = \quad 5e^{0,4t} + C$$

$$Q \quad = \quad 5 + C.e^{-0,4t}$$

En t = 0, Q = Q_0 (cantidad de sal inicial).

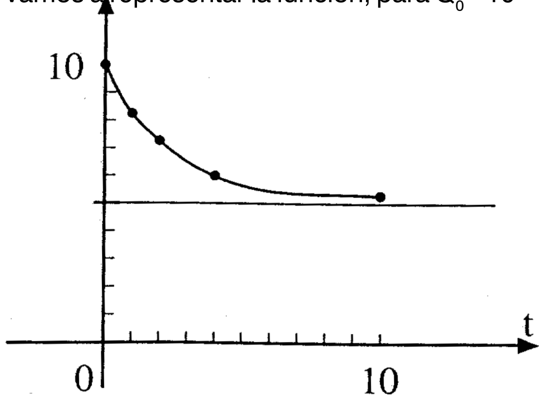
* *La cantidad de sal que sale es variable: Si en un momento hay Q(t), cada litro contiene Q(t) / 5 gramos de sal.*

En consecuencia, $Q_0 = 5 + C$ y $Q_0 - 5 = C$

La solución es, entonces:

$$\boxed{Q = 5 + (Q_0 - 5)e^{-0,4t}}$$

Vamos a representar la función, para $Q_0 = 10$



t	Q
0	10
1	$5 + 5\,e^{-0,4} = 8,35$
2	$5 + 5\,e^{-0,8} = 7,24$
4	$5 + 5\,e^{-1,6} = 6,01$
10	$5 + 5\,e^{-4} = 5,01$

Variante: Se puede estudiar el caso en el cual el flujo de entrada y salida sean distintos. Por ejemplo si, en el problema anterior, entran 2 litros/minuto y salen 3 litros/minuto.

Tendremos:

$$\frac{dQ}{dt} = 1\frac{g}{l}.2\frac{l}{min} - \frac{Q(t)}{5-t}.3\frac{l}{min}$$

¿Por qué el denominador 5 – t? Porque, ahora, el contenido del tanque disminuye, siendo 5–t, pues pierde 1 litro/minuto. Entonces, la proporción de sal a la salida, es:

$$\frac{Q(t)}{5-t}$$

$$\frac{\text{Q(t) (sal presente en el momento t)}}{\text{5 – t (volumen en el momento t)}}$$

Este cociente da la cantidad de gramos de sal por litro en el instante t.

La ecuación diferencial será:

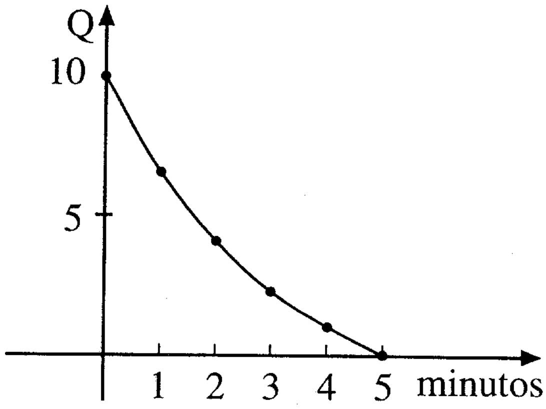
$$\frac{dQ}{dt} = 2 - \frac{Q(t)}{5-t}.3$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{5-t}Q(t) = 2$$

$$P(t) = \frac{3}{5-t} \qquad \int \frac{3}{5-t}dt = 3[-\ln(5-t)] = \ln(5-t)^{-3}$$

$$e^{\ln(5-t)^{-3}} = (5-t)^{-3}$$

La solución estará dada por:



$$Q(t)(5-t)^{-3} = 2\int (5-t)^{-3}dt$$

$$Q(t)(5-t)^{-3} = (5-t)^{-2} + C$$

$$Q(t) = (5-t) + C(5-t)^{3}$$

Supongamos que $Q_0=10$.

$10 = 5 + C.125 \qquad C= 1/25$

$Q(t) = (5-t) + 1/25\,(5-t)^3$

t	Q
0	10
1	6,56
2	4,08
3	2,32
4	1,04
5	0

Se observa que, para t = 5 minutos, no hay solución en el tanque, lo que coincide con el hecho de que el tanque pierde 1 litro/minuto.

Hay más variantes. Nuestro propósito no ha sido dar un ejemplo complicado. En las clases de cálculo, muchas veces se resuelven (en general, sin análisis) ecuaciones más engorrosas.

Un problema de biología

Vamos a considerar el caso de una enfermedad que se expande a través del contacto entre enfermos y sanos. En una primera aproximación, supondremos que se trata de una comunidad cerrada (donde no se producen ingresos o egresos).

Adoptaremos la notación:

$S = S(t)$ número de personas sanas y susceptibles de contagio.
$I = I(t)$ número de enfermos susceptibles de contagiar.
I_0 = número inicial de personas infectadas.
S_0 = número inicial de sanos.

El sólo hecho de leer y comprender el significado de las variables es un ejercicio interesante.

Para no complicar el modelo, aceptaremos que:

a) la recuperación de un enfermo no supone inmunidad: puede contraer nuevamente la enfermedad;
b) el período de incubación es pequeño y no se aísla a los enfermos;
c) la población total N es constante;
d) el aumento de infectados es proporcional al número de encuentros sano-infectado y la disminución de infectados es proporcional a I.

Resulta útil analizar y discutir las hipótesis; contribuye a la formación del alumno.

¿Qué sucede si modificamos las hipótesis? Si, por ejemplo, se aísla a los individuos o si el período de incubación es grande.

Comentario: Generalmente, al construir modelos, se hacen estas hipótesis que los simplifican. Se sigue el camino que tan buenos resultados produjo en Física. En principio, se estudian modelos simples que luego se complican para profundizar la investigación.

El paso siguiente será expresar el problema empleando los símbolos de la matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I & \alpha > 0 \quad \beta > 0 \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I & S(t) + I(t) = N \end{cases} \qquad (1)$$

α es la constante de proporcionalidad de transmisión de la enfermedad y â la constante de proporcionalidad de la disminución de infectados.

Hay que advertir que S e I son funciones de t.

No hay que pasar por alto la "lectura" del sistema. ¿Cuál es el significado de $\dfrac{dS}{dt}$?

Quizás convenga pensar en $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$: cambio del número de sanos en un intervalo Ät.

Los "sanos" disminuyen ($-\alpha SI$) proporcionalmente a la frecuencia de intercambios y aumentan cuando se curan infectados (βI; β constante de recuperación).

Análogamente, se lee la segunda ecuación.

ACTIVIDAD 1.10.

¿Con qué hipótesis se vincula la relación S (t) + I (t) = N?

Intentaremos la resolución, teniendo en cuenta que S = N – I (2)

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N - I)I - \beta I$$

Separamos las variables:

$$\frac{dI}{\alpha(N-I)I-\beta I}=dt$$

$$\frac{dI}{-\alpha I^2+(\alpha N-\beta)I}=dt \qquad (3)$$

Descomponemos en fracciones:

$$\frac{1}{I(-\alpha I+\alpha N-\beta)}=\frac{a}{I}+\frac{b}{-\alpha I+\alpha N-\beta}$$

$$\frac{1}{I(-\alpha I+\alpha N-\beta)}=\frac{a(-\alpha I+\alpha N-\beta)+bI}{I(-\alpha I+\alpha N-\beta)}$$

$$\frac{1}{I(-\alpha I+\alpha N-\beta)}=\frac{I(-a\alpha+b)+a(\alpha N-\beta)}{I(-\alpha I+\alpha N-\beta)}$$

(I es variable)

En consecuencia:

$$\begin{cases} -a\alpha+b=0 & \alpha a=b \\ a(\alpha N-\beta)=1 & a=\dfrac{1}{\alpha N-\beta} \quad b=\dfrac{\alpha}{\alpha N-\beta} \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\left(\frac{1}{\alpha N-\beta}\frac{1}{I}+\frac{\alpha}{\alpha N-\beta}\frac{1}{-\alpha I+\alpha N-\beta}\right)dI=dt$$

Integrando:

$$\frac{1}{\alpha N-\beta}\ln I-\frac{1}{\alpha N-\beta}\ln(-\alpha I+\alpha N-\beta)+\ln C=t$$

$$\ln\left(\frac{IC'}{-\alpha I+\alpha N-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha N-\beta}}=t$$

$$\left(\frac{C'I}{-\alpha I+\alpha N-\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha N-\beta}}=e^t$$

$$\frac{C'I}{-\alpha I+\alpha N-\beta}=e^{t(\alpha N-\beta)}$$

Despejamos I y obtenemos:

$$I = \frac{(\alpha N - \beta)}{C' e^{-t(\alpha N - \beta)} + \alpha} \qquad (4)$$

Debemos hallar la constante. Para t=0, el número de infectados será I_0.

$$I_0 = \frac{\alpha N - \beta}{C' + \alpha}$$

$$C' = \frac{\alpha N - \beta - I_0 \alpha}{I_0}$$

Sustituyendo en (4):

$$\boxed{I = \frac{\alpha N - \beta}{\left(\frac{\alpha N - \beta}{I_0} - \alpha\right) e^{-t(\alpha N - \beta)} + \alpha}}$$

I expresa el número de infectados a través del tiempo.

