

# PARA PENSAR Y RESOLVER

## SOLUCIONES .....

$$d. \cos 0^\circ = \frac{F_{4x}}{F_4} \Rightarrow F_{4x} = F_4 \times \cos 0^\circ$$

$$F_{4x} = 2 \text{ N} \times 1$$

$$F_{4x} = 2 \text{ N}$$

$$\sin 0^\circ = \frac{F_{4y}}{F_4} \Rightarrow F_{4y} = F_4 \times \sin 0^\circ$$

$$F_{4y} = 2 \text{ N} \times 0$$

$$F_{4y} = 0$$

### I. Cálculo de las componentes rectangulares de una fuerza

#### Ejercicio N° 1.10

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre y las componentes según  $x$  y según  $y$  de las fuerzas (Figura 1.66).

$$a. F_{1x} = 1 \text{ N} \quad \cos \alpha_1 = 0^\circ \\ F_{1y} = 0 \text{ N}$$

$$b. \cos \alpha_2 = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = F_2 \times \cos \alpha_2 \\ F_{2x} = 1,5 \text{ N} \times \cos 40^\circ \\ F_{2x} = 1,5 \text{ N} \times 0,77 \\ F_{2x} = 1,155 \text{ N}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = F_2 \times \sin \alpha_2 \\ F_{2y} = 1,5 \text{ N} \times \sin 40^\circ \\ F_{2y} = 1,5 \text{ N} \times 0,643 \\ F_{2y} = 0,965 \text{ N}$$

$$c. \cos (180^\circ - \alpha_3) = \frac{F_{3x}}{F_3} \\ \cos 150^\circ = \frac{F_{3x}}{F_3} \Rightarrow F_{3x} = F_3 \times \cos 150^\circ \\ F_{3x} = 0,7 \text{ N} \times (-0,87) \\ F_{3x} = -0,609 \text{ N}$$

$$\sin (180^\circ - \alpha_3) = \frac{F_{3y}}{F_3} \\ \sin 150^\circ = \frac{F_{3y}}{F_3} \Rightarrow F_{3y} = F_3 \times \sin 150^\circ \\ F_{3y} = 0,7 \text{ N} \times 0,5 \\ F_{3y} = 0,35 \text{ N}$$

$$e. \cos 270^\circ = \frac{F_{5x}}{F_5} \Rightarrow F_{5x} = F_5 \times \cos 270^\circ$$

$$F_{5x} = 0,5 \text{ N} \times 0$$

$$F_{5x} = 0 \text{ N}$$

$$\sin 270^\circ = \frac{F_{5y}}{F_5} \Rightarrow F_{5y} = F_5 \times \sin 270^\circ$$

$$F_{5y} = 0,5 \text{ N} \times (-1)$$

$$F_{5y} = -0,5 \text{ N}$$

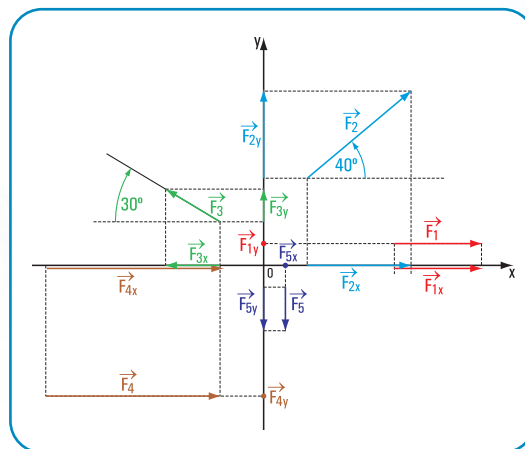


Figura 1.66. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

### Respuesta

Las componentes rectangulares de las fuerzas son:

$F_{1x} = 1 \text{ N}$	$F_{2x} = 1,155 \text{ N}$	$F_{3x} = -0,609 \text{ N}$	$F_{4x} = 2 \text{ N}$	$F_{5x} = 0 \text{ N}$
$F_{1y} = 0 \text{ N}$	$F_{2y} = 0,965 \text{ N}$	$F_{3y} = 0,35 \text{ N}$	$F_{4y} = 0 \text{ N}$	$F_{5y} = -0,5 \text{ N}$

### Ejercicio N° 1.11

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 1.67).

2. Determinamos las componentes de las fuerzas en forma analítica.

a.

$$E \cos 0^\circ = \frac{E_x}{E} \Rightarrow E_x = E \times \cos 0^\circ$$

$$E_x = 20 \text{ N} \times 1$$

$$E_x = 20 \text{ N}$$

$$\text{sen } 0^\circ = \frac{E_y}{E} \Rightarrow E_y = E \times \text{sen } 0^\circ$$

$$E_y = 0 \text{ N}$$

b.

$$\cos 180^\circ = \frac{f_x}{f} \Rightarrow f_x = f \times \cos 180^\circ$$

$$f_x = 0,1 \text{ N} \times (-1) \quad f \equiv 0,01 \text{ kg} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$f_x = -0,1 \text{ N} \quad f = 0,1 \text{ N}$$

$$\text{sen } 180^\circ = \frac{f_y}{f} \Rightarrow f_y = f \times \text{sen } 180^\circ$$

$$f_y = 0 \text{ N}$$

c.

$$\cos 270^\circ = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \times \cos 270^\circ$$

$$P_x = 50 \text{ N} \times 0 \quad P = 5 \text{ kg} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P_x = 0 \text{ N} \quad P = 50 \text{ N}$$

$$\text{sen } 270^\circ = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \times \text{sen } 270^\circ$$

$$P_y = 50 \text{ N} \times (-1)$$

$$P_y = -50 \text{ N}$$

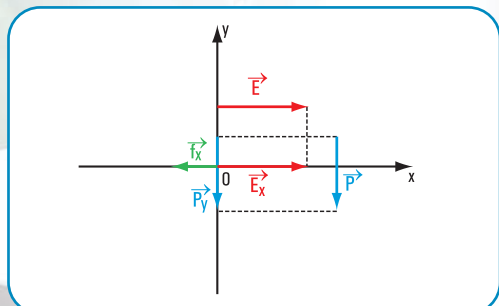


Figura 1.67. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

Respuesta: las componentes rectangulares son

$E_x = 20 \text{ N}$	$E_y = 0 \text{ N}$
$f_x = -0,1 \text{ N}$	$f_y = 0 \text{ N}$
$P_x = 0 \text{ N}$	$P_y = -50 \text{ N}$

### III. Momento de una fuerza respecto de un punto

#### Problema N° 1.15

En el consultorio odontológico

1. Dibujamos el esquema de sólido libre con las componentes de  $\vec{J}$ :  $\vec{J}_x$ ;  $\vec{J}_y$  (Figura 1.68).

El efecto de  $\vec{J}$  es un giro provocado por el momento de  $\vec{J}$  respecto de  $a$ .

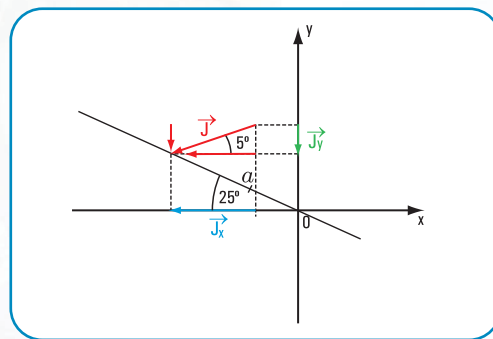


Figura 1.68. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

2. Hallamos el módulo de cada una de las componentes:  $J_x$ ;  $J_y$ .

$$\cos 5^\circ = \frac{J_x}{J} \Rightarrow J_x = J \times \cos 5^\circ$$

$$J_x = 12 \text{ N} \times 0,996$$

$$J_x = 11,95 \text{ N} \quad \text{componente de } \vec{J} \text{ según } x.$$

$$\text{sen } 5^\circ = \frac{J_y}{J} \Rightarrow J_y = J \times \text{sen } 5^\circ$$

$$J_y = 12 \text{ N} \times 0,087$$

$$J_y = 1,044 \text{ N} \quad \text{componente de } \vec{J} \text{ según } y.$$

3. Hallamos las distancias al punto  $a$  de las componentes  $J_x$ ;  $J_y$ ;  $x_1$ ;  $y_1$  (Figura 1.69).

**Cálculo de  $x$**

$$\cos 25^\circ = \frac{x}{25 \text{ cm}} \Rightarrow x = 25 \text{ cm} \times \cos 25^\circ$$

$$x = 25 \text{ cm} \times 0,906$$

$$x = 22,65 \text{ cm}$$

**Cálculo de  $x_2$**

$$\cos 25^\circ = \frac{x_2}{10 \text{ cm}} \Rightarrow x_2 = 10 \text{ cm} \times \cos 25^\circ$$

$$x_2 = 10 \text{ cm} \times 0,906$$

$$x_2 = 9,06 \text{ cm}$$

**Cálculo de  $x_1$**

$$x_1 = x - x_2$$

$$x_1 = 22,65 \text{ cm} - 9,06 \text{ cm}$$

$$x_1 = 13,59 \text{ cm}$$

**Cálculo de  $y$**

$$\sin 25^\circ = \frac{y}{25 \text{ cm}} \Rightarrow y = 25 \text{ cm} \times \sin 25^\circ$$

$$y = 25 \text{ cm} \times 0,422$$

$$y = 10,55 \text{ cm}$$

**Cálculo de  $y_2$**

$$\sin 25^\circ = \frac{y_2}{10 \text{ cm}} \Rightarrow y_2 = 10 \text{ cm} \times \sin 25^\circ$$

$$y_2 = 10 \text{ cm} \times 0,422$$

$$y_2 = 4,22 \text{ cm}$$

**Cálculo de  $y_1$**

$$y_1 = y - y_2$$

$$y_1 = 10,55 \text{ cm} - 4,22 \text{ cm}$$

$$y_1 = 6,33 \text{ cm}$$

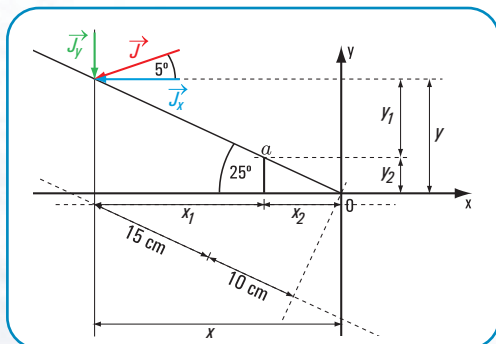


Figura 1.69. (Fuera de escala)

4. Hallamos los momentos de las componentes de la fuerza  $\vec{J}$  respecto de  $a$ :

$$M_{J_y}^a = J_y \times x_1$$

$$M_{J_y}^a = 1,044 \text{ N} \times 13,59 \text{ cm}$$

$$M_{J_y}^a = 14,19 \text{ Ncm} \quad \text{Momento de } J_y \text{ respecto de } a.$$

El signo de  $M_{J_y}^a$  es negativo (-).

$$M_{J_x}^a = J_x \times y_1$$

$$M_{J_x}^a = 11,95 \text{ N} \times 6,33 \text{ cm}$$

$$M_{J_x}^a = 75,64 \text{ N cm} \quad \text{Momento de } J_x \text{ respecto de } a.$$

El signo de  $M_{J_x}^a$  es negativo (-).

