Física. Interacciones a distancia

2

MINISTERIO de EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

serie/ciencias para la educación tecnológica

Especialistas en contenidos:

- Rosa Adam
- Santiago Queiro
- Agustín Rela
- Jorge Sztrajman

Director científico:

- Alberto Maiztegui

Ciencias para la Educación Tecnológica

serie/ciencias para la educación tecnológica

1. Análisis matemático. Sus aplicaciones
2. Física. Interacciones a distancia
3. Física. El campo magnético
4. Física. Ondas electromagnéticas

Índice

La serie “Ciencias para la educación tecnológica”

Con el título ***Ciencias para la Educación Tecnológica***, estamos planteando desde el CeNET una serie de publicaciones que convergen en el objetivo de:

> Acompañar a nuestros colegas docentes en la adquisición de contenidos científicos que les permitan una mejor definición, encuadre y resolución de los problemas tecnológicos que se enseñan en la escuela.

Porque, en Educación Tecnológica las ciencias básicas ocupan “una posición importante aunque subalterna e instrumental (...) La tecnología es un modo de ver el fenómeno de la artificialidad, y de analizar ‘sistémicamente’ los objetos tecnológicos desde su finalidad y no desde los fundamentos científicos en que se basa su funcionamiento.” (Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. Contenidos Básicos Comunes para la Formación Docente de Grado. Tercer Ciclo de la Educación General Básica y Educación Polimodal. “Contenidos Básicos Comunes del Campo de la Formación de Orientación de la Formación Docente de Educación Tecnológica”. Buenos Aires.)[1]

Física. Interacciones a distancia, el material que usted tiene en sus manos es una versión digital de la publicación del mismo nombre que, en 1994, elaboró el Programa de Perfeccionamiento Docente Prociencia-CONICET[2], del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina y al que desde el CeNET nos proponemos continuar distribuyendo[3].

Programa de perfeccionamiento docente

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación

Objetivos general:

- Describir las acciones gravitatorias y electrostáticas, introduciendo el concepto de campo.

Objetivos específicos:

- Comparar el campo gravitatorio con el campo eléctrico mediante el estudio de sus semejanzas y diferencias.
- Aplicar el concepto de intensidad de campo.
- Hallar la utilidad de la noción de potencial eléctrico y potencial gravitatorio.
- Resolver ejercicios y problemas.

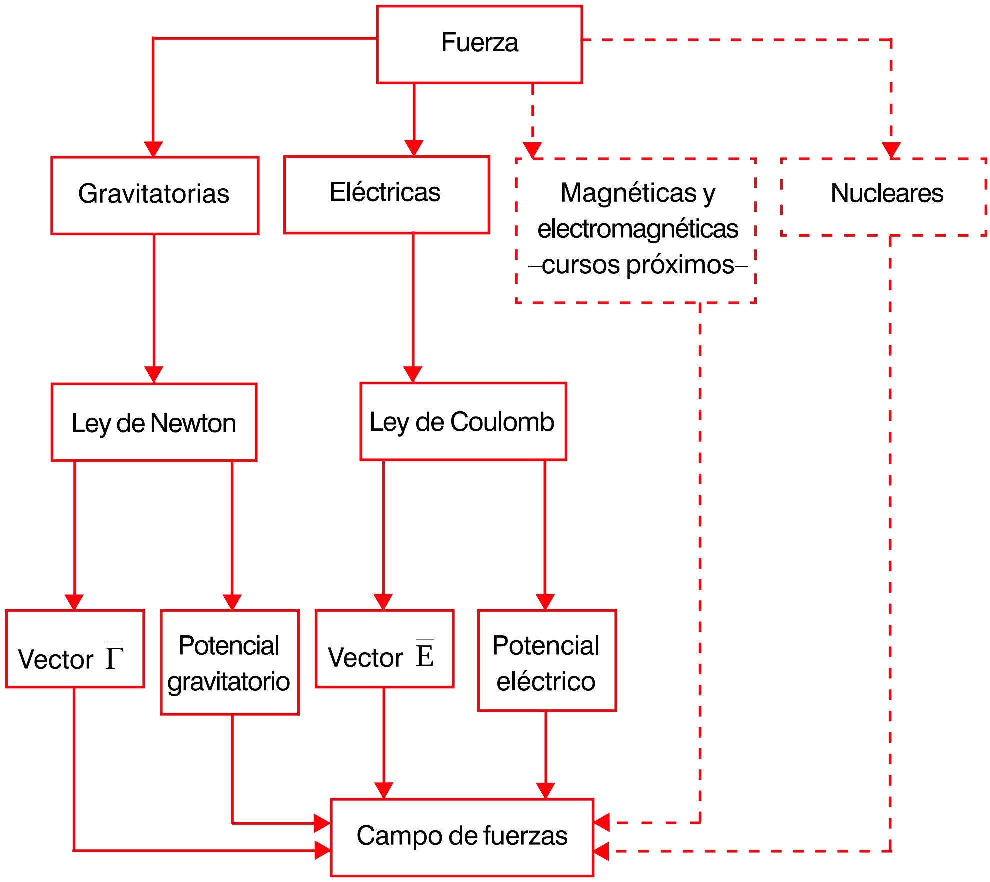
---

[1] Puede usted encontrar la versión completa en el sitio web del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología; específicamente, en la página:
- http://www.me.gov.ar/curriform/servicios/publica/publica/fordoc/index.html

[2] El CONICET es el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, de la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva –Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología–.

[3] La versión de este libro en soporte papel corresponde al ISBN 950-692-023-0

Diagrama conceptual:



Introducción a “Física. Interacciones a distancia”

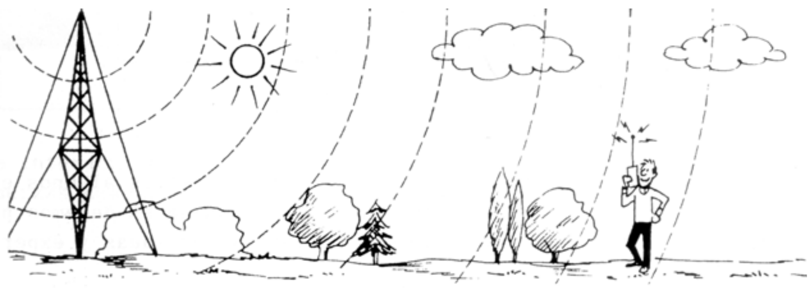
Introducción a los campos de fuerza

La idea de campo es una de las más fértiles en la historia de la física y es, a la vez, un concepto complejo, no exento de dificultades de comprensión en todos los niveles en los que puede estudiarse.

Nuestra propuesta metodológica es la de familiarizar a los alumnos con las ideas más elementales y, progresivamente, llegar a las más complejas.

La más sencilla interpretación sería: "Campo es el lugar donde, si se pone un cuerpo, aparecen fuerzas sobre él". Así, por ejemplo: en las proximidades de la Tierra existe un campo gravitatorio o sea un espacio en el que se manifiestan las fuerzas de atracción gravitatorias; una partícula cargada tendrá, así, un campo eléctrico o espacio próximo donde, si se coloca otra partícula cargada, recibirá fuerzas de atracción o repulsión". En esta interpretación elemental, el campo es entonces una zona donde aparecen o pueden aparecer fuerzas sobre los objetos. Si se retiran los objetos que producen esas fuerzas, ellas cesan. Pero, veremos que no lo hacen instantáneamente.

Existe un sencillo ejemplo que muestra que no todo es tan simple: Imaginemos una antena transmisora que produce un campo electromagnético.



Si, a cierta distancia, se coloca un receptor, los electrones libres de la antena del receptor sufrirán fuerzas eléctricas y magnéticas, y darán lugar a corrientes eléctricas o señales que amplifica el receptor.

- Es que el receptor está en el campo electromagnético del transmisor, es decir, en la zona en la que aparecen esas fuerzas-, podría ser nuestra interpretación.
- Y, ¿quién hace esas fuerzas?- podríamos preguntarnos.
- ¡La antena del transmisor; más precisamente los electrones que se mueven allá!

Sin embargo, si sacáramos de ahí la antena o, simplemente, dejáramos de transmitir –como la señal no se propaga instantáneamente sino que viaja a la velocidad de la luz–, la radio seguiría funcionando durante un intervalo adicional.

Entonces, existirían fuerzas sin que, simultáneamente, existiese otro cuerpo que las ejerza. Desde que se dejó de transmitir hasta que se dejó de recibir, transcurrió un tiempo durante el cual sobre los electrones de la antena del receptor actuaron fuerzas; y no hay "nadie" por ahí que las esté ejerciendo. Parece conveniente, entonces, decir que a las fuerzas en cuestión las ejerce el campo que emitió el transmisor. Ese campo es ya una idea más compleja, pues sería algo real, perfectamente medible y localizable, pero que, sustancialmente, no es otra cosa que vacío[4].

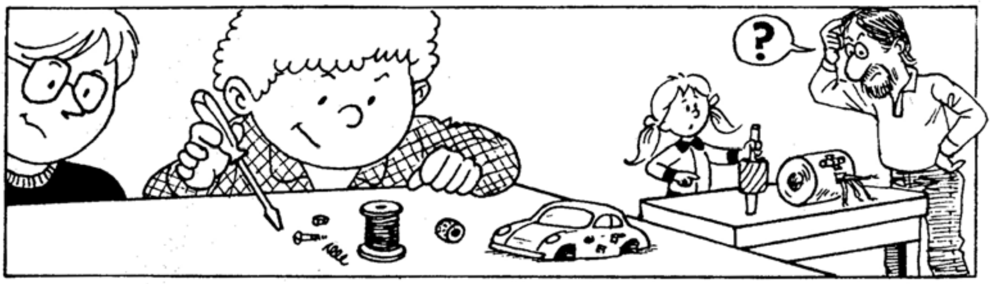
---

[4] *En rigor, no se trata de un vacío absoluto, puesto que hay radiación y energía, y la energía tiene masa. Decimos vacío en el sentido de que no hay cuerpos con masa en reposo diferente de cero que ejerzan esas fuerzas.*

Sería un despropósito adentrar a nuestros alumnos en estas especulaciones desde el primer instante, aunque sí debemos procurar recorrer ese camino. Comenzaremos entonces con ideas y experimentos sencillos relacionados con las fuerzas a distancia. Muchos alumnos (y nosotros confesaríamos que también) nos maravillamos al jugar con pequeños imanes y cuerpos cargados al ver cómo se atraen o repelen sin tocarse.

En este curso introductorio hallaremos algunas nociones generales y las instrucciones para fabricar un pequeño motor eléctrico, en concordancia con la idea de que primero los alumnos deben operar con los fenómenos, aunque todavía no los entiendan; se les facilitará su estudio y comprensión trabajando con ellos.

Es preferible que la construcción del motorcito se realice en muy poco tiempo: que salga funcionando, sin demasiadas dilaciones. Nuestra descripción es sólo una guía y no es necesario ceñirse a ella con rigor; hay quienes hacen motores experimentales con cajas de fósforos. Si usted personalmente tiene dificultades de habilidad manual o carece de recursos (¿Tiene morsa? Y, ¿téster? ¿Agujereadora? ¿Tiene un frasco o caja con tornillos, alambres, herramientas, poxipol, etcétera?), apóyese en sus alumnos; ellos tienen más habilidad que nosotros. También más paciencia y entusiasmo, y casi siempre nos superan en recursos y acopio de herramientas. Será para ellos una satisfacción superarlo a usted en habilidad y, a la vez, recibir su ayuda cuando, finalizada la construcción, no funcione y sea usted quien halle la conexión equivocada o la pila en falso contacto.



Actualmente, en Física, se distinguen cuatro mecanismos de interacción elementales, los que han dado lugar a otras tantas fuerzas, denominadas:

Gravitatoria
Electromagnética
Débil
Fuerte

- La interacción gravitatoria es, históricamente, la primera en ser descripta por una teoría matemáticamente precisa. Desarrollada y publicada por Isaac Newton en su Philosophiae naturalis principia mathemarica –Londres, 1687–, la “Ley de Gravitación Universal” permitió “unir el cielo con la Tierra” al posibilitar prever tanto los movimientos de los cuerpos en la Tierra, que se comportan de acuerdo con las observaciones de Galileo, como las órbitas de los planetas, que se corresponden con las leyes empíricas del movimiento planetario, formuladas por Juan Kepler. La obra de Newton, al hacer la síntesis entre la mecánica terrestre y la celeste, fue el primer paso verdaderamente importante hacia una visión y un modelo más simplificado de la naturaleza.
- La interacción electromagnética interviene en la mayoría de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor (incluyendo los químicos y biológicos). A pesar de

ser una acción a distancia, relacionada con la propiedad “carga eléctrica”, es también responsable de todas las fuerzas llamadas macroscópicamente “de contacto”, puesto que los núcleos atómicos no llegan a tocarse en el más violento golpe ni en el más feroz combate de boxeo.

La teoría correspondiente a estas interacciones está englobada en un conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Fue precisamente James Clerk Maxwell (1831-1879) quien llevó a cabo la síntesis de los fenómenos ópticos con los electromagnéticos.

Hacia fines del siglo XIX se aceptaba que las leyes de Newton y las de Maxwell permitían una perfecta comprensión de todas las interacciones que se presentaban en la naturaleza. Investigaciones posteriores pusieron de manifiesto la necesidad de aceptar la existencia de otras dos clases de fuerzas:

- Las interacciones débiles, responsables de la desintegración beta de los elementos radiactivos.
- La interacción fuerte, que liga los protones y neutrones en el núcleo atómico.

Los términos “débil” y “fuerte” no se refieren a las intensidades, específicamente; son, simplemente, los nombres utilizados para designar estas interacciones, que tienen su justificación. Ello no impide que existan, por ejemplo, interacciones gravitatorias intensas y apenas perceptibles.

Al término de los cursos Interacciones a distancia, Campo magnético y Ondas electromagnéticas, se pretende:

- Formar una idea de cómo describir acciones a distancia a través del concepto de campo.

Este objetivo general se concreta en los propios de cada curso:

- Interacciones a distancia: Describir las acciones gravitatorias y electrostáticas, introduciendo el concepto de campo.
- Campo magnético: Describir las acciones magnéticas, a través del concepto de campo.
- Ondas electromagnéticas: Describir la propagación de energía electromagnética, a través del concepto de onda.

Algunas consideraciones

- **Las escalas y los órdenes de magnitud:**

A las dificultades propias de la presentación de los conceptos físicos, se suma el manejo de cantidades de muy diverso orden de magnitud: masas del orden de 10^{30} Kg, o distancias como $1{,}5.10^{11}$ m (unidad astronómica); la velocidad de las ondas electromagnéticas, del orden de 3.10^{8} m/s; y, en el otro extremo, el cuanto de carga eléctrica ($1{,}6.10^{-19}$ C) o la longitud de onda de la luz visible ($\sim 6.10^{-7}$ m). Debemos tomar conciencia de que en estos temas estamos incursionando en dominios no tan familiares a nuestros alumnos, como el astronómico o el atómico, cuyas escalas no resultan habituales. Por eso, conviene hacerles notar que esas cantidades que exceden los límites de nuestra imaginación son perfectamente posibles y medibles, y que –al tiempo de trabajar con ellas– se vuelven tan "normales" como la longitud de un camino o la velocidad de un automóvil.

Será conveniente, llegado el caso, hacer un repaso de las propiedades y operaciones con potencias de diez, de la notación exponencial (notación "científica") y aprovechar las posibilidades de las calculadoras de bolsillo que disponen de dicha función. También se pueden analizar ejemplos sencillos: observar que si una botella de un litro de agua mineral contiene del orden de $3{,}3.10^{25}$ moléculas de agua, diez botellas como la anterior tendrán cerca de $3{,}3.10^{26}$ moléculas; o calcular en segundos la duración de un año y observar el orden de magnitud. (1 año = 1 x 365 días = 1 x 365 x 24 h = 1 x 365 x 24 x 60 min = 1 x 365 x 24 x 60 x 60 s = $3{,}15.10^{7}$ s).

Es también la oportunidad de introducir las escalas logarítmicas y observar sus propiedades, representando por ejemplo las distancias de los planetas al Sol, o un diagrama del espectro electromagnético. Además, pueden observarse relaciones en gráficos doble logarítmico (distancia de los planetas al Sol versus tiempo de revolución o intensidad de la fuerza electrostática versus distancia entre cargas) y mostrar información técnica que se presenta en gráficos con ese tipo de escalas. Estas prácticas son formativas por sí mismas, independientemente de que sirvan, además, al propósito del estudio de los campos.

- **La igualdad encadenada:**

En algunos ambientes se acostumbra encadenar las igualdades en los desarrollos, cálculos y demostraciones:

$$\int_{-2}^{4}(x^2+x)\ dx = [\ \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\ ]_{-2}^{4} = \frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}-(\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}) = \frac{64}{3}+\frac{16}{2}+$$
$$+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}=\frac{72}{3}+\frac{12}{2}=24+6=30$$

En otros, en cambio, se prefiere no hacerlo:

$$I=\int_{-2}^{4}(x^2+x)dx$$
$$I=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{4}$$
$$I=\left(\frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}\right)$$
$$I=\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}$$
$$I=\frac{72}{3}+\frac{12}{2}$$
$$I=24+6$$
$$I=30$$

Nosotros preferimos lo último, puesto que una igualdad es una relación que se establece entre dos miembros y no más. Además, de esta forma, se reduce el riesgo de introducir errores cuando se efectúan simplificaciones y pasajes de términos.

No obstante, observará que no siempre nos ceñimos a esta práctica; a veces, por brevedad, encadenaremos estas relaciones de igualdad. Al respecto, queremos comentar que, a veces, un purismo o excesivo celo deriva demasiada atención del docente a cuestiones que no son las centrales –ni en lo conceptual ni en lo metodológico– y, así, se desarrollan dos conductas, una íntima y personal, cuando uno hace operaciones en borrador, y otra pública cuando se publica o corrige, como esas antiguas civilizaciones que usaban diferente tipo de signos en las tablillas comerciales y en los monumentos.

Comente esto con sus alumnos y los conocerá mejor a través de sus impresiones.

- **Sobre los problemas numéricos:**

Al utilizar expresiones algebraicas o al reemplazar valores numéricos en ellas, es frecuente cometer errores cuando no se distinguen adecuadamente las diversas cantidades, especialmente si son de una misma magnitud (simplificación errónea de masas o energías; reemplazo de un valor inicial por el final, etcétera). Sin imponer una nomenclatura determinada, demos nombres distintos a cantidades distintas, y un solo nombre o símbolo a cada una, en todo el desarrollo de un mismo ejercicio.

Respecto a las unidades utilizadas, si bien en nuestro país está en vigencia el SIMELA, es a veces apresurado exigir la conversión al mismo sistema de todas las cantidades dadas antes de utilizarlas. A menudo resulta muy eficaz, luego de obtener la expresión final, reemplazar los datos tal cual fueron obtenidos para efectuar todas las simplificaciones posibles y, posteriormente, convertir las unidades al sistema deseado.

En tal sentido, no está de más hacer que cada cantidad esté siempre acompañada por su respectiva unidad, no sólo para su conversión correcta, sino también como verificación de que en un despeje algebraico no se hayan deslizado errores en factores o potencias.

Si tuviera que efectuar una conversión de unidades, el método de sustitución es práctico y seguro: sustituir cada unidad por su equivalente de la que interesa. A modo de ejemplo: Si la compañía de servicios eléctricos facturó a una casa de familia un consumo bimestral de 200 KWh y queremos expresar en Joule dicha energía:

1 KW = 1000 W
1 h = 60 min = 60 x (60 s) = 3600 s (dado que 1 min = 60 s)

Entonces:

E = 200 KW.h = 200 x (1000 W) x (3600 s)
E = 200 x 1000 x 3600 W.s
E = 7,2.108 J

Si quisiéramos expresarla en calorías (para compararla con el consumo de gas) y recordamos la equivalencia:

1 cal = 0,24 J

$$1\ \mathrm{J} = \frac{1\ \mathrm{cal}}{0{,}24}$$

$$E = 7{,}2\ .\ 10^{8}\,\mathrm{J} = 7{,}2\ .\ 10^{8}\,\mathrm{J}\ .\ \frac{1\ \mathrm{cal}}{0{,}24} = 3\ .\ 10^{9}\,\mathrm{cal}$$

Y también:

$$E = 3\ .\ 10^9\, cal = 3\ .\ 10^9\, \frac{Kcal}{1000} = 3\ .\ 10^6\, Kcal$$ (nótese el orden de magnitud)

Con el uso, estas expresiones se hacen más breves, al reemplazar directamente las unidades por sus equivalencias.

No es fácil recordar las relaciones existentes entre las distintas unidades, los valores particulares de ciertas magnitudes, las constantes universales. Creemos conveniente que todos los esfuerzos se concentren en actividades analíticas y reflexivas, que hagan posible aproximarnos al tan pretendido “pensar mejor”. La memorización de relaciones entre unidades no contribuye a ese objetivo, por lo que opinamos que es conveniente el uso de una tabla con un conjunto de equivalencias elementales o la consulta bibliográfica, en caso necesario. Normalmente, el uso reiterado fija en la memoria los valores más utilizados. Inclusive, la confección de un resumen personal por el alumno (“machete”, en su jerga), completo brevísimo, exige un esfuerzo de síntesis que es un verdadero auxiliar del estudio; así entendido, es también recomendable su uso.

Muchos alumnos finalizan el ejercicio al llegar al resultado “correcto” (según la información del texto, del profesor o de sus compañeros); otros se contentan con llegar a “su” resultado. Es importante la verificación crítica: la compatibilidad con los datos y condiciones del problema, su orden de magnitud, sí el modelo utilizado se mantuvo dentro de sus límites de validez o hay que modificar las hipótesis de trabajo. Tampoco hay que perder la oportunidad de graficar los resultados, si el tipo de ejercicio lo permite; o analizar la influencia de modificar tal o cual dato (por ejemplo, multiplicándolo o dividiéndolo por dos o por diez) en los resultados hallados.

Por último, una aclaración respecto a estas sugerencias. Como tales, no es obligatorio adoptarlas ni pretenden ser reglas. Hay que notar que una estructura rígida de razonamiento lineal, si bien conduce lógicamente a un resultado, puede engendrar el temor a equivocarse (“¿Qué hay que contestar?”). Hay casos en los que la búsqueda de alternativas puede hacer surgir espontáneamente una solución válida y original, al margen de todo un proceso deductivo. Dejamos, pues, librado a su buen juicio y a su experiencia, el utilizarlas cuando lo considere oportuno.

Para trabajar con los alumnos: Construcción de un motor eléctrico elemental

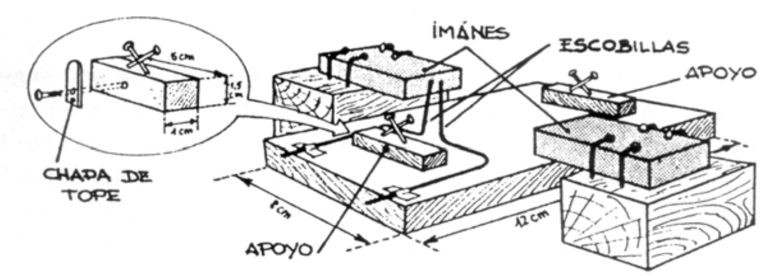
Le ofrecemos un trabajo realizado en el GECYT de la Universidad Nacional de Córdoba, en versión parcialmente modificada.

Le recomendamos encarecidamente que construya este aparato o lo proponga a sus alumnos. No es imprescindible que sea usted personalmente quien empuñe el soldador. Participará, como nos ha sucedido a nosotros, de su asombro al ver que algo hecho por sus manos funciona.

Como en toda máquina eléctrica de este tipo, distinguimos los elementos fijos o estator (base, apoyos o cojinetes, escobillas e imán) y el elemento móvil, el rotor.

- **Base y apoyos.** La base puede hacerse con un trozo de madera blanda rectangular, de 120 mm x 80 mm, y 15 mm de espesor, si bien puede utilizarse cualquier otro material lo suficientemente firme como para asegurar a él los apoyos y las escobillas.

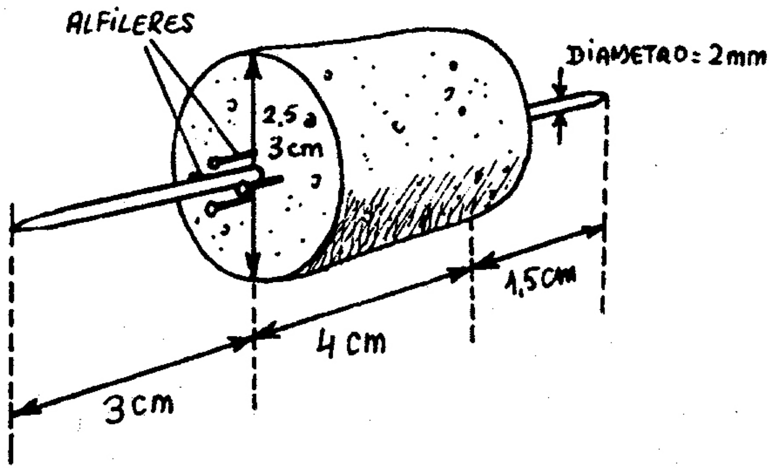
Los apoyos del eje del rotor se harán con clavos sin cabeza de 1", clavados formando un ángulo de 90° entre sí, en dos tacos también de madera blanda, de 10 mm x 15 mm y 50 mm de longitud, como se indica en la figura.



Al hacer el montaje habrá que cuidar que los soportes del eje queden a la misma altura. Para ello, una vez armado el primer apoyo, es conveniente utilizarlo como guía para el segundo.

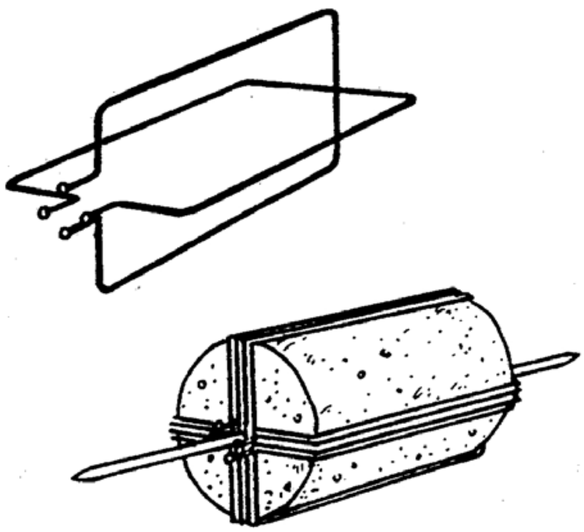
Para evitar el desplazamiento longitudinal del rotor, se atornillará una chapita de tope, de 25 mm x 10 mm, en cada apoyo. Luego, se fijarán los apoyos a la base, teniendo en cuenta la longitud del eje utilizado.

- **Rotor.** Para su cuerpo podrá emplearse un corcho de regulares dimensiones. El eje se hará con alambre de acero, de aproximadamente 2 mm de diámetro (puede utilizarse una aguja de tejer). Habiéndolo insertado en el corcho, lo más centrado posible, se hará girar el conjunto (utilizar una máquina de agujerear fija en una morsa) y, mediante una lija mediana o papel de esmeril, se rectificará la superficie lateral para eliminar toda excentricidad.



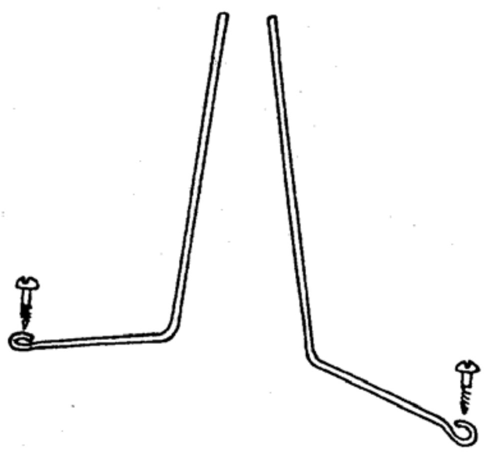
Cuatro alfileres, ubicados simétricamente lo más cerca posible del eje, harán la función de delgas del colector y serán colocadas antes de comenzar la tarea del bobinado. Las delgas no deberán hacer contacto eléctrico con el eje.

Para realizar el bobinado, se requieren dos trozos de alambre de cobre esmaltado de 0,4 mm de diámetro, de aproximadamente 6 m de longitud cada uno. (Puede obtenerse en una casa de bobinado de motores, o bien a partir de una bobina o transformador en desuso; en este caso, verificar que no esté dañada la capa aislante que lo recubre).

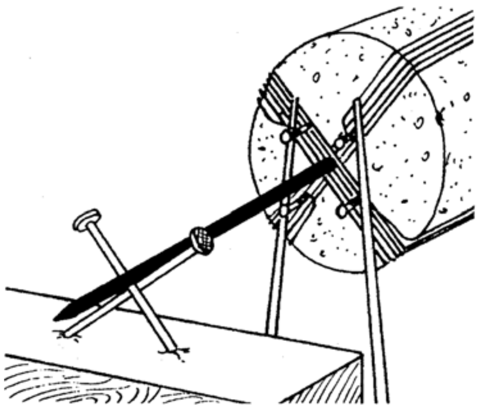


Colocando el punto medio de uno de los trozos de alambre junto al eje, en el extremo del rotor opuesto al colector, se comenzará a bobinar, realizando en forma consecutiva el arrollamiento de las dos mitades y tomando especial cuidado de no invertir el sentido de giro al comenzar con la segunda mitad. Los extremos de bobina se asegurarán a la delga respectiva con una gota de estaño, removiendo previamente la aislación si no es alambre autosoldante. Utilizar un soldador miniatura, como el usado en reparaciones de radio y TV. Al calentar la delga, habrá que cuidar no dañar la aislación del resto de las bobinas. Una vez terminada esta primera bobina, se hará la segunda en forma similar. De las figuras puede deducirse la forma de conexión a las delgas y el sentido de ejecución de los devanados.

- **Escobillas.** Se harán con dos trozos de alambre de bronce, de 0,8 mm a 1 mm de diámetro. Para la alimentación es conveniente utilizar cable flexible con aislación de plástico, de unos O,8 mm, soldado a las escobillas y engrampado a la base.



Una vez colocado el rotor sobre los apoyos, se fijarán las escobillas a la base y se adaptarán, tratando de establecer buen contacto entre éstas y las delgas. En esta operación habrá que cuidar que, sin dejar de hacer contacto, la excesiva presión entre las escobillas y los delgas no frenen el giro del rotor. Conviene efectuar varios ensayos hasta lograr la forma y flexibilidad óptima de las escobillas.



Por último, se requiere establecer un campo magnético, que se logra colocando a ambos lados del rotor los polos opuestos de sendos imanes o de un único imán, según se disponga, lo más próximo al mismo que sea posible.