α, β, N, I_0 son constantes. Cuando t tiende a infinito, el número de infectados tiende a:

$$\frac{\alpha N - \beta}{\alpha} = N - \frac{\beta}{\alpha}$$

ACTIVIDAD 1.11.

¿Qué información nos brinda esta conclusión?

De la misma manera que hemos hecho en el ejemplo del Modelo de Verhulst, podemos analizar la ecuación (3) y dar un gráfico aproximado:

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I^2 + (\alpha N - \beta) I$$

ACTIVIDAD 1.12.

Le pedimos que grafique $\frac{dI}{dt}$ en función de I, antes de continuar con la lectura.

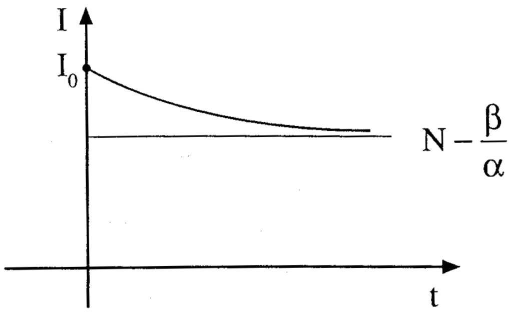
ACTIVIDAD 1.13.

¿Qué conclusiones puede obtener, desde este gráfico, con respecto a I(t)?

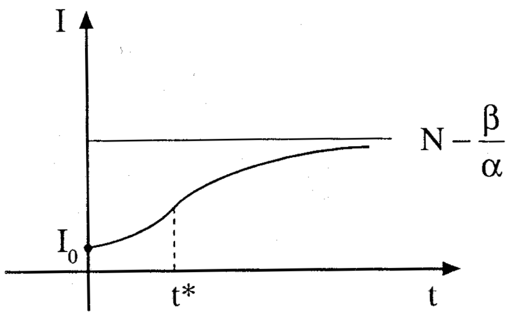
ACTIVIDAD 1.14.

¿En qué instante la cantidad de infectados cambia con mayor rapidez?

Un gráfico aproximado para I(t) es:



$$\text{si} \quad I_0 > N - \frac{\beta}{\alpha}$$



$$\text{si} \quad I_0 < N - \frac{\beta}{\alpha}$$

ACTIVIDAD 1.15.

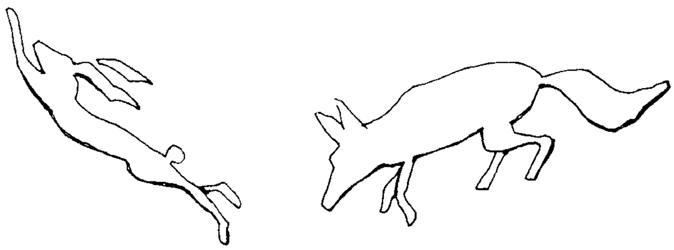
¿Puede explicar por qué estos gráficos corresponden a I(t)?

ACTIVIDAD 1.16.

Queda como actividad para usted analizar y dar un gráfico aproximado de la función S(t). Recuerde que esta función representa la cantidad de personas sanas, que aparece en la primera ecuación del sistema (1) y que puede expresar I como N-S usando la expresión (2).

- **Sistemas de ecuaciones diferenciales y matrices**

Consideremos un modelo referido a un sistema predador-predado que, en este caso, suponemos corresponde a zorros y conejos.



El modelo, en su expresión matemática, está dado por el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = 0{,}4c - 0{,}2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 0{,}1c + 0{,}1z \end{cases} \qquad [1]$$

Vemos que el número de zorros aumenta proporcionalmente al número de conejos y al número de zorros. El número de conejos aumenta con el número de conejos y disminuye con el número de zorros.

Este sistema puede reescribirse así:

$$X = \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} \qquad y \qquad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dc}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

De esta forma, nos queda el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dc}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix}$$

O sea:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = A.X} \qquad \text{siendo} \qquad A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Una solución de este sistema es, entonces, una matriz del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} c(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Cuyos elementos son funciones que resuelven el sistema planteado. Teniendo como base la solución general de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = ax$ (vista en el modelo de Malthus) que es $x = k \, . \, e^{at}$, veremos si existe para el sistema propuesto, una solución del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} c(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .e^{\lambda t}$$

Calculemos $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda ae^{\lambda t} \\ \lambda be^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Para que X sea solución, debemos tener $\frac{dx}{dt} = A.X$

Entonces, nos queda la ecuación:

$$\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = A.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

O sea:

$$A.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Si pensamos a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = v$ como un vector de R^2, la última ecuación se escribe:

$$\boxed{A.v = \lambda v}$$

Que no es más que la ecuación de autovalores y autovectores de la matriz A.

Con este razonamiento, podemos concluir que X = v. $e^{ët}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales planteado sí y sólo sí, λ es autovalor y v es autovector de la matriz A.

Entonces, nuestro trabajo será ahora calcular los autovalores y autovectores de A. (Pensemos que cuando estudiamos este tema en *Álgebra lineal*, no siempre le encontrábamos aplicación).

Resolvemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0{,}4 - \lambda & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 0{,}5\,\lambda + 0{,}06 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 0{,}3$ y $\lambda_2 = 0{,}2$

Si escribimos

Podemos hallar autovectores correspondientes a λ_1 y λ_2

Para $\lambda_1 = 0{,}3$	$0{,}1\,x_1 - 0{,}2\,x_2 = 0$	$v_1 = (2{,}1)$
Para $\lambda_2 = 0{,}2$	$0{,}2\,x_1 - 0{,}2\,x_2 = 0$	$v_2 = (1{,}1)$

Entonces, dos soluciones del sistema son:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0,3t} \qquad \text{y} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0,2t}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, x_1 y x_2 son soluciones independientes del sistema.

Como el conjunto de las soluciones $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ del sistema planteado es un espacio vectorial V de dimensión 2, dos soluciones independientes generan este espacio. Esto nos indica que toda otra solución X es combinación lineal de x_1 y x_2. Entonces, la solución general del sistema es:

$$X = r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0,3t} \qquad + \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0,2t}$$

Siendo r_1 y r_2 constantes.

Esta solución puede escribirse:

$$\begin{cases} c(t) = 2r_1 e^{0,3t} + r_2 e^{0,2t} \\ z(t) = r_1 e^{0,3t} + r_2 e^{0,2t} \end{cases}$$

Si la población inicial es 1000 conejos y 100 zorros, resolviendo el sistema obtenemos r_1 = 900 y r_2 = -800.

ACTIVIDAD 1.17.

¿Cuántos conejos habrá, aproximadamente, luego de 10 años?

De acuerdo con los cálculos, según este modelo, las dos poblaciones tenderán a aumentar indefinidamente, lo que es contradictorio con las observaciones de la realidad. Tendremos, entonces, que mejorar el modelo

- **Otra forma de pensar la resolución del sistema [1]**

El sistema [1] escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dc}{dt} \\ \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \\ z \end{pmatrix}$$

Al escribir la matriz A en la base de autovectores, obtendremos la forma diagonal de esta matriz, que es:

$$\underset{p-1}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

(Matriz de autovectores) *Matriz diagonal*

En las nuevas coordenadas, el sistema [1] se reduce a uno más simple:

$$[2]\quad \begin{cases} \dfrac{dc'}{dt} = 0{,}3c' \\[2ex] \dfrac{dz'}{dt} = 0{,}2z' \end{cases}$$

Ahora, las soluciones son fáciles de hallar:

$$\begin{cases} \mathrm{In}c' = 0{,}3t + r_1 & c' = e^{0{,}3t+r_1} \\ \mathrm{In}z' = 0{,}2t + r_2 & z' = e^{0{,}2t+r_2} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} c' = k_1.e^{0{,}3t} \\ z' = k_2.e^{0{,}2t} \end{matrix}}$$

Como deseamos la solución del sistema original, debemos "volver" a la base canónica.