5. Hallamos el momento de  $\vec{J}$  respecto de  $a$ :

$$M_{\vec{J}}^a = M_{J_x}^a + M_{J_y}^a$$

$$M_{\vec{J}}^a = 75,64 \text{ N cm} + 14,19 \text{ N cm} \quad \text{Por el teorema de Varignon}$$

$$M_{\vec{J}}^a = 89,83 \text{ N cm} \quad \text{Momento de } J \text{ respecto de } a.$$

El signo del momento  $\vec{J}$  respecto de  $a$  es negativo (-)

**Respuesta**

1. La fuerza  $\vec{J}$  provoca que el pedal gire debido al momento estático de  $\vec{J}$  respecto de  $a$ .

$$2. M_{\vec{J}}^a = 89,83 \text{ N cm}$$

### III. Traslación de fuerzas

#### Ejercicio N° 1.12

En el punto G aplicamos un sistema nulo de fuerzas (Figura 1.70).

El par  $(\vec{Z}; -\vec{Z})$  determina un momento.

$$M = Z \times r$$

$$M = 0,01 \text{ N} \times 25 \text{ cm}$$

$$M = +0,25 \text{ N cm}$$

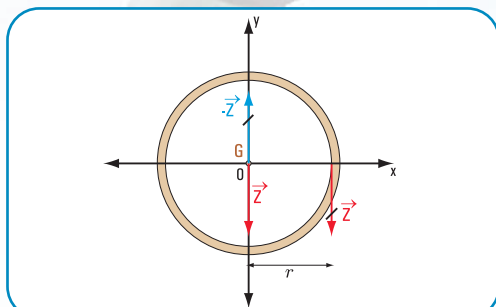


Figura 1.70. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

### Resultado final

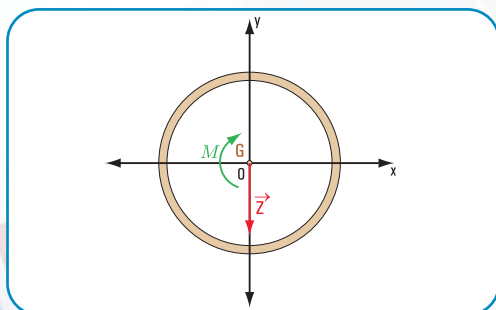


Figura 1.71. En forma gráfica (fuera de escala)

En forma analítica

$\vec{Z}$  de módulo  $Z = 0,01 \text{ N}$

$M = 0,25 \text{ N cm}$

El signo del momento es positivo.

### Respuesta

La traslación de  $\vec{Z}$  al punto G da como resultado la fuerza  $\vec{Z}$  de módulo o intensidad

$Z = 0,01 \text{ N}$  y momento  $M = + 0,25 \text{ N cm}$

### Ejercicio N° 1.13

En el punto  $a$  aplicamos un sistema de fuerzas nulo (Figura 1.72).

El par  $(\vec{T}, -\vec{T})$

determina un momento.

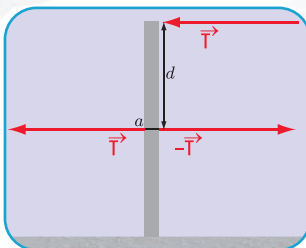


Figura 1.72

$$M = T \times d$$

$$M = 1 \text{ N} \times 2 \text{ cm}$$

$$M = 2 \text{ N cm}$$

El signo del momento es negativo.

### Resultado final

En forma analítica

$$M = - 2 \text{ N cm}$$

$$T = 1 \text{ N}$$

En forma gráfica

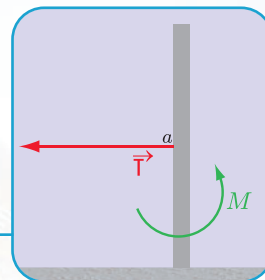


Figura 1.73. Resultado en forma gráfica

### Respuesta

La traslación de la fuerza al punto  $a$  da por resultado la fuerza  $\vec{T}$  de intensidad

$T = 1 \text{ N}$  y el momento  $M = 2 \text{ N cm}$

### Ejercicio N° 1.14

Aplicamos en el punto G un par de fuerzas nulo  $\vec{F}'$ ;  $\vec{F}''$  (Figura 1.74).

El par de fuerzas está dado por el momento

$$M = F \times d$$

$$M = 0,1 \text{ N} \times 1 \text{ cm}$$

$$M = 0,1 \text{ N cm}$$

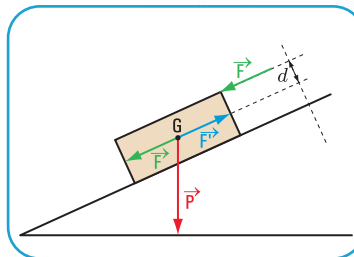


Figura 1.74

### Resultado final

En forma analítica

$$F = 0,1 \text{ N}$$

$$P = 0,2 \text{ N}$$

$$M = 0,1 \text{ N cm}$$

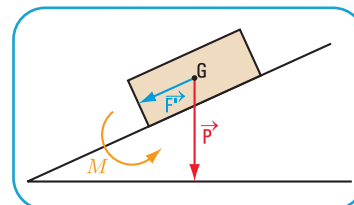


Figura 1.75. En forma gráfica

### Ejercicio N° 1.15

Aplicamos en el punto G sistemas de fuerzas nulas

$$(\vec{P}_1; \vec{P}_1') \text{ y } (\vec{P}_2; \vec{P}_2') \text{ (Figura 1.76).}$$

En forma analítica

$$M_1 = P_1 \times d_1 \Rightarrow M_1 = 10 \text{ N} \times 0,30 \text{ m}$$

$$M_1 = 3 \text{ Nm} \quad \text{el signo de } M_1 \text{ es positivo.}$$

$$M_2 = P_2 \times d_2 \Rightarrow M_2 = 10 \text{ N} \times 0,30 \text{ m}$$

$$M_2 = 3 \text{ Nm} \quad \text{el signo de } M_2 \text{ es negativo.}$$

$$P_T = P_1 + P_2 + P \Rightarrow P_T = 10 \text{ N} + 10 \text{ N} + 110 \text{ N}$$

$$P_T = 130 \text{ N}$$

**Respuesta**

La traslación de la fuerza  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  al punto  $G$  da por resultado la fuerza de módulo  $P_T = 130 \text{ N}$  y los momentos  $M_1 = + 3 \text{ N m}$  y  $M_2 = - 3 \text{ N m}$

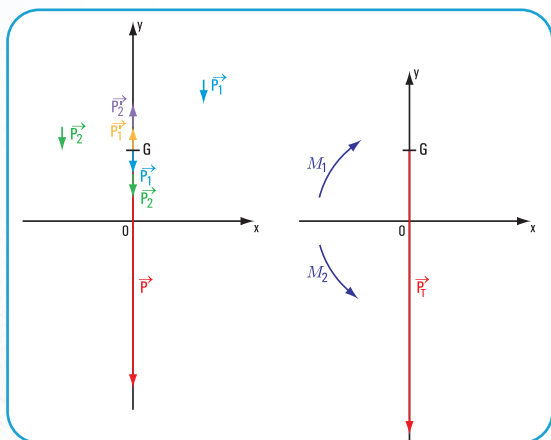


Figura 1.76. En forma gráfica

**Ejercicio N° 1.16**

1. Hallamos los componentes de  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  (Figura 1.77)

a. Componentes de  $\vec{F}_1$

$$F_{1x} = F_1 \times \cos 20^\circ \Rightarrow F_{1x} = 0,1 \text{ N} \times \cos 20^\circ$$

$$F_{1x} = 0,1 \text{ N} \times 0,94$$

$$F_{1x} = 0,094 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \times \sin 20^\circ \Rightarrow F_{1y} = 0,1 \text{ N} \times \sin 20^\circ$$

$$F_{1y} = 0,1 \text{ N} \times \sin 20^\circ$$

$$F_{1y} = 0,034 \text{ N}$$

b. Componentes de  $\vec{F}_2$

$$F_{2x} = F_2 \times \cos 160^\circ$$

$$F_{2x} = 0,2 \text{ N} \times (-0,94)$$

$$F_{2x} = -0,188 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \times \sin 160^\circ$$

$$F_{2y} = 0,2 \text{ N} \times 0,34$$

$$F_{2y} = 0,068 \text{ N}$$

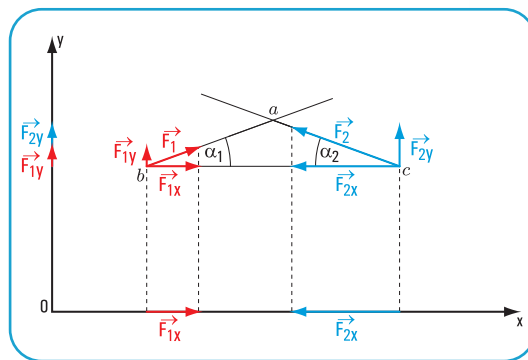


Figura 1.77. Componentes de  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$

c. Componentes totales

$$F_{xT} = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_{xT} = 0,094 \text{ N} + (-0,188 \text{ N})$$

$$F_{xT} = -0,094 \text{ N}$$

$$F_{yT} = F_{1y} + F_{2y}$$

$$F_{yT} = 0,034 \text{ N} + 0,068 \text{ N}$$

$$F_{yT} = 0,102 \text{ N}$$

2. Traslados  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  al punto  $o$

En el punto  $o$  aplicamos pares de fuerzas nulas (**Figuras 1.78 - 1.79**).

Con el propósito de lograr una buena visualización del procedimiento gráfico, la traslación de cada una de las fuerzas la realizamos en gráficos separados.

**Resultado final**

a. Traslación de  $\vec{F}_1$  al punto  $o$

En forma gráfica



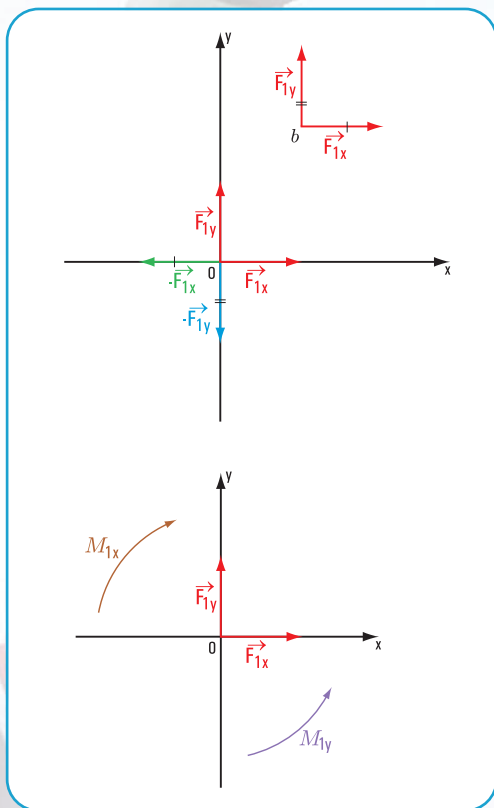


Figura 1.78. (Fuera de escala)

En forma analítica

$$F_{1x} = 0,094 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 0,034 \text{ N}$$

$$M_{1x} = F_{1y} \times y_1$$

$$M_{1x} = 0,094 \text{ N} \times 0,80 \text{ m}$$

$$M_{1x} = 0,0752 \text{ Nm}$$

El signo de  $M_{1x}$  es positivo.