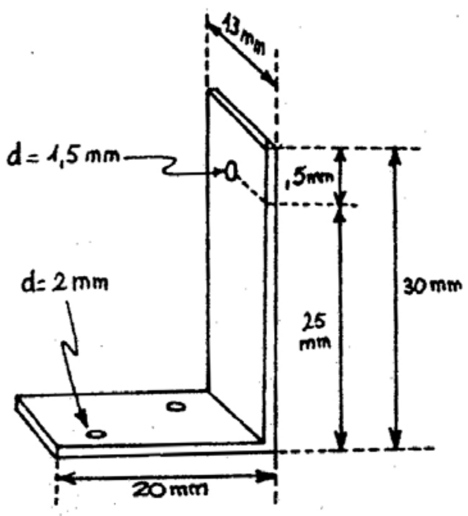
El motor debe alimentarse con una tensión mínima de tres a cuatro voltios, dependiendo del imán disponible, de la puesta a punto de las escobillas, etcétera. (Verificar que cierren el circuito de los bobinados sucesivamente). El empleo de tensiones mayores (puede usarse una batería de 9 V) favorecerá el funcionamiento y disimulará imperfecciones de construcción.

• **Otro modelo de rotor elemental de corriente continua:**

El modelo anterior se asemeja, por su construcción, al que técnicamente se conoce como de "rotor liso"; el que ahora vamos a proponerle es del tipo de rotor a "polos salientes", con núcleo de material ferromagnético.

El costo de los materiales es mínimo y, si se lo arma con prolijidad, funciona satisfactoriamente. Sus partes constitutivas son las siguientes:

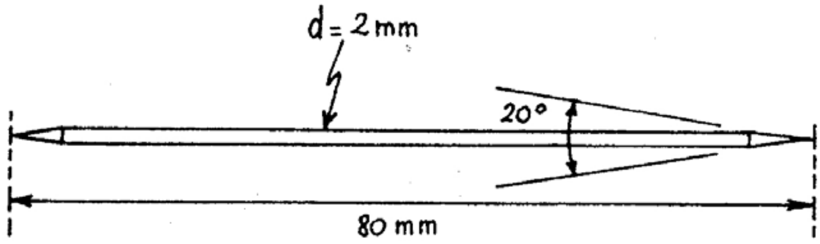
- **Base**. Es un trozo rectangular de madera (cedro o pino) de 120 mm x 15 mm.



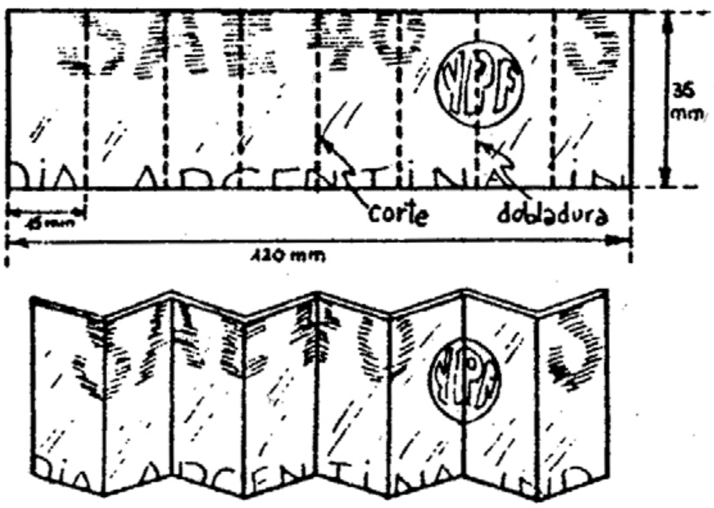
- **Soportes del rotor.** Se construyen con planchuela metálica (zuncho de embalaje) de 0,5 mm de espesor. Se requieren dos. Deben tener un orificio de 1,5 mm de diámetro, en la aleta vertical, donde apoyará el extremo del eje. En la aleta horizontal se practican otros dos agujeros, de 2 mm de diámetro, para fijarlos a la base mediante tornillos o clavos de la medida adecuada.

- **Rotor.**

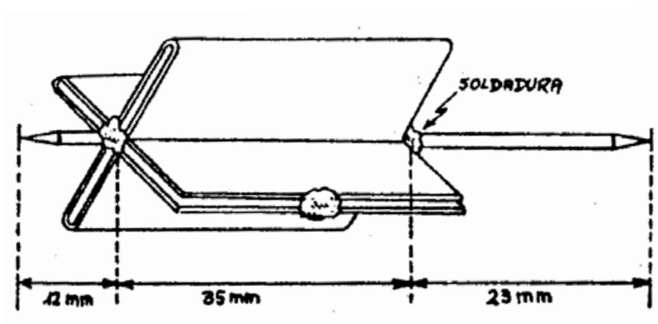
El **eje** se fabrica con alambre galvanizado de 2 mm de diámetro (puede utilizarse un trozo de aguja de tejer o de rayo de bicicleta, que son rectos). Los extremos cónicos se trabajan con lima o piedra esmeril.



El **núcleo.** Se corta una tira de hojalata (proveniente de envases descartables de 35 mm de ancho y 120 mm de largo, trazando líneas transversales cada 15 mm. Para facilitar los plegados que se harán posteriormente, hacer pequeños cortes en los extremos de dichas líneas, de 3 mm ó 4 mm de profundidad.

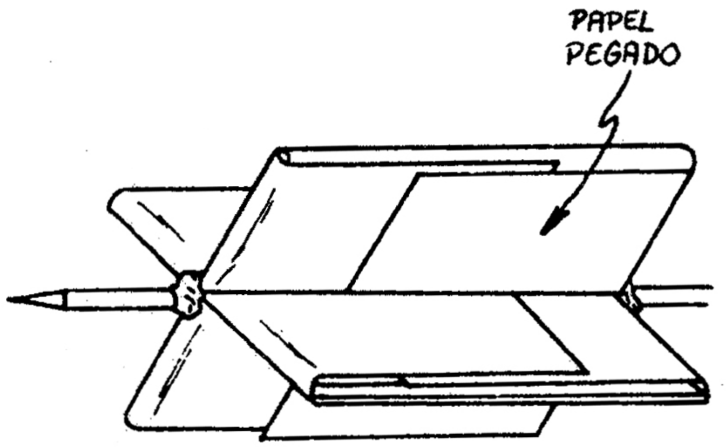


Luego, apoyando la tira sobre una regla, doblar a 90° por las líneas, comenzando por los extremos. La tira de hojalata quedará como muestra la figura.

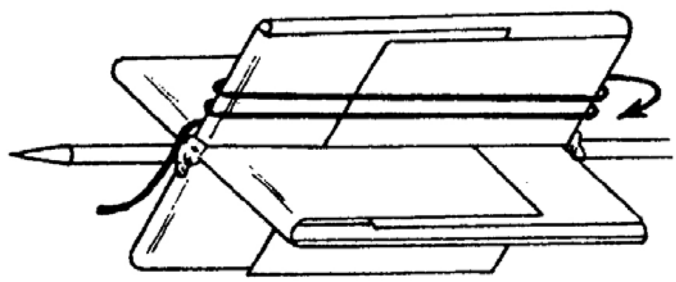


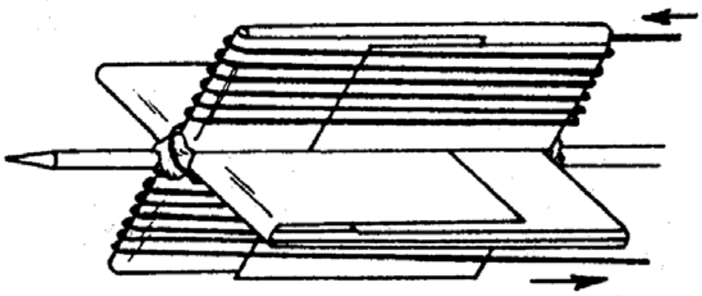
El plegado se completa cerrando los ángulos, y el núcleo del rotor debe adoptar la forma indicada en la figura. Un punto de soldadura de estaño en los extremos dará rigidez al conjunto.

Aislación del rotor. Para evitar posibles cortocircuitos entre el rotor y la bobina, es conveniente disponer un elemento aislante entre ellos. Para ello, corte cuatro tiras de papel común, de 100 mm x 15 mm, y péguelas con adhesivo sintético en la forma indicada. También puede utilizar trozos de cinta aisladora.



Bobinado del rotor. Corte un trozo de alambre de cobre esmaltado, de 0,4 mm2 de sección y 5 m de longitud, y busque su punto medio. Comience a bobinar a partir de ese punto, sobre una de las paletas, desde el eje hacia el borde. Al llegar a 3 mm del borde, continúe el bobinado (siempre en el mismo sentido) sobre las espiras anteriores, hasta que quede un sobrante de 4 ó 5 cm de alambre hacia el extremo más largo del eje.

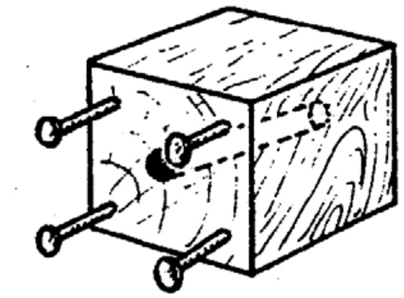


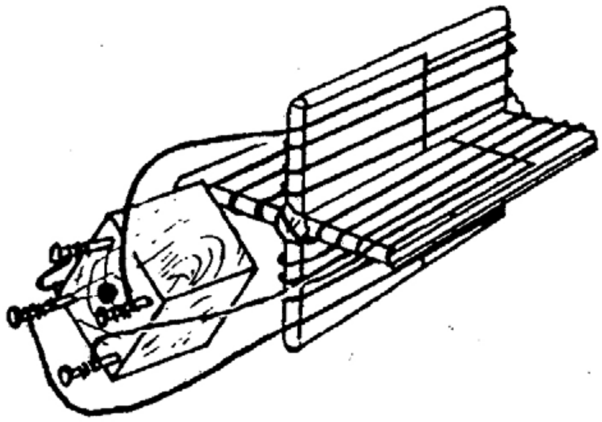


Proceda de la misma manera con la otra mitad del alambre, bobinando (sin cambiar el sentido de arrollamiento) sobre la paleta opuesta.

Con otro trozo de alambre de la misma longitud, se bobina sobre las otras dos paletas.

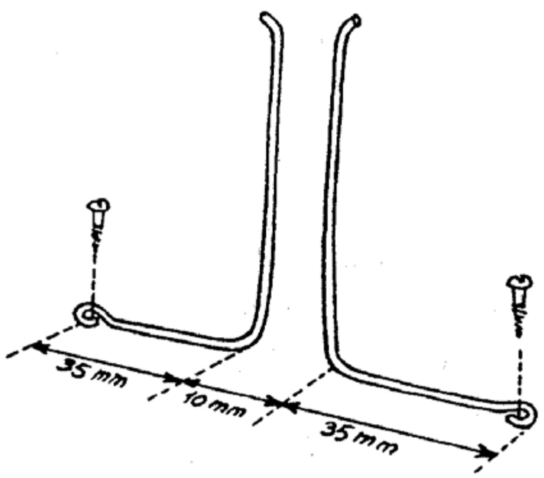
Colector. Se requiere un cubo de madera, de 12 mm de arista, con un agujero pasante de 2 mm de diámetro, centrado en una de las caras. Clavar cuatro alfileres dispuestos simétricamente, a 3 mm del centro, como muestra la figura.



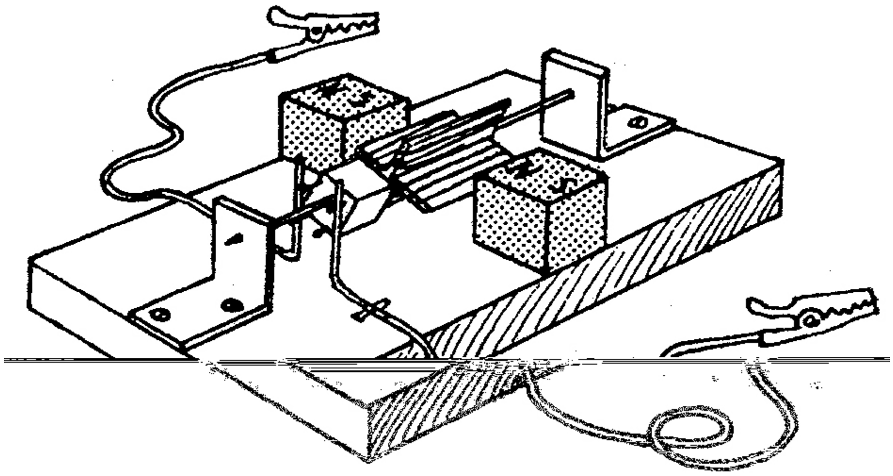


Montaje del rotor. Pasar el extremo más largo del eje por el agujero del colector y soldar los extremos de las bobinas a las delgas (alfileres) respectivas, cuidando que haya un desfasaje de 90° entre la paleta de la cual proviene el extremo y la delga correspondiente.

- **Escobillas.** Se fabrican con dos trozos de alambre de bronce, de 0,8 mm y 120 mm de longitud, doblados como muestra la figura.

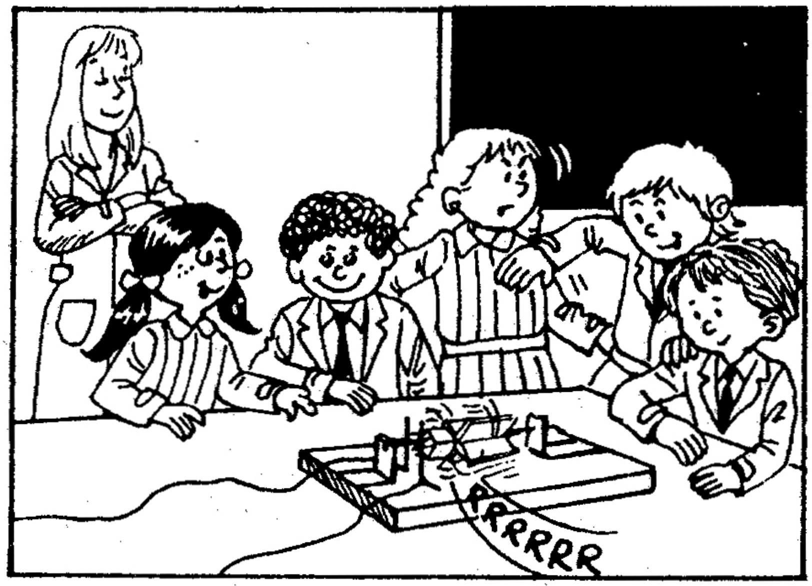


- **Montaje.** Fijar los soportes a la base, de modo que el eje del rotor apoye en los orificios correspondientes. Atornillar los extremos de las escobillas a la base y asegurar que no se desplacen, engrampándolas (puede usar trozos de alambre doblados en “U”). Soldar los cables de alimentación. Instalar el rotor en su posición, verificando que pueda rotar sin un excesivo rozamiento con los soportes y en el contacto con las escobillas. Lubricar los extremos del eje con aceite liviano.



- **Estator.** El campo magnético necesario se crea entre dos polos (N-S) dispuestos a ambos lados del rotor. No se requiere un soporte especial para sostener el imán; basta aproximar los polos a cada lado del rotor, lo más cerca posible pero sin tocarlo, teniendo el imán en la mano. Debe tener en cuenta que el campo magnético es imprescindible para que el dispositivo funcione, además de una fuente de energía eléctrica de 4 a 12 Volt (pilas o batería).

Maravíllese con sus alumnos al ver funcionar estos prototipos; al fin y al cabo, los motores utilizados en la técnica no son sino refinamientos, pero que siguen los mismos principios. El vuelo libre de la imaginación los llevará a investigar: qué ocurre si se invierte la polaridad de la batería, o del campo magnético, o ambos; cuál será el efecto de acercar o alejar el imán, o de colocarlo verticalmente...



Posteriormente podrán preguntarse cuál es la función de los distintos elementos, por qué se necesitan las delgas y las escobillas, o varias bobinas y la causa de ciertas indicaciones que se han hecho en la descripción del montaje: aislación del alambre; mantener el sentido al devanar las bobinas; desfasar 90° las delgas en el segundo motor y no en el primero. El concretar con éxito estos (u otros) proyectos es una fuerte motivación a proseguir investigando y progresando en el conocimiento. En la bibliografía encontrará dónde inspirarse para otras realizaciones

¿Cuál es el rédito de construir un motor? Es infaltable oír el comentario de alguno de los alumnos acerca de la muy escasa eficiencia del motor y a su casi total inutilidad práctica, reflexión que suele ir acompañada de un tono festivo o burlón. Podemos compartir sin temor su chanza pues el propósito no fue, en este caso, técnico-productivo sino motivador. "Mientras no se repita y estimule la vocación de cada alumno, mientras no se dé mayor importancia a los métodos que al conocimiento, mientras los exámenes controlen más la cantidad de información que las aptitudes -la laboriosidad, la curiosidad, el espíritu práctico, la imaginación, etcétera- de los alumnos, toda reforma será más aparente que real[5].

Considerémonos bien encaminados si, como resultado del trabajo, un alumno se atrevió a intentar la reparación de una aspiradora y vio en detalle su motor, o si otro aprendió, en su búsqueda de material, que "alambre" significa un solo hilo y "cable", varios.

[5] *Félix Cernuschi. ¿Cómo debe orientarse la enseñanza de la ciencia? Eudeba. 1961. Buenos Aires.*

PRIMERA SECCIÓN. FUERZAS GRAVITATORIAS

Ley de gravitación universal

En la presentación de este tema hay dificultades de orden experimental, conceptual y metodológico que afectan a docentes de todo nivel y, quizá más aún, a los de mayor profundidad de estudio, pues éstos se encuentran más lejos de las nociones espontáneas o la física ingenua de los alumnos que se enfrentan por primera vez con esos problemas. Demos algunas a modo de ejemplo:

- Nacemos, vivimos y morimos en un campo gravitatorio de intensidad prácticamente constante. De este modo, el hecho de que la Tierra nos atrae no es nada evidente, al igual que para un pez carecería de significado la idea de océano; como nunca conocimos otra cosa, la pesantez se percibe no como una interacción entre cuerpos, sino como una tendencia natural de los objetos a ir hacia cierto lugar, denominado "abajo".
- Nos está vedado experimentar con fuerzas gravitatorias, salvo las que ejerce la Tierra. No es nada fácil detectar la fuerza que se ejercen dos objetos de tamaño regular y ordinario. No hay experiencia cotidiana gravitatoria y sí electrostática, elástica, magnética, etcétera.
- La televisión genera multitud de escenas fantásticas contra las que no pueden competir las escenas reales de navegación espacial. Así, se generan y generalizan ideas erróneas acerca de la ingravidez, la orbitación, la caída libre, el vacío y la cámara lenta. Vemos series televisivas en las que dos astronautas en la Luna se pelean en cámara lenta, como si la gravedad reducida les impidiese tomarse a golpes con la velocidad normal de un puñetazo, aunque el noqueado caiga, eso sí, con aceleración lunar.
- El aparato matemático para un estudio algo detallado de la gravitación de cuerpos extensos es complejo, aún para el cuerpo más simple, como podría ser una esfera de densidad uniforme.

Ante estas dificultades, resalta muy nítidamente la brillantez del genio de Isaac Newton quien, a pesar de estar inmerso en el mismo turbio mar de dificultades que el resto de la humanidad, logró tomar distancia de la percepción directa e ingenua y creó, a la vez, el instrumento matemático y el conceptual físico para dar una explicación muy satisfactoria tanto del movimiento de la Luna, que "no cae", como el de la manzana, que sí cae, uniendo lo celeste con lo terreno -al menos, en el campo mecánico-.

Tratemos de seguir el argumento de Newton. Un posible punto de partida para la presentación de este tema es el análisis del movimiento de nuestro satélite natural, la Luna, que conduce a la ley del "inverso del cuadrado de la distancia", de un modo similar al que siguió Newton allá por el año 1684:

a) La Luna describe un movimiento aproximadamente circular, de radio rL, alrededor de la Tierra. Luego está acelerada hacia la misma (de lo contrario, seguiría por inercia su movimiento en línea recta, alejándose cada vez más de la Tierra). La aceleración requerida (normal o centrípeta) tiene un módulo:

$$| a_L | = \omega^2 \ . \ r_L$$

Expresión deducida por Newton y también por Huygens, quien se anticipó en publicarla.

b) La existencia de una aceleración requiere, extendiendo la segunda ley de Newton al movimiento lunar, que la resultante de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre la Luna sea distinta de cero:

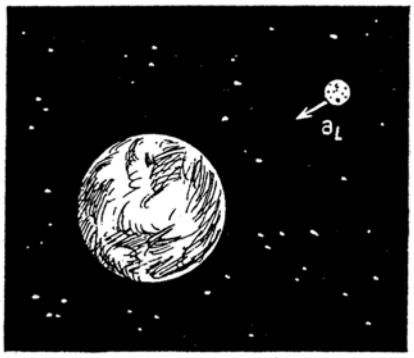
$$\overline{f_L} = m_L \,.\, \overline{a_L} \quad \text{(¡La Luna no está en equilibrio!)}$$

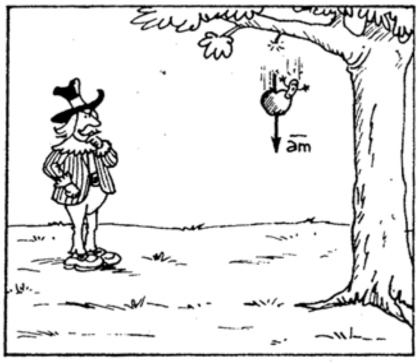
Admitiendo que la interacción más relevante se produce con la Tierra:

$$\overline{f_{TL}} = m_L \,.\, \overline{a_L}$$

Lo que lleva a pensar en una atracción mutua entre ambos cuerpos espaciales, ya que la aceleración está siempre orientada hacia la Tierra.

c) Newton centró su atención en las aceleraciones de la Luna y de un cuerpo cualquiera que cae en la superficie terrestre (la "manzana" de Newton).





Halló una semejanza (el genio halla semejanzas donde el común de las gentes sólo vemos diferencias) entre ambos movimientos: El vector aceleración está dirigido hacia el centro de la Tierra.

El paso siguiente fue calcular $|\overline{a_L}|$ y $|\overline{a_m}|$.

Ya sabemos que $|\overline{a_m}| = 9{,}8\ m/s^2$.

Veremos enseguida cómo calcular el módulo de la aceleración centrípeta de la Luna $|\overline{a_L}|$.

Adelantamos ahora ese valor, para no interrumpir el hilo del argumento: $|\overline{a_L}| = 2{,}72\ x\ 10^{-3} m/s^2$, valor claramente menor que la aceleración de la manzana.

Newton razonó que si, al nivel de la superficie, todos los cuerpos caen con la misma aceleración, bien podía ocurrir que a gran distancia, como a la de la Luna, ocurriera lo mismo, y cualquier cuerpo a la misma distancia de la Tierra tuviese igual aceleración que la Luna. (0 sea: Saquemos a la Luna, pongamos ahí un tornillo y veremos que el tornillo, cuando se lo suelta, se acelera a $2{,}72\ x\ 10^{-3} m/s^2$.)

d) Imaginó que ambas aceleraciones, la de la Luna y la de la manzana, obedecían a una **fuerza** que ejercería la Tierra sobre ambos objetos. De ahí resultó natural suponer que a mayor masa debía haber más fuerza y en la misma proporción, para que la aceleración fuera siempre la misma, puesto que $\bar{a} = \bar{f} / m$

Si imaginamos una Luna cada vez más grande y masiva, habrá cada vez más fuerza. Cuando la Luna sea del mismo tamaño que la Tierra, en esta hipótesis, no habrá motivo para imaginar que la Tierra le hace fuerza a la Luna; y que ella a nosotros, no. Resultaría extraño y asimétrico. Por ello, supuso que todos los cuerpos se atraen entre sí, incluso el más pequeño al más grande. Esto fue probablemente el corazón o núcleo de su genial idea.

e) Según escribía en 1714, comparó "la fuerza necesaria para mantener la Luna en su órbita, con la fuerza de la gravedad en la superficie terrestre".

Newton no podía acercar la Luna hasta el nivel de la superficie terrestre (el mismo radio lunar lo haría imposible), ni podía llevar la manzana hasta la órbita lunar para comparar allí su peso con el de nuestro satélite. Lo que sí resulta posible es la comparación de sus respectivas aceleraciones y Newton lo hizo.

También nosotros podremos orientar a nuestros alumnos para repetir los cálculos:

Relación de aceleraciones: $$\frac{g}{a_L} = \frac{9{,}8}{2{,}72 \ . \ 10^{-3}} = 3603 \qquad (1)$$

El siguiente paso de Newton fue hallar la relación de distancias de ambos objetos (Luna y manzana) a la Tierra.

¿Cuál es la "distancia a la Tierra" a tener en cuenta para un objeto que está a nivel del mar? A Newton le preocupó mucho esta consideración; a priori comparó con la distancia al centro de la Tierra, pero no quedó satisfecho hasta que posteriormente demostró (desarrollando para ello el "cálculo") la validez de su conjetura. Tomando como radio terrestre R = 6360 km:

Relación de distancias: $$\frac{R}{r_L} = \frac{6360}{384000} = 0{,}0166 \qquad (2)$$

Comparó ambos cocientes o razones (1) y (2):

- La razón de distancias no coincide con la de aceleraciones: $0{,}0166 \neq 3603$.
- Tampoco la razón inversa de distancias puede igualarse a la de aceleraciones $(0{,}0166)^{-1} = 60{,}24 \neq 3603$.
- Pero, el cuadrado de la razón inversa de distancias sí es muy parecido a la razón directa de aceleraciones: $(0{,}0166)^{-2} = 3629 \cong 3603$.
  Ambos valores difieren en menos de un 1%, de modo que puede escribirse:

$$\frac{g}{a_L} = \frac{{r_L}^2}{R^2}$$

Los datos planteados han sido extraídos de un texto de astronomía contemporáneo; Newton realizó sus cálculos a partir de la información disponible en su época, con un valor aproximado del radio terrestre; la unidad de longitud utilizada era el pie París.

Newton predijo que un cuerpo en caída libre descendería, en un segundo, 15 pies París, una pulgada y 1,44 líneas[1] ; el valor determinado por Huygens con el péndulo difería en 1/3 de línea... ¡menos del 0,02%! El comentario de Newton fue que los resultados experimentales concordaban "bastante de cerca" con los predichos, expresión excesivamente modesta: eran casi iguales.

Recordemos que dimos por sabida la aceleración de la Luna $a_L = 2{,}72 \ x \ 10^{-3} m/s^2$.
Para descansar un poco del discurso newtoniano, propongámonos este:

Ejercicio resuelto
Hallar la aceleración centrípeta de la Luna.

Ya puede comenzar a trabajar. Si no atina a elegir un buen comienzo, podemos adelantar que la aceleración de la Luna, al ser puramente centrípeta, se podría calcular con:

$$a_L = \omega^2 \ . \ R$$

ó

$$a_L = 4 \ \pi^2 \ f^2 R$$

ó

$$a_L = 4 \ \pi^2 \ R/T^2$$

donde R es la distancia Tierra-Luna (¡Y no el radio de la Luna!) y T es el período de la Luna.

Como sugerencia, pregunte a sus alumnos cuánto tiempo tarda la Luna en dar una vuelta alrededor de la Tierra; pocos acertarán con el dato correcto, 28 días (aproximadamente). La distancia R es de más de un segundo luz (un tema para discutir es: ¿Cómo obtener experimentalmente esta información?).

$$a_L = \omega^2 \ . \ R = \left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 .R = \left(\frac{2\pi}{27{,}32 \ x \ 24 \ x \ 60 \ x \ 60}\right)^2 . \ 3{,}84 \ .10^8 m$$

$$a_L = 2{,}73 \ . \ 10^{-3} m/s^2 = 0{,}00273 m/s^2$$

¡Aproveche las calculadoras! Observe el orden de magnitud. Este valor es el que habíamos anticipado y permitió hallar que el cociente de aceleraciones es igual al cociente inverso de radios al cuadrado.

[1] *Unidades de uso común en su época.*

Sería ingenuo pensar que esta sola verificación es el único sustento de la ley que relaciona la aceleración que experimenta un cuerpo con su distancia a la Tierra; y, en tal caso, sólo sería aplicable a la interacción con la misma.

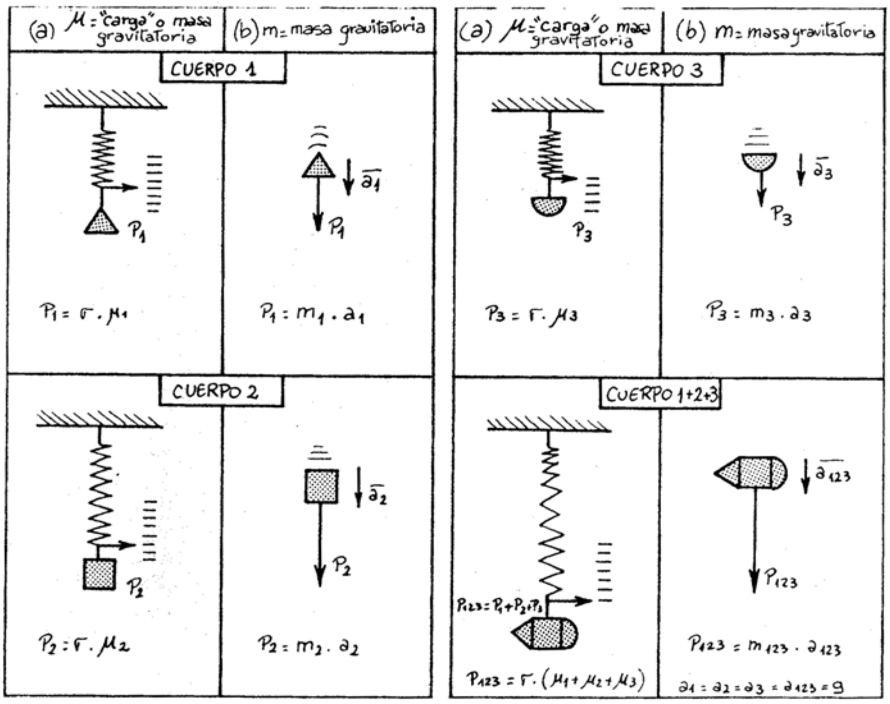
Newton demostró que todos los cuerpos en órbita alrededor de otro, cuyos movimientos sigan las leyes de Kepler, están sometidos a una fuerza central de atracción cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y su recíproca. Fuerzas de esas características dan lugar a movimientos que cumplen las leyes de Kepler. Incluso, las aplicó a los satélites de Júpiter y a los de Saturno (estos últimos desconocidos para Kepler). La demostración no es sencilla hoy y menos sencilla aún lo fue para Newton, quien debió desarrollar herramientas de cálculo entonces inexistentes.