Podemos escribir el sistema [2] así:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dc'}{dt} \\[2ex] \dfrac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ z' \end{pmatrix}$$

Sólo falta pasar de (c', z') a (c, z):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{0{,}3t} \\ k_2 e^{0{,}2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 e^{0{,}3t} + k_2 e^{0{,}2t} \\ k_1 e^{0{,}3t} + k_2 e^{0{,}2t} \end{pmatrix}$$

Las soluciones del sistema (que pueden verificarse) son:

$$\begin{cases} c = 2r_1 e^{0{,}3t} + r_2 e^{0{,}2t} \\ z = r_1 e^{0{,}3t} + r_2 e^{0{,}2t} \end{cases}$$

Comentario: Con este ejemplo, pretendimos ilustrar una aplicación que integra dos ramas importantes de la Matemática: el Análisis y el Álgebra Lineal.

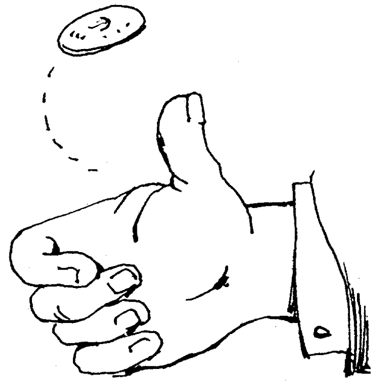
Sabemos que, seguramente, resultará provechoso para usted, no para sus alumnos del nivel medio que, sin embargo, se beneficiarán con los conocimientos del profesor.

Juegos de azar y series

En estos juegos, una persona apuesta una cantidad de dinero para participar, recibiendo un premio en caso de acertar.

Los banqueros deben calcular el valor de apuestas y premios, de manera tal que los valores no desalienten al jugador pero sean una fuente muy probable de ganancia.

Supongamos que un jugador gana $10 si, al tirar una moneda, sale cara.



N es el número total de juegos, n_A es el número de veces que salió cara y n_B et número de cruces. La cantidad que recibió la banca es A.N (siendo A el valor de la apuesta). Si la banca repartiera en premios todo lo que recibe, tendríamos:

$$A.N = 10n_A + On_B$$

$$A = 10\frac{n_A}{N} + 0\frac{n_B}{N}$$

Al hacer grande N las frecuencias relativas $\frac{n_A}{N}$ y $\frac{n_B}{N}$ tiende a las probabilidades de en el límite:

$$A = 10\ (0,5) + 0\ (0,5) = 5$$

Para que el juego sea equitativo, la participación en cada sorteo deberá ser de $5. También podríamos calcular la ganancia esperada, determinando el valor me-dio correspondiente a la tabla.

	Cara	Cruz
Gana	+10	-10
Probabilidad	0,5	0,5

Ganancia esperada =
10 (0,5) + (-10) 0,5 = 0

ACTIVIDAD 1.18

En la ruleta hay 37 números (0,1,..., 36). Si apostamos $1 a un número y acertamos, ganamos $35. Hallar la ganancia esperada para el jugador.

El juego del "seis"

Se tira un dado hasta que salga un 6. Si el jugador obtiene 6 recién en la tirada N, recibe \$N. ¿Cuál debe ser el valor de la apuesta para que el juego sea equitativo? Si el jugador saca 6 en primera jugada, recibe \$1 (probabilidad 1/6).

Si el jugador recién saca 6 en segunda jugada, recibe \$2 (probabilidad 5/6.1/6; porque, para obtener 6 recién en segunda tirada debe darse que no salga en primera y que salga en segunda).

ACTIVIDAD 1.19.

Si el jugador saca 6 en el tercer tiro, ganará \$3 con una probabilidad de $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$

¿Por qué?

Para N tendiendo a infinito, el valor A de la apuesta deberá ser:

$$A = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} + 4\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6} + \ldots \qquad (1)$$

Tenemos que analizar si esta serie tiene límite.

Recordamos que, en las sucesiones geométricas, la suma parcial enésima es:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81}$$

$$S_4 = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1-\frac{16}{81}}{\frac{1}{3}} = \frac{65}{81}$$

Si tenemos infinitos términos $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$, el límite de la suma será:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Pero, sucede que la serie (1) no es geométrica y deberemos apelar a algún truco para hallar la suma:

$$S_n = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{5}{6}\frac{1}{6} + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

$$6S_n = 1 + 2.\frac{5}{6} + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$-$

$$5S_n = \frac{5}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$S_n = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots - n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Salvo el último término, tenemos una serie geométrica tal que:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

El valor de la apuesta es $6.

ACTIVIDAD 1.20.

En clase, un alumno reflexionó: Si el dado tuviese 12 caras equiprobables, la apuesta debería ser de $12. ¿Es correcto lo afirmado? Y, ¿si tuviera **p** caras?

Observación: Tenemos otro modo de calcular la suma de la serie (1).

La serie es del tipo:

$$S = \frac{1}{6}(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + (n-1)q^n + \ldots)$$

ACTIVIDAD 1.21.

El paréntesis puede obtenerse derivando término a término la serie:
$S_1 = q + q^2 + q^4 + \ldots +$

cuya suma es $\dfrac{q}{1-q}$

¿Por qué?

Puede probarse, aunque no lo hacemos, que la suma de (1) puede obtenerse derivando la suma S_1 y multiplicando por $\frac{1}{6}$:

$$S = \frac{1}{6}\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{6}\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6$$

Nota histórica

Uno de los matemáticos que trabajó con series fue Euler, a pesar de que lo hizo con una falta de previsión evidente. Sin embargo, esto no le impidió contribuir de manera importante al estudio de las series infinitas mediante el aporte de resultados muy originales.

Por ejemplo, usando el desarrollo en series de la función sen x encuentra el valor de

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

Y, de la misma forma, obtiene que $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$

2. RELATOS DE EXPERIENCIAS DE CLASE

Tema de trabajo: Máximos y mínimos de funciones

En esta parte del trabajo queremos contarle algunas experiencias que hemos realizado en 5° y 6° año de una escuela técnica. Es importante destacar que se trata de un grupo de alumnos que ha pasado por valiosas experiencias de aprendizaje, previas al curso que se relata. El objetivo es solamente mostrar cómo, si dejamos trabajar a los alumnos, de manera que puedan hacer conjeturas, propo-ner hipótesis de trabajo, discutir soluciones erradas –en una palabra, "hacer matemática"–, podemos obtener resultados sorprendentes. A lo mejor, usted puede usar el material para probarlo en su clase, modificarlo según el nivel de sus alumnos, etc. Advertimos que estos problemas se analizaron antes de «enseñar» la teoría de extremos.

Experiencia 1

Tenemos una plancha rectangular de cartón de 40 cm de largo y 30 cm de ancho. Se corta un cuadrado en cada esquina, tal como se indica en línea punteada en la figura 1.

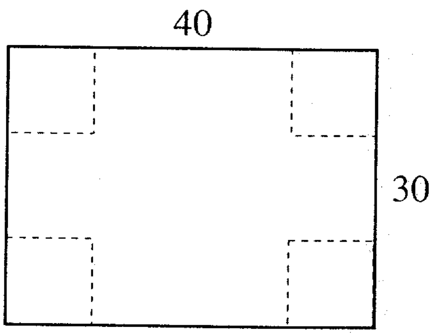


Figura 1

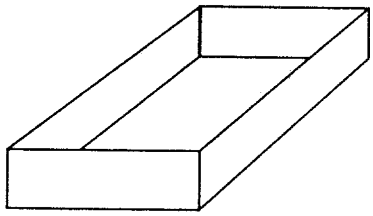


Figura 2

Luego, damos vuelta los bordes de manera que se forme una caja abierta (Figura 2). ¿Es posible elegir la longitud del lado del cuadrado que se recorta para obtener una caja con el mayor volumen posible? Justificar. En caso afirmativo, determinar la longitud del lado del cuadrado.

El problema es conocido; pero, lo que proponemos es otro tratamiento.

- Objetivo: Que los alumnos intenten resolver el problema por caminos no convencionales. También, que perciban cómo el conocimiento de los extremos de una función les permitirá encarar problemas de optimización del tipo presentado.

¿Qué sucedió en clase?

Los alumnos comenzaron probando con algunos ejemplos y observaron que el volumen variaba al cambiar la longitud del lado del cuadrado. Este paso es im-portante porque exige comprender el problema.

X	largo	ancho	altura	volumen
1	38	28	1	1064
2	36	26	2	1872
3	34	24	3	2448

Algunos construyeron la función volumen V= (40 - x) (30 - x) x, y quisieron graficarla; pero, se encontraron con inconvenientes. Algunos sugirieron graficarla haciendo lo mismo que en la parábola, esto es, encontrar las raíces (que como es cúbica, dijeron, van a ser 3) y, una vez halladas, el punto medio entre dos de ellas sería uno de los vértices de la función cúbica, lo que implicaría hallar los máxi-mos y los mínimos.

Entonces, les preguntamos: *¿Pueden extenderse a la parábola cúbica las propiedades de la cuadrática?*

Como no consiguieron dar una respuesta, eligieron seguir otro camino. (La propuesta de buscar una similitud entre la función cuadrática y la función cúbica, apareció en un artículo de una revista inglesa referida a alumnos griegos, que más adelante comentaremos).