$M_{1x}$  es el momento del par

$$\left( \vec{F}_{1x}; -\vec{F}_{1y} \right)$$

$$M_{1y} = F_{1x} \times x_1$$

$$M_{1y} = 0,034 \text{ N} \times 0,40 \text{ m}$$

$$M_{1y} = 0,0136 \text{ Nm}$$

El signo de  $M_{1y}$  es negativo.

$M_{1y}$  es el momento del par

$$\left( \vec{F}_{1y}; -\vec{F}_{1x} \right)$$

b. Traslación de  $\vec{F}_2$  al punto o

En forma gráfica

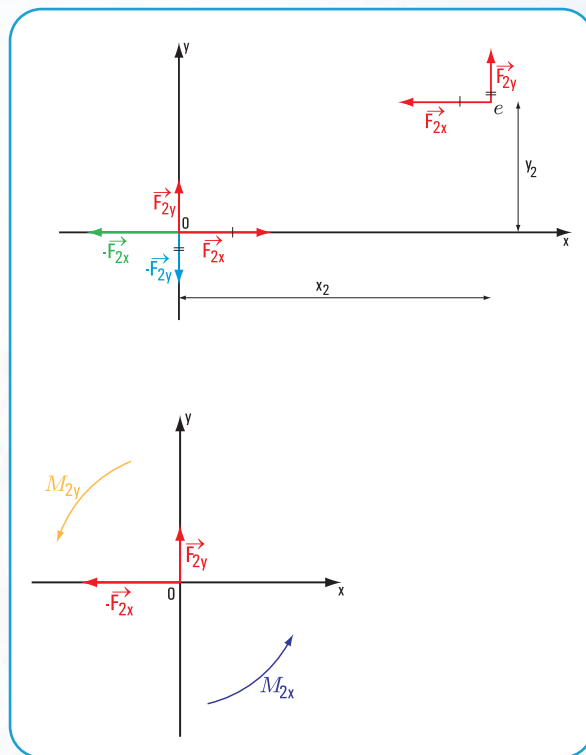


Figura 1.79. (Fuera de escala)

En forma analítica

$$F_{2x} = (-0,188) \text{ N}$$

$$F_{2y} = 0,068 \text{ N}$$

$$M_{2x} = F_{2y} \times y_2$$

$$M_{2x} = 0,188 \text{ N} \times 0,80 \text{ m}$$

El signo de  $M_{2x}$  es negativo.

$$M_{2x} = 0,1504 \text{ Nm}$$

$M_{2x}$  es el momento del par

$$\left( F_{2y}; -F_{2x} \right)$$

$$M_{2y} = F_{2x} \times x_2$$

$$M_{2y} = 0,068 \text{ N} \times 0,90 \text{ m}$$

El signo de  $M_{2y}$  es negativo.

$$M_{2y} = 0,0612 \text{ Nm}$$

$M_{2y}$  es el momento del par

$$\left( F_{2y}; -F_{2y} \right)$$

3. El resultado final lo visualizamos en un solo gráfico (Figura 1.80).

$$F_{xT} = -0,094 \text{ N}$$

$$F_{yT} = 0,102 \text{ N}$$

$$M_{xT} = M_{1x} + M_{2x}$$

$$M_{xT} = 0,0752 \text{ N m} + (-0,1504 \text{ N m})$$

$$M_{xT} = -0,0752 \text{ N m}$$

$$M_{yT} = M_{1y} + M_{2y}$$

$$M_{yT} = -0,0136 \text{ N m} - 0,0612 \text{ N m}$$

$$M_{yT} = -0,0748 \text{ N m}$$

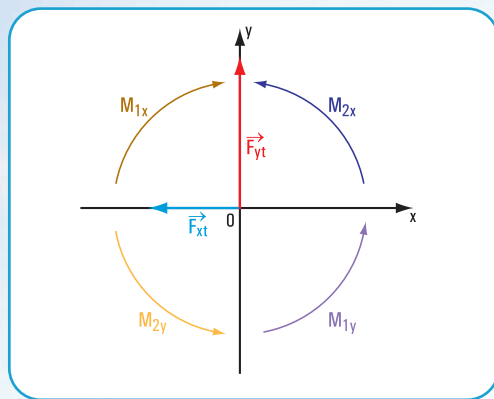


Figura 1.80

### Respuesta

La traslación del sistema  $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ , dada por sus componentes

$\left( \vec{F}_{1x}; \vec{F}_{1y} \right)$  y  $\left( \vec{F}_{2x}; \vec{F}_{2y} \right)$  da por resultado:

1)  $\vec{F}_{xT}$  con intensidad  $F_{xT} = -0,094 \text{ N}$

2)  $\vec{F}_{yT}$  con intensidad  $F_{yT} = 0,102 \text{ N}$

3)  $M_{xT}$  con intensidad  $M_{xT} = -0,0752 \text{ N m}$

4)  $M_{yT}$  con intensidad  $M_{yT} = -0,0748 \text{ N m}$

### Problema N° 1.16

*La familia Montesión limpia su casa*

#### Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 1.81).

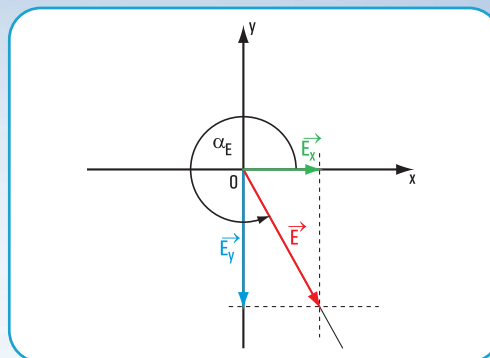


Figura 1.81. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

Hacemos coincidir el centro de coordenadas con el punto de apoyo de las manos de Cecilia en el mango de la lustradora.

Aplicamos las ecuaciones de proyección sobre los ejes  $x$  e  $y$

$$\begin{cases} \text{Pr } oy_x \vec{E} = E \cos \alpha_E \Rightarrow E_x = 25 \text{ N} \times \cos 310^\circ \\ \text{Pr } oy_y \vec{E} = E \sin \alpha_E \Rightarrow E_y = 25 \text{ N} \times \sin 310^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = 25 \text{ N} \times 0,64 \Rightarrow E_x = 16 \text{ N} \\ E_y = 25 \text{ N} \times (-0,77) \Rightarrow E_y = -19,25 \text{ N} \end{cases}$$

### Respuesta

La intensidad de la componente horizontal es  $E_x = 16 \text{ N}$  y la intensidad de la componente vertical  $E_y = -19,25 \text{ N}$ . La fuerza  $\vec{E}_x$  provoca el movimiento de avance de la lustradora hacia delante.

### Problema N° 1.17

*Unos jóvenes juegan con un plano inclinado*

#### Desarrollo

Dibujamos los diferentes diagramas de sólido libre para cada uno de los casos (Figuras 1.82, 1.83, 1.84).

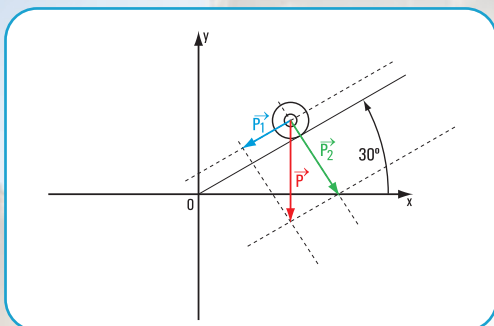


Figura 1.82

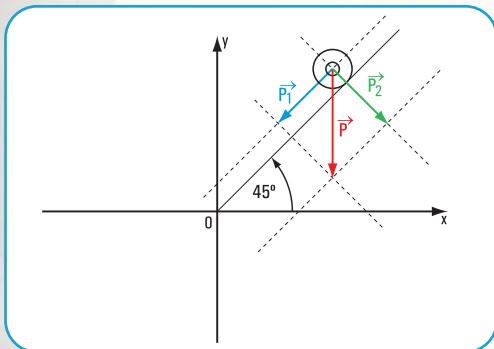


Figura 1.83

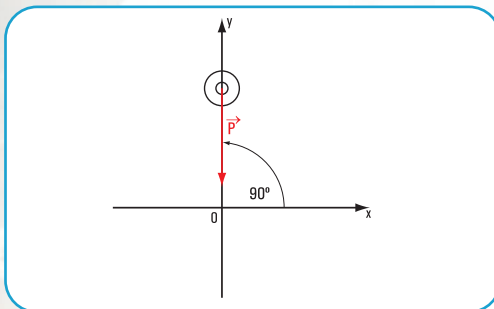


Figura 1.84

Cálculo de  $P_1$  y  $P_2$  (componentes de  $\vec{P}$ ) para cada situación (Figura 1.85):<sup>1</sup>

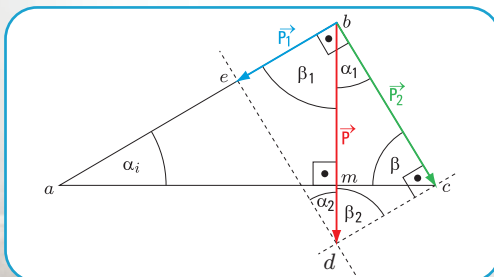


Figura 1.85

Determinación del ángulo  $\alpha_1$  para cada caso

$$\text{En el } \triangle abc \text{ rectángulo en } b \quad \hat{\alpha}_i + \hat{\beta} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\text{En el } \triangle bdc \text{ rectángulo en } c \quad \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{En } \triangle bdm \text{ rectángulo en } m \quad \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_1 = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

De (1) y (3)

$$\hat{\alpha}_i + \hat{\beta} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_1$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$$

$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$  por ángulos internos entre paralelos

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\pi}{3}; \hat{\beta}_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\pi}{4}; \hat{\beta}_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = 0^\circ; \hat{\beta}_2 = 0^\circ$$

De (2) y (3)

$$\alpha_i + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_i + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_i + \beta_1 = \alpha_i + \beta_1$$

$$\alpha_i = \alpha_i$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Para } \hat{\alpha}_i = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{\alpha}_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$1) \begin{cases} P_1 = 10 \text{ N} \times 0,5 \Rightarrow P_1 = 5 \text{ N} \\ P_2 = 10 \text{ N} \times 0,87 \Rightarrow P_2 = 8,7 \text{ N} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} P_1 = 10 \text{ N} \times \sin 45^\circ \Rightarrow P_1 = 10 \text{ N} \times 0,7071 \\ P_2 = 10 \text{ N} \times \cos 45^\circ \Rightarrow P_2 = 10 \text{ N} \times 0,7071 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 7,07 \text{ N} \\ P_2 = 7,07 \text{ N} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} P_1 = P \times \sin \alpha_i \Rightarrow P_1 = 10 \text{ N} \times \sin \frac{\pi}{2} \\ P_2 = P \times \cos \alpha_i \Rightarrow P_2 = 10 \text{ N} \times \cos \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 10 \text{ N} \\ P_2 = 0 \text{ N} \end{cases}$$

<sup>1</sup> 1. No tomamos en cuenta la fuerza de fricción  $f$ , ni la fuerza normal  $N$ .



**Respuesta**

1. Las fuerzas que intervienen son:

$\vec{P}$  peso de la rueda cuyas componentes son  $\vec{P}_1$  en la dirección de la tabla y  $\vec{P}_2$  perpendicular a la tabla.