En las proximidades de la Tierra, es posible medir la fuerza de interacción gravitatoria que (prescindiendo de los efectos introducidos por la rotación de la misma) puede identificarse con el peso de los cuerpos. Considerando distintos objetos tales que sus dimensiones los asimilen a partículas, colocados sucesivamente en un mismo punto, la experiencia muestra que:

- experimentan fuerzas que tienen dirección y sentido fijos;
- la intensidad de la fuerza de interacción depende del cuerpo en cuestión.

Asumimos, pues, que hay una propiedad escalar propia de cada cuerpo, que define la intensidad de la fuerza observada. Esta propiedad es denominada masa gravitatoria del cuerpo (μ). Hagamos, idealmente, varias experiencias con distintos cuerpos, que consistan en:

a) Medir la intensidad de la fuerza gravitatoria.
b) Dejar caer libremente el objeto y aplicar la segunda ley de Newton.



Podemos interpretar que existe una intensidad de campo gravitatorio de valor ?, local y que cada cuerpo tiene una "carga" o masa gravitatoria μ, de modo que

$$F = \mu \,.\, \Gamma$$

Por el momento no interesan las unidades: La masa gravitatoria podría medirse en unidades arbitrarias "gravs" y la intensidad de campo, por ejemplo, en Newton/grav.

La parte b) de la experiencia nos plantea la relación entre la fuerza (gravitatoria) aplicada y las respectivas masas inerciales de los distintos objetos; y, dado que todos los cuerpos experimentan la misma aceleración (sólo porque ese es el comportamiento observado; podrían haber tenido distintas aceleraciones), puede verificarse:

$$P_{123} = P_1 + P_2 + P_3 = m_1.a_1 + m_2.a_2 + m_3.a_3 + \quad = (m_1 + m_2 + m_3).g$$

Es decir, la misma relación de linealidad entre la fuerza de interacción gravitatoria y las masas inerciales de los diversos cuerpos.

Esto se resume con las relaciones siguientes:

$P = \mu . \Gamma = m . g$ con Γ y g constantes para un punto dado.

De donde se desprende la proporcionalidad entre la propiedad masa gravitatoria (responsable de la interacción gravitatoria) y la masa inercial definida en el capítulo de dinámica.

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\Gamma}{g} = \text{ constante}$$

Este planteo no es de fácil comprensión y, tal vez, parezca una complicación innecesaria. De hecho, se omite en los textos de nivel secundario y puede hacerse, con tal de tener en cuenta que, antes de hacer ningún experimento, en principio podría suponerse que la propiedad de los cuerpos de resistirse a ser acelerados sería independiente de la propiedad de atraerse entre sí, como ocurre en los fenómenos electrostáticos, en los que masa inercial y carga eléctrica no están relacionadas, como sí lo están m y μ. Newton no hizo distinción entre ambas masas. Experimentos más recientes (Eötvos) reafirman su identidad.

Eötvos ideó gravímetros muy sensibles que mostraron que la masa gravitatoria es proporcional a la inercia, dentro de un error máximo del 0,000001%.

La diferencia entre la masa inercial y la gravitatoria constituye una cuestión de tipo filosófico o epistemológico, y hace a los fundamentos conceptuales de la mecánica clásica. En términos sencillos, consiste en tener presente que constituye una ley experimental la imposibilidad de variar en forma independiente el peso y la inercia de un objeto. No hay objetos que, en el mismo lugar, tengan igual peso y diferente inercia; en cambio, sí pueden tener diferente atracción o repulsión electrostática, ante un tercero, y poseer la misma masa inercial.

La identidad **experimental** entre μ y m intrigó grandemente a los investigadores. En 1917, Albert Einstein ofreció una teoría de la gravedad más amplia que la de Newton, cuyo postulado básico es tal identidad.

Actualmente, se toma la relación $\mu/m = 1$, de modo que se habla de la **masa** de un cuerpo, sin más aclaraciones; con el mismo criterio, tampoco se hace distinción entre Γ y g, y vale la relación $\frac{\Gamma}{g} = 1$. Para un cuerpo de masa m_1 que experimenta una fuerza gravitatoria F_1, se verifica, entonces:

F_1 a m_1

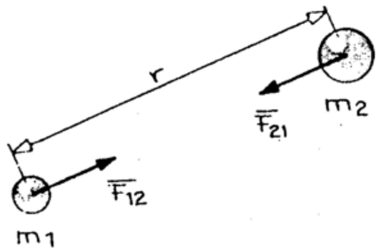
Si consideramos ahora un sistema de dos cuerpos en interacción gravitatoria, tales que sus dimensiones sean despreciables en relación con la distancia que los separa (para poder, justamente, definir la distancia) y teniendo en cuenta todos los resultados anteriores:

$$F_{12} \ \alpha \ \frac{1}{r^2}$$

$$F_{12} \ \alpha \ m_1$$

$$F_{12} = F_{21} \ \alpha \ m_2$$

[2]



Se pueden resumir en:

$$F_{12} = \alpha \frac{m_1 \ . \ m_2}{r^2}$$

E, introduciendo una constante de proporcionalidad k_G:

$$F_{12} = k_G \frac{m_1 \ . \ m_2}{r^2}$$

expresión de la intensidad de la fuerza gravitatoria.

---

[2] *Esta relación* $F_{12} = F_{21}$; $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$, *se conoce como* ***tercera ley de Newton****, principio de acción y reacción, o principio de interacción. Las otras dos leyes son:*

- *Primera:* $\mathrm{F} = \mathrm{k_G} \frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r^2}}$
- *Segunda:* $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\overline{\mathrm{a}}$

La interacción es **siempre de atracción** y las fuerzas están contenidas en la recta definida por los puntos materiales considerados.

Si bien la genialidad de Newton encontró la vinculación entre la caída de un objeto en la Tierra y el movimiento planetario, o de los satélites de los planetas, fue más lejos aún: Al ver la compatibilidad de su ley de gravitación en todos los sistemas conocidos, proclamó su validez universal, extendiéndola a todo par de cuerpos en cualquier lugar del universo, y con una única constante de proporcionalidad: kG que constituye una constante universal. Su valor fue sólo estimado por Newton, a partir de una densidad media de la Tierra también estimada. Recién en 1798, los trabajos de H. Cavendish permitieron su determinación; posteriormente, Boys (1855-1944) corroboró los valores con un método similar. Ambos utilizaron un procedimiento estático, basado en la medición de la fuerza gravitatoria entre dos esferas de masas conocidas, a una distancia también conocida.

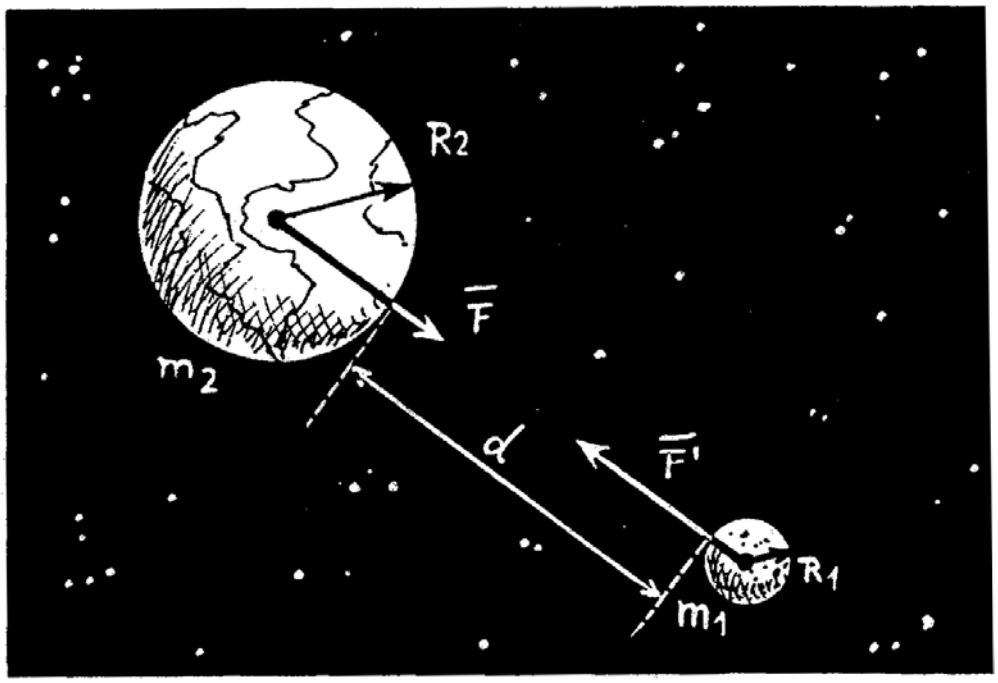
El valor aceptado actualmente es:

$$k_G = 6{,}67\ .\ 10^{-11} N.m^2 / Kg^2$$

Se propone la resolución de algunos ejercicios con el fin de comprender la ley de gravitación universal, el orden de magnitud de las fuerzas gravitatorias y las unidades. (Por favor, intente hacerlos usted solo; interrumpa la lectura donde lo crea conveniente).

Ejercicio resuelto
La experiencia de Cavendish se realizó aproximando dos esferas de plomo y midiendo la fuerza de atracción entre ellas mediante una balanza de torsión.

Estimar la intensidad de la fuerza de atracción entre las esferas al estar separadas una distancia de 1 mm, sabiendo que sus radios eran 2,5 cm y 15 cm (masas de 0,74 Kg y 160 Kg).



Para aplicar la ley de gravitación universal, sólo es necesario determinar la distancia a utilizar, que puede deducirse del esquema; los cuerpos no son puntuales, pero las esferas homogéneas son equivalentes a las masas respectivas, colocadas en sus centros. Por lo tanto:

$$r = R_1 + d + R_2 = (2{,}5 + 0{,}1 + 15)cm$$

$$r = 17{,}6 \ cm = 0{,}176 \ m$$

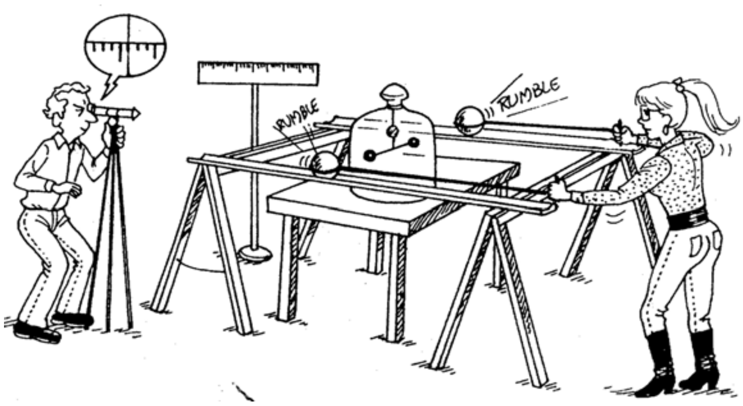
$$F = k_G . \frac{m_1 . m_2}{r^2} = 6{,}67 \ . \ 10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2} . \frac{0{,}74kg \ . \ 160kg}{(0{,}176 \ m)^2} =$$

$$F \cong 2.55 \ . \ 10^{-7} N$$

(Aproximadamente 3.10^7 veces menos que el peso de la esfera menor).

El peso de una hormiga es del orden de 10^{-4} N, ¡la sensibilidad del dispositivo de Cavendish debe poder medir una fuerza cuatrocientas veces menor!

De este ejercicio obtenemos como conclusión que las fuerzas gravitatorias son muy pequeñas. Para medirlas se utiliza un dispositivo como el de la figura.



Experiencia de Cavendish. *Si se accionan las esferas al mismo ritmo que el de oscilación del péndulo de torsión, se suman efectos; y, al cabo de unos cien cambios de posición, el péndulo de torsión oscila con amplitud medible.*

Ejercicio resuelto
Determinar la masa de la Tierra.

Este cálculo puede realizarse fácilmente en el aula. Veamos la información necesaria.

El peso de un cuerpo cualquiera (por ejemplo un ladrillo) en la superficie terrestre, está dado por:

$$P = m \ . \ g$$

Si lo atribuimos exclusivamente a la interacción gravitatoria con la Tierra (no tenemos en cuenta la rotación de la misma), entonces también:

$$P = k_G \frac{m \ . \ m_T}{r^2}$$

donde m_T es la masa de la Tierra y r la distancia entre los centros de ambos objetos en interacción; a nivel del mar, puede considerarse igual al radio medio terrestre. Igualando ambas expresiones:

$$\cancel{m}.g = k_G \frac{\cancel{m}\ .\ m_T}{r_T^2} \qquad\qquad m_T = \frac{g\ .\ r_T^2}{k_G}$$

De modo que, conociendo el radio terrestre $r_T \cong 6360\ \ km = 6{,}36\ .\ 10^6 m,$ la aceleración de la gravedad $g \cong 9{,}8\ \ m/s^2$ (determinada, por ejemplo, con un péndulo) y la constante de gravitación k_G, se obtiene:

$$m_T = \frac{g\ .\ r_T^2}{k_G} = \frac{9{,}8\ \ m/s^2\ .\ (6{,}36\ .\ 10^6 m)^2}{6{,}67\ .\ 10^{-11} \dfrac{N\ .\ m^2}{Kg^2}} = 5{,}94\ .\ 10^{24} Kg$$

Resultado que puede cotejarse con el valor aceptado, en cualquier texto de física o astronomía.

Como observación adicional, puede hallarse la densidad[3] media de nuestro planeta:

$$\rho_T = \frac{m_T}{v_T} = \frac{m_T}{(4/3)\ \pi\ r_T^3} = \frac{5{,}94\ .\ 10^{24} kg}{(4/3)\ \pi\ (6{,}36\ .\ 10^6 m)^3} = 5512\ \ kg/m^3$$

$$\rho_T = 5{,}5\ \ g/cm^3$$

Valor superior a la densidad del agua y de las rocas de la superficie, lo que lleva a pensar en un núcleo formado por materiales de elevada densidad.

Ejercicio resuelto
Calcular la masa del Sol.

También es posible determinar la masa del Sol, valiéndonos de su interacción con algún otro cuerpo. El llamado movimiento de traslación de la Tierra a su alrededor, nos da la oportunidad.

La órbita, casi circular, es descripta en un año sidéreo (365,242 días) y la distancia media entre sus centros es su radio (150.106 km).

Sobre la Tierra ha de actuar una fuerza resultante, dirigida hacia el Sol, tal que:

$$F = m_T\ .\ a_T$$

Y como:

$$a_T = \omega^2\ .\ r \qquad y \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

---

[3] *En algunos y muy pocos ambientes universitarios es costumbre usar la letra δ para la densidad y ρ para el peso específico. En cambio, en una amplia bibliografía internacional, se usa ρ para la densidad y P_e para el peso específico.*

Entonces:

$$F = m_T \ . \ \omega^2 \ . \ r = m_T \ . \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \ . \ r = m_T \ . \ \frac{4\pi^2}{T^2} \ . \ r$$

Esta fuerza proviene de la interacción gravitatoria, por lo tanto:

$$F = k_G \ . \ \frac{m_T \ . \ m_S}{r^2}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando.

$$\cancel{m}_T \ . \ \frac{4 \ \pi^2}{T^2} \ . \ r = k_G \ . \ \frac{\cancel{m}_T \ . \ m_S}{r^2}$$

de donde se deduce:

$$m_S = \frac{4 \ \pi^2 \ . \ r^3}{k_G \ . \ T^2}$$

Reemplazando los valores numéricos, se podrá llegar a $m_S = 2 \ . \ 10^{30} \, Kg,$ valor que también podrá corroborarse en un texto de astronomía.

Además, de la expresión mS puede deducirse $\frac{r^3}{T^2} = \frac{k_G \ . \ m_S}{4 \ \pi^2}$

Como el segundo miembro es una constante, la relación r^3/T^2 es la misma para todos los planetas en órbita circular alrededor del Sol. (Puede demostrarse que también es válido para órbitas elípticas, con lo que se da expresión matemática a la tercera ley de Kepler).

Obviamente, Kepler ignoraba la forma del segundo miembro de esta igualdad. Sólo conocía la constancia r^3/T^2 para todos los planetas conocidos en su época.

Esta "constante de Kepler" no es otra cosa que la masa del Sol, salvo factores constantes universales.

Los satélites de Júpiter tienen otra constante de Kepler que es la masa de Júpiter, afectada por el mismo factor.

Newton conjeturó, sobre esta base, su teoría de la gravitación universal.

Ejercicio resuelto
Calcular la aceleración que experimenta la Luna, al interaccionar con el Sol.

La Luna, aunque en órbita alrededor de la Tierra, también interacciona con el Sol, de modo que:

$$F_{LS} = k_G \ . \ \frac{m_L \ . \ m_S}{r_{LS}^2}$$

Si ésta fuera la única fuerza actuante sobre la Luna, produciría una aceleración:

$$a_{LS} = \frac{F_{LS}}{m_L} = k_G \ . \ \frac{m_S}{r_{LS}^2}$$

La masa del Sol fue determinada en ejercicio anterior$(m_S \cong 2 \ . \ 10^{30} kg)$; la distancia r_{LS} no es fija: fluctúa por la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, de modo que:

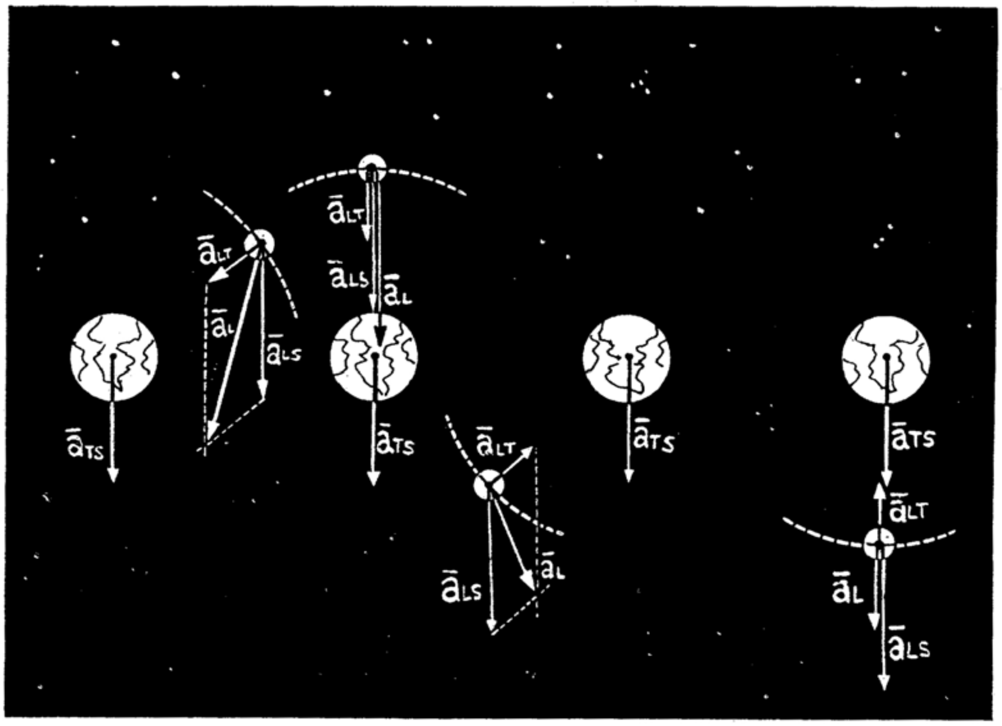
$$r_{LS} \cong 150 \ . \ 10^6 km \ \pm \ 3{,}84 \ . \ 10^8 m \cong (1{,}5 \ . \ 10^{11} \pm 3{,}8 \ . \ 10^8) m$$

Los valores extremos calculados son:

$$a_{LS\ máx} \cong 6{,}24 \ . \ 10^{-3} m/s^2 = 0{,}00624 \ m/s^2$$
$$a_{LS\ mín} \cong 5{,}90 \ . \ 10^{-3} m/s^2 = 0{,}00590 \ m/s^2$$

Si se compara con el valor calculado de la aceleración de la Luna debido a la Tierra, $a_{LT} \cong 0{,}00272 \ m/s^2$, se observa que la aceleración de la Luna debida a su interacción con el Sol es más del doble que la producida por la Tierra.

Esto, que puede resultar paradójico, es natural: la Luna acompaña a la Tierra y ambas orbitan alrededor del Sol. Cualquiera sea la posición relativa de la Luna, su aceleración (resultante) tiene siempre una componente dirigida hacia el Sol. La órbita de la Luna es siempre cóncava hacia el Sol.



Ejercicio resuelto
Calcular con qué fuerza se atraen el Sol y Sirio.

Sirio es un sistema doble (Sirio A y Sirio B) situado a una distancia de 8,8 años luz; su masa (aproximada) es tres veces la del Sol. De modo que:

$$F = k_G \cdot \frac{m_{Sirio} \cdot m_{Sol}}{r^2}$$

$m_{Sol} \cong 2 \ . \ 10^{30} kg$

$m_{Sirio} \cong 6 \ . \ 10^{30} kg$

$r \cong 8{,}8$ años luz

$= 8{,}8 \ . \ 365{,}242 \ . \ 24 \ . \ 3600s \ . \ 3 \ . \ 10^{8} m/s$

$= 8{,}8 \ . \ 9{,}46 \ . \ 10^{15} m$

$$F \cong 6{,}67 \ . \ 10^{-11} \frac{N \ . \ m^2}{Kg^2} \cdot \frac{2 \ . \ 10^{30} Kg \ . \ 6 \ . \ 10^{30} kg}{(8{,}33 \ . \ 10^{16} m)^2} \cong 1{,}15 \ . \ 10^{17} N = 1{,}2 \ . \ 10^{16} kgf$$

La fuerza de atracción es del orden de doce billones de toneladas; sin embargo, la aceleración que experimenta nuestro Sol por esa causa es:

$$a_S = \frac{F}{m} = \frac{1{,}15 \ . \ 10^{17} N}{2 \ . \ 10^{30} Kg} = 5{,}75 \ . \ 10^{-14} m/s^2 \qquad (¡\ !)$$

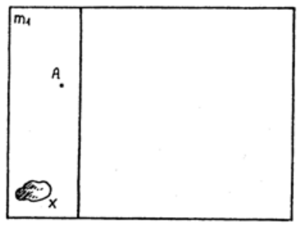
Campo gravitatorio

Presentada y analizada la ley de gravitación universal, afianzados los conceptos y el uso del modelo matemático de Newton, gracias a la ejercitación resuelta, pasamos al concepto de **campo gravitatorio**.

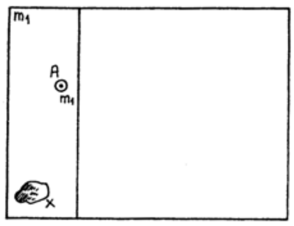
La idea es que un cuerpo material, o distribución dada de ellos, capaz de interaccionar mediante la gravitación con cualquier otro cuerpo colocado en un punto dado, produce en dicho punto una condición particular: el campo gravitatorio. Éste dependerá de la posición del punto en el espacio que rodea a la distribución y del instante considerado, pero no del cuerpo a colocar allí; esto da lugar a una nueva magnitud característica que, evaluada para cada punto del espacio, permitirá conocer la fuerza que actuará sobre un cuerpo que allí esté o se desplace.

Una posible presentación podría ser la siguiente, elaborada a modo de diálogo:

Profesor: —Imaginemos tener un cuerpo material X cualquiera, "fijo" en el pizarrón, y un punto cualquiera A, también fijo.



En el punto A no hay ningún cuerpo, de modo que X está solo. Vamos a ir colocando sucesivos cuerpos distintos en A.Comencemos con el cuerpo 1, de masa m_1. ¿Qué interacciones podríamos apreciar entre 1 y X?



Alumnos: —A distancia... elástica... aceleración... gravitatoria... eléctrica... chocan... se atraen... no interactúan... el peso...

El profesor, con buena dosis de paciencia, selecciona las respuestas. Podrá responder que el cuerpo 1 está en A –por lo que no hay choque aún–, que hay interacción a distancia siempre por gravitación, que no ha cargado eléctricamente a los cuerpos, que la aceleración será el efecto observado de la interacción, pero no ella misma... Hasta quedarse con la gravitatoria.

Profesor: Analicemos la interacción gravitatoria y la fuerza que aparece sobre el cuerpo 1 puesto en A. ¿Cuál podrá ser su dirección y sentido?

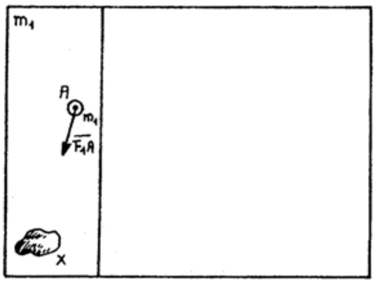
Alumnos: (Un poco más orientados) —Se atraen... hacia X... hacia la derecha... de 1 hacia X...

Profesor: —Bien, bien... Estamos de acuerdo en que se atraen. Si X es puntual, la recta de acción de la fuerza pasará por él. ¿Y si no...?

Alumnos: —¿...?

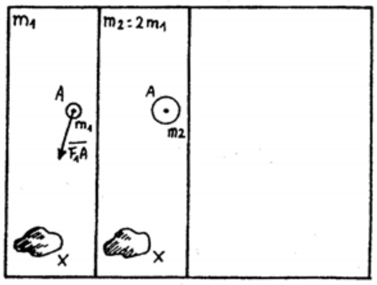
Profesor: —¿Qué hará cada partícula que forma al cuerpo X con el cuerpo 1?

Alumnos: (A coro) —¡Lo atraerán!



Profesor: —Entonces, la resultante de todas las fuerzas originadas sobre el cuerpo 1 por cada partícula de X será la fuerza $\overline{F}_{1A}$, que aparecerá sobre el cuerpo 1. Hasta ahí, el efecto observado sobre el cuerpo 1. ¿Alguna pregunta?

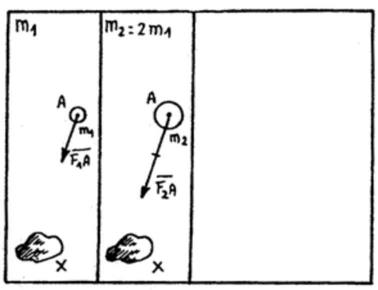
Alumno: —La reacción de $\overline{F}_{1A}$ está sobre X.



Profesor: —Sí; la interacción es entre ambos cuerpos. Sin embargo, centraremos nuestra atención en lo que ocurre sobre 1. (Luego haremos una observación al respecto). Saquemos ahora al cuerpo 1 y coloquemos otro en su lugar. Por ejemplo, el cuerpo 2, que tiene el doble de masa. Escribimos $m_2 = 2\ m_1$. ¿Qué fuerza $\overline{F}_{2A}$ aparecerá sobre él?

Alumnos: —¡El doble!

Profesor: —¿Podrían justificarlo?

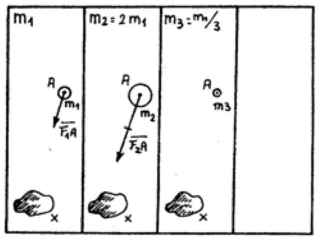


Alumnos: — ¿...? Porque m_2 pesa el doble... Por la ley de gravitación...

Profesor: (Induciendo). —Claro, la fuerza depende del producto de las masas; si una se duplica, se duplica el producto. ¿Y la dirección y el sentido?

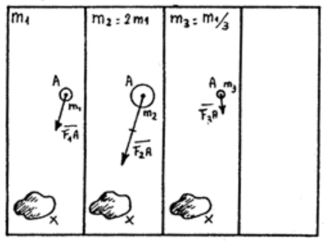
Alumnos: -¡El mismo!

Profesor: De acuerdo. Entonces, podré dibujar el vector $\overline{F}_{2A}$. Será también $\overline{F}_{2A} = 2\,F_{1A}$. Si colocamos en A otro cuerpo 3 en lugar del 2, por ejemplo de masa $m_3 = m_1/3$. ¿Qué fuerza F_{3A} experimentará?



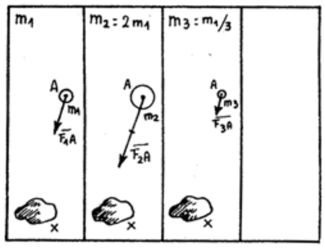
Alumnos: —(¿Otro más?) ¡La tercera parte!

Profesor: —¡De acuerdo! ¿Está bien el dibujo?



Alumnos: —¡Nooo! ¡La dirección no cambia!

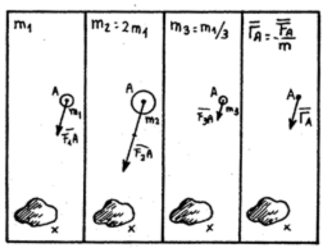
*Profesor (*Corrigiendo): -Entonces, el vector $\overline{F}_{3A}$ puede ser éste. Vemos entonces que la dirección y el sentido de la fuerza actuante sobre cualquier cuerpo que coloquemos en A no cambian. Las intensidades, sí. Veamos las siguientes relaciones:



$$\frac{F_{2A}}{m_2} = \frac{2F_{1A}}{2m_1} = \frac{F_{1A}}{m_1}$$

$$\frac{F_{3A}}{m_3} = \frac{F_{1A}/3}{m_1/3} = \frac{F_{1A}}{m_1}$$

¡Son todas iguales!
De modo que las relaciones vectoriales:



$$\frac{\overline{F_{1A}}}{m_1} = \frac{\overline{F_{2A}}}{m_2} = \frac{\overline{F_{3A}}}{m_3} = \overline{\Gamma_A}$$

permiten definir un vector $\overline{\Gamma_A}$ característico del punto A y del cuerpo X, pero que es independiente del cuerpo que se coloque en A. Este vector es denominado intensidad de campo gravitatorio, en el punto A. Podemos dibujarlo en ese punto, en otro color y en otra escala que $\overline{F}$, pues no es una fuerza. Si repetimos la experiencia en otro punto B, llegaremos a obtener el vector $\overline{\Gamma_B}$ (siempre dejando X invariante; la masa X es la fuente que origina el campo); y, así, en todos y cada uno de los puntos que rodean a X.

Alumno: —¿Qué utilidad tiene conocer $\overline{\Gamma}$?

Profesor: —¡Buena pregunta! Supongamos que conocemos el campo gravitatorio $\overline{\Gamma_P}$ en un punto P y llevamos allí un cuerpo de masa conocida m_o. La fuerza que actúa sobre él cumple la relación:

$$\overline{\Gamma_P} = \frac{\overline{F_{oP}}}{m_o} \quad \text{de modo que} \quad \overline{F_{oP}} = m_o \cdot \overline{\Gamma_P}$$

¡De inmediato podemos determinar qué fuerza experimenta m_o, olvidándonos del cuerpo X! La única precaución que debe tomarse es la siguiente: Dado que la reacción $\overline{F_{oP}}$ actúa sobre el cuerpo que genera el campo, hay que cuidar que esa fuerza no modifique la posición de X, porque entonces también modificaría $\overline{\Gamma_P}$. Por eso, cuando se explora el campo gravitatorio, la masa m_o ha de ser tal que no lo perturbe apreciablemente. Una definición más correcta se obtiene pasando al límite:

$$\overline{\Gamma_P} = \lim_{\Delta m_o \to 0} \frac{\Delta \overline{F_{oP}}}{\Delta m_o}$$

Hasta aquí un desarrollo clásico en los textos de nivel terciario, adaptado al nivel de nuestros alumnos.