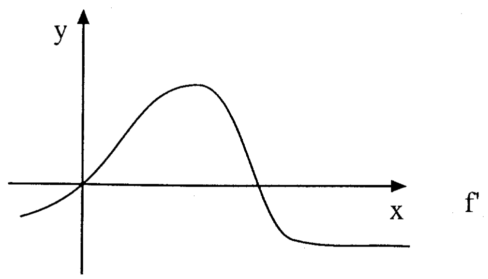
Se les preguntó qué herramientas conocían que les permitieran obtener información sobre la función buscada.

Como desde el comienzo del estudio sobre derivadas insistimos acerca de la información que brinda la derivada de una función respecto de dicha función, los alumnos propusieron calcular la derivada.

La derivada de la función volumen es una función cuadrática y ésta sí puede ser dibujada. A partir del gráfico de la derivada, dieron un gráfico aproximado de la función volumen y así hallaron la longitud x buscada.

Aquí, nuevamente, debemos aclarar que durante el desarrollo del tema de derivadas se trabajaron problemas del tipo siguiente:

Dado el gráfico de f’, dar un gráfico aproximado de f.



ACTIVIDAD 2.1.

Un solo grupo de trabajo encuentra que $0 < x < 15$. ¿Por qué debe ser éste el dominio?

¿Qué sucedió con los alumnos griegos?

Cuando trabajamos con la función que surgió en el primer problema presentado en esta sección, dijimos que una de las propuestas de los alumnos fue representar la función cúbica “haciendo lo mismo que en la parábola”, encontrando las raíces (que, como es cúbica, “son tres”) y, una vez halladas las raíces, en el punto medio entre dos raíces sucesivas estarían los vértices.

Este camino, que fue abandonado por nuestros alumnos porque no consiguie-ron justificarlo, fue continuado por un grupo de alumnos griegos y apareció en la revista *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Volumen 23, Número noviembre-diciembre. 1992.

Se resumen algunas partes de este artículo:

Comenzaron trabajando con la función $f(x) = x^3 - 4x$, con el objeto de encontrar las coordenadas de un máximo local o relativo.

Uno de los alumnos calculó las raíces y halló los puntos medios entre dos raíces sucesivas, obteniendo $x_1 = -1$ o $x_2 = 1$ como posibles coordenadas de los extremos.

La propuesta de este alumno fue aceptada por muchos estudiantes.

¿Cómo están seguros que esto es válido para todas las funciones cúbicas?, preguntó el autor.

Algunos alumnos propusieron buscar en los libros de texto funciones cúbicas que estuvieran graficadas y verificar si lo conjeturado era cierto. Con este trabajo, concluyeron que la conjetura no era correcta.

Uno de los estudiantes se preguntó si existía alguna función cúbica con un extremo cuya coordenada x fuese el punto medio entre dos raíces sucesivas.

Los estudiantes no tenían idea de cómo comenzar, ya que no podían probar las infinitas funciones cúbicas que existen. El docente propuso buscar en los textos de cálculo, para ver si conseguían hallar algún ejemplo de este tipo.

Le proponemos a usted que investigue esta cuestión, antes de seguir leyendo.

Al no encontrar ninguna función cúbica con esta característica, propusieron la siguiente conjetura: *No existe una función cúbica con un extremo cuya coordenada x sea el punto medio entre dos raíces sucesivas.*

Se les encargó a los estudiantes probar la veracidad o falsedad de la conjetura. A pesar de realizar varios esfuerzos, no consiguieron, en la clase del día, dar una prueba. Algunos avanzaron con casos particulares como $f(x) = ax^3 + b$.

ACTIVIDAD 2.2.

Le pedimos que estudie si la conjetura es cierta para este caso.

En las próximas clases, uno de los estudiantes había traído una demostración que le presentamos a continuación.

Consideraron la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$ y supusieron que p_1, p_2 ($p_1 \neq p_2$) son dos raíces sucesivas y que $\frac{p_1 + p_2}{2}$ es la coordenada x del extremo local.

Derivando:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Como $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = 0$ y como pensaban que $\frac{p_1+p_2}{2}$ era extremo, debía ser

$$f'\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)=0$$

Entonces:

$$ap_1^{\ 3}+bp_1^{\ 2}+cp_1+d=0 \qquad (1)$$
$$ap_2^{\ 3}+bp_2^{\ 2}+cp_2+d=0 \qquad (2)$$
$$3a\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2+2b\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)+c=0 \qquad (3)$$

Operando en (3) se obtiene:

$$3ap_1^{\ 2}+6ap_1p_2+3ap_2^{\ 2}+4bp_1+4bp_2+4c=0 \qquad (4)$$

Restando (1) menos (2):

$$a\left(p_1^{\ 3}-p_2^{\ 3}\right)+b\left(p_1^{\ 2}-p_2^{\ 2}\right)+c\left(p_1-p_2\right)=0$$
$$\left(p_1-p_2\right)\left[a\left(p_1^{\ 2}+p_1p_2+p_2^{\ 2}\right)+b\left(p_1+p_2\right)+c\right]=0$$

Como $p_1-p_2\neq 0$

$$ap_1^{\ 2}+ap_1p_2+ap_2^{\ 2}+bp_1+bp_2+c=0 \qquad (5)$$

Multiplicando (5) por 4 y restando este resultado de la ecuación (4), se tiene:

$$-ap_1^{\ 2}+2ap_1p_2-ap_2^{\ 2}=0$$
$$-a\left(p_1-p_2\right)^2=0$$

Y como $p_1-p_2\neq 0$, entonces -a = 0 o sea a = 0; pero esto contradice la hipótesis de que $a\neq 0$. Entonces la conjetura es cierta.

ACTIVIDAD 2.3.

Pedimos que usted justifique cada uno de los pasos realizados a partir de la ecuación (4).

ACTIVIDAD 2.4.

Observemos que aquí se supone que el extremo de f está en un punto donde la función es derivable. ¿No podría existir una función cúbica que tenga un extremo local en un punto donde no sea derivable? (Pensar si esto invalidaría la demostración anterior).

Intentando investigar la conjetura propuesta, los alumnos fueron encontrando distintas características de las funciones cúbicas que fueron tornándose conjeturas con el fin de investigar su veracidad.

ACTIVIDAD 2.5.

Le presentamos algunas de ellas para que usted pruebe su veracidad.
Conjetura 2: La coordenada x (y la coordenada y) del punto de inflexión de una función cúbica es el punto medio entre las coordenadas x (y coordenadas y) de dos extremos locales.
Conjetura 3: Una función cúbica es simétrica respecto del punto de inflexión.
Conjetura 4: Existe un polinomio de grado 4 de la forma $f(x) = ax^4 + bx \quad (ab \neq 0)$ para lo cual la coordenada x de un extremo es el punto medio entre dos raíces sucesivas

Experiencia 2

En el próximo problema, no será posible graficar la derivada de la función dada. Habría que buscar otras estrategias para hallar los extremos locales de una función.

Se pidió estudiar si existe algún valor de x para el cual la función $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$ alcanza un mínimo local y justificar.

Uno de los grupos de trabajo nos dijo que en x = 0 la función alcanza un mínimo (no aclaró si era local).

ACTIVIDAD 2.6.

Elija una justificación y desarróllela.

Los alumnos justificaron así:

Para todo x negativo, f(x) es positiva.

Para $x < 0$ es $\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 > \frac{2}{5}x^5 \qquad (2)$

Por lo tanto f (x) > 0 (para esta afirmación dieron argumentos intuitivos del tipo: x^6 es mayor que x^5, $\frac{1}{6}$ no es mayor que $\frac{2}{5}$ pero al agregarle $\frac{1}{4}x^4$, seguramente será mayor).

ACTIVIDAD 2.7.

¿Son correctos estos argumentos? ¿Cómo justificaría usted la afirmación (2)?

A pesar de no poder dar justificaciones correctas, los alumnos eligieron un camino original para dar una respuesta al problema. Como para x > 0 f(x) es positiva y también lo es para x < 0, y siendo que para x = 0 la función f(x) vale cero, entonces en (0,0) hay un mínimo.

Otro grupo intentó seguir el mismo camino que en el problema 1. Aquí se encontraron con la dificultad de que la derivada es de grado 5. Algunos propusieron seguir derivando hasta llegar a una función de grado 2 y, a partir de aquí, empezar a dibujar “las primitivas” (no es éste el término que utilizaron).

ACTIVIDAD 2.8.

¿Qué le parece este razonamiento? ¿Puede servir para el problema?