$\vec{N}$  fuerza normal de igual dirección y módulo de  $\vec{P}_2$  y de sentido contrario (no se toma en cuenta en este problema);

$\vec{f}$  fuerza de fricción en el punto de contacto entre la rueda y la tabla inclinada (no se toma en cuenta en este problema).

$$2. \text{ Para } \alpha_i = \frac{\pi}{6}; \begin{cases} P_1 = 5\text{ N} \\ P_2 = 8,7\text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{4}; \begin{cases} P_1 = 7,07\text{ N} \\ P_2 = 7,07\text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Para } \alpha_i = \frac{\pi}{2}; \begin{cases} P_1 = 10\text{ N} \\ P_2 = 0\text{ N} \end{cases}$$

3.  $\vec{P}_1$  es máxima para  $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$  (tabla en posición vertical) y es mínima para  $\alpha_i = \frac{\pi}{6}$

**Problema N° 1.18****Vamos al circo****Desarrollo**

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 1.86). Ubicamos en el sistema de coordenadas con centro en el punto  $o$

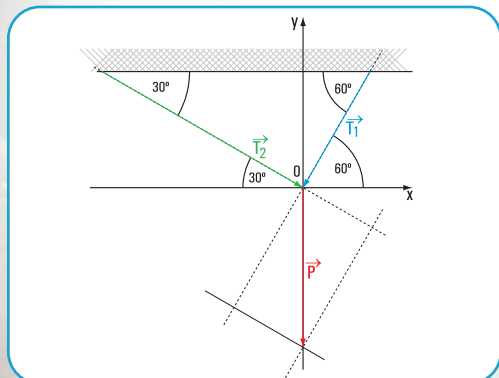


Figura 1.86. Diagrama de sólido libre (fuera de escala)

1. Fuerzas actuantes  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$ .

2. Aplicamos las ecuaciones de proyección sobre  $x$  y sobre  $y$ .

Denominamos  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$  a las fuerzas componentes de  $\vec{P}$ . Suponemos que los sentidos son los indicados en la figura 1.86.

$$\begin{cases} P \cos 270^\circ = T_1 \times \cos 240^\circ + T_2 \times \cos 330^\circ \\ P \sin 270^\circ = T_1 \times \sin 240^\circ + T_2 \times \sin 330^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = T_1 \times (-0,5) \text{ N} + T_2 \times (0,87) \text{ N} \\ 500\text{ N}(-1) = T_1 \times (-0,87) \text{ N} + T_2 \times (-0,5) \text{ N} \end{cases}$$

$$|T_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0,87 \\ -500 & -0,5 \\ -0,5 & 0,87 \\ -0,87 & -0,5 \end{vmatrix} \Rightarrow |T_1| = \frac{435}{0,25 + 0,76} \text{ N}$$

$$|T_1| = \frac{435}{1,01} \text{ N}$$

$$|T_1| = 431 \text{ N}$$

$$|T_2| = \begin{vmatrix} -0,5 & 0 \\ -0,87 & -500 \end{vmatrix} \frac{1}{1,01}$$

$$|T_2| = \frac{250}{1,01} \text{ N}$$

$$|T_2| = 247,5 \text{ N}$$

3. Determinación de  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  para  $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$ .

Analizamos el triángulo de fuerzas (Figura 1.87)

Si  $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$  el  $\triangle oab$  es isósceles  $\Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ .

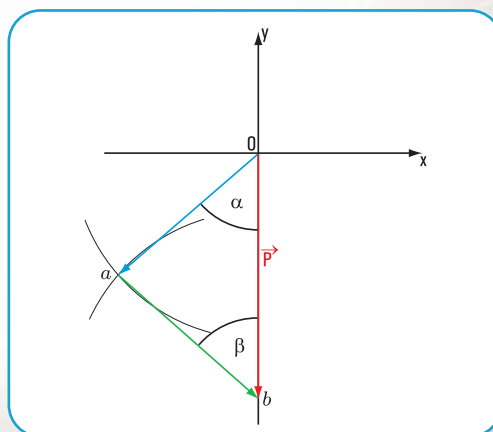


Figura 1.87. Triángulo de fuerzas

4. La componente es mayor del lado del mayor ángulo que forma la cuerda con la barra seguramente es esta cuerda la que tiene más probabilidad de romperse.

### Respuesta

1. Las fuerzas actuantes son:  $\vec{P}$ ,  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$

2. Las fuerzas componentes de  $\vec{P}$  tienen intensidad:

$$T_1 = 431 \text{ N}$$

$$T_2 = 247,5 \text{ N}$$

3. La relación que debe existir entre  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  para que las componentes tengan la misma intensidad es que  $\alpha = \beta$ .

4. El mayor módulo se encuentra del lado del mayor ángulo y la menor intensidad para el menor ángulo.

## CAPÍTULO 2

### PENSAR Y RESOLVER .....

#### Desarrollo y resolución de los ejercicios y problemas

##### Ejercicio N° 2.3

##### Desarrollo

##### Método analítico

Aplicamos el siguiente sistema de ecuaciones para el cálculo de  $R_x$ ,  $R_y$  y  $M_R^O$ .

$$\begin{cases} R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \\ R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 \\ M_R^O = P_1 \sin \alpha_1 \times d_1 + P_2 \sin \alpha_2 \times d_2 + P_3 \sin \alpha_3 \times d_3 \end{cases}$$

$$R_x = 4 \text{ N} \cos 90^\circ + 5 \text{ N} \cos 180^\circ + 6 \text{ N} \cos 270^\circ$$

$$R_x = -5 \text{ N}$$

$$R_y = 4 \text{ N} \sin 90^\circ + 5 \text{ N} \sin 180^\circ + 6 \text{ N} \sin 270^\circ$$

$$R_y = -2 \text{ N}$$

$$M_R^O = -4 \text{ N} \times 2 \text{ cm} - 5 \text{ N} \times 2 \text{ cm} + 6 \text{ N} \times 1 \text{ cm}$$

$$= -12 \text{ N cm}$$

### Cálculo del módulo de $\vec{R}$

Aplicamos una de las consecuencias del Teorema de Pitágoras

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_x^2}$$

$$R = \sqrt{(-2 \text{ N})^2 + (-5 \text{ N})^2}$$

$$R = \sqrt{4 \text{ N}^2 + 25 \text{ N}^2}$$

$$R = \sqrt{29 \text{ N}^2}$$

$$R = 5,4 \text{ N}$$

### Cálculo de la dirección y sentido de $\vec{R}$

Recordemos que la dirección y sentido de  $\vec{R}$  están dados por el valor del ángulo que forma el eje  $x$  con la recta de acción de la resultante.

$$\text{tg } R = \frac{-2 \text{ N}}{-5 \text{ N}} \Rightarrow \text{tg } R = 0,4$$

$$R = \arctg 0,4$$

$$R = 22^\circ, \text{ este valor se obtiene por calculadora}$$

$$\text{El valor real es } R = 180^\circ + 22^\circ$$

$$R = 202^\circ$$

### Cálculo del valor de la distancia del punto $O$ a la recta de acción de la fuerza

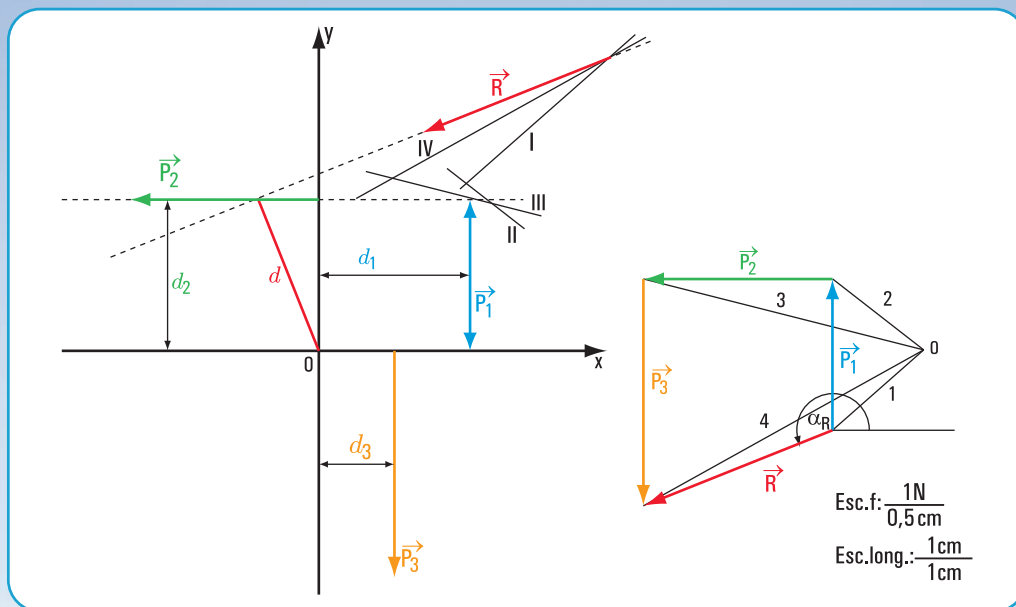
$$M_R^O = -12 \text{ N cm} \Rightarrow M_R^O = R \cdot d$$

$$d = \frac{M_R^O}{R}$$

$$d = \frac{12 \text{ N cm}}{5,4 \text{ N}}$$

$$d = 2,22 \text{ cm}$$

Verificación mediante método gráfico (Figura 2.49) en la página siguiente.

Figura 2.49. Determinación de  $\vec{R}$  en forma gráfica

Comparados los valores obtenidos por medio del método analítico con los del método gráfico, observamos que la diferencia es la admisible

Método analítico	$R = 5,4 \text{ N}$	$\alpha_R = 202^\circ$	$d = 2,22 \text{ cm}$
Método gráfico	$R = 5,4 \text{ N}$	$\alpha_R = 201^\circ$	$d = 2,2 \text{ cm}$

## Ejercicio N° 2.4

## Desarrollo

## Método analítico

Aplicamos el siguiente sistema de ecuaciones para el cálculo de  $R_x$ ,  $R_y$  y  $M_R^O$ .

$$\begin{cases} R_x = T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 + T_3 \cos \alpha_3 \\ R_y = T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 + T_3 \sin \alpha_3 \\ M_R^O = T_1 \times d_1 + T_2 \times d_2 + T_3 \sin \alpha_3 \times d_3 \end{cases}$$

$$R_x = 6 \text{ N} \cos 0^\circ + 3 \text{ N} \cos 270^\circ + 2 \text{ N} \cos 45^\circ$$

$$R_x = 7,42 \text{ N}$$

$$R_y = 6 \text{ N} \sin 0^\circ + 3 \text{ N} \sin 270^\circ + 2 \text{ N} \sin 45^\circ$$

$$R_y = -1,59 \text{ N}$$

$$M_R^O = 6 \text{ N} \times 3 \text{ cm} + 3 \text{ N} \times 5 \text{ cm} +$$

$$+ 2 \text{ N} \sin 45^\circ \times 0 \text{ cm} \Rightarrow M_R^O = 33 \text{ N cm}$$

Cálculo del módulo de  $\vec{R}$ 

Aplicamos una de las consecuencias del Teorema de Pitágoras

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(7,42 \text{ N})^2 + (-1,59 \text{ N})^2}$$

$$R = \sqrt{55 \text{ N}^2 + 2,53 \text{ N}^2}$$

$$R = \sqrt{57,53 \text{ N}^2}$$

$$R = 7,58 \text{ N}$$

Cálculo de la dirección y sentido de  $\vec{R}$ 

Recordemos que la dirección y sentido de  $\vec{R}$  están dados por el valor del ángulo que forma el eje  $x$  con la recta de acción de la resultante.

$$\text{tg } R = \frac{-1,59 \text{ N}}{7,42 \text{ N}} \Rightarrow \text{tg } R = -0,21$$

$$R = \arctg(-0,21)$$

$$R = -12^\circ, \text{ este valor se obtiene}$$

El valor real es

$$R = 360^\circ - 12^\circ \quad \text{por calculadora}$$

$$R = 348^\circ$$

**Cálculo del valor de la distancia del punto  $o$  a la recta de acción de la fuerza**

$$M_R^o = 33 \text{ N cm} \Rightarrow M_R^o = R \cdot d$$

$$d = \frac{|M_R^o|}{R}$$

$$d = \frac{33 \text{ N cm}}{7,58 \text{ N}}$$

$$d = 4,35 \text{ cm}$$

**Verificación mediante método gráfico (Figura 2.50).**

Comparados los valores obtenidos por medio del método analítico con los del método gráfico, observamos que la diferencia es la admisible.