Una primera observación, en cuanto a los diálogos, es que se requiere una cuidadosa formulación de las preguntas y consignas: Habrá de estimular la imaginación y el raciocinio; pero, si no se es lo suficientemente concreto, corre el riesgo de transformarse en una adivinanza (¿Qué tengo que responder?).

También puede objetarse el planteo teórico, un tanto artificial, dada la dificultad práctica de medir fuerzas gravitatorias para objetos en escala "no astronómica" y apelando a situaciones estáticas que, en gravitación, nunca son de equilibrio.

Se requiere otra interacción ("clavar los cuerpos al pizarrón") para obtenerlo.

Se podría partir, entonces, de una situación experimental, explorando el campo gravitatorio terrestre, en el cual vivimos. De hecho, nosotros y los objetos que nos rodean somos verdaderos "cuerpos de prueba" que, colocados en distintos puntos, experimentamos fuerzas debidas a la interacción gravitatoria con la Tierra. Sin embargo, por ser tan trivial, cuesta analizarla. Si preguntamos a nuestros alumnos qué fuerzas actúan sobre una tiza que cae, muchos contestarán "Su peso". Al requerir "Y, ¿ por qué pesa?", será más difícil que lo asocien a la interacción con la Tierra que está debajo; contestarán "porque tiene masa", buscando la causa en el objeto, o lo atribuirán a "la fuerza de gravedad" que, en general, no se tiene muy en claro qué significa. Es necesario puntualizar la causa de nuestro peso.

De todas maneras, es posible, definiendo la intensidad de campo gravitatorio como la razón entre la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo colocado en un punto dado y su masa, determinar $\overline{\Gamma}$ en puntos de la superficie terrestre.

$$\overline{\Gamma_A} = \frac{\overline{F_{oA}}}{m_o}$$

Identificando la fuerza gravitatoria con el peso del cuerpo (despreciando los efectos de la rotación terrestre)[1]:

$$\overline{\Gamma}_A = \frac{\overline{F}_{oA}}{m_o} = \overline{g}_A$$

Más difícil es plantear la medición directa del campo gravitatorio terrestre fuera de su superficie. Así como nosotros no podemos sustraernos del campo gravitatorio lunar (causa de las mareas), ningún astronauta, por lejos que haya llegado, pudo "salir" del campo gravitatorio terrestre. Sin embargo, en su viaje, con los motores apagados, aún cerca de la Tierra era notoria la ausencia de "peso". Aparente contradicción: "ingravidez" dentro del campo gravitatorio. La razón es que, en esas condiciones, los astronautas, el vehículo y todo lo que los acompaña están moviéndose libremente, con la misma aceleración; el pasar de una zona a otra del campo gravitatorio los afecta a todos por igual y no hay un "techo" privilegiado de donde colgar un dinamómetro. Lo mismo ocurriría aquí, sobre la Tierra, entre dos o más objetos en caída libre: un dinamómetro indicaría la fuerza de interacción entre dos de ellos, pero no su interacción con la Tierra.

Por eso, no es aconsejable plantear experimentos como: "Colocar un cuerpo de masa m_o a cierta distancia de la superficie terrestre, medir la fuerza gravitatoria que actúa sobre él y hallar luego la relación entre fuerza y masa" para hallar la intensidad de campo, si no se tiene claro el problema experimental que supone tal medición. Es preferible destacar la determinación indirecta de la fuerza, tal como se plantea en algunos ejercicios.

Una última consideración acerca de ciertas expresiones de uso corriente: Suele definirse el campo como "La fuerza gravitatoria por unidad de masa" o la "Fuerza que actúa cuando la masa es 1". Tales expresiones, aunque muy difundidas, no son correctas, pues identifican al campo con una fuerza. También se dice: "El campo es numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre una masa de un kilogramo" y hasta se escribe $"\overline{F} = \overline{\Gamma}, \text{para } m = 1\text{Kg}"$. Es verdad que, trabajando en un mismo sistema de unidades, los valores de ambas magnitudes pueden coincidir; pero, está claro que no son de la misma magnitud ni tienen las mismas unidades. Nuevamente, insistir que el campo está expresado por una razón o relación o cociente entre dos magnitudes, lo que lo hace distinto del numerador. El problema es en todo semejante a la incorrección que implicaría afirmar, por ejemplo, que la velocidad es la distancia que se recorre en la unidad de tiempo: no es correcta esta afirmación.

Ejercicio resuelto
Determinar el vector intensidad de campo gravitatorio, a una distancia r de un punto material de masa m.

---

[1] *En rigor, el vector* $\overline{\Gamma}_A$ *debe definirse como* $\overline{\Gamma}_A = \frac{\overline{F}_{oA}}{\mu_o}$ *(relación entre fuerza y masa gravitatorias); de la identidad* $\mu_o = m_o$ *surge la relación del párrafo anterior y la identidad entre* $\overline{\Gamma}$ y $\overline{g}$. *Dimensionalmente, las unidades de ambas magnitudes coinciden.*

$$[\Gamma] = \frac{[F]}{[\mu]} = \frac{N}{Kg} = \frac{Kg\ .\ m/s^2}{Kg} = \frac{m}{s^2} = [g]$$

Si se hace una analogía con el desarrollo de la electrostática, como carga y masa inercial, no guardan relación fija, no se da la coincidencia anterior.

De acuerdo con lo establecido para la determinación experimental del vector $\overline{\Gamma}$, los pasos a seguir son los siguientes:

a) Colocar en el punto donde quiere hallarse el campo, una masa puntual m_o.
b) Determinar la fuerza gravitatoria que actúa sobre la masa m_o.
c) Hallar la relación entre la fuerza y m_o.

Supongamos que el punto donde queremos hallar $\overline{\Gamma}$ es el punto A. La fuerza que experimentará la masa m_o allí colocada, está dada por su interacción gravitatoria con m. Su dirección es la de la recta que une ambas masas, su sentido hacia m y su intensidad es:

$$F_A = K_G \; . \frac{m \; . \; m_o}{r^2}$$

El vector campo gravitatorio en A tiene la dirección y el sentido de $\overline{F_A}$. Su módulo es:

$$F_A = \frac{F_A}{m_o} = k_G \; . \frac{m \; . \; m_o}{r^2 m_o} = k_G \; . \frac{m}{r^2}$$

En este caso particular, pero frecuente, queda una expresión del campo, en función de la masa que lo genera. Es de hacer notar que, como era previsible, su intensidad no depende de la masa m_o (“exploradora”). Además, corroborando la simetría, todos los puntos situados a la misma distancia r tienen campos de igual intensidad.

La intensidad decrece con el cuadrado de la distancia r. Si se duplica r, el campo se reduce a ¼ de su intensidad original. A grandes distancias, su efecto es cada vez menor, pero no se anula. Al aproximarse a m, la intensidad es creciente; la expresión no está acotada, pero cuando las dimensiones del cuerpo de masa m son comparables a r, pierde su carácter de punto material y la expresión deja de ser válida.

Newton demostró (¡Para ello inventó el cálculo integral!) que un sólido esférico o formado por capas esféricas concéntricas, de densidad uniforme, se comporta igual que un punto material de igual masa, colocando en su centro, para las interacciones con cuerpos fuera del mismo. Por lo tanto, el campo generado por un cuerpo esférico en las condiciones anteriores, cuya masa es m y su radio R, viene dado por:

$$\overline{\Gamma_A} = k_G \; . \frac{m}{r^2} \qquad para \;\; r \geq R$$

En los puntos interiores, el campo decrece. La ley de variación depende de la distribución de su masa; si la esfera es homogénea, lo hace linealmente, anulándose en su centro. (Es de esperar que sea nulo en algún punto interior: Si se recorre un túnel diametral, en ambos extremos el campo tiene sentidos opuestos; si la ley de variación es continua, ha de anularse al menos una vez; por simetría, debe ocurrir en el centro). Esta disminución se ha comprobado en el descenso a los pozos de minas, aunque la Tierra no es homogénea. Para la esfera homogénea:

$$\Gamma_A = k_G \; . \frac{m \; . \; r}{R^3} \qquad para \;\; r \leq R$$

Ejercicio resuelto

Calcular y graficar la intensidad del campo gravitatorio terrestre (R = 6360 Km) a las siguientes distancias de su superficie:

a) h = 0

b) h = R; h = 1,5 R; h = 3 R; h = 59 R. Hacer un gráfico de $\Gamma = \Gamma(h)$.

c) ¿Cómo se completaría el gráfico, si en el interior ($-R \leq h \leq 0$), la densidad fuera homogénea? Ídem, si toda la masa terrestre estuviera en su centro.

Este ejercicio se basa en los resultados del anterior. Sin embargo, aparentemente faltan datos, pues no se da la masa terrestre. De todos modos, un cuerpo colocado en h = 0 está en su superficie y la fuerza gravitatoria que actúa sobre él es igual a su peso.

Por lo tanto:

a) $\Gamma(h=0) = \dfrac{P}{m} = g \cong 9{,}8 \;\; N/Kg$

b) Para otro punto, su distancia al centro es $\Gamma = h + R,$ y la expresión del campo es:

$$\Gamma(h) = k_G \; . \frac{m_T}{(h+R)^2}$$

que, para h = 0 es

$$\Gamma(0) = k_G \; . \frac{m_T}{R^2}$$

Relacionando estas expresiones:

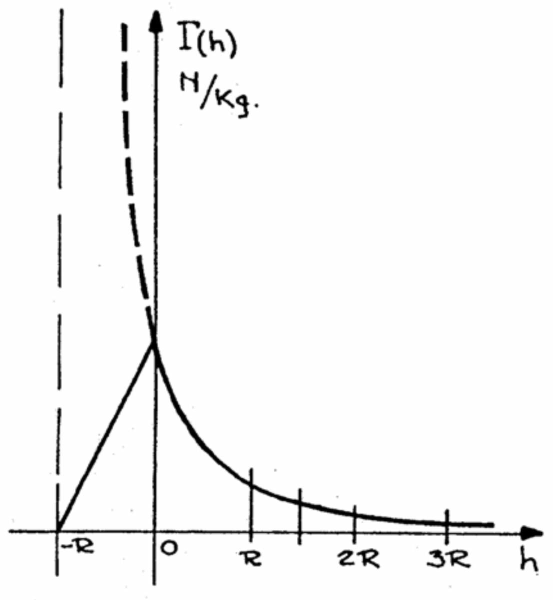
$$\frac{\Gamma(h)}{\Gamma(0)} = \frac{R^2}{(h+R)^2}$$

De modo que:

$$\Gamma(h) = \frac{R^2}{(h+R)^2} \; . \; \Gamma(0)$$

Y se obtiene la siguiente tabla:

Pregunta	**h**	**H + R**	$\left(\dfrac{R^2}{(h+R)^2}\right)$	$\Gamma(N/Kg)$
a	0	R	1	9,8
b	R	2 R	1	2,45
c	1,5 R	2,5 R	4/25	1,568
d	3 R	4 R	1/16	0,613
e	59 R	60 R	1/3600	0,00272



Limitaremos el gráfico a las alturas comprendidas entre el centro de la Tierra (h = -R) y tres radios terrestres, para poder hacerlo en escala lineal.

El valor del campo gravitatorio correspondiente a h = 59 R no podría representarse adecuadamente en esa escala, guardando proporción con los anteriores (a menos de usar escalas logarítmicas). Su interés radica en que a esa distancia, aproximadamente, se encuentra la órbita lunar. Ese valor tiene que coincidir con la aceleración de la Luna en el campo gravitatorio terrestre, calculado antes.

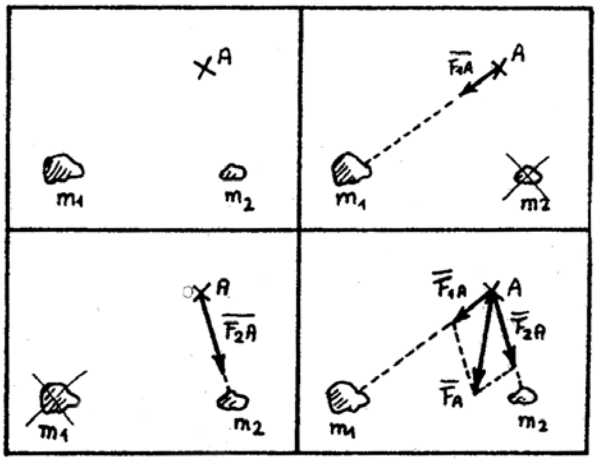
c) En cuanto al campo gravitatorio por debajo de la superficie, la línea de trazo lleno corresponde a la hipótesis de suponer un planeta homogéneo, con densidad uniforme. La línea punteada correspondería a un punto material de la misma masa, colocado en su centro.

Ejercicio resuelto
Determinar en qué punto del segmento que une los centros de la Tierra y la Luna se anula el campo gravitatorio producido por ambos cuerpos. (Datos: Ambas masas y la distancia entre ellas).

El ejercicio nos plantea como paso previo el cálculo del campo producido por un sistema de cuerpos (dos, en cate caso).

Corresponde aclarar que, para el campo gravitatorio, es válido el principio de superposición: El vector que representa el campo gravitatorio en un punto dado puede obtenerse sumando (vectorialmente) los vectores representativos de los campos gravitatorios que producirían los cuerpos dados en dicho punto, determinados sucesivamente para cada uno de ellos como si los restantes no existiesen.

Puntualicemos a nuestros alumnos su significado (el campo producido por uno de los cuerpos se superpone al de los demás, sin modificarlo) y los pasos a seguir en caso que, por ejemplo, se trate de hallar el campo gravitatorio en un punto A, debido a dos cuerpos de masas m_1 y m_2 en posiciones conocidas.



a) Determinar el campo gravitatorio en A, producido por el cuerpo 1 en ausencia de todos los demás (el 2) y obtener el vector $\overline{\Gamma_{1A}}$

b) Determinar el campo en el mismo punto A, debido al segundo cuerpo y prescindiendo de los demás (el 1), (vector $\overline{\Gamma_{2A}}$).

c) Obtener $\overline{\Gamma_A} = \overline{\Gamma_{1A}} + \overline{\Gamma_{2A}}$

Aplicado a la situación concreta del problema, suponiendo que existe un punto P para el cual $\overline{\Gamma_P} = 0$, y llamando x a su distancia al centro de la Tierra, se cumplirá:

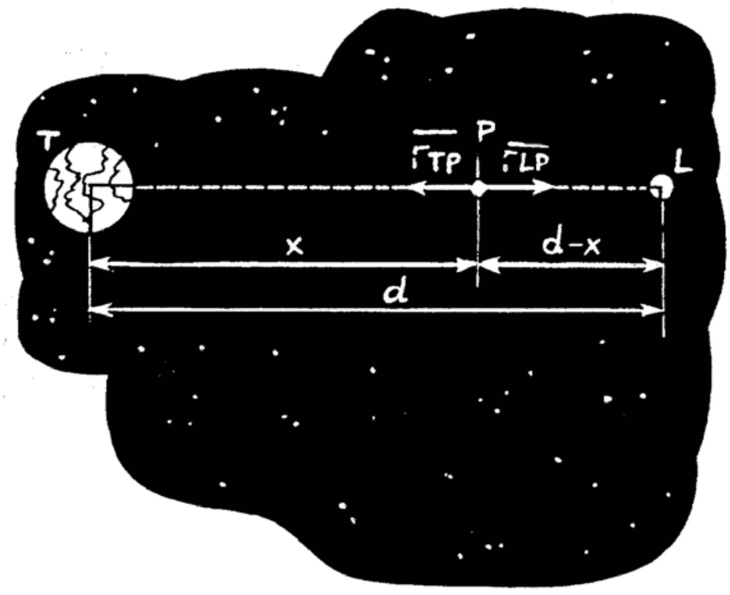
$$\overline{\Gamma_{TP}} + \overline{\Gamma_{LP}} = 0$$

Con lo cual:

$$\overline{\Gamma_{TP}} = -\overline{\Gamma_{LP}}$$

y, además:

$$\Gamma_{TP} = \Gamma_{LP}$$



Llamando d a la distancia entre centros (distancia Tierra-Luna) y utilizando los resultados del primer ejercicio de esta serie, deberá cumplirse:

$$k_G \cdot \frac{m_T}{x^2} = k_G \cdot \frac{m_L}{(d-x)^2} \Rightarrow x^2 \cdot \frac{m_L}{m_T} = (d-x)^2$$

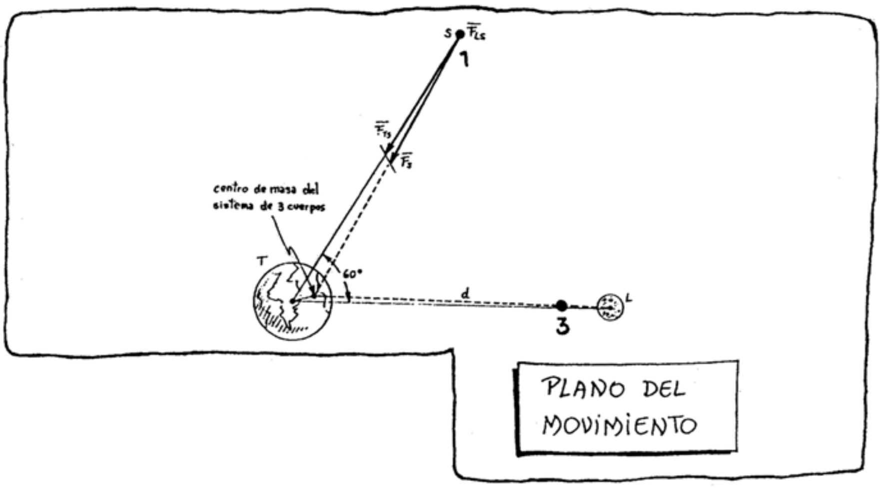
De modo que:

$$x\sqrt{\frac{m_L}{m_T}} = d - x \qquad \text{con } 0 \le x \le d$$

$$\text{Como } \frac{m_T}{m_L} \cong 81 \qquad x \cong 9.(d-x) \qquad x \cong 9/10.d$$

Como la distancia Tierra-Luna es $d \cong 384.000 \text{ Km}$
$x \cong 345.600 \text{ Km}$ y la distancia de P a la Luna $(d-x) \cong 38.400 \text{ Km}$
Como observación, el punto P sería un punto de equilibrio (aunque inestable) para un objeto allí colocado, si la situación fuese estática.

La situación dinámica real es más compleja: Ni la Tierra ni la Luna están fijas sino que giran alrededor del centro de masa común del sistema Tierra-Luna (aunque la Tierra lo hace menos ampliamente). Una nave espacial no quedaría estabilizada en el punto que acabamos de calcular, independientemente de que el análisis sea estático o dinámico. La cuestión de la nave, la Tierra y la Luna constituye un caso del llamado “problema de los tres cuerpos“, estudiado por Lagrange en 1772. Si se usa como referencia un sistema fijo a la recta Tierra-Luna, el estudio de Lagrange demuestra que existen dos puntos de **equilibrio estable** para una nave, ubicados fuera de la línea, Tierra-Luna y a 60° de ángulo. Un objeto puesto allí sin velocidad inicial, queda quieto en relación con ese sistema de referencia.



1. Punto lagrangiano de equilibrio estable en el sistema Tierra-Luna. 3. Equilibrio inestable

En nuestro sistema solar, los asteroides Troyanos ocupan los puntos de Lagrange en la órbita de Júpiter alrededor del Sol. En 1980, el vehículo espacial Voyager 1 se aproximó al planeta Saturno y permitió descubrir nuevos pequeños satélites suyos, entre ellos 1980S13, que adelanta 60°, y 1980S25, que atrasa 60°, ambos en relación con el satélite (ya conocido) Tetis en su órbita alrededor del planeta. Lo mismo ocurre con 1980S6, que adelanta 60° al satélite Dione, también de Saturno. Estos tres constituyen los primeros satélites lagrangianos conocidos.

Ejercicio resuelto

a) Determinar cómo varía el campo gravitatorio de un planeta, al ascender una altura h desde su superficie.

b) Si el radio del planeta es R, analizar qué ocurre para h << R.

c) Aplicarlo para determinar cuánto varía el campo gravitatorio terrestre al ascender un metro desde su superficie.

a) La variación del campo gravitatorio será:

$$\Delta\Gamma = \Gamma_{(R+h)} - \Gamma_{(R)} = k_G \cdot \frac{m}{(R+h)^2} = k_G \cdot \frac{m}{R^2}$$

$$\Delta\Gamma = k_G \cdot m \cdot \frac{R^2 - (R+h)^2}{(R+h)^2 \cdot R^2} = k_G \cdot m \cdot \frac{(2R+h).(-h)}{(R+h)^2 \cdot R^2} \quad \text{(Expresión exacta)}$$

b) Si puede despreciarse h frente a R, también lo será respecto de 2R y a R^2.

$$\Delta\Gamma \cong -k_G \cdot m \cdot \frac{2R}{R^2\, R^2} \cdot h = -k_G \cdot m \cdot \frac{2}{R^3} h$$

Y como:

$$k_G \cdot \frac{m}{R^2} = \Gamma_{(h=o)} = \Gamma_o$$

$$\Delta\Gamma = -\Gamma_o \cdot \frac{2h}{R}$$

c) Al ascender un metro desde la superficie terrestre, es

$$h = 1 \text{ m}$$

$$R \cong 6360 \text{ Km}$$

$$\Gamma_o \cong 9{,}8 \text{N} / \text{Kg}$$

(la llamada aceleración normal de la gravedad es g = 9,80665 m/s).

$$\Delta\Gamma \cong -\Gamma_o \cdot \frac{2h}{R} = -9{,}8 \text{N/kg} \cdot \frac{2.1 \text{ m}}{6{,}36 \cdot 10^6 \text{m}} = -3{,}08 \cdot 10^{-6} \text{N/Kg (3 partes por millón)}$$

Este ascenso de un metro sobre el nivel del suelo provoca una disminución (ver el signo) en la sexta cifra decimal de Γ. Existen dispositivos mecánicos, llamados gravímetros, capaces de ponerla en evidencia (el gravímetro de Hoyt puede detectar variaciones de una parte en 10^7); eran usados en exploración geológica, para detección de yacimientos minerales y de petróleo. Actualmente, los satélites artificiales permiten efectuar estudios gravimétricos con el mismo fin y detectan ínfimas variaciones del campo.

Como curiosidad, esta variación de campo al desplazarse verticalmente un metro, es equivalente al campo gravitatorio producido por una esfera de plomo de 2 m de diámetro (47300 Kg) a 1,2 mm de su superficie.

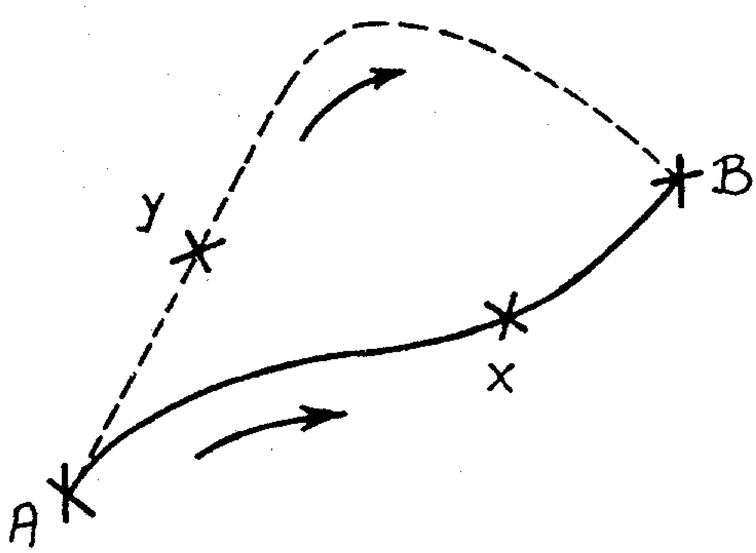
Si se utilizara una balanza muy sensible en la planta baja y en el piso catorce de un edificio, ¿hallaríamos diferencias debidas a los cambios de intensidad del campo gravitatorio terrestre? La respuesta a esta pregunta depende de si las determinaciones son de masa o de peso, esto es, del tipo de balanza que se usa.

Trabajo de las fuerzas gravitatorias. Energía potencial gravitatoria

Al colocar y desplazar un cuerpo material en un campo gravitatorio, actuará sobre él una fuerza $\overline{F_G} = m \, . \, \overline{\Gamma}$ en cada uno de los puntos de su trayectoria, además de todas las otras fuerzas, debidas a otras interacciones, que pueden coexistir con la de gravitación. Si esta fuerza posee una componente en la dirección del desplazamiento, es capaz de realizar **trabajo**.

El campo de fuerzas gravitatorias, cuando la distribución de masa que lo origina es estática, depende sólo de la posición, no del tiempo ni de la velocidad del cuerpo que lo atraviesa ni de otro parámetro:

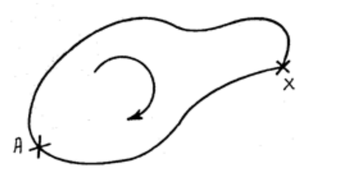
$$\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma} \; (\overline{r})$$



Entre todos los campos de fuerza conocidos y aquéllos imaginables cuya intensidad depende sólo de la posición, algunos de ellos, y específicamente el gravitatorio, tienen la propiedad de que el trabajo de la fuerza de ese campo, que actúa sobre un cuerpo que se desplaza entre dos puntos, no depende de cuál es el camino que une a esos puntos.

Cuando ocurre esto, el campo se llama conservativo (hay campos que no lo son).

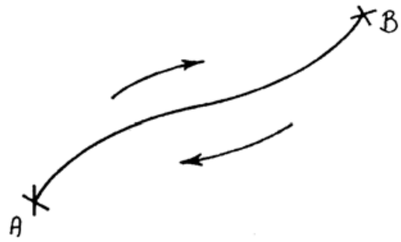
Si el punto de llegada coincide con el de partida,



$$A \cong B \Rightarrow W_{AXA} = 0$$

para todos los caminos posibles.

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es nulo en todo camino cerrado. Note que no mencionamos el trabajo de las demás fuerzas no gravitatorias que pudieran intervenir.



Como:

$$W_{AB} + W_{BA} = 0 \Rightarrow W_{AB} = -W_{BA}$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al ir de un punto al otro, es siempre el opuesto del realizado al volver,

Finalmente, asociada a toda fuerza conservativa, existe una magnitud escalar, función de la posición, llamada **energía potencial**, tal que el trabajo realizado por dicha fuerza al desplazarse de un punto A hacia otro B está dado por la disminución de energía potencial que experimenta el cuerpo.

$$W_{AB} = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P$$

Es posible, entonces, definir una **energía potencial gravitatoria**.

La energía no está definida en forma absoluta, dado que sólo cuentan sus variaciones. Todo valor asignado a la misma presupone y estará referido a un nivel de referencia.

Remarquemos que, en todas las expresiones anteriores, se analiza exclusivamente el trabajo de la fuerza gravitatoria hecha por el campo, sin tener en cuenta las restantes fuerzas de interacción que pudieran existir.

En el desarrollo posterior del tema surge una dificultad: Para obtener la expresión de la energía potencial asignada a un cuerpo que está en el campo gravitatorio producido por una partícula o una esfera, es necesario apelar al cálculo integral, en el que aún nuestros alumnos no habrán incursionado.

Es posible presentar e introducir directamente la expresión, dejando su deducción para futuros estudios, analizando su significado y uso operativo. También es posible verificar que la expresión de la energía potencial responde a una fuerza cuya intensidad varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia o tentar una verificación calculando el trabajo de la fuerza gravitatoria evaluando el área bajo la gráfica F = F (r), como corresponde al trabajo de una fuerza variable. En todos los casos, es necesaria una evaluación de la estrategia a seguir, en función de las características del curso al que va dirigida. Lo importante es remarcar la existencia de la función energía potencial gravitatoria, dependiente de la posición definida por $\bar{r}$, $E_P(\bar{r})$, que permite hallar el trabajo como:

$$W_{AB} = E_P(\overline{r_A}) - E_P(\overline{r_B})$$

Para regiones poco extensas, el campo gravitatorio es constante y paralelo, y así el trabajo para llevar un objeto de un sitio a otro, con velocidades inicial y final iguales depende, en ausencia de otras fuerzas, sólo de la diferencia de altura, aunque las posiciones inicial y final no están en la misma vertical.

$$W_{ext} = -W_{AB} = mg(h_B - h_A)$$

Si un cuerpo sale de un punto A y vuelve al mismo punto, el trabajo de la fuerza peso en todo el recorrido, por más complicado que sea el camino, será siempre cero:

$$W_{AA} = 0$$

- **El nivel cero de energía potencial:**

El cero de energía potencial puede elegirse arbitrariamente; en los casos prácticos sólo intervienen las diferencias.

Cuando resolvemos problemas de caída de objetos, resulta cómodo, a veces, tomar el nivel del suelo como referencia de energía potencial cero. Sin embargo, lo mismo serviría cualquier otro nivel. Un objeto en el suelo tiene energía potencial positiva, con respecto a un nivel todavía inferior. Y, ¿en el centro de la Tierra? Aunque no existan puntos más bajos, nada impide afirmar que un cuerpo allí tiene energía potencial, pues la función potencial sigue siéndolo aunque se le sume una constante.

Cuando escribimos E_p = mgh, adoptamos como nivel cero el punto respecto del cual se miden las alturas, por ejemplo el suelo. Cuando un cuerpo sube, la variación de su energía potencial es positiva.

La variación de energía potencial también puede ser negativa; en ese caso, el cuerpo se está desplazando hacia niveles de menor energía y la fuerza gravitatoria realiza trabajo positivo. Esto ocurre, por ejemplo, al dejar caer libremente un objeto a partir del reposo: el peso hace trabajo positivo y la energía potencial disminuye. Es interesante señalar que esto ocurre independientemente de cuál sea el sentido positivo del eje de coordenadas adoptado.

Hasta ahora se ha considerado el caso de campo gravitatorio constante, lo cual es un caso particular y muy limitado. La situación es la ilustrada en la figura 1, de donde se ha extraído el gráfico de la figura 2. La fuerza es la que actúa sobre un cuerpo de masa m.