Se les preguntó si era necesario conocer el gráfico de f’ para poder tener alguna información sobre f. A partir de aquí comenzaron a obtener algunas conclusiones interesantes. La primera fue que para encontrar el mínimo había que buscar en qué punto se hace cero la derivada.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 &= 0 \\
x^3(x^2 - 2x + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
x^3 = 0 & \text{ó} & x^2 - 2x + 1 = 0 \\
x = 0 & & (x-1)^2 = 0 \\
& & x - 1 = 0 \\
& & x = 1
\end{array}
$$

Se presentó una dificultad al aparecer dos valores de x que anulan la derivada. La propuesta fue hacer una tabla de valores para la función f para ver cómo es el gráfico cerca de x = 0 y de x = 1.

Obsérvese que no propusieron continuar el estudio usando f’ sino directamente f. Si bien esto puede tener sus dificultades, es un buen primer paso para responder a la pregunta planteada.

Experiencia 3

Luego de trabajar con estos dos problemas, se plantearon otras dos funciones para encontrar extremos locales, de tal forma que en una de ellas haya un máximo local y la derivada sea cero en ese punto; y en la otra, aún siendo la derivada nula en x = 0, no exista extremo local en dicho punto.

ACTIVIDAD 2.9.

Proponga usted dos funciones con estas características.

A continuación, propusimos una serie de problemas con el objetivo de comen-zar a diferenciar extremos absolutos, y extremos locales o relativos.

ACTIVIDAD 2.10.

Observamos que no siempre los extremos absolutos son obtenidos usando la derivada (Esto tampoco sucede con los extremos relativos). ¿Por qué?

Enunciamos algunos de los problemas propuestos:

a) Estudiar si existen valores de x en el intervalo [-3,3] para los cuales la función $f(x)\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$ alcance un valor máximo y mínimo absolutos.

b) ¿Qué sucede en el ejercicio anterior si consideramos el intervalo (-3,3)?

c) ¿Puede suceder que una función tenga máximo y mínimo absoluto en un intervalo abierto?

d) Dar un gráfico aproximado de f(x).

e) Encontrar, si existen, extremos locales y absolutos de $g(x) = |x-4|$

f) Enunciar alguna propiedad que relacione los extremos locales de una función con su derivada. ¿Qué podrá decirse acerca de los extremos absolutos?

Experiencia 4
Un concurso televisivo

Un programa de televisión decide efectuar un concurso. Se piensa en la participación de aproximadamente 10 (en millones) personas. El con-curso es grupal, todos los grupos tienen la misma cantidad de participantes y el programa elegirá el número de personas que componen cada grupo.

Se han calculado los siguientes gastos:

Gasto 1: Referido a gastos administrativos, de \$200 por cada diez mil personas que participan del concurso.
Gasto 2: De \$50 por grupo, por gasto de material publicitario y de envío de dicho material (se envía un paquete con información por grupo).
Gasto 3: Por el envío del premio a cada integrante del grupo ganador (habrá un solo grupo ganador) de \$0,2 por persona.

Los premios serán donados por empresas que patrocinan el programa.

¿Cuántos grupos y de qué tamaño conviene formarlos para minimizar los gastos?

En clase, con este problema, surgió la discusión sobre la continuidad de la función. En este caso, la función C(x), siendo x el número de personas por grupo y C el costo que produce este número de personas, no es continua.

Aprovechamos la ocasión para discutir sobre “los modelos matemáticos” que nos permiten, a pesar de no tener continuidad; utilizar herramientas matemáticas como la derivada para encontrar una solución (recuerde que si la función no es continua en un punto, entonces no es derivable en ese punto).

ACTIVIDAD 2.11.

Le pedimos que usted dé una respuesta al problema.

Después de trabajar con este problema, hemos propuesto otros dos:

- Uno cuya función a optimizar no es continua (dominio en N) y el extremo no pertenece a N.
- Otro en el que el extremo local no es la respuesta al problema sino que lo es el extremo absoluto.

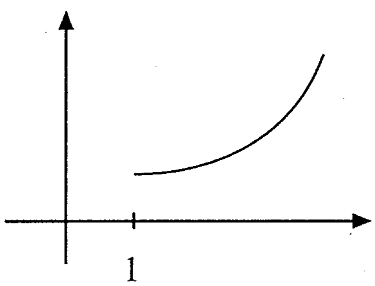
ACTIVIDAD 2.12.

Proponga, usted, dos problemas con estas particularidades.

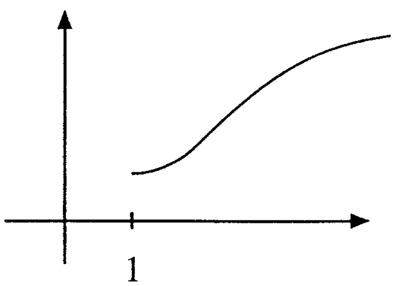
Experiencia 5

Propusimos:

a) La función $y = x^3 - 3x$ es creciente en el intervalo (1,+¥), Verifícalo.
b) ¿Cómo es posible saber si, en dicho intervalo, la función crece en la forma A o en la forma B? Siendo:



Forma A



Forma B

c) ¿Puede suceder que una función f crezca siempre para todos los x mayores que un cierto valor a del dominio, y que, sin embargo, sus imágenes no superen un valor determinado k? En caso afirmativo, proponer un gráfico; en caso negativo, dar una explicación.

ACTIVIDAD 2.13.

¿Cuáles son los objetivos que se persiguen con estos problemas?

En clase, respecto del punto b) surgieron algunas respuestas interesantes: “Para saber si crece de la forma A, puedo fijarme si la derivada crece siempre para todos los $x > 1$.”

En el caso B, la derivada debería crecer y, después, bajar, siendo siempre positiva (le recordamos que desde el comienzo del estudio del tema “derivadas” hemos trabajado con gráficos, analizando qué información, acerca de una función, brinda su derivada).

ACTIVIDAD 2.14.

Aquí es una buena ocasión para preguntar: ¿Cómo podemos estudiar esta característica de f’ si no podemos graficarla? Se la dejamos a usted, para que la responda.

Experiencia 6
Un problema con trampa

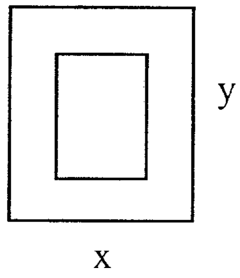
Por último, queremos presentarle un problema que dio origen a discusiones interesantes.

Tenemos una hoja rectangular con un perímetro de 10 cm. Se quitan dos centímetros de cada uno de los márgenes superior e inferior, y 1 cm de cada margen lateral. Sobre la superficie que resulte se hará un impreso.¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que la superficie que se utilice para el impreso sea máxima?

ACTIVIDAD 2.15.

Por favor, resuélvalo antes de continuar leyendo.

El problema es interesante porque no puede resolverse; ya que, para sacar los márgenes, debería ser el perímetro mayor que 12 cm. Sin embargo, la mayoría (excepto uno o dos alumnos que se dieron cuenta de esta situación) realizó todo el planteo, lo resolvió y dio una respuesta que no es la del problema.



Los alumnos hicieron:

Perímetro hoja:
2 x + 2 y = 10 Þ x + y = 5
$y = 5 - x$

Superficie del impreso = $(y - 4)\ (x - 2)$

$S = (5 - x - 4)\ (x - 2) = (1 - x)\ (x - 2)$
$S = -x^2 + 3x - 2$
$S = -2x + 3$
$-2x + 3 = 0$
$3 = 2x$

$\boxed{\mathbf{1{,}5 = x}}$ e $y = 5 - 1{,}5 \Rightarrow \boxed{\mathbf{y = 3{,}5}}$

Dieron como respuesta x = 1,5 e y = 3,5; pero, no analizaron si esta respuesta era coherente con lo que se pide en el problema. Si x = 1,5 no es posible sacar 1 cm de cada margen lateral.

El problema nos parece interesante ya que, siguiendo todo el mecanismo habi-tual para optimizar la función, se arriba a una respuesta que, en principio, no es incoherente (por ejemplo, no dio negativo) pero que, sin embargo, obliga a retomar el problema y analizarlo con mayor cuidado. Esto de verificar los resultados es algo que muy pocas veces hacemos y sería conveniente plantearse por qué.

Las demostraciones en matemática

Pensamos que en algún momento, a lo largo de toda su educación matemática, los alumnos deberían ocuparse de una herramienta esencial de la matemática que es la que permite establecer la verdad de una conjetura: la demostración.

Con esto, no nos estamos refiriendo a la visión tradicional en la que las demostraciones "las hace" el profesor, el alumno las estudia y luego las repite. Nos referimos a que el alumno debería comprender por qué son necesarias las demostraciones; investigar y proponer sus propias conjeturas, dar una justificación acorde a su nivel de maduración, etc. Cuando decimos que los alumnos deberían hacer demostraciones, no estamos pensando en teoremas acabados sino en argumentos que permitan justificar ciertas afirmaciones, que son un punto de partida para, en algún momento, perfeccionar y llegar a una prueba completa.