Método analítico	$R = 7,58 \text{ N}$	$\alpha_R = 348^\circ$	$d = 4,35 \text{ cm}$
Método gráfico	$R = 7,4 \text{ N}$	$\alpha_R = 348^\circ$	$d = 4,2 \text{ cm}$

### Ejercicio N° 2.5

#### Desarrollo

#### Método analítico

Aplicamos el siguiente sistema de ecuaciones para el cálculo de  $R_x$ ,  $R_y$  y  $M_R^o$ .

$$\begin{cases} R_x = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 \\ R_y = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 \\ M_R^o = S_1 \sin \alpha_1 \times d_{1x} + S_2 \sin \alpha_2 \times d_{2x} + S_3 \sin \alpha_3 \times d_{3x} + \\ + S_1 \cos \alpha_1 \times d_{1y} - S_2 \cos \alpha_2 \times d_{2y} \end{cases}$$

$$R_x = 2 \text{ N} \cos 30^\circ + 4 \text{ N} \cos 150^\circ + 6 \text{ N} \cos 180^\circ$$

$$R_x = -7,73 \text{ N}$$

$$R_y = 2 \text{ N} \sin 30^\circ + 4 \text{ N} \sin 150^\circ + 6 \text{ N} \sin 180^\circ$$

$$R_y = 3 \text{ N}$$

$$M_R^o = 1,73 \text{ N} \times 1 \text{ cm} - 1 \text{ N} \times 2 \text{ cm} - 0,39 \text{ N cm} \Rightarrow$$

$$M_R^o = -0,66 \text{ N cm}$$

#### Cálculo del módulo de $\vec{R}$

Aplicamos una de las consecuencias del Teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(-7,73 \text{ N})^2 + (3 \text{ N})^2}$$

$$R = \sqrt{59,8 \text{ N}^2 + 9 \text{ N}^2}$$

$$R = \sqrt{68,8 \text{ N}^2}$$

$$R = 8,29 \text{ N}$$

#### Cálculo de la dirección y sentido de $\vec{R}$

Recordemos que la dirección y sentido de  $\vec{R}$  están dados por el valor del ángulo que forma el eje  $x$  con la recta de acción de la resultante.

$$\text{tg } \alpha_R = \frac{3 \text{ N}}{-7,73 \text{ N}} \Rightarrow \text{tg } \alpha_R = -0,39$$

$$\alpha_R = \arctg(-0,39)$$

$$\alpha_R = 21,3^\circ, \text{ este valor se obtiene por calculadora}$$

$$\text{El valor real es } \alpha_R = 180^\circ - 21,3^\circ$$

$$\alpha_R = 158,7^\circ$$

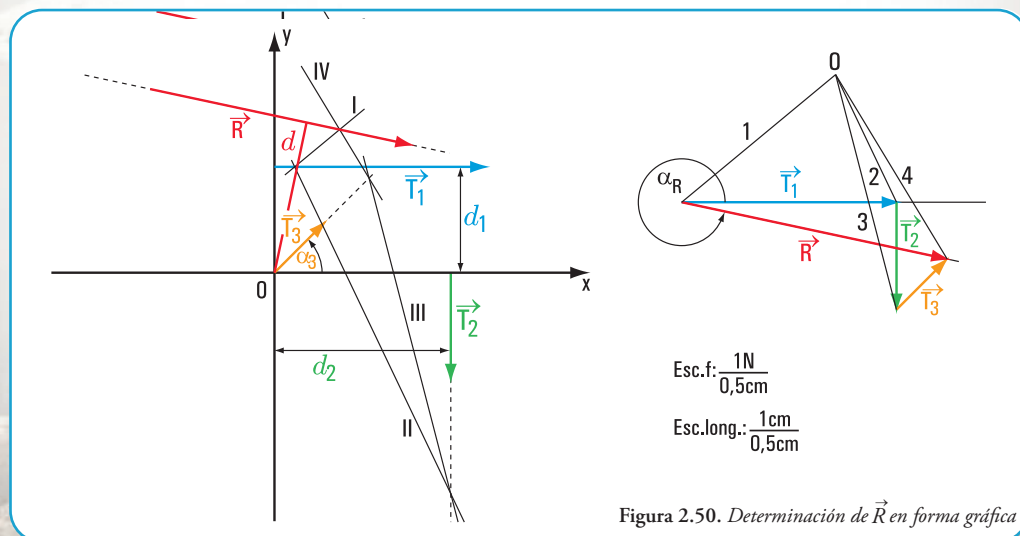


Figura 2.50. Determinación de  $\vec{R}$  en forma gráfica



**Cálculo del valor de la distancia del punto  $o$  a la recta de acción de la fuerza**

$$M_R^O = -0,66 \text{ N cm} \Rightarrow |M_R^O| = R \cdot d$$

$$d = \frac{|M_R^O|}{R}$$

$$d = \frac{0,66 \text{ N cm}}{8,29 \text{ N}}$$

$$d = 0,08 \text{ cm}$$

**Verificación mediante método gráfico (Figura 2.51)**

Comparados los valores obtenidos por medio del método analítico con los del método gráfico, observamos que la diferencia es la admisible.

Método analítico	$R = 8,29 \text{ N}$	$\alpha_R = 158,8^\circ$	$d = 0,08 \text{ cm}$
Método gráfico	$R = 8 \text{ N}$	$\alpha_R = 161^\circ$	$d = (1)^*$

(1)\* Con la escala elegida no se puede determinar en forma gráfica el valor de  $d$ .

### Problema N° 2.11

#### Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.52)

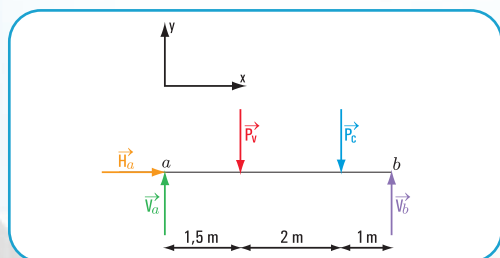


Figura 2.52. Diagrama de sólido libre

Como el sistema de fuerzas está en equilibrio, aplicamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Consideramos dos ecuaciones de momento y una ecuación de proyección.

#### Cálculo de $V_a$

$$\Sigma M_i^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot 4,50 \text{ m} - P_v \cdot 3 \text{ m} - P_c \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$V_a \cdot 4,50 \text{ m} - 60 \text{ k N} \cdot 3 \text{ m} - 75 \text{ k N} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$V_a \cdot 4,50 \text{ m} - 180 \text{ k N m} - 75 \text{ k N} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$V_a \cdot 4,50 \text{ m} = 255 \text{ k N m}$$

$$V_a = \frac{255 \text{ k N m}}{4,50 \text{ m}}$$

$$V_a = 56,67 \text{ k N}$$

#### Cálculo de $V_b$

$$\Sigma M_i^a = 0 \Rightarrow -V_b \cdot 4,50 \text{ m} + P_v \cdot 1,5 \text{ m} + P_c \cdot 3,5 \text{ m} = 0$$

$$-V_b \cdot 4,50 \text{ m} + 60 \text{ k N} \cdot 1,5 \text{ m} + 75 \text{ k N} \cdot 3,5 \text{ m} = 0$$

$$-V_b \cdot 4,50 \text{ m} + 90 \text{ k N m} + 262,5 \text{ k N m} = 0$$

$$-V_b \cdot 4,50 \text{ m} = -352,5 \text{ k N m}$$

$$V_b = \frac{-352,5 \text{ k N m}}{-4,50 \text{ m}}$$

$$V_b = 78,33 \text{ k N}$$

Con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$  verificamos ambos resultados

$$\text{Proy}_y = 0 + V_a - P_v - P_c + V_b$$

$$= 56,67 \text{ k N} - 60 \text{ k N} - 75 \text{ k N} + 78,33 \text{ k N}$$

$$\text{Proy}_y = 0 \text{ Verifica}$$

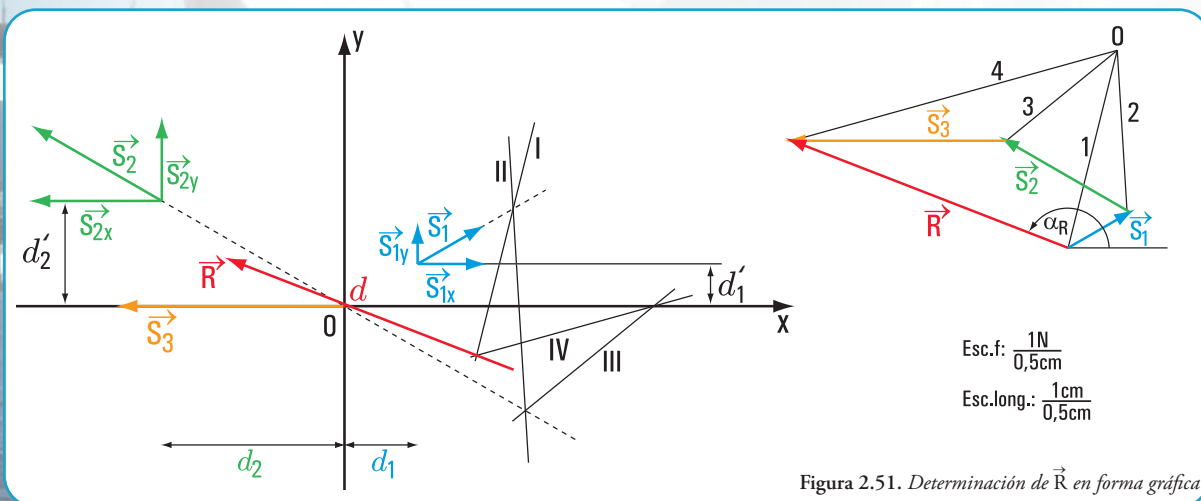


Figura 2.51. Determinación de  $\vec{R}$  en forma gráfica



### Respuesta

Las fuerzas reactivas son

$V_a = 56,67 \text{ k N}$  y  $V_b = 78,33 \text{ k N}$  con dirección perpendicular al eje y hacia arriba (positivo).

### Problema N° 2.12

#### Reacciones en los apoyos de una viga de madera

#### Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.53)

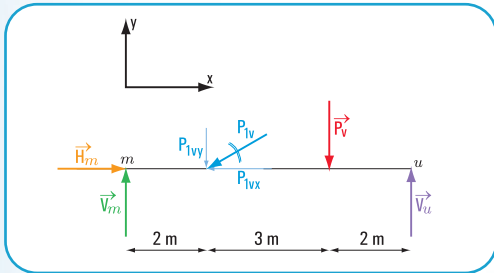


Figura 2.53. Diagrama de sólido libre

Como el sistema de fuerzas está en equilibrio, aplicamos las ecuaciones de equilibrio para el cálculo de fuerzas en los apoyos  $m$  y  $u$ .