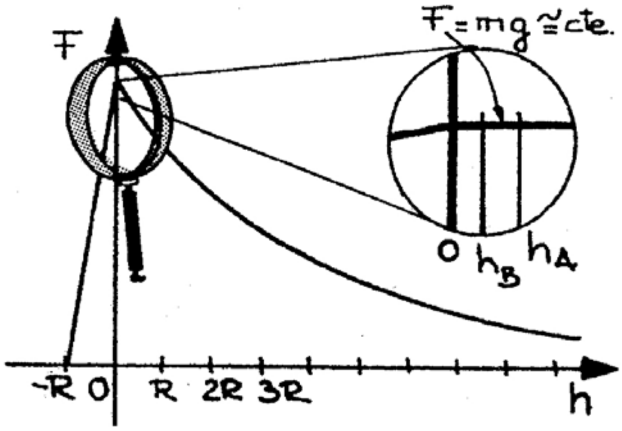


Figura 1. El caso de g constante es una aproximación válida para pequeñas alturas

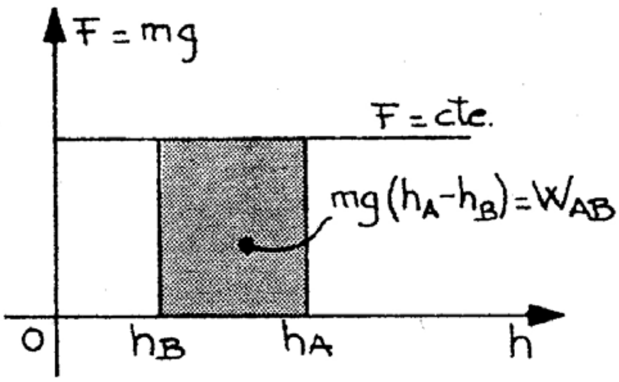


Figura 2

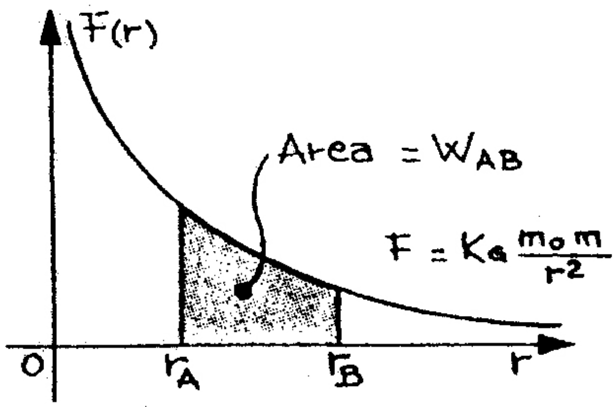
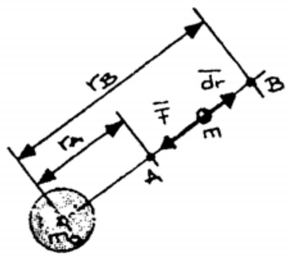


Figura 3

En la figura 2 se muestra también cómo el área bajo la gráfica representa el trabajo de la fuerza gravitatoria. En el caso general, tal como se ilustra en la figura 3, para calcular el trabajo deberá evaluarse el área bajo la curva. La ecuación de la curva es:

$$F_{(r)} = k_G.\frac{m_o.m}{r^2}$$

Y el trabajo para desplazarse en dirección radial desde un punto A hasta otro B, está dado por la expresión:



$$W_{AB} = \lim_{\Delta r \to 0} \sum F_{(r)}\ .\Delta r\ .\cos\widehat{\bar{F}\Delta\bar{r}} = \int_{r_A}^{r_B} F_{(r)} \cos\widehat{\bar{F}\Delta\bar{r}}\ dr$$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} k_G.\frac{m_o.m}{r^2}.\cos\ 180°.dr = -k_G.m_o.m.\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$W_{AB} = -k_G.m_o.m.\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -k_G.m_o.m\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} \qquad \text{llamando} \quad E_p = -k_G.\frac{m_o.m}{r} + C$$

Está claro que estas expresiones de cálculo se han indicado para referencia del docente; de ningún modo se pretende su uso en cursos que aún no tengan las herramientas matemáticas necesarias. Pero, sí puede presentarse el resultado final para su análisis.

La expresión de la energía potencial de un cuerpo de masa m a una distancia r de otro de masa m_o es, entonces:

$$E_p = -k_G \cdot \frac{m_o . m}{r} + C$$

Habitualmente se toma C = 0, de modo que la expresión se reduce al primer sumando. Entonces, con esta elección:

- La energía potencial gravitatoria es siempre negativa.
- La energía potencial crece a medida que aumenta la distancia r.
- Para valores crecientes de r, la expresión toma valores tan cercanos a 0 como se quiera, con lo que:

$$E_p \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Se suele decir que "la energía potencial gravitatoria se hace cero en el infinito"; se entiende que, a una distancia suficientemente grande, los efectos de la interacción gravitatoria podrán ser despreciables. A esa distancia, el trabajo que realice la fuerza gravitatoria cuando quiera alejarse más el cuerpo será despreciable, con lo cual no se modificará más la energía potencial. Como ésta era creciente, habrá alcanzado su valor máximo, que es cero por convención.

Con esta convención, muy usada en astronomía y física atómica, la energía potencial es siempre negativa, aunque sus variaciones, desde luego, puedan tener uno u otro signo.

No deberíamos confundir estos dos hechos: Al alejarnos de la Tierra, disminuye el peso; sin embargo, aumenta la energía potencial, que pasa, por ejemplo, de -100 joules a -90 joules.

Cuando se traslade un cuerpo hasta una distancia donde la fuerza gravitatoria sea despreciable (infinito) desde un punto A del campo, el trabajo del mismo será:

$$W_{AB} = -\Delta E_{pAB} = E_{pA} - E_{pB} = -k_G . \frac{m_o . m}{r_A} - 0$$

La energía potencial de un cuerpo en un punto A del campo gravitatorio es idéntica al trabajo que realiza la fuerza que ejerce el campo, al trasladarlo al infinito.

¿Qué velocidad inicial mínima tendría que tener un proyectil sin cohetes para poder alejarse sin regresar a la Tierra, si no se tienen en cuenta otras interacciones?

La mínima velocidad necesaria le permitiría llegar al punto más alejado con velocidad final nula. Planteando la conservación de la energía, pues no hay otra interacción a considerar:

$$E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2}$$

$$-g.\cancel{m}.R + \frac{1}{2}.\cancel{m}.v_1^2 = 0 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2.g.R}$$

$$v_1 = \sqrt{2.\ 9{,}8 m/s^2 .\ 6{,}36.\ 10^6 m} = 11.\ 165 m/s = 11{,}2 Km/s$$

Por último, considerando el trabajo necesario para un desplazamiento entre dos puntos A y B muy próximos, será:

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -k_G \cdot \frac{m_o.m}{r_A} + k_G \cdot \frac{m_o.m}{r_B} = k_G \cdot \frac{m_o.m}{r_A.r_B}(r_A - r_B)$$

Para
$$r_A \cong r_B$$
$$r_A.r_B \cong r^2$$
$$r_A - r_B = h_A - h_B$$

$$W_{AB} = m.\ k_G \cdot \frac{m_o}{r^2}.(h_A - h_B) = m.\ g.(h_A - h_B)$$

Expresión que coincide con la obtenida al considerar g constante.

Diferencia de potencial gravitatorio. Potencial gravitatorio

Al colocar un cuerpo en un campo gravitatorio, la fuerza que actuará sobre él será proporcional a su masa:

$$\bar{F} = m\bar{g}$$

donde m es la masa del cuerpo afectado por el campo, no la masa que lo origina (la de la Tierra, por ejemplo), que –en lo que sigue– no se menciona.

Por tanto, el trabajo realizado por dicha fuerza, cuando el objeto sea trasladado de un punto a otro, será también proporcional a su masa. Podrá expresarse, entonces:

$$W_{AB} = m.V_{AB}$$

De modo que la relación:

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{m}$$

dependerá de la masa que origina al campo gravitatorio, y de puntos A y B, pero no de la masa m del cuerpo trasladado.

Esta nueva magnitud escalar se denomina **diferencia de potencial gravitatorio**, para el par de puntos dados.

El trabajo puede calcularse a partir de la energía potencial:

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$$

Entonces:

$$V_{AB} = \frac{E_{pA} - E_{pB}}{m} = \frac{E_{pA}}{m} - \frac{E_{pB}}{m} = V_A - V_B$$

y se define el potencial gravitatorio en un punto dado del campo al cociente entre la energía potencial gravitatoria que adquiere un cuerpo allí colocado y la masa del mismo. El potencial estará referido al mismo nivel que se adoptó para la energía potencial: la ventaja es que su valor es sólo función de la posición y no de la masa a trasladar.

De modo que a cada punto de un campo gravitatorio le corresponde un potencial, tal que el trabajo de las fuerzas gravitatorias puede calcularse como:

$$W_{AB} = m.(V_A - V_B)$$

A partir de la expresión de la energía potencial gravitatoria en el campo de una masa m_o, es:

$$E_P = -k_G.\frac{m_o.m}{r} \quad , \quad V = \frac{E_P}{m} = -k_G.\frac{m_o}{r},$$

si se considera $V_\infty = 0$

El potencial gravitatorio es aditivo y se verifica el principio de superposición en el cálculo de potenciales debidos a una distribución de masas[1].

Ejercicio resuelto
Determinar el potencial gravitatorio terrestre, a las siguientes distancias de su superficie: h=O; h=R; h=1,5R; h=3R; h=59R. Graficar V = V(r) entre h=0 y h=3R.¿Cómo se completaría el gráfico, suponiendo la Tierra de densidad uniforme, hasta el centro de la misma? (Radio terrestre: 6360 Km)

El potencial gravitatorio debido a una esfera homogénea, si se hace V = 0, es:

$V = -k_G.\frac{m_T}{r}$ siendo r la distancia al centro.

Para h=0 es r=R.

$$V_{(0)} = -k_G.\frac{m_T}{R} = -k_G.\frac{m_T}{R^2}R = -g.R$$

$$V_{(0)} = -9{,}8N/Kg \;.\; 6{,}36 \;.\; 10^6 m = -6{,}23 \;.\; 10^7 J/Kg$$

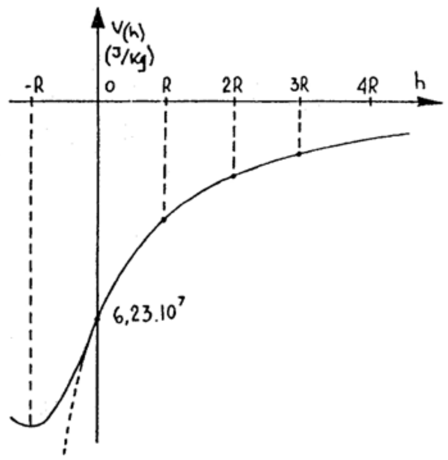
[1] *La palabra "potencial" es, en principio, un adjetivo asociado al sustantivo función; es la función potencial o, más brevemente, la potencial. Sin embargo, es costumbre mencionarla en masculino: el potencial.*

Para otra distancia h es r = R + h

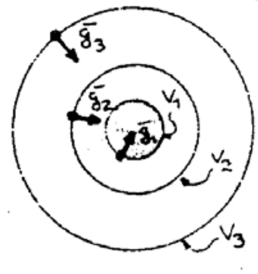
$$V_{(r)} = -k_G \cdot \frac{m_T}{R+h} = -k_G \cdot \frac{m_T}{R} \cdot \frac{R}{R+h} = V_{(0)} \cdot \frac{R}{R+h}$$

Y se obtiene la siguiente tabla:

	h	h + R	$\frac{R}{h+R}$	V (J/Kg)
a	0	R	1	$-6{,}23 \cdot 10^{7}$
b	R	2 R	½	$-3{,}115 \cdot 10^{7}$
c	1,5 R	2,5 R	0,4	$-2{,}492 \cdot 10^{7}$
d	3 R	4 R	¼	$-1{,}56 \cdot 10^{7}$
e	59 R	60 R	1/60	$-1{,}04 \cdot 10^{6}$



Nótese que el potencial es sólo función del módulo de la distancia al centro: A una altura dada respecto de la superficie terrestre, el potencial es constante, si se considera a la Tierra aislada de todo otro cuerpo. De modo que sobre una esfera concéntrica con ella, el potencial no variará.

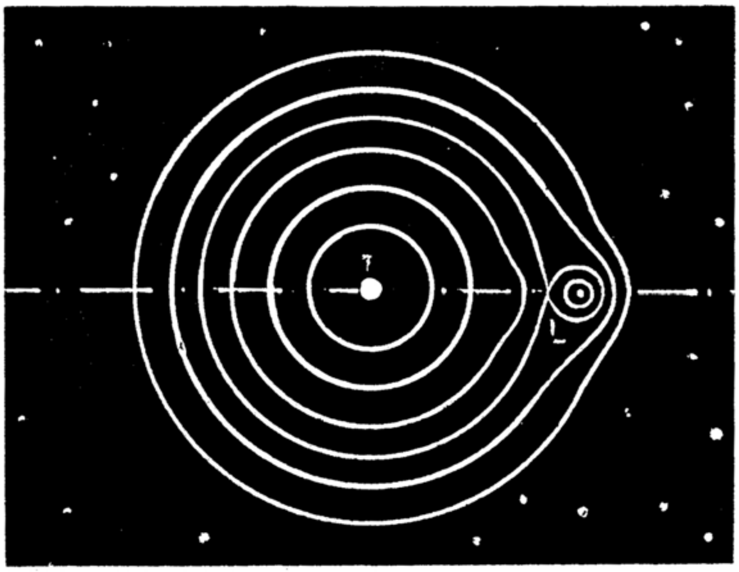


Las superficies tales que V = constante sobre ellas, se denominan equipotenciales. Para una esfera aislada, son esferas concéntricas.

Tales superficies no se cortan entre sí (implicaría dos potenciales diferentes en un mismo punto).

El vector campo gravitatorio no puede tener componentes paralelas a ellas (de lo contrario, esa componente realizaría trabajo al desplazarse sobre la superficie y modificaría el potencial). El campo es siempre normal a dichas superficies.

Si se considera el sistema formado por la Tierra y la Luna, deben sumarse en cada punto los potenciales debidos a cada uno de los cuerpos. Las superficies equipotenciales dejan de ser esferas concéntricas con la Tierra, aunque siguen siendo simétricas respecto al eje Tierra-Luna. Sólo pueden asimilarse a esferas a distancias tan grandes que el sistema Tierra-Luna pueda considerarse como una masa puntual.



El diagrama representa, en forma aproximada y casi en escala, un corte de las superficies equipotenciales del sistema Tierra-Luna.

Una de ellas tiene un punto singular sobre el eje de simetría y pareciera haber allí dos direcciones posibles para el campo. Sin embargo, no hay contradicción, pues allí el campo es nulo.

• “**Profesor, ¿para qué sirve todo esto?”:**

Todos nos hemos encontrado con esta pregunta, ya sea formulada explícitamente, cuando nuestra actitud favorece la comunicación, o bien en forma velada, a través de rostros indiferentes u hostiles.

Las diversas consideraciones acerca del potencial Tierra-Luna, la superficie singular, cuya intersección con el plano del dibujo es una especie de ocho, que sugiere cuál es la trayectoria más económica en un viaje a nuestro satélite natural, suele despertar gran animación e interés en unos pocos alumnos brillantes, emprendedores y propensos a los desafíos intelectuales, e indiferencia y aburrimiento en los demás, quienes se ven muy lejos de viajes espaciales o temas de investigación astronómica.

Deberíamos permanecer sensibles a estas actitudes de los alumnos y no censurarlos por su desinterés sino, en cambio, indagar sus proyectos de vida, dejarlos madurar y, mientras tanto, ofrecerles alternativas más relacionadas con sus intereses inmediatos.

Si se ve usted ante esos hechos, revise la presentación y amenidad de sus propuestas.

• **Relación entre potencial y campo gravitatorio:**

Si suponemos un desplazamiento en una dimensión, Δx, tal que en el mismo pueda considerarse el campo constante, la fuerza gravitatoria realizará una cantidad elemental de trabajo:

$$\Delta W = -\Delta E_p = -m.\Delta V$$

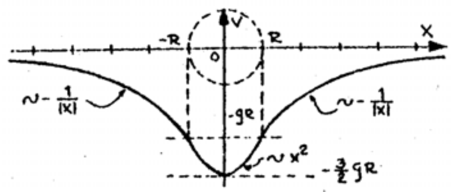
Además:

$$\Delta W = F_x \, . \, \Delta x = m \, . \, g_x \, . \, \Delta x$$

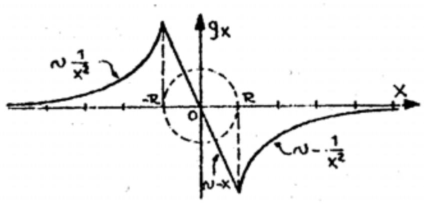
De donde:

$$\cancel{m}.g_x.\Delta x = -\cancel{m}.\Delta V \qquad , \qquad g_x = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{dV}{dx}$$

Considerando el potencial generado por una esfera homogénea, a lo largo de un eje x que pasa por su centro (ver problema anterior), el campo gravitatorio puede obtenerse por derivación:



$$g_x = \frac{dV}{dx}$$



y la gráfica, construida debajo, es similar a la obtenida en un problema anterior, tomando como origen el centro de la esfera.

El signo de g_x, contrario al de x, indica el sentido del campo, dirigido hacia el centro, lo que se corresponde con que la fuerza gravitatoria es de atracción.

Como observación al caso particular de estos diagramas, el potencial generado entre -R y +R sigue una ley cuadrática, de modo que la energía potencial correspondiente a una masa que pudiera desplazarse a lo largo de un diámetro, tendría una expresión del tipo: $E_p = \frac{1}{2}k \, . \, x^2 + V_{(0)}.m$, asociada a una fuerza recuperadora F = -k . x, semejante a la de un resorte lineal que daría origen un movimiento armónico simple. La expresión de la fuerza es:

$$F = m.g_x = -m.g.\frac{x}{R} = -k.x$$

de donde se deduce la constante recuperadora $k = \frac{m.g}{R}$ (g es la intensidad del campo en x = R).

Y el período del movimiento armónico:

$$T = 2.\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}.R}{\cancel{m}.g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Para la Tierra, es $R \cong 6360\ \text{km} \qquad g \cong 9{,}8\,N/Kg$

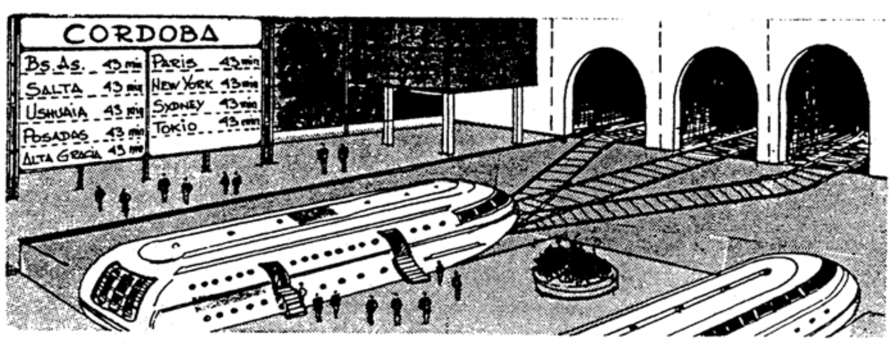
$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{6{,}36\ .\ 10^6\,m}{9{,}8\,N/Kg}} = 2\pi.\sqrt{6{,}49\ .\ 10^5 s^2} = 5061\ s$$

$$T = 1h\ \ 24\,min\ \ 21s$$

ACTIVIDAD 0

Si la Tierra fuera homogénea o pudiera hacerse un túnel diametral, y no hubiera rozamientos, un objeto dejado en libertad en uno de sus extremos, llegaría al otro en un tiempo T/2 = 42 min 11s. Puede demostrarse que este tiempo es el mismo para cualquier túnel que una dos puntos de la superficie terrestre, si se recorre libremente, con rozamiento despreciable.

¿Con qué velocidad pasaría por el centro de la Tierra dicho objeto?
¿Tendría energía potencial en dicho punto?



Analice estas preguntas; obtendrá la respuesta al final del libro.

Satélites artificiales

En relación con la gravitación, los satélites constituyen un fuerte elemento motivador. Estimule y oriente las inquietudes de sus alumnos; se sorprenderá de la información que consigan y que aporten. Incentívelos para que observen el cielo; en una noche clara, lejos de las luces de la ciudad (y aún en ella), es posible detectar alguno, hasta verlo desaparecer en el cono de sombra de la Tierra.

Trataremos de sintetizar las respuestas a algunos interrogantes que pueden plantearse, que pueden ampliarse a la luz del contenido de estos cursos y de la bibliografía existente.

- **¿Qué es un satélite?**

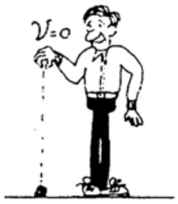
Un satélite es un cuerpo que gira en el campo gravitatorio de otro (planeta) de masa mucho mayor. En rigor, por tratarse de un sistema de dos cuerpos, ambos giran en torno al centro de masa común. Es el caso de la Luna, satélite natural de la Tierra, ambos juegan al “fideo fino”

en torno a un punto situado a 4700 Km del centro de la Tierra, vinculados por la interacción gravitatoria (ese punto se encuentra a una fracción 60/81 del radio terrestre respecto de su centro, es decir, en su interior). No es apreciable en los satélites artificiales, cuya masa es despreciable frente a la de la Tierra. Éstos han sido puestos en órbita por el hombre, comenzando por el Sputnik I, el 4 de octubre de 1957, hasta el día de hoy.

- **¿Qué forma tiene la órbita y cómo se mantiene el satélite en ella? ¿Por qué no cae?**

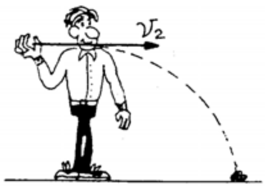
En especial esta última pregunta es la que inquieta a nuestros alumnos y es fácil de comprender la dificultad: El movimiento del satélite contradice nuestra experiencia sensible, pues se espera que un cuerpo "libre" y sin apoyo alguno caiga hasta llegar a la superficie de la Tierra.

Una demostración sencilla tal vez pueda guiarnos hacia la comprensión del fenómeno.

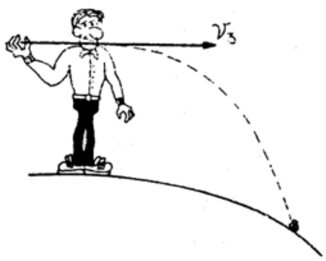


a) Tome una tiza y déjela en libertad desde cierta altura. Haga observar la trayectoria.
b) Indague sobre la forma de la trayectoria (rectilínea), el tipo de movimiento (variado) y la causa de la caída (el peso de la tiza, consecuencia de su interacción con la Tierra, que está debajo). Haga notar que partió del reposo. Puede esquematizarlo en el pizarrón, como una secuencia.

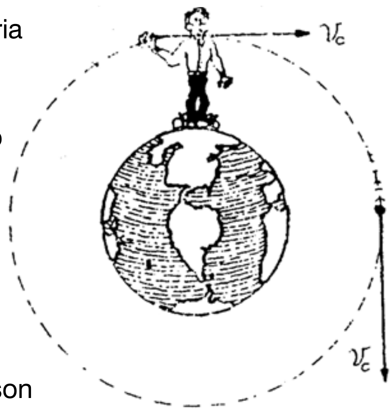
c) Lance ahora la tiza horizontalmente, con una velocidad inicial relativamente pequeña, desde la misma altura, y haga observar la nueva trayectoria.
d) Marque el punto del impacto con el piso y muestre su alejamiento respecto a la trayectoria anterior. Destaque: La tiza con velocidad inicial horizontal **no cae verticalmente**.



e) Repita la experiencia anterior, incrementando el módulo de la velocidad inicial de la tiza.
f) Nuevamente, la trayectoria no es un segmento de vertical. El punto de llegada al piso está más alejado.



g) Imaginando una Tierra esférica lisa, sin obstáculos, habrá cierta distancia a la cual la curvatura se hace apreciable. Muestre que la tiza llegará al piso no sólo más lejos sino "más abajo".



h) Por último, llévelos a imaginar que, para cierta velocidad inicial horizontal, la tiza seguirá la curvatura terrestre, en una trayectoria paralela al piso. En esas condiciones, pasará nuevamente por el punto de partida con la misma velocidad con que fue lanzada y, si no se le modifica su energía, seguirá repitiendo el ciclo una y otra vez. ¡La tiza está en órbita! En perpetua caída, se acelera hacia un piso al que no puede acercarse. Claro está que este experimento no es realizable: La Tierra no es esférica, sus irregularidades (aunque pequeñas en relación con su radio) son suficientes para detener a la tiza; y el rozamiento con la atmósfera, a la altísima velocidad necesaria, la frenaría enseguida. Pero, fuera de la atmósfera, sin obstáculos, es perfectamente posible, con tal de conseguir la velocidad adecuada.

- **¿Por qué se utilizan cohetes para poner un satélite en órbita?**

Un satélite en la superficie terrestre tiene una cierta energía potencial y energía cinética nula respecto a la misma (aunque puede tener cierta velocidad respecto a las estrellas fijas, por participar de los movimientos de la Tierra).

Para ponerlo en órbita se requiere:

- Incrementar su energía potencial, hasta el valor correspondiente al radio orbital.
- Incrementar su energía cinética, hasta el valor adecuado según la velocidad requerida en el punto donde comienza a describir la órbita correcta, o punto de inyección.

En la tobera del cohete se libera la energía química almacenada en los combustibles, transformándose en energía cinética de los gases expulsados, y en energía mecánica del cohete y su carga.

Podría pensarse también en un mecanismo de lanzamiento (cañón, catapulta) que le suministrara toda la energía necesaria desde el instante de lanzamiento, como energía cinética. En esas condiciones, la velocidad requerida sería tal que el rozamiento con la atmósfera terrestre daría lugar a una elevación de temperatura que fundiría sus materiales, amén de la pérdida de energía correspondiente. Además, la trayectoria elíptica sería interceptada nuevamente por la Tierra o la atmósfera.

El uso de un cohete en varias etapas permite superar las capas atmosféricas a una velocidad suficientemente baja, para minimizar el efecto del rozamiento. Además, permite lograr la velocidad y altura deseadas con menor peso y combustibles, pues al fin de cada etapa se desprende parte de la estructura y se reduce la masa a acelerar en la etapa siguiente.

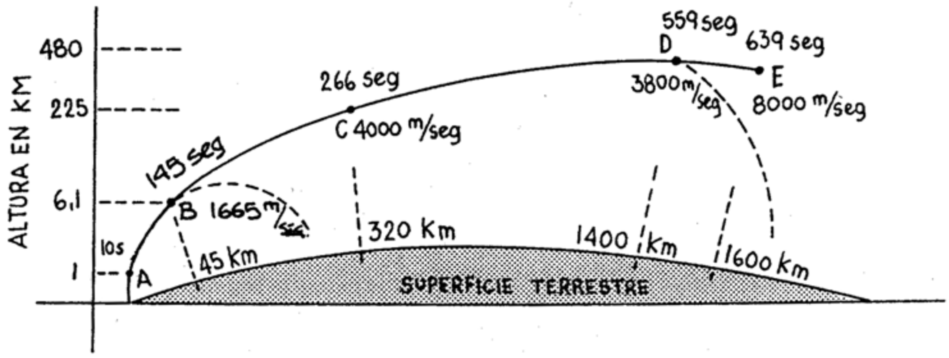
A modo de ejemplo, se detallan las características de un cohete Vanguard, que fuera empleado para poner en órbita satélites geofísicos.

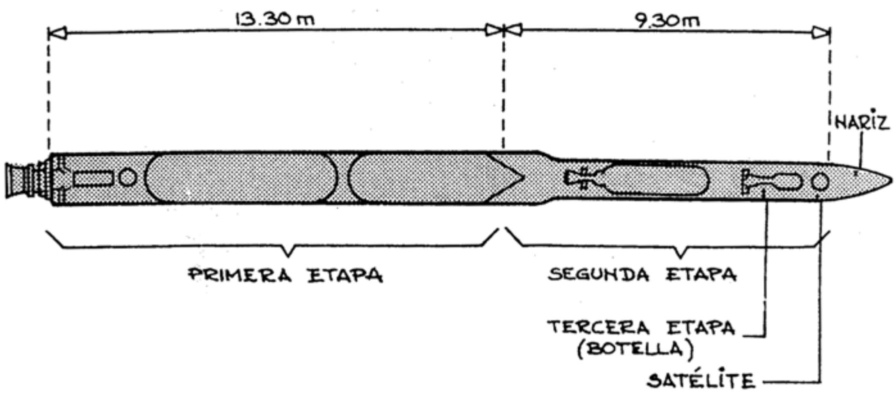
En su conjunto, se asemeja a un tótem o lápiz, de 22 m de longitud. Su masa, incluyendo el combustible, es de unos 10000 Kg.

- *Primera etapa:* Un cohete Viking mejorado, de 13,3 m de longitud y 1,15 m de diámetro máximo. En una cámara de combustión se produce la reacción entre oxígeno líquido y querosene, mezclados mediante turbinas que se ponen en marcha con helio. Al expeler los gases, se obtiene una fuerza de retropropulsión de 12 toneladas.
- *Segunda etapa:* Un cohete Aerobee, de 9,3 m de longitud y 80 cm de diámetro. Es propulsado mediante ácido nítrico fumante y dimetil hidracina, que provee una fuerza de empuje de 3 toneladas.
- *Tercera etapa:* De 1,5 m de longitud, propulsada por combustible sólido que permite alcanzar una fuerza de empuje de 1,1 toneladas.

El satélite está unido a esta última. El conjunto remata en una nariz cónica de amianto y tungsteno, que protege el extremo de las altas temperaturas (600°C) producidas por la fricción de la atmósfera, que es expulsada al llegar a las regiones donde la densidad del aire es reducida.

El esquema muestra el desarrollo del lanzamiento.





En la primera etapa, comienza el ascenso verticalmente hasta unos 1,5 Km de altura, inclinándose luego hasta llegar a los 58 Km con un ángulo de 45°. Allí se agota el combustible del primer cohete y se desprende su estructura, que cae a Tierra.

Se enciende entonces la segunda etapa, que incrementa su velocidad hasta unos 4Km/s (aproximadamente, 15000 Km/h) a 225 Km de altitud.

A partir de ese momento, sigue moviéndose por inercia hasta alcanzar una altura de 480 Km, que es la prevista para la órbita, en dirección casi horizontal. Su velocidad es de unos 3,8 Km/s. Allí se desprende la estructura de la segunda etapa, que cae.

Se enciende entonces la tercera etapa, cuyo objeto es incrementar la energía cinética hasta llegar a la velocidad prevista, manteniendo altura constante. Al llegar a los 8 Km/s se agota el combustible. El sistema está en órbita, en el punto de inyección.