Pero hablamos también de una parte muy importante del trabajo del matemático que, en general, no se muestra:

Cómo se llega a establecer una conjetura, cuáles son los caminos que se siguen para enunciar una propiedad.

En su artículo "Las demostraciones, una tragedia en tres actos", Smith y Petocz (Australia) afirman:

“Es difícil concebir una educación matemática que no investigue, y use demostraciones antes o después. Las demostraciones comunican la verdadera esencia de la matemática y conducen a un más profundo entendimiento de los resultados. Pero, a menudo, en los cursos, las demostraciones se emplean para proyectar una visión autoritaria del tema, para ocultar el modo en que realmente se hace matemática y para alentar métodos de aprendizaje inadecuados (...) Más bien que enfocar su mira exclusivamente en las demostraciones, la matemática combina búsqueda de regularidades, hacer conjeturas, buscar contraejemplos, modificar y redefinir, dar pruebas heurísticas y, finalmente, llegar a pruebas formales (...) Generalmente, una demostración terminada muestra leves rastros del verdadero trabajo matemático.

Cuando la prueba está terminada, todos los pasos y su desarrollo son borrados y reemplazados por una serie de definiciones y lemas. Entonces, el teorema aparece en toda su gloria usando material previo... ”

Con respecto a la posición de los alumnos en torno a la enseñanza de la matemática, parece no haber muchas diferencias entre los australianos y los nuestros.

Los autores dicen que los estudiantes aprenden los teoremas de memoria para reproducir en los exámenes. Para la mayoría de los estudiantes, este aprendizaje de memoria es más fácil que trabajar matemáticamente.

En las charlas informales, los estudiantes admiten que estos enfoques proporcionan poca o ninguna educación de valor y que, además, el trabajo es aburrido. Pero, como tienen que aprobar los exámenes, no hacen demasiado ruido sobre el asunto. ¡Es más seguro aburrirse que afrontar desafíos!

Los trabajos en el aula con nuestros alumnos

Trabajando con sucesiones, se presentó el siguiente problema a un grupo de alumnos de 6° año, en una escuela técnica.

Hallar una fórmula que permita calcular la suma de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +... + n, para cualquier número natural n.

Consideremos las propuestas de algunos grupos de alumnos.

- **Propuesta 1:**

Valores de n	1	2	3	4	5	6	7	8
Sumas hasta el n considerado	1	+ 3	+ 6	+ 10	+ 15	+ 21	+ 28	36

Los alumnos pensaron en lo siguiente:

Para n = 4, sumamos 6 + 4 = 10

suma hasta n = 3 valor de n

Para n = 5, sumamos 10 + 5 = 15

Entonces, se plantearon, ¿cómo sacar una fórmula para la suma de los n-1 términos?

Si n = 2, la suma de los n-1 anteriores es 1 = 1.1

Si n = 3, la suma de los n-1 anteriores es 3 = 1.3

Si n = 4, la suma de los n-1 anteriores es 6 = 3.2

Si n = 5, la suma de los n-1 anteriores es $10 = 4.\frac{5}{2}$

Si n = 6, la suma de los n-1 anteriores es $15 = 5.\frac{6}{2}$

Si n = 7, la suma de los n-1 anteriores es $21 = 6.\frac{7}{2}$

Comenzaron a descubrir una regularidad a partir de n = 4. Obsérvese que la suma de los n -1 anteriores es siempre (a partir de n = 4) igual a $(n-1).\frac{1}{2}n$

Entonces, con este resultado, volvieron para ver si funciona esta conjetura para n = 2 y n = 3.

- para n = 2, la suma de los n-1 anteriores es $1 = 1.\frac{1}{2}.2$
- para n = 3, la suma de los n-1 anteriores es $3 = 3.\frac{1}{2}.4$

Entonces, propusieron la siguiente conjetura:

$$1+2+3+4+...+n = \underbrace{(n-1).\frac{1}{2}n}_{\text{suma de } 1\,+\,2\,+\,...\,+\,n-1} + n$$

Si operamos en esta última expresión, llegaremos a la fórmula conocida:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Obsérvese que no se dieron cuenta que el trabajo realizado para hallar la suma de los n-1 términos hubiese servido para hallar directamente la suma de los n-términos.

ACTIVIDAD 2.16.

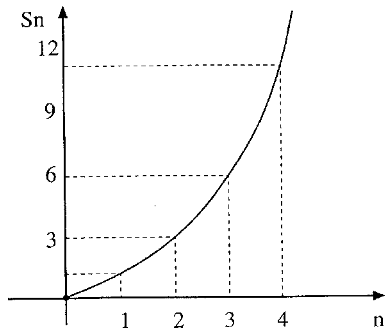
Le pedimos a usted que explique por qué y cómo lo haría.

- **Propuesta 2:**

Todos propusieron hacer un gráfico en el que la variable independiente fuera n y la dependiente fueran las sumas S_n.

Observando el gráfico, les pareció que se trataba de una parábola. Entonces, propusieron una función del tipo $y=ax^2+bx+c$ y con 3 puntos de la tabla hallaron a, b y c, obteniendo:

$$y=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$



Probaron la fórmula obtenida para otros valores y les pareció que funcionaba.

- **Propuesta 3:**

Un alumno comenzó trabajando con n = 6

$$1+2+3+4+5+6$$

Y vio que, para la suma de los 5 primeros, ser verifica que 1+ 5 = 2 + 4 y que

$3=\frac{6}{2}$ (el valor de n elegido dividido 2).

Entonces, dijo que había que sumar 6 tres veces y restarle $\frac{6}{2}$ (porque el del medio es la mitad de 6). En general, para n propuso:

$$n \cdot \underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{Cantidad de veces que sumo.}} - \underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{Valor del medio}}$$

Con esto, obtuvo la suma de los n-1 primeros términos. La fórmula que buscaba la descubrió así:

$$n.\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+n$$

Luego de esto, probó la fórmula obtenida para n = 7 y su fórmula funcionó.

¿Pero cómo es que funciona, si en el caso de n = 7 no hay "un valor en el medio" como en los casos de n par? (Le planteamos esta pregunta al alumno).

$$1+2+3+4+5+6+7$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+6=7 \\ 2+5=7 \\ 3+4=7 \end{array}\right\} \text{ no hay, en este caso, un valor intermedio igual a } \frac{n}{2}$$

Le proponemos pensar en esta pregunta, antes de continuar con la lectura.

En la fórmula propuesta:

$$n \;.\; \underbrace{\frac{n}{2}}_{\substack{\text{con este término,}\\ \text{estamos suman-}\\ \text{do 7 3,5 veces (y}\\ \text{hay que sumar 3}\\ \text{veces solamente}}} \;-\; \underbrace{\frac{n}{2}}_{\substack{\text{aquí restamos}\\ \text{0,5 veces 7,}\\ \text{que es exacta-}\\ \text{mente lo que}\\ \text{sobró del pri-}\\ \text{mer término}}} \;+\; n \longleftarrow \substack{\text{éste es el último término}\\ \text{de la suma}}$$

Si operamos, queda $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ que es la expresión conocida para 1 + 2 + ... + n.

Obsérvese que, hasta aquí, en ningún momento se ha demostrado que las fórmulas propuestas son válidas. Solamente hemos trabajado en el plano de “las conjeturas” para, luego, si es posible y los alumnos lo creen necesario, demostrar que lo propuesto realmente funciona.

Sin embargo, este proceso previo a la demostración es descuidado, muchas veces, incluso en los cursos universitarios donde directamente se enuncia: *Demuestre que la suma de los n primeros naturales es* .

Otros trabajos de los alumnos de 6° año vinculados con las demostraciones

Problema 1: Demostrar que $x^3 + 13x + 7 = 0$ no puede tener raíces enteras.

Aquí hubo 3 respuestas diferentes.

- **Demostración 1:**

Si x es par, x^3 es par, 13. x es par (producto impar por par). Como la suma de dos pares es par, $x^3 + 13$ x no puede ser -7.
Si x es impar, x^3 es impar y 13.x es impar. Como la suma de dos impares es par, $x^3 + 13.\, x \neq -7$. Luego, no hay raíces enteras.

- **Demostración 2:**

Si x es entero y , x > 0 , x^3 ^{3} 1 y 13 x ^{3} 13. Entonces, $x^3 + 13x$ ^{3} 14 ^{1} -7. No tiene raíces enteras mayores que 0.

Si x es entero y x < 0, $x^3 \leq -1$ y $13\, x \leq -13 \neq -7$; entonces, no tiene raíces enteras negativas.

Por último, x = 0 no es raíz de $x^3 + 13x + 7 = 0$.