#### 1. Calculamos el valor de $V_u$

$$\begin{aligned}\Sigma M_i^m = 0 &\Rightarrow -V_u \cdot 7 \text{ m} + P_v \cdot 5 \text{ m} + P_{1vy} \cdot 2 \text{ m} = 0 \\ \Sigma M_i^u = 0 &\Rightarrow -V_u \cdot 7 \text{ m} + 50 \text{ k N} \cdot 5 \text{ m} + P_{1vx} \cdot 2 \text{ m} = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

#### Calculamos $P_{1vy}$

$$\begin{aligned}\sin \alpha = \frac{P_{1vy}}{P_{1v}} &\Rightarrow P_{1vy} = P_{1v} \cdot \sin \alpha \\ P_{1vy} &= 40 \text{ k N} \sin (180^\circ + 30^\circ) \\ &= 40 \text{ k N} \sin 210^\circ \\ &= -20 \text{ k N}\end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de  $P_{1vy}$  en la expresión matemática (1)

$$\begin{aligned}-V_u \cdot 7 \text{ m} + 250 \text{ k N m} + 20 \text{ k N} \cdot 2 \text{ m} &= 0 \\ -V_u \cdot 7 \text{ m} &= -250 \text{ k N m} - 40 \text{ k N m}\end{aligned}$$

$$V_u = \frac{-290 \text{ k N m}}{-7 \text{ m}}$$

$$V_u = 41,43 \text{ k N}$$

#### 2. Calculamos el valor de $V_m$

$$\begin{aligned}\Sigma M_i^u = 0 &\Rightarrow V_m \cdot 7 \text{ m} - P_{1vy} \cdot 5 \text{ m} - P_v \cdot 2 \text{ m} = 0 \\ V_m \cdot 7 \text{ m} - 20 \text{ k N} \cdot 5 \text{ m} - 50 \text{ k N} \cdot 2 \text{ m} &= 0 \\ V_m \cdot 7 \text{ m} - 100 \text{ k N m} - 100 \text{ k N m} &= 0 \\ V_m \cdot 7 \text{ m} &= 200 \text{ k N m}\end{aligned}$$

$$V_m = \frac{200 \text{ k N m}}{7 \text{ m}}$$

$$V_m = 28,57 \text{ k N}$$

#### 3. Calculamos el valor de $H_m$

$$\Sigma \text{Proy}_x = 0 \Rightarrow H_m - P_{1vx} = 0 \quad (2)$$

#### Calculamos $P_{1vx}$

$$\begin{aligned}\cos \alpha = \frac{P_{1vx}}{P_{1v}} &\Rightarrow P_{1vx} = P_{1v} \cdot \cos \alpha \\ P_{1vx} &= 40 \text{ k N} \cdot \cos (180^\circ + 30^\circ) \\ P_{1vx} &= 40 \text{ k N} \cdot \cos 210^\circ \\ P_{1vx} &= 40 \text{ k N} \cdot (-0,87) \\ P_{1vx} &= -34,8 \text{ k N}\end{aligned}$$

#### Reemplazando la expresión (2)

$$\begin{aligned}H_m - P_{1vx} &= 0 \\ H_m &= P_{1vx} \\ H_m &= 34,8 \text{ k N}\end{aligned}$$

#### 4. Verificamos los resultados obtenidos

Con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$  verificamos ambos resultados.

$$\begin{aligned}\Sigma \text{Proy}_y &= 0 \\ V_m - P_{1vy} - P_{1v} + V_u &= 28,57 \text{ k N} - 20 \text{ k N} - 50 \text{ k N} + 41,43 \text{ k N} \\ &= 0 \quad \text{Verifica}\end{aligned}$$

### Respuesta

Las fuerzas reactivas son:

- a. en el apoyo  $m$   $V_m = 28,57 \text{ k N}$   
 $H_m = 34,8 \text{ k N}$
- b. en el apoyo  $u$   $V_u = 41,43 \text{ k N}$

### Problema N° 2.13

¿Cuál es la luz de una viga de balcón?

## Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.54)

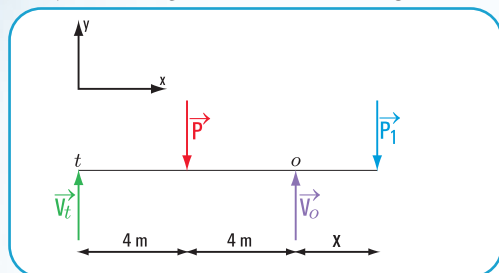


Figura 2.54. Diagrama de sólido libre

$$\begin{aligned}\Sigma M^o &= 0 \\ 197,50 \text{ N} \cdot 8 \text{ m} - 500 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} + 140 \text{ N} \cdot x &= 0 \\ 1.580 \text{ N m} - 2.000 \text{ N m} + 140 \text{ N} \cdot x &= 0 \\ 140 \text{ N} \cdot x &= 2.000 \text{ N m} - 1.580 \text{ N m}\end{aligned}$$

$$x = \frac{420 \text{ N m}}{140 \text{ m}}$$

$$x = 3 \text{ m}$$

## Respuesta

La luz del balcón es  $x = 3 \text{ m}$

## Problema N° 2.14

### Una mina a cielo abierto

## Desarrollo

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre, considerando el eje  $x$  en la dirección de la pendiente y el eje  $y$  perpendicular al eje  $x$  (Figura 2.55)

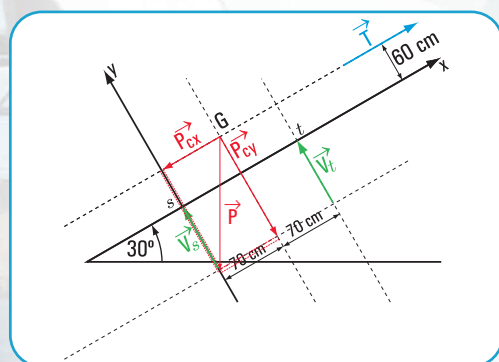


Figura 2.55. Diagrama de sólido libre

2. Hallamos  $P_{cx}$  y  $P_{cy}$  (Figura 2.56)

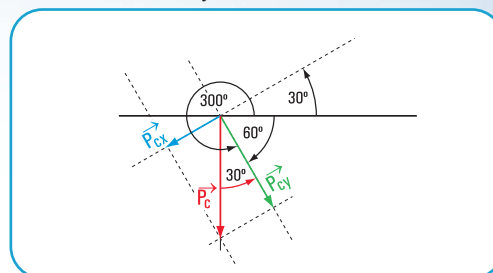


Figura 2.56

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{|P_{cx}|}{|P_c|} \Rightarrow |P_{cx}| = |P_c| \sin 30^\circ \\ |P_{cx}| &= 20 \text{ k N} \cdot 0,5 \\ |P_{cx}| &= 10 \text{ k N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{|P_{cy}|}{|P_c|} \Rightarrow |P_{cy}| = |P_c| \cos 30^\circ \\ |P_{cy}| &= 20 \text{ k N} \cdot 0,87 \\ |P_{cy}| &= 17,4 \text{ k N}\end{aligned}$$

3. Aplicamos las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes

$$\begin{aligned}\Sigma \text{Proy}_x &= 0 \Rightarrow -P_{cx} + T = 0 \\ T &= +P_{cx} \\ T &= 10 \text{ N}\end{aligned}$$

4. Calculamos los valores de  $V_t$  y  $V_s$

$$\begin{aligned}\Sigma M^s &= 0 \\ -V_t \cdot 140 \text{ cm} + P_{cy} \cdot 70 \text{ cm} - P_{cx} \cdot 60 \text{ cm} + T \cdot 60 \text{ cm} &= 0 \\ -V_t \cdot 140 \text{ cm} + 1.218 \text{ k N cm} - 600 \text{ k N cm} + 600 \text{ k N cm} &= 0 \\ -V_t \cdot 140 \text{ cm} &= -1.218 \text{ k N cm} \\ V_t &= \frac{-1.218 \text{ k N cm}}{-140 \text{ cm}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_t &= 8,7 \text{ k N} \\ \Sigma M^t &= 0 \Rightarrow V_s \cdot 140 \text{ cm} - P_{cy} \cdot 70 \text{ cm} = 0 \\ V_s \cdot 140 \text{ cm} - 17,4 \text{ k N} \cdot 70 \text{ cm} &= 0 \\ V_s \cdot 140 \text{ cm} &= 1.218 \text{ k N cm}\end{aligned}$$

$$V_s = \frac{1.218 \text{ k N cm}}{140 \text{ cm}}$$

$$V_s = 8,7 \text{ k N}$$

Verificación:

aplicamos la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\begin{aligned}\Sigma \text{Proy}_y &= 0 \Rightarrow -P_{cy} + V_t + V_s = -17,4 \text{ k N} + 8,7 \text{ k N} + 8,7 \text{ k N} \\ &= 0 \text{ Verifica}\end{aligned}$$

## Respuesta

La fuerza del cable de sostén tiene una intensidad  $T = 10 \text{ kN}$ .

Las fuerzas reactivas en las ruedas  $V_e = 8,7 \text{ kN}$  y  $V_s = 8,7 \text{ kN}$ .

## Problema N° 2.15

*Se instala la marquesina de un edificio público*

### Desarrollo

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.57)

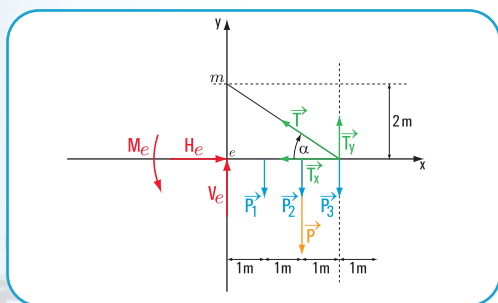


Figura 2.57

2. Hallamos las componentes de la tensión

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{200 \text{ cm}}{300 \text{ cm}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,666 \Rightarrow \hat{\alpha} = 33,69^\circ, \text{ consideramos } \hat{\alpha} = 34^\circ$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \frac{T_x}{T} \Rightarrow T_x = T \cdot (\cos 180^\circ - \hat{\alpha})$$

$$T_x = 120 \text{ kN} \cdot \cos (180^\circ - 34^\circ)$$

$$T_x = -99,5 \text{ kN}$$

$$\sin (180^\circ - \hat{\alpha}) = \frac{T_y}{T} \Rightarrow T_y = T \cdot \sin (180^\circ - \hat{\alpha})$$

$$T_y = 120 \text{ kN} \cdot \sin 146^\circ$$

$$T_y = 67,10 \text{ kN}$$

3. Aplicamos las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes

$$\Sigma M^e = 0$$

$$P_3 \cdot 3 \text{ m} + P_2 \cdot 2 \text{ m} + P_1 \cdot 1 \text{ m} - T_y \cdot 3 \text{ m} + P \cdot 2 \text{ m} - M^e = 0$$

$$150 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} + 150 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} + 150 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} - 67.100 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} + 75.000 \text{ N} \cdot 2 - M^e = 0$$

$$450 \text{ N m} + 300 \text{ N m} + 150 \text{ N m} - 201.300 \text{ N m} + 150.000 \text{ N m} - M^e = 0$$

$$-M^e = 50.400 \text{ N m}$$

$$M^e = -50,400 \text{ kN m}$$

$$\operatorname{Proy}_y = 0 \Rightarrow V_e - P_1 - P_2 - P_3 - P + T_y = 0$$

$$V_e - 150 \text{ N} - 150 \text{ N} - 150 \text{ N} - 75.000 \text{ N} + 67.100 \text{ N} = 0$$

$$V_e = 450 \text{ N} + 75.000 \text{ N} - 67.100 \text{ N}$$

$$V_e = 8.350 \text{ N}$$

$$V_e = 8,350 \text{ kN}$$

$$\Sigma \operatorname{Proy}_x = 0 \Rightarrow H_e - T_x = 0$$

$$H_e = T_x$$

$$H_e = 99,500 \text{ N}$$

$$H_e = 99,5 \text{ kN}$$

## Respuesta

Las reacciones en el empotramiento de la marquesina son:

$$V_e = 8,350 \text{ kN}$$

$$H_e = 99,5 \text{ kN}$$

$$M_e = -50,40 \text{ kN m}$$

## Problema N° 2.16

*La habitación de Vincent en Arlés*

### Desarrollo

1. Hallamos el peso del cuadro  $\Rightarrow P = m \times g$

$$P = 10 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$P = 98,1 \text{ N}$$