Por último, un dispositivo mecánico (resorte) separa la estructura de la tercera etapa, del satélite propiamente dicho, si bien ambos siguen la misma trayectoria.

Todo el proceso tiene lugar en poco más de diez minutos.

- **¿Qué ocurre si la velocidad de inyección no es la adecuada?**

La velocidad de inyección determina la forma de la trayectoria, que siempre será una cónica si se considera exclusivamente el campo gravitatorio terrestre (en rigor, es influida por los restantes cuerpos celestes, en particular la Luna y el Sol).

Si la energía en el punto de inyección es inferior a la de escape, el satélite describirá una elipse (en particular, una circunferencia, para una única velocidad determinada).

Si la energía total iguala a la de escape, describirá una parábola; mientras que, si la supera, recorrerá una rama de hipérbola. En estos casos, el satélite no regresa.

- **¿Qué utilidad tiene un satélite artificial?**

Los satélites han brindado y brindarán servicios que eran insospechados hasta hace pocos años. Han producido una revolución en la investigación y en la tecnología, en las comunicaciones, la meteorología, geodesia, navegación y biología. Toda lista de aplicaciones será forzosamente incompleta pero, a continuación, se citan algunas:

- Determinación precisa de la forma de nuestro planeta, por los movimientos observados.
- Relevamiento fotográfico del relieve, con aplicaciones geológicas (descubrimiento de estructuras y yacimientos), biológicas (distribución de áreas verdes, biología marina) y estratégicas (la nitidez de las fotografías impresiona; la observación desde el satélite no reconoce fronteras). Con sensores infrarrojos, hasta pueden contar cabezas de ganado.
- Proporcionar información sobre las características de la alta atmósfera: temperatura, presión, densidad, etcétera.
- Reconocimiento del tipo y distribución de las nubes que rodean la Tierra.
- Detectar la gestación de una tempestad y seguir su evolución. Prevención de tornados, huracanes y tifones.
- Seguimiento y fotografía de las corrientes oceánicas.
- Mejorar los pronósticos meteorológicos.
- Ayuda a la navegación marítima y aérea, mediante señales de radio de alta frecuencia; permiten determinar posiciones con un error del orden de 50 metros, sin necesidad de sextantes ni otros antiguos instrumentos de observación.
- Realizar retransmisiones de televisión, con recepción en todo el planeta.
- Establecer radioenlaces entre dos localidades cualesquiera.
- Cuantificar los intercambios de radiación en la atmósfera y el balance energético para nuestro planeta.
- Salvar el efecto de filtro de la atmósfera y la geocorona en el estudio de la radiación gamma y ultravioleta proveniente del Sol y las estrellas.
- Analizar la influencia de la radiación sobre seres vivos animales y vegetales, y los efectos de la falta de peso aparente.
- Hallar yacimientos, por variaciones gravimétricas y radiactivas.

Ejercicio resuelto
Se quiere poner en órbita un satélite de 100 Kg, a una altura de 600 Km sobre la superficie terrestre. Calcular:
a) La velocidad de inyección necesaria para una órbita circular.
b) El período de tal satélite.
c) La energía que hay que entregarle para ponerlo en órbita.

a) El satélite en órbita circular tendrá una aceleración dirigida hacia la Tierra, por efecto de la interacción gravitatoria, de modo que –por la segunda ley de Newton–:

$$\sum F = m_s . a_s = m_s . \frac{v^2}{r}$$

Por la ley de gravitación:

$$\sum F = k_G . \frac{m_T . m_S}{r^2}$$

E, igualando:

$$m_s . \frac{v^2}{r} = k_G . \frac{m_S . m_T}{r^2} \quad , \quad v^2 = k_G . \frac{m_T}{r} = k_G . \frac{m_T}{R^2} . \frac{R^2}{r} = g_o . \frac{R^2}{r}$$

De modo que la velocidad necesaria es:

$$v = \sqrt{g_o . \frac{R^2}{r}}$$

con

$$g_o \cong 9{,}8 m/s^2$$

$$R \cong 6{,}36.10^6 m$$

$$r \cong 6{,}96.10^6 m$$

$$v \cong \sqrt{9{,}8 m/s^2 . \frac{(6{,}36.10^6 m)^2}{6{,}96.10^6 m}}$$

$$v \cong 7546 \ m/s$$

Destacar: No depende de la masa del satélite.

b)

$$T = \frac{2 \ \pi \ r}{v} = \frac{2 \ . \ \pi \ . \ 6{,}96 \ . \ 10^6 m}{7546 \ m/s} = 5795 \ s = 1{,}61 \ h$$

c) El satélite pasará de un estado de energía E_1 a otro estado E_2; el incremento necesario será:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (m.V_2 + E_{c_2}) - (m.V_1 + E_{c_1}) = m.(V_2 - V_1) + (E_{c_2} - E_{c_1})$$

Suponiendo $E_{c_1} = 0$ (parte del reposo en una Tierra en reposo):

$$\Delta E = m.k_G.m_T.\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{2} m.v^2 \qquad \text{recordar}: k_G.m_T = g_o.R^2$$

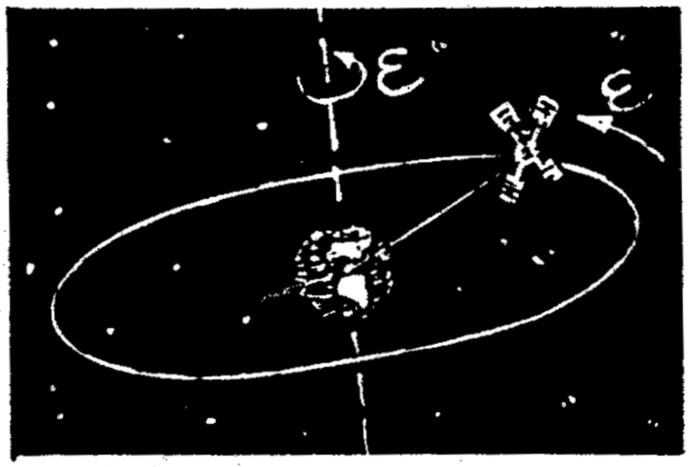
$$\Delta E = m.\left(\frac{g_o.R^2}{r} - \frac{g_o.R^2}{r} + \frac{1}{2}\frac{g_o.R^2}{r}\right) = m.g_o.R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2.r}\right)$$

$$\Delta E = 100 \ Kg \ . \ 9{,}8 m/s^2.(6{,}36 \ . \ 10^6 m)^2.\left(\frac{1}{6{,}36 \ . \ 10^6 m} - \frac{1}{2 \ . \ 6{,}96 \ . \ 10^6 m}\right)$$

$$\Delta E = 3{,}39 \ . \ 10^9 J$$

En rigor, debería suministrársele más energía, para compensar las pérdidas por rozamiento experimentadas al atravesar la atmósfera. Si la plataforma de lanzamiento está en la zona ecuatorial, puede aprovechar la energía cinética debida a la rotación, del orden de 10^7 J[1].

Ejercicio resuelto
Un satélite para comunicaciones debe permanecer "fijo" sobre un punto del planeta. Determinar a qué distancia de su superficie deberá ubicarse, y en qué punto o puntos.



El satélite geosincrónico gira a la misma velocidad que la Tierra y, en consecuencia, permanece fijo respecto de ella.

Dado que la Tierra tiene un movimiento de rotación, para aparentar estar "fijo", el satélite deberá girar alrededor del eje terrestre, a la misma velocidad angular; por otra parte, el plano de la órbita debe pasar por el centro de la Tierra. Luego, debe moverse en el plano ecuatorial.

Su velocidad angular será:

$$\omega = \omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} 1/s$$

Del problema anterior:

$$v^2 = g_o \cdot \frac{R^2}{r} \qquad \text{y como } v = \omega \cdot r$$

$$\omega^2 \cdot r^3 = g_o \cdot R^2 \qquad r = \sqrt[3]{\frac{g_o\, r^2}{\omega^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}36 \cdot 10^6 m)^2}{(7{,}27 \cdot 10^{-5} 1/s)^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 m = 42200 \text{ Km}$$

---

[1] *Este valor se obtiene al considerar una masa de unos 100 Kg y aplicar la fórmula* $\frac{1}{2} mv^2$.
La velocidad es $v = \omega . r$, $\omega = 2\pi / \text{día}$ *y r=6700 Km.*

y la distancia a la superficie:

$h = r - R = 42200\ Km - 6360\ Km = 35840\ Km$

La velocidad orbital:

$$v = \omega\ .\ r \cong 7{,}27\ .\ 10^{-5}\ 1/s\ .\ 4{,}22\ .\ 10^{7}\,m = 3070\ \ m/s = 3{,}07\ \ Km/s$$

Éste es el caso de los satélites geoestacionarios, como el *Syncom*.

SATÉLITES PLANETARIOS				
Nombre		Distancia media al planeta (km)	Período sidéreo (días terrestres)	Año de su descubrimiento
Tierra:	Luna	384.400	27,3	
Marte:	Fobos	9.400	0,32	1877
	Deimos	23.500	1,26	1877
Júpiter:	V	181.000	0,50	1892
	Io (I)	421.600	1,77	1610
	Europa (II)	670.800	3,55	1610
	Ganímedes (III)	1.070.000	7,16	1610
	Calisto (IV)	1.880.000	16,69	1610
	VI	11.500.000	251	1904
	VII	11.800.000	260	1905
	X	11.800.000	264	1938
	XII	21.000.000	631	1951
	XI	22.500.000	693	1938
	VIII	23.500.000	739	1908
	IX	23.700.000	758	1914
Saturno:	Jano	60.000	0,75	1966
	Mimas	185.000	0,94	1789
	Encélado	238.000	1,37	1789
	Tetis	295.000	1,89	1684
	Dione	377.000	2,74	1684
	Rea	527.000	4,52	1672
	Titón	1.220.000	15,9	1655
	Hiperión	1.480.000	21,3	1848
	Iapeto	3.560.000	79,3	1671
	Febe	12.950.000	550	1898
Urano:	Miranda	125.000	1,4	1948
	Ariel	192.000	2,52	1851
	Umbriel	267.000	4,14	1851
	Titania	438.000	8,71	1787
	Oberon	586.000	13,46	1787
Neptuno:	Tritón	353.000	5,88	1846
	Nereida	5.560.000	360	1949

Para sintetizar lo expuesto, le sugerirnos una serie de problemas a resolver. Abarcan planteos conceptuales, ejercicios numéricos, confección de gráficos en escalas logarítmicas, diagramas polares y ejemplos de cálculo gráfico-numérico. Las soluciones se encontrarán al final del capítulo. Le sugerimos comenzar por la:

ACTIVIDAD 1

Conociendo la medida del radio lunar (1720 km) y su masa ($7{,}3 \cdot 10^{22}$ Kg), calcular:

1.1. La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna.

1.2. ¿Cuánto pesa una roca, cuya masa es 6 kg, colocada en un punto de dicha superficie?

1.3. ¿Cuánto pesará la Luna en el campo gravitatorio de la roca, para la misma posición anterior?

1.4. Un astronauta y su equipo pesaban 120 Kgf en la Tierra. La escalerilla del módulo lunar fue diseñada para soportar una fuerza máxima de 50 Kgf (por razones de economía, una escalera más robusta tendría mayor masa a transportar). ¿Podrá descender confiadamente el astronauta, al llegar a nuestro satélite?

ACTIVIDAD 2

Analizando el lanzamiento horizontal de una tiza (caso planteado en el tema de los satélites artificiales) y suponiendo una Tierra perfectamente esférica, homogénea y sin atmósfera, ¿qué velocidad inicial (horizontal) tendría que dársele a la tiza para que describiera una órbita circular a 2 m de la superficie? ¿Cuál sería su período? (Comparar este último con el del objeto que atraviesa la Tierra por un túnel).

ACTIVIDAD 3

En dos vértices opuestos de un marco rectangular rígido, de masa despreciable y en reposo, cuyos lados miden 3 m y 4 m, se colocan dos cuerpos de masas $m_1 = 100$ Kg y $m_2 = 200$ Kg, respectivamente, que pueden considerarse puntuales. Se pide:

3.1. Determinar el campo gravitatorio que el sistema genera en el vértice libre A, más próximo a m_1.

3.2. ¿Qué fuerza ejerce el campo gravitatorio sobre un cuerpo de masa $m_o = 2$ Kg colocado en A?

3.3. Determinar el potencial gravitatorio del punto A (Considerar $V_\infty = 0$).

3.4. Calcular qué trabajo realiza el campo, cuando se traslada al cuerpo de masa m_o, desde el vértice A, hasta el vértice opuesto B.

ACTIVIDAD 4

Un manual de astronomía suministra la siguiente información para algunos de los satélites planetarios conocidos:

Planeta	Satélite	Distancia al centro del planeta (km)	Período sidéreo (días terrestres)
Júpiter	V	181.000	0,50
	Io (I)	421.600	1,77
	Europa (II)	670.800	3,55
	Ganímedes	1.070.000	7,16
	Calisto (IV)	1.880.000	16,69
	VI	11.500.000	251
	VII	11.800.000	260
	X	11.800.000	264
	XII	21.000.000	631
	XI	22.500.000	693
	VIII	23.500.000	739
	IX	23.700.000	758
Saturno	Jano	60.000	0,75
	Mimas	185.000	0,94
	Encélado	238.000	1,37
	Tetis	295.000	1,89
	Dione	377.000	2,74
	Rea	527.000	4,52
	Titón	1.220.000	15,9
	Hiperión	1.480.000	21,3
	Iapeto	3.560.000	79,3
	Febe	12.950.000	550
Urano	Miranda	125.000	1,4
	Ariel	192.000	2,52
	Umbriel	267.000	4,14
	Titania	438.000	8,71
	Oberon	586.000	13,46
Neptuno	Tritón	353.000	5,88
	Nereida	5.560.000	360

4.1. Representar en un diagrama doble logarítmico la distancia de cada satélite al centro del planeta respectivo, en función del período de revolución.
4.2. Hallar una función que relacione el período y la distancia (Tercera ley de Kepler).
4.3. Mostrar que la relación r^3/T^2 es una constante para el conjunto de satélites de un mismo planeta: Divida el cubo del número de la primera columna por el cuadrado del número de la segunda columna, en cada renglón. Hallará que el cociente es constante para cada planeta
4.4. Relacione estas constantes con la masa de cada planeta.

(Pistas: $F = k_G.m_1.m_2/r^2$; $F = m_2.a$; $a = \omega^2.r$; $\omega = 2\pi/T$).

ACTIVIDAD 5

Un satélite, cuya masa es 2000 Kg, se encuentra en órbita alrededor de la Tierra. Al pasar por encima de distintos puntos de la superficie (A_1, A_2, A_3...) distanciados entre sí 22°30', se ha determinado su altura (en la vertical correspondiente a los mismos) y su velocidad numérica. Los valores obtenidos se encuentran en la tabla.

Punto	Altura h_i (Km)	Distancia al centro $R_i = R_T + h_i$ (Km)	Velocidad V_i (Km/s)
A_1	600	6960	8,485
A_2	803	7163	8,293
A_3	1365	7725	7,792
A_4	2172	8532	7,142
A_5	3100	9460	6,472
A_6	4028	10388	5,866
A_7	4835	11195	5,376
A_8	5398	11758	5,051
A_9	5600	11960	4,938
A_{10}	5398	11758	5,051
A_{11}	4835	11195	5,376
A_{12}	4028	10388	5,866
A_{13}	3100	9460	6,472
A_{14}	2172	8532	7,142
A_{15}	1365	7725	7,792
A_{16}	803	7163	8,293
$A_{17} \cong A_1$	600	6960	8,485

5.1. En un diagrama como el que aquí incluimos, que representa a la Tierra en una escala de 200 Km/mm (1:2.10^8), represente las sucesivas posiciones del satélite.

5.2. Graficar la trayectoria aproximada del satélite.

5.3. Representar el vector velocidad $\overline{v_i}$ en cada punto A_i, en escala adecuada.

5.4. Analizar la forma de la trayectoria. Obsérvese que se trata de una elipse (recordar la primera ley de Kepler). Si la Tierra se encuentra en uno de los focos, determinar la posición del otro.

5.5. Verifique la suposición anterior, hallando las sumas de distancias a los focos, para cada posición del satélite.

5.6. Calcular las energías potencial E_{pi} y cinética E_{ci} del satélite, en cada punto A_i, (Puede confeccionar una tabla similar a la anterior).

5.7. Determinar las posiciones de máxima y mínima energía potencial; ídem, cinética. Observe las características del vector velocidad en esos puntos.

5.8. Calcular la energía mecánica en cada punto, a partir de los valores anteriores. ¿En qué medida se cumple la conservación de la energía?

5.9. Representar en un mismo gráfico la energía potencial y la energía cinética del satélite, en función de la altura respecto a la superficie terrestre. Sumar gráficamente ambas curvas.

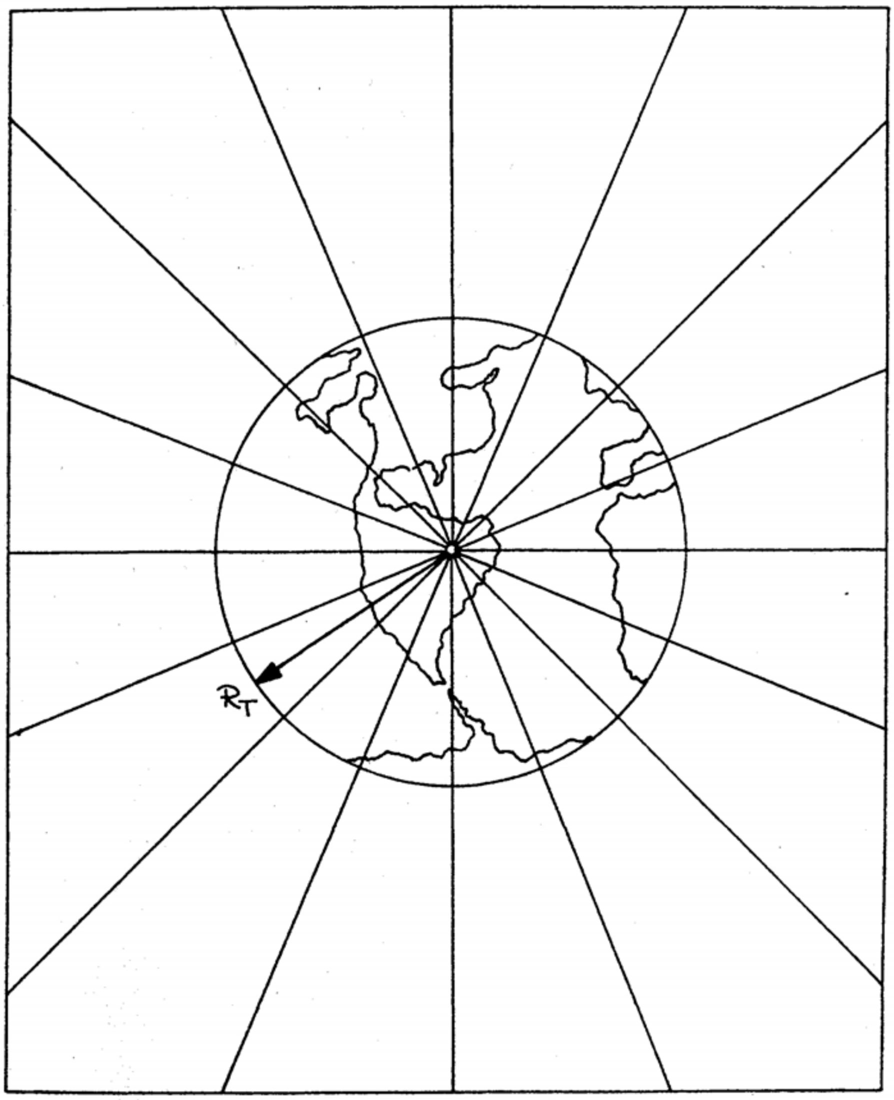


Diagrama en escala 1mm: 200 Km de nuestro planeta. Note el espesor de la atmósfera, comparable a la pelusa de un durazno. El 90% del aire está a menos de 100 Km de altura; a 500 Km, el resto es astronáuticamente insignificante.

ACTIVIDAD 6

Un vehículo espacial, de 10000 Kg se aproxima a la Tierra. Para las siguientes distancias a su centro: 63600 Km, 57200 Km, 44700 Km, 38200 Km, 31800 Km, 25400 Km, 19100 Km, 15900 Km y 12700 Km.

6.1. Calcular la intensidad de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el mismo.

6.2. Representar gráficamente F = F(r), en escalas lineales (Usar papel milimetrado).

6.3. ¿Qué representa el área bajo la gráfica? (Note que la fuerza es variable).

6.4. ¿Se puede considerar que la fuerza gravitatoria es constante en alguna zona?

6.5. Calcular, por medio de la gráfica del inciso 2, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el vehículo, cuando se traslada desde una distancia de 38200 Km hasta 31800 Km.

6.6. Verificar el resultado anterior, por medio del concepto de potencial gravitatorio.

ACTIVIDAD 7

Responda verdadero o falso:

7.1. Si se reemplaza a un satélite artificial por otro objeto cualquiera de la misma masa y se lo deja en el mismo lugar que ocupaba el satélite, y con la misma velocidad y dirección, el nuevo objeto mantiene la misma órbita.

7.2. Si se reemplaza a un satélite artificial por otro objeto cualquiera, de masa algo mayor, con la misma posición, velocidad y dirección que tenía el satélite, mantiene la misma órbita.

7.3. Ídem, con masa menor.

7.4. La intensidad del campo gravitatorio producido por un cuerpo en un punto, depende no sólo de la masa y de la forma de dicho cuerpo, sino también de la masa de los objetos que se coloquen en ese punto.

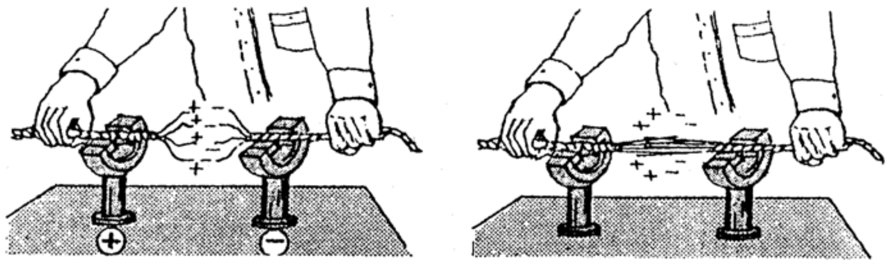
SEGUNDA SECCIÓN.
FUERZAS ELECTROSTÁTICAS

En esta sección pretendemos encarar el estudio de los fenómenos electrostáticos, que se manifiestan mediante interacciones de características diferentes a las gravitatorias, pero que pueden describirse de modo similar. Se utilizará el concepto de carga eléctrica, la ley que describe la interacción electrostática (ley de Coulomb) y el modelo de campo electrostático, que trae asociada una distribución de vectores intensidad de campo y una distribución de potencial.

Un punto de partida recomendable es investigar las inquietudes de nuestros alumnos en hechos relacionados con estos temas, creando un clima propicio para que los manifiesten para, luego, orientarlos hacia la respuesta a sus interrogantes.

Es importante estar atento y "al día" respecto a los fenómenos y conquistas tecnológicas relacionados con los temas que queremos presentar. Sin pretender ser exhaustivos, mostramos algunos de los interrogantes que pueden suscitarse:

- Todos habrán percibido, en medio de una tormenta, los destellos y efectos del relámpago y del rayo. ¿Qué son? ¿Cómo se originan? ¿En qué consiste un pararrayos y por qué se utiliza? ¿Han oído hablar de los pararrayos radiactivos?
- Las prendas de hilado sintético –nylon, dacrón, rayón– muestran una tendencia a adherirse entre sí y al cuerpo de la persona que las usa. Al desvestirse hay chasquidos y, sí el ambiente está a oscuras, es posible observar destellos luminosos. (Algunos materiales son más propensos que otros a producir estos efectos, más acentuados en días secos). ¿A qué se deben?
- ¿Qué hace que un trozo de plástico (regla, lapicera, etcétera), frotado con un paño, se vuelva capaz de atraer objetos livianos (trozos de papel, hilo, telgopor, cenizas o filtro de cigarrillo) o no tanto (trozos de metal suspendidos, desviar el hilo de agua que fluye por una canilla apenas abierta)?
- ¿Cómo hacen en la industria textil para atar dos hilos sin que se note la unión?

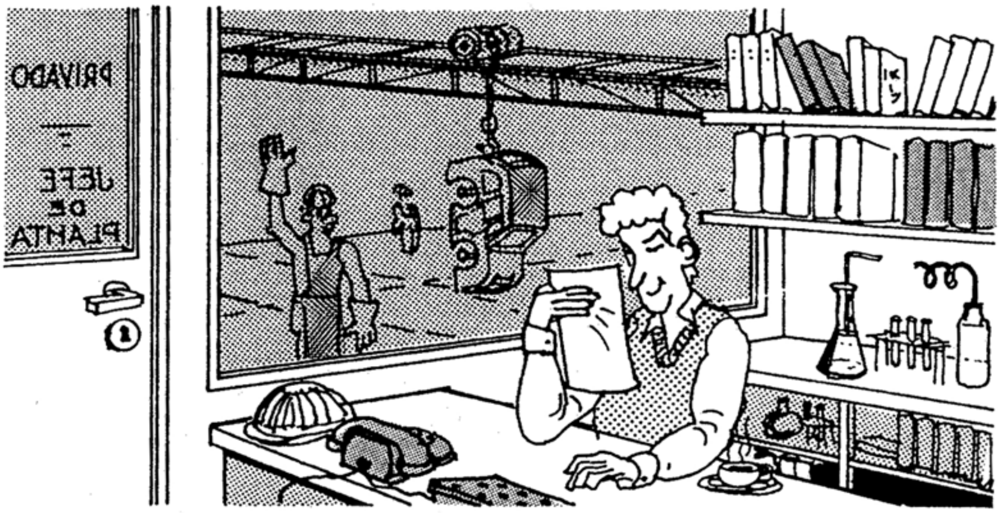


Empalme electrostático de hilados textiles

- ¿Por qué al acercar el dorso de la mano a la pantalla de un televisor en funcionamiento se perciben cosquilleos y chasquidos, fenómeno más notorio durante el encendido o el apagado del aparato?
- ¿Qué son los conductores, los aisladores y los semiconductores?
- ¿Cómo se consigue, en el proceso de fotocopiado (xerografía), que el toner (polvo semejante al hollín) se deposite en el papel en el lugar debido?
- ¿Qué son un electrocardiograma, un electroencefalograma (ECG), un marcapasos cardiaco?
- ¿Qué es y cómo funciona un FET (transistor de efecto de campo)?
- ¿Qué significan los 6 volt de una batería? ¿Y los 220 V del suministro eléctrico?

Y, además: La descarga a tierra de los camiones cisterna; la puesta a tierra de la camilla, el paciente, y todo el personal y el instrumental (a través del piso conductor) en los quirófanos y salas de alto riesgo; la electroforesis; el generador de Van de Graaf; los efectos electrostáticos en las máquinas bobinadoras de láminas (films) plásticas; los efectos observados en los discos fonográficos y en recipientes de plástico; la jaula de Faraday y el blindaje electrostático; los sistemas electrostáticos para el pintado de superficies sin desperdicio de material; la atracción del hollín por las cortinas de material sintético y por el tubo del televisor; los precipitadores electrostáticos de humos en las chimeneas industriales...

Señores: Por favor, para mis alumnos secundarios de física, les agradecería que me informen sucintamente en qué consiste la electroforesis, por qué es un método de pintado superior al convencional, si se usa corriente alterna o continua, y de qué valores de tensión y corriente. Gracias. Los saludo muy atentamente.



Señora profesora: Se trata de un proceso por el cual las partículas de pintura en suspensión líquida migran por campos eléctricos. Es superior al sopleteado porque las partículas llegan hasta el último rincón, y lo pintado se vuelve aislante y evita mayores espesores. Se usa corriente continua, unos 10 amperes por metro cuadrado. La tensión es de unas decenas de volts. Saludos.

La cantidad y diversidad de ejemplos es prácticamente inagotable. De ahí la necesidad de clarificar al máximo los conceptos y la comprensión de los fenómenos básicos.

Es bueno mantener una actitud de diálogo con los alumnos y responder con sinceridad a sus inquietudes. En caso de no tener respuesta, el mejor camino es comunicárselo y emprender con ellos la búsqueda conjunta de información e investigación, hasta dar con la solución: Docente y alumnos se habrán enriquecido con la experiencia y podrán valorar positivamente el compromiso de trabajar juntos. Suelen dar buenos resultados cartas muy directas a los Departamentos de Relaciones Industriales de las empresas[2].

El tema se ha planteado a partir de la experiencia que permite introducir la propiedad “carga (o masa) eléctrica” y la ley de Coulomb para caracterizar la interacción.

Establecidas las semejanzas y diferencias con la ley de gravitación de Newton, se desarrolla un paralelo entre los campos y potenciales gravitatorios, y los campos y potenciales electrostáticos, considerando sus peculiaridades.

No es el propósito desarrollar íntegramente el tema (tratado *inextenso* en los textos) sino puntualizar aquellos aspectos que requieren alguna consideración particular.

[2] *En tal caso, evite pedir información general, pues no sabrían cuál dar; es preferible detallar qué información breve se requiere.*

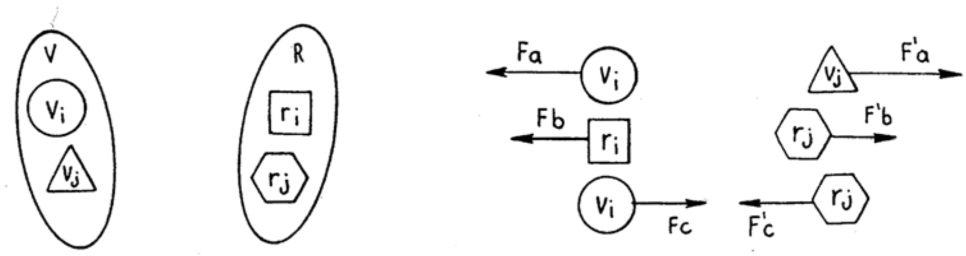
Interacción electrostática. Carga eléctrica y ley de Coulomb

El hecho de acercar un cuerpo (una varilla o regla plástica) a otro (un péndulo eléctrico, fabricado con un trozo de telgopor suspendido de un hilo de coser, o papel en trocitos, o filtro de cigarrillo, etcétera) y no percibir efecto alguno, y repetir la experiencia luego de haber frotado la varilla con un paño, muestra la existencia de dos estados: neutro y electrizado.

La atracción de un objeto neutro por otro "electrizado" (analizaremos luego cómo se explica) y el posterior rechazo, luego del contacto, muestra que las fuerzas de interacción electrostática pueden ser atractivas o repulsivas.