Entonces, no hay raíces enteras.

- **Demostración 3:**

$$x^3 + 13x + 7 = 0 \Rightarrow x^3 + 13x = -7$$
$$x\,(x^2 + 13) = -7$$

El producto de dos enteros da –7 sólo en el caso de que alguno de ellos sea 1, -1, 7 o –7.

Si $x = -1$	$x^2 + 13 \neq 7$
Si $x = 1$	$x^2 + 13 \neq -7$
Si $x = 7$	$x^2 + 13 \neq -1$
Si $x = -7$	$x^2 + 13 \neq 1$

Entonces no hay raíces enteras.

Como verá, sorprenden los diferentes caminos que pueden elegir los alumnos cuando se los deja trabajar y se les proponen problemas que den lugar a diferen-tes respuestas.

Problema 2: La suma de 4 números enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

Supongamos que es posible hallar N entero tal que:

$$(1)\ k + k + 1 + k + 2 + k + 3 = N^2 \text{ con } k \text{ entero}$$
$$4k + 6 = N^2$$
$$2\,(2k + 3) = N^2$$

Si N es par, como el cuadrado de un número par es divisible por 4 (ya fue demostrado anteriormente), entonces:

$$\frac{2(2k+3)}{4} \text{ es entero.}$$

$$\text{O sea: } \frac{2k+3}{2} \text{ es entero.}$$

Y esto es absurdo, porque $2k + 3$ es impar.

Si N es impar, el cuadrado de un número par es impar, pero $2\,(2k + 3)$ es un número par; entonces es absurdo.

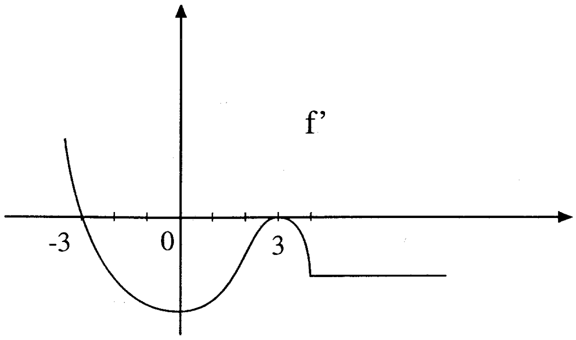
Luego, no existe N entero tal que se cumpla (1).

Con estos dos ejemplos, simplemente queremos mostrar algunos trabajos interesantes que creemos pueden ser trabajados en los cursos que usted decida o, solamente, tenerlos como referencia para la elaboración de otras actividades acordes al nivel de sus alumnos.

ACTIVIDAD 2.17. Problemas para usted y para sus alumnos

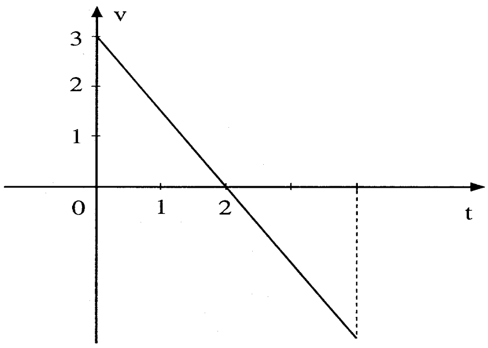
Damos a continuación una serie de problemas. Le pedimos que formule, por lo menos, un objetivo para cada uno, en función de los temas de cálculo diferencial e integral a enseñar en la escuela, y que los resuelva.

1) Dado el gráfico de f', dar un gráfico aproximado de f.



¿Es única f? ¿Por qué?

2) En el gráfico se representa la velocidad de propagación de una enfermedad en función del tiempo.



a. Determinar el intervalo de tiempo en que la cantidad de enfermos aumentó.
b. ¿En qué instante se detuvo la enfermedad?
c. ¿Qué significa que v(3) sea negativa?
d. Suponiendo que en t=0 había 1000 personas, dar un gráfico aproximado de la cantidad de enfermos en función del tiempo.

3) Al tirar una piedra en el agua se forman círculos concéntricos cuyos radios crecen a una velocidad constante de 2 cm/seg. Determinar la velocidad instantánea de crecimiento del área de la región circular perturbada, luego 5 de segundos de caída la piedra.

4) Estudiar la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

5) Se ha verificado experimentalmente que si la cantidad de materia radioactiva que se tiene en una muestra (por ejemplo, un trozo de roca) es pequeña, la velocidad de desintegración es directamente proporcional a la cantidad de materia radioactiva que hay en la muestra en el instante dado.

Siendo que la masa inicial es m_0, construir un modelo y encontrar la función m(t) que proporciona la cantidad de sustancia radiactiva presente en cada instante.

RESPUESTAS

1.1. Si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad, o sea $\alpha > \beta$, la población crece; si $\alpha > \beta$, la población decrece y si $\alpha = \beta$ la población se mantiene constante e igual a la población inicial.

1.2. Porque P(t) es la cantidad de personas en cada instante de tiempo.

1.3. $\frac{dP}{dt} = 0 \quad \Rightarrow P(t) = K \quad$ y como $\Rightarrow P(0) = P_0 \Rightarrow P(t) = P_0$

1.4. $P'(t) = \underbrace{P(0)}_{0}.\underbrace{(\alpha - \beta)}_{0}\underbrace{e^{(\alpha-\beta)(t-t_0)}}_{0 \text{ para todo } t}$

Entonces, P'(t)>0 para todo t y de aquí que P(t) es creciente para todo t.

1.5. Porque P'(t) tiene un único factor negativo que es α - β; entonces, P'(t)<0 para todo t, y por lo tanto P(t) decrece para todo t.

1.6. El gráfico corresponde al modelo matemático; describe la realidad sólo aproximadamente (no puede haber fracciones de enfermos...).

1.7. Sí, ya que resulta P(t)=P(O)

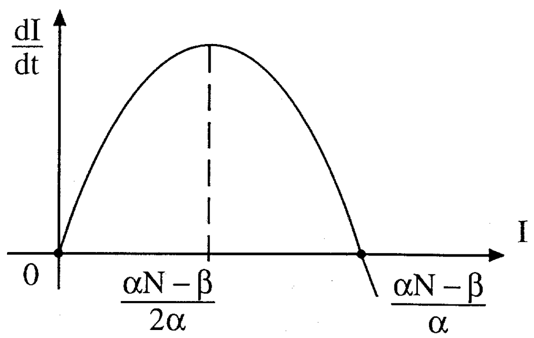
1.8. De una función cuadrática.

1.9. Sí, pues, para $t = t_M, \frac{dP}{dt} = \frac{\lambda P_L}{2} - \frac{\lambda}{P_L}.\frac{P_L{}^2}{4} = \frac{\lambda P_L}{4} > 0$

1.10. Con que la población total es constante.

1.11. Nos indica que la población se estabiliza.

1.12.



1.13. I(t) es creciente para todo t tal que $I \in \left(0, \frac{\alpha N - \beta}{\alpha}\right)$ y en el t para el cual $I = \frac{\alpha N - \beta}{2\alpha}$ la función crece con mayor rapidez. A partir de t_M, la función continúa creciendo pero cada vez más lentamente. Si existe t para el cual $I > \frac{\alpha N - \beta}{\alpha}$ la función decrece.

1.14. En $t=t_M$ siendo el t_M el punto en el cual $I = \dfrac{\alpha N - \beta}{2\alpha}$

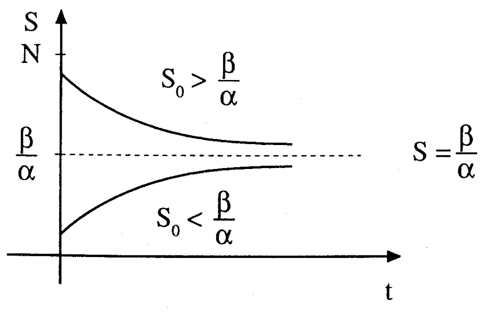
1.15. Porque, en caso de existir $t \,/\, I(t) > N - \dfrac{\beta}{\alpha}, \dfrac{dI}{dt} < 0$, entonces I es una función decreciente y se hace asintótica al valor $N - \dfrac{\beta}{\alpha}$. Por otro lado, en 1.13 analizamos las características de I(t) en que $0 < I < \dfrac{\alpha N - \beta}{\alpha}$

1.16.

$$S = \quad N - I$$

$$S = \quad N - \frac{\alpha N - \beta}{\left(\dfrac{\alpha N - \beta}{I_0} - \alpha\right) e^{-t(\alpha N - \beta)} + \alpha}$$

S tiende a $\dfrac{\beta}{\alpha}$ cuando t tiende a infinito.



S = N   y S =   son dos soluciones constantes para S.