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.58)

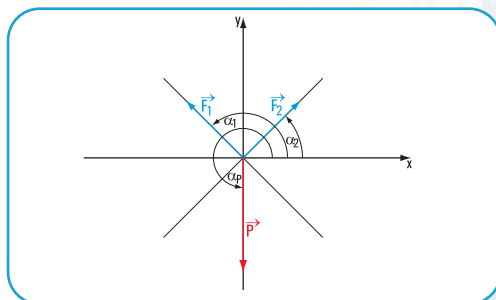


Figura 2.58

El sistema  $(\vec{F}_1; \vec{F}_2 \text{ y } \vec{P})$  está en equilibrio y es un sistema de fuerzas concurrentes en el punto o (repre-

senta al clavo), entonces se cumplen las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes.

$$\begin{cases} \sum \text{Pr oy}_x = 0 \Rightarrow F_1 \times \cos \alpha_2 + F_2 \times \cos \alpha_1 + P \times \cos \alpha_p = 0 \\ \sum \text{Pr oy}_y = 0 \Rightarrow F_1 \times \sin \alpha_2 + F_2 \times \sin \alpha_1 + P \times \sin \alpha_p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \times \cos 45^\circ + F_2 \times \cos 135^\circ + P \times \cos 270^\circ = 0 \\ F_1 \times \sin 45^\circ + F_2 \times \sin 135^\circ + P \times \sin 270^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \times \cos 45^\circ + F_2 \times \cos 135^\circ = 0 \text{ N} \\ F_1 \times \sin 45^\circ + F_2 \times \sin 135^\circ = 98,1 \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \times 0,7071 + F_2 \times (-0,7071) = 0 \\ F_1 \times 0,7071 + F_2 \times (0,7071) = 98,1 \end{cases}$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} 0 & -0,7071 \\ 98,1 & 0,7071 \end{vmatrix} \Rightarrow F_1 = \frac{0 - (-69,37)}{0,50 - (-0,50)}$$

$$F_1 = 69,37 \text{ N}$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} 0,7071 & 0 \\ 0,7071 & 98,1 \end{vmatrix} \Rightarrow F_2 = 69,37 \text{ N}$$

### Respuesta

Las fuerzas en las cuerdas son  $F_1 = 69,37 \text{ N}$  y  $F_2 = 69,37 \text{ N}$

### Problema N° 2.17

#### Niños jugando

#### Desarrollo

1. Hallamos el peso de la escalera y el del chico.

Se parte de  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Peso de la escalera =  $m_e \times g$

Peso de la escalera =  $16 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2$

Peso de la escalera =  $156,96 \text{ N}$

Peso del chico =  $m_c \times g$

Peso del chico =  $40 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2$

Peso del chico =  $392,4 \text{ N}$

2. Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.59).

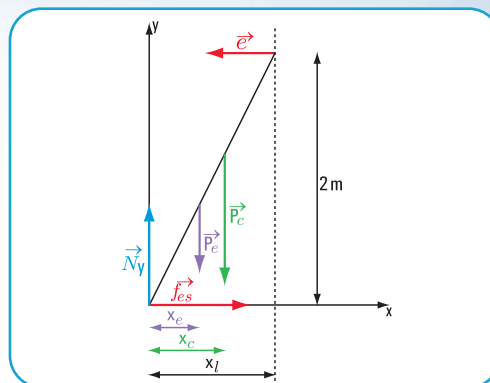


Figura 2.59. Diagrama de sólido libre

Consideramos el sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  con el centro coincidente con el apoyo de la escalera en el piso, el eje  $x$  con el piso y el eje  $y$  perpendicular a  $x$ . Se trata de un sistema de fuerzas no concurrentes. Se cumplen las ecuaciones de equilibrio para fuerzas no concurrentes.

$$\begin{aligned} x_e &= 20 \text{ cm} & \vec{e} & \text{ fuerza reactiva de una hoja de la} \\ x_c &= 30 \text{ cm} & & \text{ escalera sobre la otra.} \\ x_l &= 50 \text{ cm} \\ y_e &= 2 \text{ m} \Rightarrow y_e = 200 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sum \text{Pr oy}_x = 0 \Rightarrow N_x - P_{ex} - P_{cx} + f_{exx} - e_x = 0 \\ \sum \text{Pr oy}_y = 0 \Rightarrow N_y + f_{ey} - P_{ey} - P_{cy} = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \cdot \cos 90^\circ + P_e \cdot \cos 270^\circ + P_c \cdot \cos 270^\circ + f_{ex} \cdot \cos 0^\circ + e \cdot \cos 180^\circ = 0 \\ N \cdot \sin 90^\circ + P_e \cdot \sin 270^\circ + P_c \cdot \sin 270^\circ + f_{ex} \cdot \sin 0^\circ + e \cdot \sin 180^\circ = 0 \\ -e \cdot 2 + P_c \cdot x_c + P_e \cdot x_e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{ex} + e(-1) = 0 \\ N - 156,96 - 392,4 = 0 \\ -2e + 392,4 \cdot 0,30 + 156,96 \cdot 0,20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{ex} &= e \\ N &= 549,36 \text{ N} \\ e &= 74,56 \text{ N} \Rightarrow f_{ex} = 74,56 \text{ N} \end{aligned}$$

**Nota:** de acuerdo al sistema de coordenadas adoptado la fuerza  $\vec{e}$  tiene signo negativo y la fuerza  $\vec{f}_{exx}$ , signo positivo.

### Respuesta

La fuerza de fricción entre la escalera y el suelo tiene como intensidad  $f_{es} = 74,56 \text{ N}$

### Problema N° 2.18

#### El café de noche

#### Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.60). Aplicamos las ecuaciones de proyección sobre los ejes  $x$  e  $y$ .

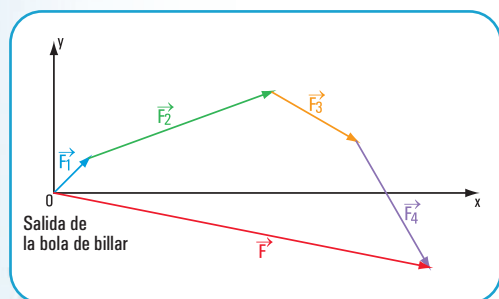


Figura 2.60

$$\begin{cases} F \cdot \sin \alpha = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3 + F_4 \cdot \sin \alpha_4 \\ F \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 + F_4 \cdot \cos \alpha_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \cdot \sin \alpha = 1 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ + 4 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ + 2 \text{ N} \cdot \sin 330^\circ + 3 \text{ N} \cdot \sin 300^\circ \\ F \cdot \cos \alpha = 1 \text{ N} \cdot \cos 45^\circ + 4 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ + 2 \text{ N} \cdot \cos 330^\circ + 3 \text{ N} \cdot \cos 300^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \cdot \sin \alpha = 0,7071 \text{ N} + 1,37 \text{ N} + (-1) + (-2,60) \\ F \cdot \cos \alpha = 0,7071 \text{ N} + 3,76 \text{ N} + 1,73 + 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \cdot \sin \alpha = -1,52 \text{ N} \\ F \cdot \cos \alpha = 7,70 \text{ N} \end{cases} \quad \text{Dividiendo miembro a miembro.}$$

$$\frac{F \cdot \sin \alpha}{F \cdot \cos \alpha} = \frac{-1,52 \text{ N}}{7,70 \text{ N}}$$

$$\text{tg } \alpha = -0,1974$$

$$\alpha = -11,17^\circ \quad \text{valor obtenido en la calculadora.}$$

Como el seno de  $\alpha$  es negativo y el coseno de  $\alpha$  es positivo, el ángulo está en el cuarto cuadrante, entonces:

$$\alpha_{\text{real}} = 360^\circ - 11,17^\circ$$

$$\alpha_{\text{real}} = 348,83^\circ$$

$$F \cdot \cos 348,83^\circ = 7,70 \text{ N}$$

$$F = \frac{7,70 \text{ N}}{\cos 348,83^\circ}$$

$$F = 7,86 \text{ N}$$

### Respuesta

El módulo de la fuerza resultante  $\vec{F}$  es  $F = 7,86 \text{ N}$  y la dirección y sentido está dado por  $\alpha = 348,83^\circ$ .

### Problema N° 2.19

#### El puente de Langlois

#### Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.61).

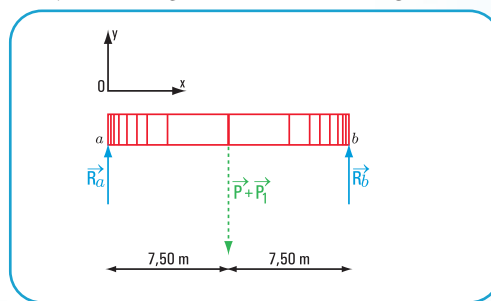


Figura 2.61

#### 1. Cálculo de las reacciones en los apoyos

Aplicamos las ecuaciones de equilibrio: una ecuación de proyección sobre el eje  $y$  y dos ecuaciones de momento respecto de los apoyos

$$\begin{cases} \sum \text{Pr } o y_y = 0, \text{ con esta ecuación verificamos} \\ \sum M^a = 0, \text{ con esta ecuación calculamos } R_b \\ \sum M^b = 0, \text{ con esta ecuación calculamos } R_a \end{cases}$$

#### Cálculo de $R_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow R_a \times 15 \text{ m} - 1.050 \text{ kN} \times 7,50 \text{ m} = 0$$

$$R_a = \frac{1.050 \text{ kN} \times 7,50 \text{ m}}{15 \text{ m}}$$

$$R_a = 525 \text{ kN}$$

#### Cálculo de $R_b$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow -R_b \times 15 \text{ m} + 1.050 \text{ kN} \times 7,50 \text{ m} = 0$$

$$R_b = \frac{-1.050 \text{ kN} \times 7,50 \text{ m}}{-15 \text{ m}}$$



$$R_b = 525 \text{ kN}$$

## 2. Verificación

$$\begin{aligned} \sum \text{Proy}_y = 0 &\Rightarrow R_a + R_b - 1.050 \text{ kN} = ? \\ &\Rightarrow 525 \text{ kN} + 525 \text{ kN} - 1.050 \text{ kN} = 0 \text{ verifica} \end{aligned}$$

## Respuesta

Las reacciones en los apoyos del puente son: 525 kN.