Si se analiza el comportamiento de pares de cuerpos electrizados, la experiencia nos muestra que es posible formar dos conjuntos disjuntos, tales que:

- Dos objetos de un mismo conjunto, se rechazan entre sí.
- Dos objetos, uno de cada conjunto, se atraen entre sí.
- No hay otra posibilidad, tratándose de cuerpos electrizados. (En rigor, queda un tercer conjunto, formado por objetos en estado neutro. Éstos no interaccionan eléctricamente entre sí; de observarse en ellos interacción con un cuerpo electrizado, es siempre atractiva).



Esto fue determinado por Du Fay, alrededor del año 1733, quien para explicar el comportamiento de los cuerpos que adquieren propiedades eléctricas por frotamiento o por contacto, postuló la existencia de dos "fluidos eléctricos" y caracterizó a cada conjunto por poseer uno de ellos, dándoles los nombres de **electricidad vítrea** y **electricidad resinosa**.

Posteriormente, en 1747, Franklin propuso un modelo con un solo fluido, tal que su exceso respecto al nivel normal, o neutro, daría lugar al estado de electricidad vítrea en tanto que su defecto caracterizaría a la electricidad resinosa. La asignación del exceso o defecto a uno u otro estado es absolutamente convencional; Franklin llamó electricidad positiva a la vítrea, y negativa a la resinosa, convención que subsiste hoy. Dado que el traspaso de fluido eléctrico caracteriza el cambio del estado eléctrico, este modelo está acompañado de una ley de conservación, que es la ley de conservación de la carga.

La relación entre la intensidad de la fuerza de interacción entre dos objetos electrizados y su distancia fue sugerida por el comportamiento de objetos en el interior de un recipiente conductor cargado, y deducida por Priestley. También fue obtenida mediante mediciones cuantitativas por Charles Coulomb, en 1785, y resultó inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F \alpha \frac{1}{r^2}$$

Los fundamentos de la teoría electrostática

Algunos textos afirman que la fuerza electrostática es proporcional al producto de las cargas, pero no dicen cómo se mide una carga. Si se midiera por la fuerza que ejerce, entonces la ley que afirma cuánto vale la fuerza en función de las cargas no sería una ley experimental sino, meramente, una definición de carga.

Lo que sigue intenta mostrar cómo puede evitarse caer en ese inconveniente epistemológico, con una definición previa del proceso de medición de la carga, que precisa cómo determinar si dos cargas son o no iguales. Resuelto esto, obtenemos un cuerpo con carga doble a partir de dos con la misma carga, transfiriendo de uno a otro hasta que el primero quede neutro.

Se define una magnitud física: la carga eléctrica que, conforme al modelo de fluido, puede transferirse de un cuerpo a otro. Existen dos tipos de carga eléctrica, convencionalmente denominadas positiva y negativa, respectivamente.

Puede definirse la igualdad: dos cuerpos poseen igual cantidad de carga cuando colocados sucesivamente a la misma distancia de un tercero lo atraen (o rechazan) con la misma fuerza. La interacción entre cargas de igual signo es de rechazo; de atracción, en caso contrario. Se comprueba que la carga eléctrica es aditiva: Si se transfiere toda la carga eléctrica de dos o más cuerpos a otro descargado, la fuerza de interacción de este último con un cuerpo cargado de referencia tendrá una intensidad que será la suma algebraica de las intensidades de las fuerzas respectivas entre cada cuerpo y el de referencia.

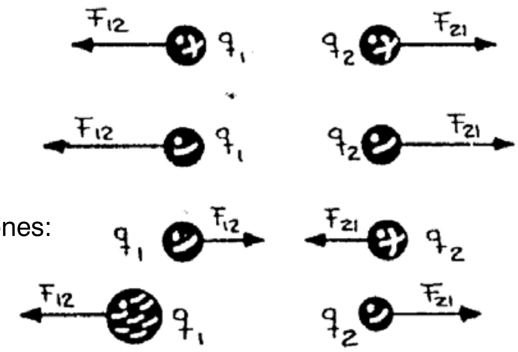
Así, el estado neutro es aquel que tiene iguales cantidades de cargas opuestas. Un cuerpo se manifiesta cargado positivamente si presenta exceso de carga positiva o defecto de carga negativa, respecto al estado neutro. La transferencia de carga de un cuerpo a otro no modifica la cantidad neta de carga del conjunto: la carga se conserva.

Por extensión, a un cuerpo cargado de dimensiones despreciables en relación con las distancias que lo separan de otro, se lo considera carga puntual. En la interacción entre dos cargas puntuales, en el vacío, se cumple:

$F \alpha \ q_1$

$F \alpha \ q_2$

(por simetría de la situación)



De modo que, a partir de las tres relaciones:

$$F\alpha \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

proporcionalidad que se transforma en igualdad al introducir un factor constante, que depende del sistema de unidades utilizado.

$F = k_e . \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ Ley de Coulomb Cargas puntuales en el vacío.

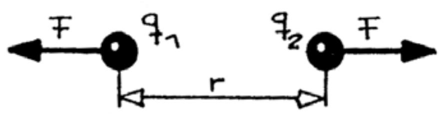
En el SIMELA, que utiliza las unidades del sistema MKSA, la unidad de carga eléctrica es el Coulomb (C), definida a través de la intensidad de corriente eléctrica, y ésta a partir de las fuerzas de interacción magnética. La constante k_e en este sistema es:

$$k_e = 9 \,.\, 10^9 \,\mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}^2 / \mathrm{C}^2$$

Para evitar la aparición del factor 4 Π en expresiones derivadas de la ley de Coulomb, se ha definido otra constante, ε_o , denominada permitividad del vacío, de modo que:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\ \pi\ k_e} = 8{,}85 \,.\, 10^{-12} \mathrm{C}^2 / \mathrm{N.m}^2$$

Y la ley de Coulomb se expresa:



$$F = \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Expresión formalmente idéntica a la ley de gravitación de Newton, salvo estos detalles:

- Hay un solo tipo de masa gravitatoria y dos tipos de carga eléctrica.
- La fuerza de interacción gravitatoria entre dos masas es siempre de atracción; entre dos cargas de igual signo es de rechazo. Un resultado positivo en la expresión implica fuerzas de rechazo entre cargas, con la convención de signos adoptada.
- El medio interpuesto no modifica la interacción gravitatoria, sí la electrostática.
- La masa gravitatoria es proporcional a la masa inercial, mientras que la carga electrostática es independiente de la masa.

Finalmente, las experiencias de Míllikan mostraron una peculiaridad: La carga eléctrica está cuantificada. Los cuerpos presentan cantidades de carga que son múltiplos enteros de la carga del electrón: el cuanto de carga $|\,e\,| = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Frecuentemente, para introducir el uso de la ley de Coulomb, se plantean ejercicios de este tipo: “Calcular la fuerza de interacción entre dos cargas puntuales, de + 2 C y - 3 C, colocadas en el vacío, a 3 m de distancia una de otra”.

$$F = k_e . \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9.10^9 \,\mathrm{N.m}^2/\mathrm{C}^2 . \frac{(+2c).(-3C)}{(3m)^2} = -\frac{9.10^9.6}{9}\,\mathrm{N}$$

$$F = -6.10^9\,\mathrm{N}$$

(El signo menos indica atracción mutua.)

Nótese el orden de magnitud: ¡Es de aproximadamente 600.000 toneladas! ¡No hay estructura que las mantenga fijas, a esa distancia! La cosa empeora si se las acerca: A 1 m de distancia, la fuerza es 3^2 = 9 veces mayor, y a 1 cm es 300^2 = 90000 veces mayor.

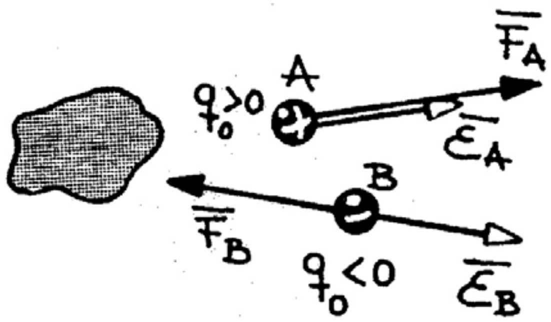
Lo que ocurre es que la unidad Coulomb es demasiado grande para la electrostática. Las cargas obtenidas en condiciones reales son del orden del microcoulomb (1μ C = 10^{-6} C) y es recomendable utilizar estos valores en los problemas planteados, para que tengan realidad.

Campo electrostático en el vacío

Dado que la fuerza de interacción electrostática está vinculada a la carga eléctrica del mismo modo que la fuerza gravitatoria lo está a la masa, puede establecerse un paralelo en el tratamiento de las magnitudes físicas asociadas a los campos electrostático y gravitatorio. La presentación del tema podrá seguir un esquema análogo al desarrollado en el tema gravitación, puntualizando algunas peculiaridades debidas a la existencia de dos tipos de carga. Reformulando, entonces, lo expresado en la sección anterior:

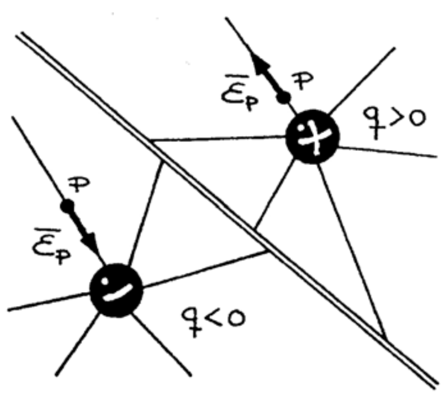
- Un campo electrostático se caracteriza por el hecho de que todo cuerpo cargado eléctricamente y colocado en reposo en uno de sus puntos experimenta una fuerza. Es importante que la carga de prueba se imagine en reposo, para separar efectos de un posible campo magnético.
- En un campo electrostático está definida una función vectorial que depende de la posición (del punto): El vector campo electrostático $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}\ (x, y, z) = \overline{\varepsilon}\ (\overline{r})$. Colocando una carga de prueba q_o en dicho punto, experimentará una fuerza:

$$\overline{F} = q_o.\overline{\varepsilon}$$



El sentido del campo, convencionalmente, se ha elegido como el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga positiva. Ejemplificar para $q_o < 0$. Reiteramos una observación ya formulada en el tema gravitación: $\overline{\varepsilon}$ no es una fuerza, ni siquiera para q_o unitaria: Es objetable definir campo como “fuerza actuante sobre una carga unitaria”. Dimensionalmente[3]:

$$|\varepsilon| = \frac{|F|}{|q|} = \frac{N}{C}$$



[3] *El campo eléctrico también puede expresarse en voltios/metro; efectivamente, 1 volt = 1 joule/ coulomb* = $1\frac{Nm}{C}$; $1V/m = 1N/C$.

- El campo eléctrico originado por una carga puntual q en un punto a una distancia r de ella, tiene dirección radial. Está dirigido hacia q, si ésta es negativa; se aleja de q, si ésta es positiva. La intensidad está dada por $\varepsilon = k_e . \frac{q}{r^2}$ donde q es la carga que origina el campo. La intensidad del campo, en cambio, no depende del valor de la carga sobre la que actúa.
- Puede demostrarse que el campo producido por una distribución de cargas esférica e isótropa, o por una cáscara esférica cargada uniformemente, es idéntico al producido por la carga total concentrada en su centro, en la zona exterior a la distribución.
- El campo electrostático producido por un conjunto de cargas cumple el principio de superposición; puede hallarse sumando vectorialmente los campos eléctricos producidos por todas y cada una de las cargas, actuando independientemente.

Trabajo de las fuerzas eléctricas. Potencial electrostático

De un modo análogo al trabajo de las fuerzas gravitatorias, puede establecerse que el campo electrostático origina fuerzas conservativas; es posible, entonces, expresar el trabajo en función de una energía potencial:

$$W_{AB} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$$

y también:

$$W_{AB} = q_o.(V_A - V_B)$$

de modo que puede definirse la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos del campo, como la razón entre el trabajo realizado por las fuerzas que el mismo campo ejerce sobre una carga q_o al trasladarla de un punto al otro, y el valor de dicha carga,

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

donde V depende de la configuración que origina el campo, pero no de la carga q_o.

La unidad de potencial eléctrico en el SIMELA es $[V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{J}{C} = V \ (\text{Volt})$

Es posible, entonces, asignar a cada punto de un campo eléctrico un valor del potencial y definir superficies sobre las cuales el potencial es constante, llamadas superficies equipotenciales. La dirección del vector campo eléctrico es normal a dichas superficies, y está dirigido en el sentido de los potenciales decrecientes.

Desplazándose en un campo electrostático una distancia dada, la máxima variación del potencial se obtiene en la dirección del vector campo eléctrico y, en esa dirección particular, se verifica:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta V}{\Delta r_{máx}}$$

lo que permite obtener el campo a partir del vector **gradiente de potencial**.

Una carga puntual, aislada en el vacío, produce un campo eléctrico de dirección radial, y el potencial a una distancia r de la misma puede calcularse como:

$$V = k_e . \frac{q}{|r|} \quad , \quad \text{con } V_{\infty} = 0$$

Se respeta la simetría: A una distancia fija, el potencial es el mismo en todas direcciones: las equipotenciales son esferas concéntricas. Nótese que el potencial que genera una carga tiene su mismo signo. La expresión también es válida para una configuración en forma de esfera o de superficie esférica isótropamente cargada, para hallar el potencial en puntos exteriores, a una distancia r del centro respectivo.

El potencial en un punto del campo originado por una distribución de cargas; puede hallarse sumando algebraicamente los potenciales originados por cada una de ellas en el mismo punto.

El desarrollo anterior es la síntesis de las características más relevantes del campo eléctrico y esquema mínimo de contenidos; es necesario el uso de algún texto para complementar y profundizar el tema. La lectura atenta y reflexiva le permitirá adentrarse en los detalles. ¿Advirtió, por ejemplo, que del planteo de comportamiento de los “cuerpos cargados”, se pasó casi insensiblemente al manejo de las “cargas”, entes abstractos, despojados, que no tienen en cuenta al cuerpo que las posee?

Respecto de los cuerpos cargados, es necesario referirse a su comportamiento, como conductores o aisladores.

El modelo de un medio material admite la existencia de **portadores**: partículas cargadas con mayor o menor libertad de desplazarse, medida por su **movilidad**; serán los electrones y iones en las soluciones líquidas, o sustancias fundidas, o gases ionizados (plasmas); y, casi exclusivamente, los electrones en los sólidos. (En un cristal semiconductor también son portadores las lagunas o huecos; vacantes que dejan los electrones en los átomos de la red cristalina, cargas positivas con diferente movilidad).

En un sólido tal que la concentración de portadores sea muy baja o con escasa movilidad (esto lo determina su configuración cristalina), un exceso de carga en una región no tendrá posibilidades de migrar a otras zonas o lo hará muy lentamente. Éste constituye un **aislador**: puede adquirir carga pero localmente y ésta queda confinada en la zona donde se introdujo.

Si el sólido tiene una elevada concentración de portadores y alta movilidad, una carga en exceso en una región puede difundirse y llegar a todas las regiones. Es el caso de un **conductor**.

Si se produce un exceso o defecto de carga en un conductor, cuando se restablezca el estado de equilibrio, los portadores se distribuirán de modo tal que toda su masa se encuentre al mismo potencial (de lo contrario, habría fuerzas hacia los puntos de menor energía). Obtenido el equilibrio, se observa:

- Todo conductor en equilibrio electrostático tiene su superficie y su volumen a un único potencial.
- El campo eléctrico en un punto de la superficie exterior, es normal a la superficie.
- Como el potencial es constante en su interior, no existe gradiente: El campo eléctrico es nulo en el interior de un conductor en equilibrio electrostático.

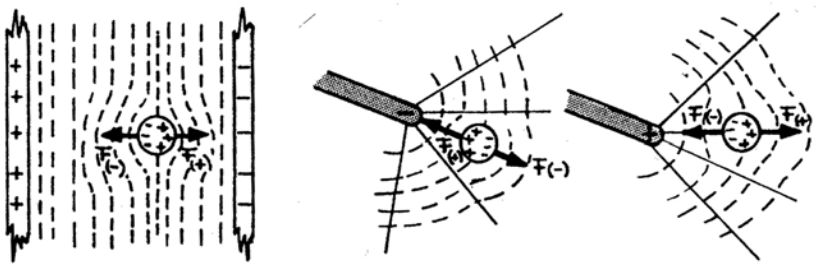
- La condición anterior exige que no exista carga en el interior: Toda la carga de un conductor en equilibrio electrostático se encuentra en su superficie.

Somos conscientes de la repetición, pero es necesario remarcar: Estos fenómenos se observan en los conductores en equilibrio electrostático. De esto se desprende:

- Un campo electrostático exterior a un conductor no produce ningún efecto en su interior: efecto de blindaje electrostático (jaula de Faraday).
- El contacto entre dos cuerpos conductores da lugar a un intercambio de cargas, hasta que se igualan sus potenciales. Si el contacto es exterior, en el estado de equilibrio cada uno tendrá una carga determinada; pero, si uno de los conductores es hueco y el contacto se produce de modo que el otro quede en su interior, **toda** la carga pasa a la superficie exterior del conductor hueco. Así puede materializarse la aditividad de cargas y el principio de funcionamiento del generador de Van de Graaf, donde toda la carga proveniente de una cinta transportadora que ingresa al interior de una esfera conductora se transfiere a su exterior, independientemente del potencial a que se encuentre.

Por último, una referencia al hecho experimental observado de que un cuerpo cargado es capaz de atraer a otro en estado neutro. Si suponemos una esfera conductora descargada colocada en un campo eléctrico, el campo se deformará por su presencia (la superficie conductora de la esfera debe ser equipotencial).

En el campo uniforme, la simetría de la situación muestra que no hay efecto alguno; pero, en un campo no uniforme, la distribución de cargas origina fuerzas sobre la esfera cuya resultante se dirige hacia las zonas donde el campo es más intenso, independientemente del sentido del campo.



Si la esfera descargada no es conductora, también se deforma el campo; pero, su volumen no es equipotencial. La esfera se polariza y el efecto es similar al caso anterior, si bien el campo no es nulo en el interior de la esfera aisladora. Las fuerzas la acelerarán hacia la región donde el campo exterior es más intenso.

Una interpretación sencilla de estos efectos consiste en imaginar que las cargas positivas y negativas del cuerpo neutro se separan, al ser unas atraídas y otras repelidas, y prevalece la interacción que corresponde a las cargas más próximas al cuerpo cargado.

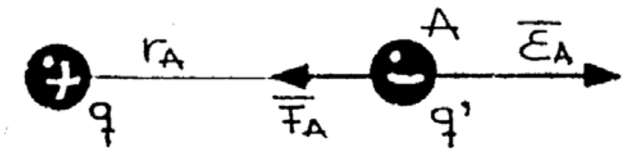
Ejercicio resuelto
Una carga eléctrica puntual $q = + 5\ \mu C$ crea un campo eléctrico a su alrededor. Determinar:
a) La fuerza que actuará sobre una carga puntual $q' = -2\ \mu C$ colocada en A.
b) El vector campo electrostático en un punto A, ubicado a 10 cm de q.
c) El trabajo que realizarán las fuerzas eléctricas, al trasladarse la carga q' desde el punto A hasta otro punto B, situado a 30 cm de la carga q.

El ejercicio puede plantearse de dos maneras:

- Hallar, mediante la expresión del campo electrostático, el campo en A, y luego calcular la intensidad de la fuerza.
- Determinar la fuerza actuante, mediante la ley de Coulomb; y, considerando a q' como carga exploradora, determinar el campo $\varepsilon_A = F / q'$.

a) La fuerza actuante estará sobre la recta determinada por ambas cargas. Su módulo vendrá dado por la ley de de Coulomb:

$F = k_e.\frac{q.q'}{r^2} = 9.10^9\,N.m^2/C^2.\frac{(+5.10^{-6}C).(-2.10^{-6}C)}{(0{,}1\ m)^2}$; $F = 9N$ de atracción, puesto que las cargas son de signo opuesto.



b) El vector campo está dado por $\overline{\varepsilon_A} = \frac{\overline{F}}{q'}$

Y su intensidad: $\varepsilon_A = \frac{F}{q'} = \frac{9N}{-2.10^{-6}C} = -4{,}5.10^6\,N/C$ (El signo indica sentido opuesto a $\overline{F}$)[4]

c) Para el cálculo del trabajo, podría aplicarse la definición $W_{AB} = \sum_A^B F_i\ .\ \Delta s_i\ \cos\alpha_i$

La dificultad radica en que F es variable. Puede intentarse un cálculo numérico. Note que el trabajo de la fuerza eléctrica es negativo, pues cuando el cuerpo cargado pasa de A a B, su desplazamiento tiene sentido contrario al de la fuerza. A raíz de esto podríamos considerar: ¿Cómo es posible que el cuerpo pase de la posición A a la posición B, si la fuerza eléctrica está aplicada en sentido opuesto al desplazamiento?

---

[4] Debe señalarse una frecuente causa de confusión, que es operar con la fórmula $F = k_e.q_1.q_2 / r^2$, en la que las cargas pueden tener diferente signo y, en consecuencia, arrojan como resultado un módulo de fuerza negativa, lo que sería contrario a la característica de los módulos vectoriales, siempre positivos o nulos.

Hay varias formas habituales de encarar esta dificultad:

- *Decir que F es un módulo, y q¹ y q ² los valores absolutos de las cargas; el sentido se determina aparte, con las reglas electrostáticas.*
- *Decir que F es una componente; en consecuencia, podrá tener signo y adoptar el negativo para representar la atracción.*
- *Expresar $\overline{F} = -k_e.q_1.q_2.\overline{r} / r^3$, donde F es la fuerza que actúa sobre la partícula 2 y se supone que la 1 está en el origen de coordenadas. Esto es lo habitual en la bibliografía terciaria.*

Podemos dar, entre otras posibles, dos respuestas:

- Porque hay otras fuerzas, sobre cuyos trabajos no nos preguntamos.
- Porque, sin ello, el cuerpo tenía velocidad inicial en A (hacia B) y pudo llegar aunque existiese fuerza eléctrica en contra. ¡En electrostática también vale la inercia! Pero, el cálculo a través del concepto de potencial es directo.

Como se dedujo en el tema *Gravitación*, la expresión del potencial sigue el mismo lineamiento, aunque es posible que los recursos matemáticos de los alumnos no sean suficientes, pero pueden aceptarla sin demostración:

$$V_A = k_e . \frac{q}{r_A} \qquad \text{y como } W_{AB} = q'.(V_A - V_B)$$

$$W_{AB} = q'.k_e.q.\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = -2.10^{-6}\,C.9.10^{9}\,N.m^2 / C^2.5.10^{-6}\,C\left(\frac{1}{0{,}1m} - \frac{1}{0{,}3m}\right)$$

$$W_{AB} = -2.10^{-6}\,C.45.10^{3}.\frac{2}{0{,}3}\frac{J}{C} = -2.10^{-6}\,C.3.10^{5}\,V$$

$$W_{AB} = -0{,}6\ J$$

El signo indica que el campo realiza trabajo resistente: Es necesario entregar un trabajo a la carga para transportarla contra las fuerzas electrostáticas. La carga negativa tiene más energía donde el potencial es menor.

Ejercicio resuelto

a) Representar gráficamente el módulo de la fuerza $\overline{F}$ que aparece sobre una carga puntual q' = 1µ C cuando se encuentra a las siguientes distancias de una carga fija puntual de + 50 µ C:

d (m)	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
F (N)						

b) Indicar qué representa el área de la superficie bajo la curva limitada por las abscisas extremas correspondientes a d_1 = 0,05 m y d_2 = 0,50 m. Calcular gráficamente el valor del trabajo de la fuerza del campo cuando la carga q' se traslada desde d = d_1 hasta d = d_2.

c) Calcular ese mismo trabajo con la expresión $W_{AB} = k_e.\ q.\ q'\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$

d) Este trabajo, ¿depende de la trayectoria seguida entre ambos puntos?

a) En primer lugar, necesitamos calcular el módulo de $\overline{F}$ en las distintas posiciones en que la fuerza eléctrica cambia –en general, al cambiar la posición del cuerpo explorador–.

Recordemos que:

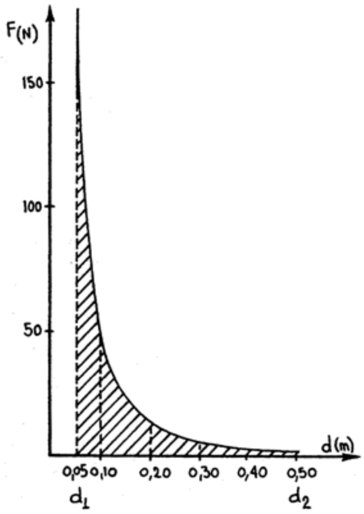
$$F = k_e . \frac{q \cdot q'}{d^2} \quad ; \quad F = 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2} . \frac{50.10^{-6} C.10^{-6} C}{d^2}$$

Si d = 0,05 m
F = 1,8 . 10^2 N

De la misma manera, se calculan los restantes valores:

d (m)	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
F (N)	1,8 . 10^2	45	11,25	5	2,81	1,8

Empleando papel milimetrado, representamos F en función de la distancia d entre cargas.



b) El área de la superficie bajo la curva limitada por las abscisas extremas correspondientes a d_1 = 0,05 m y d_2 = 0,50 m representa el trabajo realizado por la fuerza del campo eléctrico cuando desplaza q' desde un punto situado a distancia d_1 de la carga creadora del campo hasta otro distante d_2 de la misma carga. (Recordar que $W = \sum F_i \ \Delta 1_i \ \cos \alpha_i$).

En nuestro caso, dividiendo la superficie sombreada mediante las verticales punteadas y descomponiendo dicha superficie resulta, aproximadamente:

$$W_{1,2} = 8,7 \ \text{joule}$$

(Verifíquelo.)

c) El trabajo que realiza la fuerza eléctrica al desplazarse la carga exploradora desde A (d_1 = 0,05 m) hasta B (d_2 = 0,5 m) es:

$$W_{AB} = k_e . \ q. \ q' \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$$

$$W_{AB} = 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2} .50.10^{-6} C.10^{-6} C \left(\frac{1}{0,05m} - \frac{1}{0,5m} \right)$$

$$W_{AB} = 8,10 \ \text{joule}$$

Como podemos apreciar, el valor obtenido para el trabajo mediante el recurso analítico W_{AB} = 8,1 joule, coincide aproximadamente con el logrado mediante la gráfica.

d) En la expresión de W_{AB} no figuran detalles de la trayectoria seguida por q' desde A hasta B, sólo figuran las distancias inicial y final a la carga creadora del campo. En efecto, se demuestra que la fuerza electrostática (fuerza eléctrica creada por un campo electrostático –es decir, no variable con el tiempo– $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}\ (x, y, z)$, sólo dependiente de las coordenadas del punto del campo que se considere) es **conservativa**.

ACTIVIDAD 8

8.1. En una experiencia de Millikan, se quiere equilibrar el peso de una gotita que es 0,04 N y que tiene una carga de 2,5 μ C, mediante un campo electrostático. Determinar las características del mismo. Repetir, para el caso de una carga de -8 μ C.

8.2. Dos cargas, q_1 y q_2, de +2 μ C y -8 μ C respectivamente, se encuentran fijas, en el vacío, a una distancia de 20 cm.

a) Determinar el campo electrostático en el punto medio del segmento que ellas definen.

b) Determinar en qué punto de la recta que pasa por las mismas se anula el campo eléctrico que ellas producen.

8.3. Para la configuración de cargas del problema anterior, determinar:

a) El potencial en el punto medio del segmento.

b) En qué punto de la recta que pasa por las mismas se anula el potencial electrostático.

8.4. Esquematizar los gráficos del campo electrostático y del potencial generados por una carga de + 4 μ C, en función de la distancia, en los siguientes casos:

a) La carga es puntual.

b) La carga se halla en una esfera conductora maciza, de 0,5 m de radio.

c) La carga está distribuida sobre una cáscara esférica, de 0,5 m de radio.

d) La carga está uniformemente distribuida en el volumen de una esfera no conductora de 0,5 m de radio.

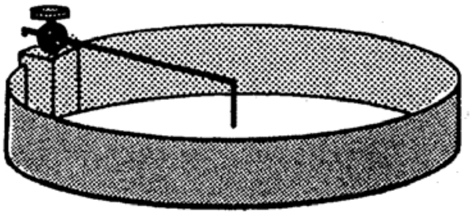
A modo de cierre, le proponemos una actividad experimental, que permitirá a usted y a sus alumnos visualizar los efectos de campos electrostáticos.

ACTIVIDAD 9

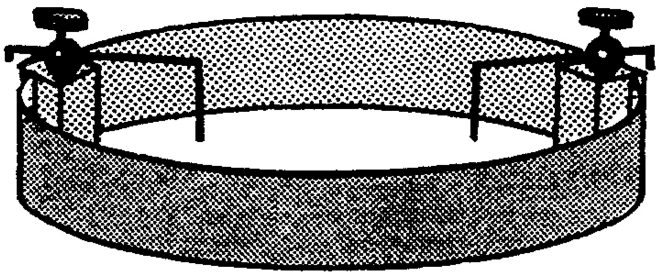
Para realizar esta actividad deberá conseguir:

- Un recipiente de vidrio (no muy profundo) A (cristalizador, cubeta o recipiente similar).
- Una máquina electrostática B (Wimshurst o Van de Graff).
- Aceite no muy denso (por ejemplo, aceite de ricino), y semolín o semillas de césped.
- Juego de electrodos: 2 puntuales (E_1) y 2 planos (E_2).
- Soportes aisladores S.
- Cables de conexión.

Procedimiento



a) Coloque el aceite en el recipiente A (es suficiente colocar una capa de aproximadamente 5 mm de altura).
b) Ubique el electrodo E_1, de modo que quede sumergido en el aceite en el centro de A (ver figura). Conecte el electrodo con la máquina electrostática.
c) Haga funcionar la máquina y, luego, disperse el semolín en el aceite.
d) Observe cómo se disponen las partículas de semolín.
e) En un dibujo, deje constancia del aspecto que presenta la superficie del aceite con el semolín disperso en ella. Observación: Puede ocurrir que el semolín, después de un rato, se deposite en el fondo del recipiente y le cueste orientarse cuando se establece el campo eléctrico; en tal caso, repita la experiencia cambiando el aceite y poniendo nuevo semolín o semillas de césped).
f) Repita la experiencia agregando el otro electrodo puntual (tiene ahora dos electrodos en el interior del aceite) y conéctelo también a la máquina electrostática; puede lograr que los dos electrodos se electricen con cargas de signos opuestos.
g) Observe qué aspecto tiene, ahora, el conjunto de semolín disperso en la nueva masa de aceite.
h) Dibuje la distribución del semolín.