1.17.

$$C(t) = \quad 1800e^3 - 800e^2$$

$$z(t) = \quad 900e^3 - 800e^2$$

1.18.

gana	35	-1
p	$\dfrac{1}{37}$	$\dfrac{36}{37}$

Ganancia esperada: $\dfrac{35}{37} - \dfrac{36}{37} = -\dfrac{1}{37}$

1.19. Porque debe ser: No sacar seis en el primero $\left(p = \dfrac{5}{6}\right)$ y no sacar seis en el segundo $\left(p = \dfrac{5}{6}\right)$ y luego sacar seis en el tercero $\left(p = \dfrac{1}{6}\right)$

1.20. Es correcto. Basta realizar un análisis idéntico para p genérico. En este caso, la apuesta será de **p** pesos.

1.21. Por ser una serie geométrica de razón q.

2.1. Porque si $x \geq 15$, no es posible armar la caja. Por otro lado, x no puede ser negativa porque es una longitud y x '« 0 si no, no es posible armar la caja.

2.2. Es cierta. En el texto encontrará una demostración posible.

2.3. $ap_1^3 + bp_1^2 + cp_1 + d - (ap_2^2 + bp_2^2 + cp_2 + d) = a(p_1^3 - p_2^3) + b(p_1^2 - p_2^2) +$
$+ c(p_1 - p_2)$
$3ap_1^2 - 4ap_1^2 + 6ap_1p_2 - 4ap_1p_2 + 3ap_2^2 - 4ap_2^2 + 4bp_1 - 4bp_1 + 4bp_2 - 4bp_2 + 4c -$
$- ap_1^2 + 2ap_1p_2 - ap_2^2 = 0$

2.4. No es posible, ya que las funciones polinómicas son derivables para todo x real.

2.5. Conjetura 2: Es cierta.

Demostración. Consideremos

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a '« 0)
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Llamemos x_1 y x_2 a las coordenadas x de los extremos, $x_1 \neq x_2$ y p a la coordenada x del punto de inflexión.

Como $f'(x_1) = f'(x_2) = f''(p) = 0$, obtenemos:

$$3ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0 \qquad (1)$$
$$3ax_2^2 + 2bx_2 + c = 0 \qquad (2)$$
$$6ap + 2b = 0 \qquad (3)$$

Haciendo (1) - (2):

$$3a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2b(x_1 - x_2) = 0$$
$$(x_1 - x_2)[3a(x_1 + x_2) + 2b] = 0$$
$$3ax_1 + 3ax_2 + 2b = 0 \qquad (4)$$

Haciendo (3)-(4):

$$6ap - 3ax_1 - 3ax_2 = 0$$
$$\boxed{p = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

De la misma forma, se prueba que $f(p) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

Conjetura 3. Es verdadera

Demostración

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

La coordenada x del punto de inflexión es $x_i = \frac{-b}{3a}$ y la coordenada y es:

$$y_i = a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d$$
$$y_i = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{2b}{3a} - x\right) &= -a\left(x + \frac{2b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{2b}{3a} + x\right)^2 - c\left(x + \frac{2b}{3a}\right) + d \\
&= -(ax^3 + bx^2 + cx) + d - \frac{8b^3}{27a^2} + \frac{4b^3}{9a^2} - \frac{2bc}{3a} \\
&= y + 2d - \frac{8b^3 - 12b^3 + 18abc}{27a^2} \\
&= -y + 2\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}
\end{aligned}$$

Entonces, $f(2x_i - x) = -y + 2y_i$, lo que prueba la conjetura.

Conjetura 4: Es falsa.

Demostración: Supongamos que existe un polinomio del tipo $f(x)=ax^4+bx$ con las características enunciadas. Suponemos que las raíces son 0 y 2p ($p \neq 0$) y que la coordenada del extremo es p. Como $f'(x) = 4ax^3 + b$ y $f(ap) = f(p) = 0$, obtenemos las ecuaciones:

$16ap^4 + 2bp = 0$ (1)
$4ap^3 + b = 0$ (2)

Multiplicando (2) por 2p y restando este resultado de (1) se obtiene $8ap^4 = 0$ que contradice $a \neq 0$ y $p \neq 0$.

Luego, tal polinomio no existe.

2.6. Para $x < 0, \frac{1}{6}x^6 > 0, \frac{1}{4}x^4 > 0, -\frac{2}{5}x^5 > 0$ y la suma de 3 números positivos es positiva.

2.7. Los alumnos no tienen en cuenta que $x^6 > x^5$ para $x > 1$; pero, no lo es para $0 < x < 1$.

2.8. Es válido pero tedioso.

2.9.

f(x) = $-x^2 + 5x$
g(x) = x^3 (en x = 0 no hay extremo y g'(0) = 0)

2.10. Porque, por ejemplo, y = (x) tiene un extremo relativo en x = 0. Y, en ese punto, la función presentada no es derivable.

2.11. Cada grupo es de 50.000 personas. En total son 200 grupos.

2.12.

- Una compañía aérea hace viajes especiales de una localidad A hasta otra B. El número mínimo de pasajeros debe ser 85 y el precio del pasaje es de 180 pesos por persona. Pero, la compañía ofrece una rebaja de un peso sobre cada pasaje, por cada nuevo pasajero que exceda los 80. ¿Cuál es el número de pasajeros que produce mayor ingreso bruto a la compañía?

- La función $x(t) = \frac{(t-3)^3}{3} - t + 5$ representa, para t > 0, la posición de un móvil en función del tiempo, con respecto al punto A. ¿En qué instante el móvil se encuentra más próximo de A?

2.13. Trabajar con la idea de cambio de concavidad (punto de inflexión) y la noción de asíntota.

2.14. Calculando f'' y haciendo un estudio sobre ella. Si f'' (1)=0 y la derivada segunda cambia de signo a izquierda y derecha de 1, entonces la función tiene un punto de inflexión en 1 y, por lo tanto, cambia de concavidad.

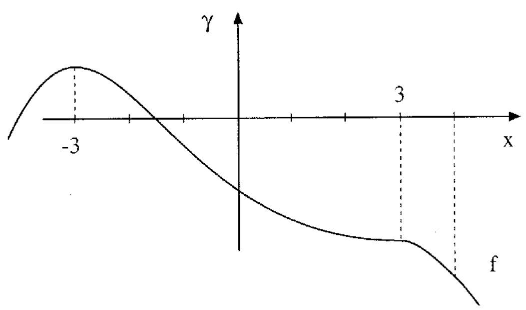
2.15. No tiene solución ya que, para sacar los márgenes, el perímetro que presentamos no es suficiente.

2.16. Porque, en lugar de trabajar desde 1 hasta n-1, puede hacerse el mismo razonamiento hasta n.

En lugar de $(n-1).\frac{1}{2}n$ tendríamos $n.\frac{1}{2}(n+1)$ que es la fórmula conocida.

2.17.

1)

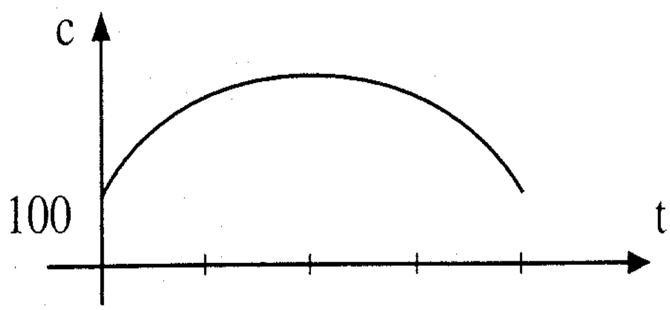


No es única porque, si a esta función le sumamos cualquier constante, la derivada será siempre f' (que es la curva presentada).

2)
a) (0,2)
b) en t = 2

c) que la cantidad de enfermos está disminuyendo

d)



3) $4\pi(10 + r_i)$, siendo r_i el radio inicial de la primera circunferencia generada.

4) Para $x > 1$ resulta $x^2 > x$ y $-x^2 < -x$

Entonces $e^{-x^2} < e^{-x}$

En consecuencia:

$$0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx < \int_1^{+\infty} e^{-x}dx \qquad (1)$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{e^x}\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Luego, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (converge)

La comparación (1) fue necesaria porque no es posible calcular por medios algebraicos la primitiva $y = e^{-x^2}$.

5) $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \\ N(o) = N_0 \end{cases}$

Como en el caso de Malthus $\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$

Bibliografía

- Bassanezi; Ferreira. *Equaçoes diferenciais com aplicaçoes* (Harbra, San Pablo).
- Courant. *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (Limusa).
- Guzmán; Colera. *Matemática I*. (Anaya).
- Hansen, Guillermo. *Análisis Matemático* (Prociencia).
- Santaló, L. *La probabilidad y sus aplicaciones* (Iberoamericana).

Revistas

- *The College Mathematics Journal.*
- *The International.Journal of Mathematical Education Scientific American.*