Repita la experiencia en estos casos:
- Los dos electrodos puntuales cargados con electricidades del mismo signo.
- Los electrodos puntuales cargados con electricidades de signos opuestos.
- Los electrodos planos dispuestos paralelamente entre sí y cargados con electricidad de signos opuestos.

i) Describa la distribución del semolín (líneas de fuerza) en cada caso y haga el esquema correspondiente.
j) Formule sus conclusiones.

CLAVE DE RESPUESTAS

Actividad 0

Relación entre potencial y campo gravitatorio. Respecto a la pregunta formulada sobre la velocidad del objeto que atraviesa la Tierra por un túnel diametral:

La velocidad en el centro de la Tierra, por ser la posición de equilibrio para el movimiento armónico, es:

$$v_{(0)} = v_{máx} = \omega.R = \sqrt{\frac{g}{R}}.R = \sqrt{g.R} \cong 7{,}89 \ \ Km/s$$

Sí no recuerda estas relaciones propias del péndulo elástico lineal u oscilador armónico, puede considerar que la diferencia de energía potencial entre superficie y centro se transforma íntegramente en energía cinética:

$$m\left(-gR-\left(-\frac{3}{2}gR\right)\right)=\frac{m}{2}v^2 \qquad ;\frac{1}{2}gR=\frac{1}{2}v^2 \qquad ;v=\sqrt{gR}$$

Por ser un punto de equilibrio, la función de energía potencial y el potencial deben presentar un extremo relativo en dicho punto. Se aprecia en el gráfico

$V_{(x)}$. Para $V_\infty = 0$ es $V_{(0)} = -1{,}5k_G.m/R.$

Actividad 1

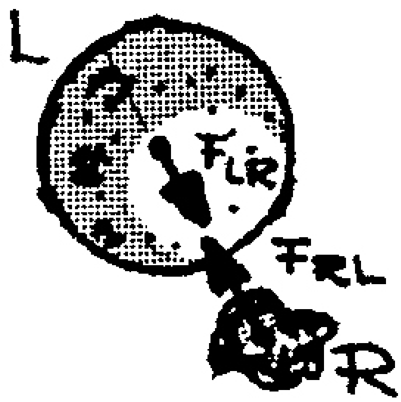
1.1. Si consideramos a la Luna como una esfera homogénea, en reposo:

$$g_L = k_G.\frac{m_L}{r_L^2} = 6{,}67.10^{-11} N.m^2/Kg^2.\frac{7{,}3.10^{22} Kg}{(1{,}72.10^6 m)^2} \cong 1{,}65 N/Kg$$

1.2. El peso será la fuerza gravitatoria

$$P_R = m_R.g_L = 6 \ \ Kg.1{,}65 \ \ N/Kg = 9{,}9 \ \ N = 1{,}01 \ \ Kgf$$

1.3. El peso de la Luna será la fuerza que actuará sobre la Luna, al interaccionar con la roca; pero ésta es la misma que en el caso anterior: $P_L = 9{,}9 \ \ N = 1{,}01 \ \ Kgf$



1.4. El astronauta conserva su masa. A partir de su peso en la Tierra:

$$m = \frac{P_T}{g_T} = \frac{120\ \text{Kgf}}{9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2} = \frac{120.\ 9.\ 8\text{N}}{9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2} = 120\ \text{Kg}$$

Y, en la Luna, pesará:

$$P_L = m\ .\ g_L = 120\ \text{Kg}\ .\ 1{,}65\ \text{m}/\text{s}^2 = 198\ \text{N} \cong < 20{,}2\ \text{Kgf}\ \ < 50\ \text{Kgf}$$

La resistencia mecánica de la escalerilla es más del doble que el peso del astronauta. Podrá utilizarla con confianza. Nótese la invariancia de la relación $1\ \text{Kgf} \cong 9{,}8\ \text{N}$.

Actividad 2

El movimiento circular de la tiza tendrá una aceleración

$$a = \frac{v_o^2}{R} = g\ \ (h << R)$$

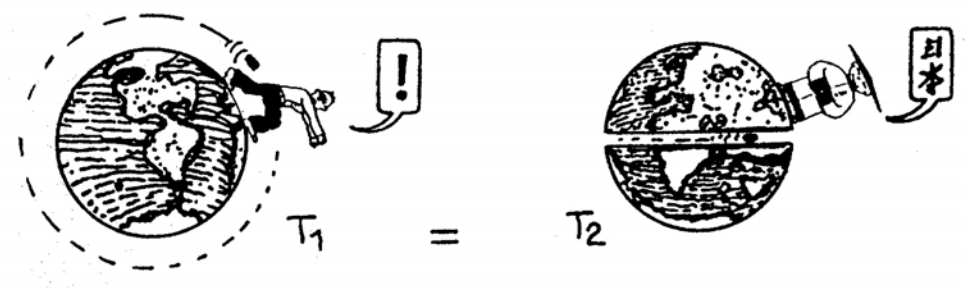
de modo que:

$$v_o = \sqrt{g.R} \cong \sqrt{9{,}8\text{N}/\text{Kg}\ .\ 6{,}36\ .\ 10^6\text{m}} = 7895\text{m}/\text{s}$$

Su período será:

$$T = \frac{2\ \pi\ R}{v_o} = \frac{2\ \pi\ .\ 6{,}36\ .\ 10^6\text{m}}{7895\ \text{m}/\text{s}} = 5061\ \text{s} = 1\text{h}\ \ 24\,\text{min}\ \ 21\text{s}$$

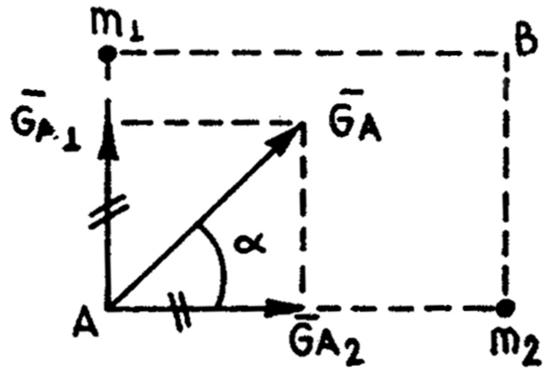
Es idéntico al del cuerpo que oscila en el túnel diametral (curiosa coincidencia). (Si la Tierra rotara con ese período, el peso aparente de los objetos en su superficie sería nulo).



Si la Tierra fuera una esfera de densidad uniforme, el periodo de un satélite que orbita a muy baja altura coincidiría con el período de oscilación de un cuerpo que se desplazase por un túnel que la atraviesa.

Actividad 3

3.1. El campo gravitatorio en A será: $\overline{G_A} = \overline{G_{A_1}} + \overline{G_{A_2}}$



$$| G_{A_1} | = k_G \cdot \frac{m_1}{r_{A_1}^2} = 6{,}67.10^{-11} N.m^2 / Kg^2 . \frac{100 \ Kg}{(3m)^2}$$

$$| G_{A_1} | \cong 7{,}41.10^{-10} N / Kg$$

Del mismo modo:

$$| G_{A_2} | \cong 8{,}34.10^{-10} N / Kg$$

Por ser perpendiculares:

$$| G_A | = \sqrt{G_{A_1}^2 + G_{A_2}^2} = \sqrt{(7{,}41.10^{-10} N / Kg)^2 + (8{,}34.10^{-10} N / Kg)^2}$$

$$| G_A | = 11{,}16.10^{-10} N / Kg$$

Y el ángulo de dirección $\alpha = \text{arc tg} \dfrac{G_{A_1}}{G_{A_2}} = \text{arc tg} \ 0{,}888 = 41°37'$

3.2. La fuerza experimentada será:

$$F = m_o.G_A = 2 \ Kg \ . \ 11{,}16 \ . \ 10^{-10} N / Kg = 2{,}23 \ . \ 10^{-9} N$$

3.3. El potencial en A, por superposición:

$$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} = -k_G . \left[\frac{m_1}{r_{A_1}} + \frac{m_2}{r_{A_2}} \right] = -6{,}67.10^{-11} N.m^2 / Kg^2 . \left[\frac{100 \ Kg}{3 \ m} + \frac{200 \ Kg}{4 \ m} \right]$$

$$V_A = -5{,}56 \ . \ 10^{-9} \ J / Kg$$

3.4. El trabajo que realiza el campo viene dado por:

$$W_{AB} = -\Delta E_P = m_o.(V_A - V_B)$$

El potencial de B:

$$V_B = V_{B_1} + V_{B_2} = -k_G.\left[\frac{m_1}{r_{B_1}} + \frac{m_2}{r_{B_2}}\right]$$

$$V_B \cong -6{,}67.10^{-11} N.m^2 / Kg^2.\left[\frac{100\ Kg}{4\ m} + \frac{200\ Kg}{3\ m}\right]$$

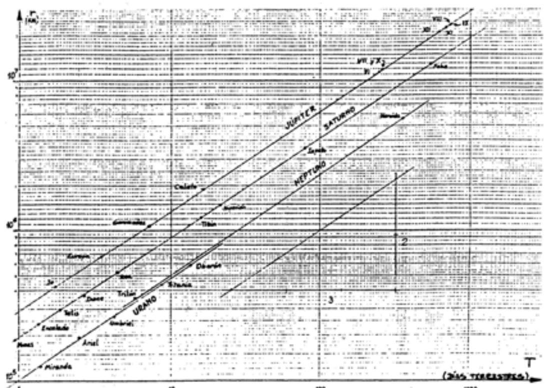
$$V_B \cong -6{,}11\ .\ 10^{-9}\ J / Kg$$

Y el trabajo realizado es:

$$W_{AB} = 2\ Kg.(-5{,}56.10^{-9} J / Kg + 6{,}11.10^{-9} J / Kg) = +1{,}1.10^{-9} J$$

Actividad 4

4.1. Representación gráfica:



Se ha limitado a aquellos satélites cuya distancia al planeta respectivo fuera mayor de 10^5 Km y su período mayor que 1 día terrestre, para no añadir una década en cada escala. (Se excluyeron el satélite V de Júpiter, y Jano, de Saturno).

4.2. La alineación de los puntos (perfecta dentro de errores del gráfico) para cada planeta, lleva a la ecuación:

log r = m . log T + log K' con m y K' constantes

La pendiente m es la misma para todas las rectas. Trazando un triángulo arbitrario con un lado paralelo a las rectas obtenidas y los otros paralelos a los ejes, la relación entre las medidas de los catetos es:

m = 2/3

Luego:

$$r = K' \, . \, T^{2/3} \Rightarrow r^3 = K'^3 \, . \, T^2 \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = K'^3 = K$$

La ordenada al origen de cada recta permite hallar K' y, con ella, el valor de K.

4.3. Para un satélite en órbita circular alrededor de un planeta de masa m_p, se cumple:

$$a_S = \omega^2 \, . \, r = \left(\frac{2 \, \pi}{T}\right)^2 . \, r = k_G . \frac{m_P}{r^2}$$

Luego:

$$m_P = \frac{4 \, . \, \pi^2}{T^2} . \, r^3 = k_G \, . \, m_P$$

4.4.

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{k_G \, . \, m_P}{4 \, \pi^2}$$ constante para el planeta, de modo que:

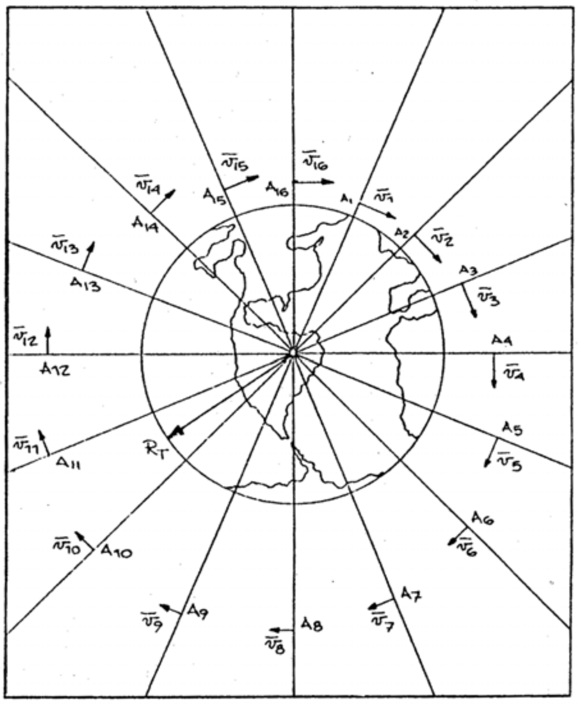
$$m_P = \frac{4 \, \pi^2 \, K}{k_G}$$

Para las rectas obtenidas:

Planeta	K'	K=K'³	m_p	m_p/m_T	
	Km/(día)$^{2/3}$	Km³/día²	Kg	Calculado	De texto
Júpiter	$2{,}89 \, . \, 10^5$	$2{,}41 \, . \, 10^{16}$	$1{,}91 \, . \, 10^{27}$	318,3	318
Saturno	$1{,}93 \, . \, 10^5$	$7{,}19 \, . \, 10^{15}$	$5{,}70 \, . \, 10^{26}$	95,0	95
Urano	$1{,}02 \, . \, 10^5$	$1{,}06 \, . \, 10^{15}$	$8{,}41 \, . \, 10^{25}$	14,0	14,5
Neptuno	$1{,}09 \, . \, 10^5$	$1{,}30 \, . \, 10^{15}$	$1{,}027 \, . \, 10^{26}$	17,1	17

Actividad 5

5.1., **5.2.** y **5.3.**
en diagrama adjunto.

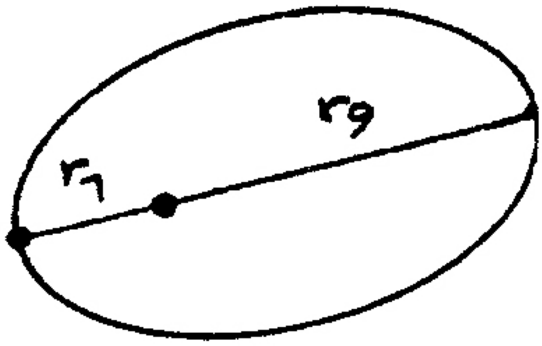


5.4. La posición del centro de simetría se obtiene promediando los radios extremos, con lo cual se halla la longitud del semidiámetro mayor de la elipse:

$$a = \frac{1}{2}.(r_1 + r_9) = \frac{1}{2}.(6960\ \text{Km} + 11960\ \text{Km}) = 9460\ \text{Km}$$

La distancia focal:

$$c = a - r_1 = 9460\ \text{Km} - 6960\ \text{Km} = 2500\ \text{Km}$$



5.5. La suma de las distancias a los focos verifica, dentro del error del trazado, que

$$A_iF_1 + A_iF_2 = 2a$$

5.6.

Puntos A_i	Energía potencial (J)	Energía cinética (J)	Energía mecánica (J)
A_1 y A_{17}	$-1,14 \cdot 10^{11}$	$+7,20 \cdot 10^{10}$	$-4,2 \cdot 10^{10}$
A_2 y A_{16}	$-1,11 \cdot 10^{11}$	$+6,88 \cdot 10^{10}$	$-4,22 \cdot 10^{10}$
A_3 y A_{15}	$-1,03 \cdot 10^{11}$	$+6,07 \cdot 10^{10}$	$-4,23 \cdot 10^{10}$
A_4 y A_{14}	$-9,29 \cdot 10^{10}$	$+5,10 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$
A_5 y A_{13}	$-8,38 \cdot 10^{10}$	$+4,19 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$
A_6 y A_{12}	$-7,63 \cdot 10^{10}$	$+3,44 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$
A_7 y A_{11}	$-7,08 \cdot 10^{10}$	$+2,89 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$
A_8 y A_{10}	$-6,84 \cdot 10^{10}$	$+2,55 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$
A_9	$-6,63 \cdot 10^{10}$	$+2,44 \cdot 10^{10}$	$-4,19 \cdot 10^{10}$

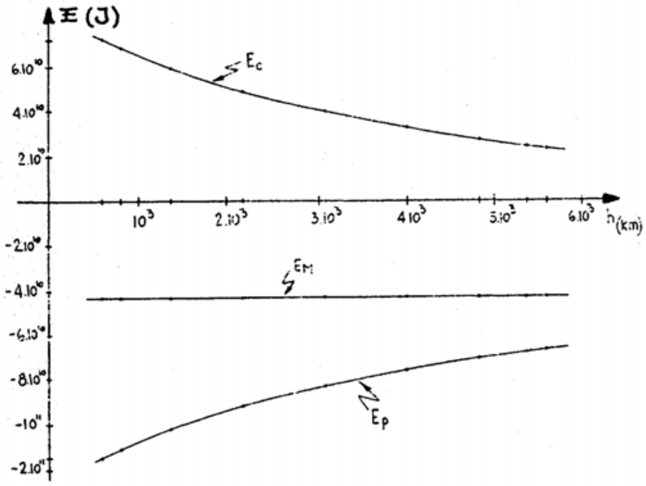
5.7. Puntos de máxima energía potencial (mínima energía cinética): A_9.

Puntos de mínima energía potencial (máxima energía cinética): A_1 y A_{17} (coinciden).

En ambos casos, el vector velocidad es normal al radio. (La distancia pasa por un valor extremo).

5.8. Ver tabla anterior. La coincidencia muestra que los datos son experimentales, responden a un modelo teórico.

5.9. Gráfico.



Actividad 6

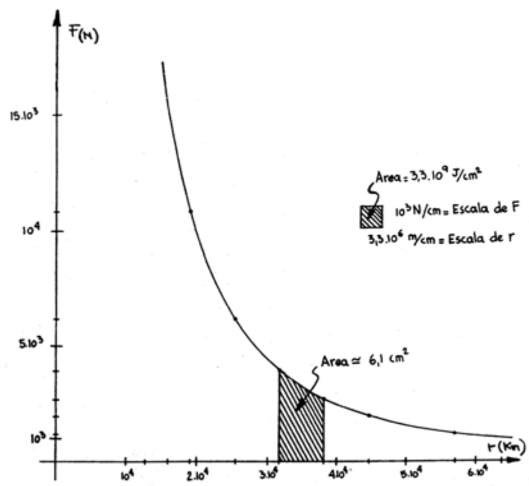
6.1. La fuerza gravitatoria puede calcularse como:

$$F = k_G \cdot \frac{m_T . m_V}{r^2} = \frac{g.R^2.m_V}{r^2} = \frac{9{,}8N/Kg.(6{,}36.10^6 m)^2.10^4 Kg}{r^2} = \frac{3{,}96.10^{18}}{r^2} N.m^2$$

De donde se obtiene esta tabla de valores, que permite trazar la gráfica:

r (Km)	F (N)
63600	980
5720	01212
44700	1984
38200	2717
31800	3920
25400	6144
19100	10870
15900	15680
12700	24577

6.2.



6.3. El área bajo la gráfica representa el trabajo realizado por la fuerza F; la escala se obtiene multiplicando la escala de F por la de r.

6.4. En rigor no hay un intervalo donde la fuerza sea constante: siempre decrece al crecer la distancia r. La pendiente es menor a mayores valores de r, pero no se anula. Sin embargo, a efectos prácticos, existen regiones en las que las variaciones son lo suficientemente pequeñas como para poder ser despreciadas. A título ilustrativo, calculemos la variación del peso de un objeto de masa M al alejarse 10 km de la superficie terrestre. Al nivel del suelo pesa:

$$P \cong 10\mathrm{m} / \mathrm{seg}^2.\mathrm{M}$$

y, a 10 km de altura:

$$P' \cong 10\mathrm{m} / \mathrm{seg}^2 . \frac{(6.10^6\mathrm{m})^2\mathrm{M}}{(6.10^6 + 10^3)^2\mathrm{m}^2} = 9{,}997 \ \ \mathrm{M}$$

Entonces, la variación porcentual del peso es:

$$100\frac{P - P'}{P} = 0{,}03\%$$

valor que, en la práctica, suele ser absolutamente irrelevante.

6.5. El área comprendida entre los valores dados puede hallarse contando los cuadraditos elementales que encierra.

$$\text{Área} \cong 6{,}10 \ \ \mathrm{cm}^2$$
$$W \cong 6{,}1 \ \ \mathrm{cm}^2.3{,}3.10^9\,\mathrm{J} / \mathrm{cm}^2 = 2{,}03.10^{10}\,\mathrm{J}$$

6.6. El trabajo también puede calcularse a partir de los potenciales gravitatorios:

$$W = m_V.(V_1 - V_2) = m_V.k_g.m_T.\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = m_V.g.R^2.\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$
$$W = 10^4\mathrm{K}.9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.(6{,}36.10^6\mathrm{m})^2.\left(\frac{1}{31{,}8.10^6\mathrm{m}} - \frac{1}{38{,}2.10^6\mathrm{m}}\right) = +2{,}08.10^{10}\,\mathrm{J}$$

que verifica el resultado anterior.

Actividad 7

7.1. Verdadero.

7.2. Verdadero.

7.3. Verdadero. No importa qué objeto se coloque en el lugar de un satélite, él también se convertirá en satélite. Esto sólo podría objetarse en el caso de colocar un cuerpo de masa comparable con la de la Tierra o, incluso, uno de masa muchísimo mayor; ya no orbitaría tal gigantesco objeto alrededor de la Tierra, sino nuestro planeta alrededor de él.

Haga la prueba de preguntar a sus alumnos si un llavero en lugar de un satélite seguiría en igual movimiento. Algunos responderán que no, que el llavero se caería y el satélite no, porque imaginan que son sus mecanismos internos los que lo mantienen allí.

7.4. Falso; la intensidad de campo no depende de que coloquemos o no objetos sujetos a ella; es siempre la misma, y así los objetos que se ponen en un lugar, reciben una fuerza proporcional a sus masas y, por la segunda ley de Newton, se aceleran igualmente.

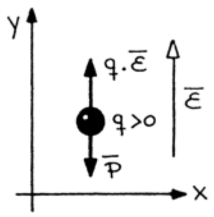
Actividad 8

Imaginemos a la gotita en reposo, de modo que sea nulo su rozamiento con el aire: Actúa el peso hacia abajo; en consecuencia, debería haber una fuerza electrostática de igual intensidad hacía arriba.

Esa fuerza se originará en cargas de signo opuesto ubicadas por encima, o de igual signo por debajo. Millikan usó dos placas cargadas, una arriba y otra abajo, que crean entre ellas un campo E_y = V/d del orden de los 200 V/cm.

8.1. a) Para que la gotita esté en equilibrio, debe verificarse:

$$\sum F = 0 \left| \begin{array}{l} q \,.\, \varepsilon_x = 0 \\ q \,.\, \varepsilon_y - P = 0 \end{array} \right.$$

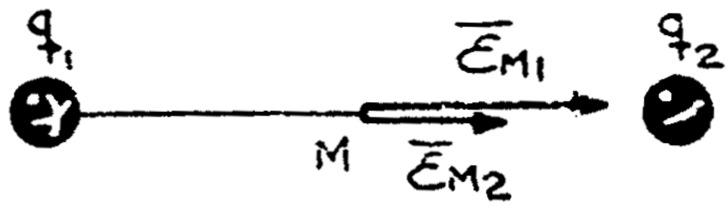


$$\varepsilon_x = 0 \qquad ; \varepsilon_y = \frac{P}{q} = \frac{0{,}04 \ \text{N}}{2{,}5 \,.\, 10^{-6}\,\text{C}} = 16000 \ \text{N/C}$$

b) Para una carga de –8 µ C:

$$\varepsilon_y = \frac{P}{q'} = \frac{0{,}04 \ \text{N}}{-8 \,.\, 10^{-6}\,\text{C}} = -5000 \ \text{N/C}$$

8.2. Por superposición, según el esquema:



$$\varepsilon_M = \varepsilon_{M1} + \varepsilon_{M2}$$

a)

$$\varepsilon_{M1} = k_e . \frac{q_1}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} = 9.10^9 \, N.m^2 / C^2 . \frac{+2.10^{-6} C}{(0{,}1m)^2}$$

$$\varepsilon_{M1} = 1{,}8.10^6 \, N / C \quad (\text{dirigido hacia afuera de } q_1)$$

$$\varepsilon_{M2} = k_e . \frac{q_2}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} = 9.10^9 \, N.m^2 / C^2 . \frac{-8.10^{-6} C}{(0{,}1m)^2}$$

$$\varepsilon_{M2} = -7{,}2.10^6 \, N / C \quad (\text{dirigido hacia afuera de } q_2)$$

Es importante destacar que los signos determinan la orientación del vector campo eléctrico, con respecto a la carga considerada y no con respecto al eje (Ver diagrama).

$$|\,\varepsilon_M\,| = |\,\varepsilon_{M_1}\,| + |\,\varepsilon_{M_2}\,| = 1{,}8.10^6 \, N / C + 7{,}2.10^6 \, N / C = 9.10^6 \, N / C$$

b) El campo eléctrico no puede anularse en el segmento determinado por las cargas, por ser allí ambos campos del mismo sentido. Tomando como origen la posición de q_1 es:

$$\varepsilon_x = 0 \qquad |\,\varepsilon_{x_1}\,| = |\,\varepsilon_{x_2}\,|$$

$$k_e . \frac{|\,q_1\,|}{x^2} = k_e . \frac{|\,q_2\,|}{(x-d)^2} \qquad (\text{Se anula para } x \to \pm \infty)$$

$$\left(\frac{x-d}{x}\right)^2 = \frac{q_2}{q_1} \qquad \frac{x-d}{x} = \pm\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$$

$$\frac{x - 20 \text{ cm}}{x} = \pm\sqrt{\frac{-8 \ \mu C}{+2 \ \mu C}} = \pm 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = +20 \text{ cm} / 3 \\ x_2 = -20 \text{ cm} \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{se descarta} \\ \text{por estar dentro} \\ \text{del segmento} \end{array}$$

8.3. Por superposición

a)

$$V_M = V_{M_1} + V_{M_2} = k_e \cdot \frac{q_1}{|1/2\ d|} + k_e \cdot \frac{q_2}{|1/2\ d|}$$

$$V_M = \frac{2\ .\ k_e}{d}\ .\ (q_1 + q_2) = \frac{2\ .\ 9\ .\ 10^9 N\ .\ m^2}{0{,}2\ m\ .\ C^2}\ .\ (2-8)\ .\ 10^{-6} C$$

$$V_M = -540000\ V$$

b) Tomando como referencia la posición de q_1, debe ser:

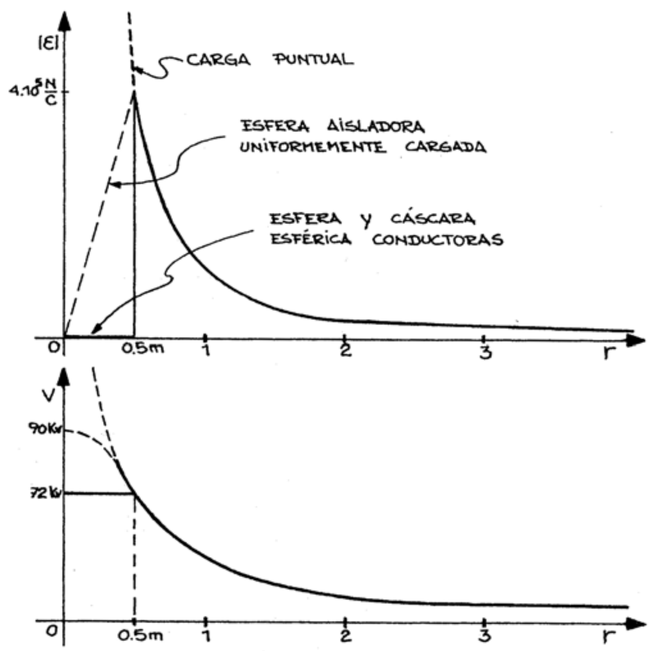
$$V_x = 0 \qquad V_{x1} + V_{x2} = 0 \qquad \text{(Se anula también para } x \to \pm\infty)$$

$$k_e\ .\ \frac{q_1}{|x|} + k_e\ .\ \frac{q_2}{|x-d|} = 0 \qquad \left|\frac{x-d}{x}\right| = -\frac{q_2}{q_1}$$

$$\left|\frac{x-20cm}{x}\right| = -\frac{-8\mu C}{2\mu C} = +4 \qquad \begin{matrix} x-20cm = 4x & x = -20cm/3 \\ x-20cm = -4x & x = +4cm \end{matrix}$$

8.4. Los diagramas se han realizado superpuestos.

Para la carga puntual, a distancias muy próximas a la misma, el campo y el potencial no están acotados. Este crecimiento se mantiene hasta que la carga no pueda ser considerada puntual y deje de valer el modelo.



La esfera maciza y la esfera hueca (cáscara esférica), en tanto sean ambas conductoras, presentan el mismo comportamiento: Exteriormente, el potencial y el campo coinciden con los generados por la carga puntual. Dentro, el campo es nulo, y el potencial constante.

La esfera aisladora cargada uniformemente, por fuera, tiene las mismas características eléctricas que los casos anteriores. En su interior, el campo decrece linealmente, en tanto que el potencial crece cuadráticamente, hasta un máximo. (Ver gravitación: Túnel que atraviesa la Tierra diametralmente.)

Bibliografía

Nivel secundario

- Bueche, F. 1970. *Fundamentos de Física*. Mc Graw-Hill. Méjico.
- Blackwood, Kelly y Bell. 1961. *Física general.* CECSA. Méjico.
- Castiglione, Perazzo, Rela. *Física*. Troquel. Buenos Aires.
- Fernández y Galloni. *Física elemental*. Kapelusz. Buenos Aires. Tomos I y II.
- Maiztegui y Sábato. *Introducción a la Física*. Kapelusz. Buenos Aires. Tomo I.
- Oreari, J. 1975. *Física fundamental*. Limusa. Méjico.

Nivel terciario

- Kip, Arthur. *Fundamentos de electricidad y magnetismo*. Mc Graw-Hill. Méjico.
- Resnick y Halliday. *Física.* CECSA. Méjico.
- Tipler, P. 1977. *Física*. Reverté. Barcelona.

Textos complementarios

- Bondi, Hermann. 1962. *El cosmos*. EUDEBA. Buenos Aires.
- Cohen, Bernard. 1961. *El nacimiento de una nueva física*. EUDEBA. Buenos Aires.
- Couderc, Paul. 1963. *Los eclipses*. EUDEBA. Buenos Aires.
- Gamow, George. 1966. *Gravedad*. EUDEBA. Buenos Aires.
- Jeans, James. 1953. *Historia de la física*. Fondo de Cultura Económica. Méjico.
- Mach, Ernst. *Desarrollo histórico critico de la mecánica*. Espasa Calpe. Buenos Aires.
- Maiztegui y Boido. 1982. *Nociones de física y química para primer año*. Kapelusz. Buenos Aires.
- Oster, Ludwig.1978. *Astronomía moderna*. Reverté. Barcelona.