# CAPÍTULO 3

## PENSAR Y RESOLVER

### Desarrollo de problemas

#### Problema N° 3.3

Los perfiles L se encuentran soldados, tal como se muestra en la **figura 3.54**, formando una sola pieza a los efectos del cálculo.

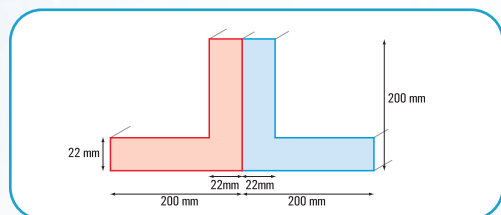


Figura 3.54

El conjunto de ambos perfiles lo podemos expresar como la suma de figuras planas. Diferentes son los modelos que podemos utilizar. Presentamos aquí algunas alternativas posibles, pero el lector podrá utilizar otras.

#### a. Alternativa I - Modelo I (Figura 3.55)

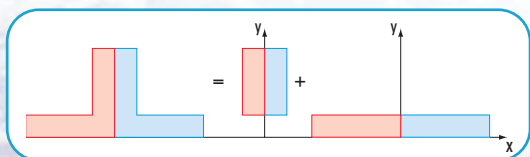


Figura 3.55

#### b. Alternativa II – Modelo II (Figura 3.56)

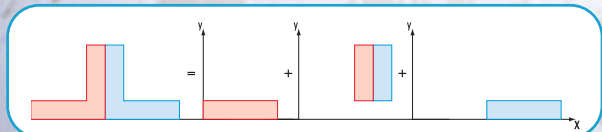


Figura 3.56

#### c. Alternativa III – Modelo III (Figura 3.57)

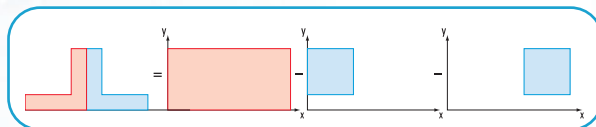


Figura 3.57

Para el desarrollo del problema nosotros elegimos el modelo III.

### 1.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro:

Figuras simples	Superficie $\text{mm}^2$	$x_{Gi}$ $\text{mm}$	$y_{Gi}$ $\text{mm}$	$S_{y_{Gi}}$ $F_i, x_{Gi}$	$S_{x_{Gi}}$ $F_i, y_{Gi}$
Rectángulo 1	$F_1 = 400 \times 200$ $F_1 = 80.000$	200	100	16.000.000	8.000.000
Rectángulo 2	$F_2 = 178 \times 178$ $F_2 = - 31.684$	89	111	- 2.819.876	- 3.516.924
Rectángulo 3	$F_3 = - 31.684$	311	111	- 9.853.724	- 3.516.924
$\Sigma F = 16.632$				$S_{y_G}$ 3.326.400	$S_{x_G}$ 966.152

$$x_G = \frac{3.326.400 \text{ mm}^3}{16.632 \text{ mm}^2}$$

$$x_G = 200 \text{ mm}$$

$$y_G = 58,09 \text{ mm}$$

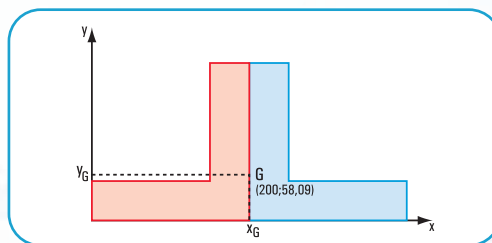


Figura 3.58. (Fuera de escala)

### 1.2. Cálculo de los momentos de inercia baricéntricos

#### Cálculo de $J_{x_G}$ y $J_{y_G}$

##### a. Cálculo del momento de inercia respecto del eje $x_G$

$$J_{x_G} = J_{x_1} - J_{x_2} - J_{x_3}$$

$$J_{x_1} = \frac{400 \text{ mm} \times (200 \text{ mm})^3}{12} + 80.000 \text{ mm}^2 \times (41,91 \text{ mm})^2$$

$$J_{x_1} = 266.666.666 \text{ mm}^4 + 140.515.848 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_1} = 407.182.514 \text{ mm}^4$$

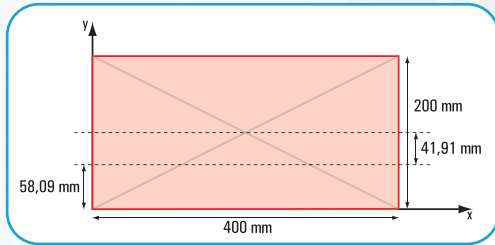


Figura 3.59

$$J_{x_2} = \frac{178 \text{ mm} \times (178 \text{ mm})^3}{12} + 31.684 \text{ mm}^2 \times (52,91 \text{ mm})^2$$

$$J_{x_2} = 83.656.321,33 \text{ mm}^4 + 88.698.347,28 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_2} = 172.354.668,6 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_2} = 172.354.668,6 \text{ mm}^4$$

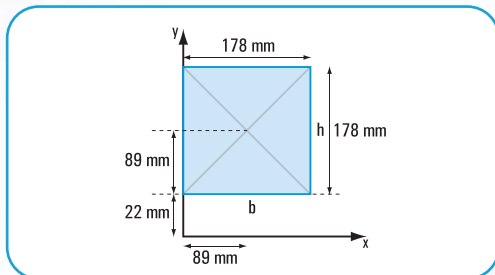


Figura 3.60

$$J_{x_G} = 407.182.514 \text{ mm}^4 - 2 \times 172.354.668,6 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_G} = 407.182.514 \text{ mm}^4 - 344.709.337,2 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_G} = 62.473.176,8 \text{ mm}^4$$

$$J_{x_G} = 6.247,31768 \text{ cm}^4$$

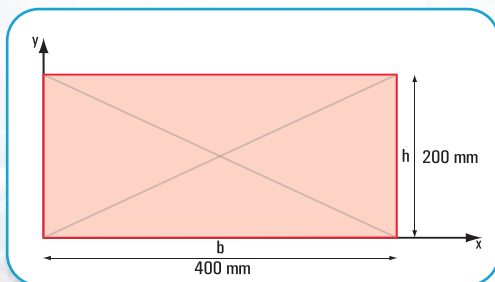


Figura 3.61

$$J_{y_G} = J_{y_1} - J_{y_2} - J_{y_3}$$

$$J_{y_1} = \frac{h \times b^3}{12}$$

$$J_{y_1} = \frac{200 \text{ mm} \times (400 \text{ mm})^3}{12}$$

$$J_{y_1} = 1.066.666.667 \text{ mm}^4$$

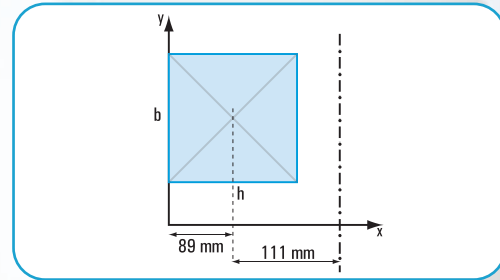


Figura 3.62

$$J_{y_2} = \frac{178 \text{ mm} \times (178 \text{ mm})^3}{12} + 31.684 \text{ mm}^2 \times (111 \text{ mm})^2$$

$$J_{y_2} = 83.656.321 \text{ mm}^4 + 390.378.564 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_2} = 474.034.885 \text{ mm}^4$$

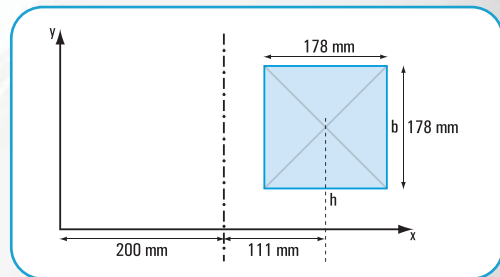


Figura 3.63

$$J_{y_3} = \frac{178 \text{ mm} \times (178 \text{ mm})^3}{12} + 31.684 \text{ mm}^2 \times (111 \text{ mm})^2$$

$$J_{y_3} = 474.034.885 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_G} = J_{y_1} - J_{y_2} - J_{y_3}$$

$$J_{y_G} = 1.066.666.667 \text{ mm}^4 - 2 \times 474.034.885 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_G} = 1.066.666.667 \text{ mm}^4 - 948.069.770 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_G} = 118.596.897 \text{ mm}^4$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas del perfil son:

$$x_G = 200 \text{ mm}$$

$$y_G = 58,09 \text{ mm}$$

Los momentos de inercia baricéntricos son:

$$J_{x_G} = 6.247,31768 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 11.859,69 \text{ cm}^4$$

### Problema N° 3.4

Este problema tiene varios casos. Cada uno corresponde a uno de los recortes de la madera.

#### • Caso 1

#### Desarrollo

##### 1.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

La sección dada puede considerarse como una sección constituida por figuras simples.

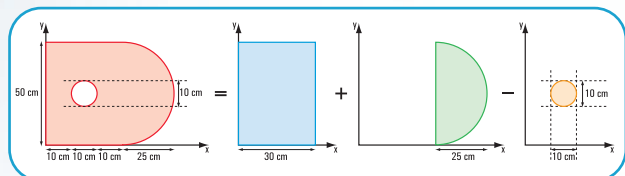


Figura 3.64

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro

Figuras simples	Superficie $\text{cm}^2$	$x_{iG}$ $\text{cm}$	$y_{iG}$ $\text{cm}$	$S_{y_G}$ $x_{iG} \times F_i \text{ cm}^3$	$S_{x_G}$ $y_{iG} \times F_i \text{ cm}^3$
Rectángulo 1	$F_1 = 30 \times 50$ $F_1 = 1.500$	15	25	22.500	37.500
Semicírculo	$F_2 = \frac{\pi \times r^2}{2}$ $F_2 = 981,25$	$x_{iG} = \frac{4 \times 25}{3 \times 3,14} + 30$ $x_{iG} = 40,62$	25	39.858,38	24.531,25
Círculo	$F_3 = \pi \times r_1^2$ $F_3 = 78,5$	15	25	- 1.177,5	- 1.962,5
	$\Sigma F_i = 2.402,75$			$S_{y_G} = 61.180,88$	$S_{x_G} = 60.068,75$

$$x_G = \frac{61.180,88 \text{ cm}^3}{2.402,75 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = \frac{60.068,75 \text{ cm}^3}{2.402,75 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 25,46 \text{ cm}$$

$$y_G = 25 \text{ cm}$$

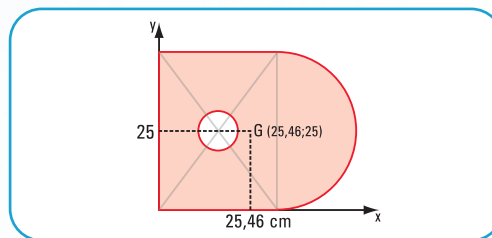


Figura 3.65

##### 1.2. Cálculo de los momentos de inercia baricéntricos

#### Cálculo de $J_{x_G}$ y $J_{y_G}$ (Figura 3.66)

##### a. Cálculo del momento de inercia respecto del eje $x_G$

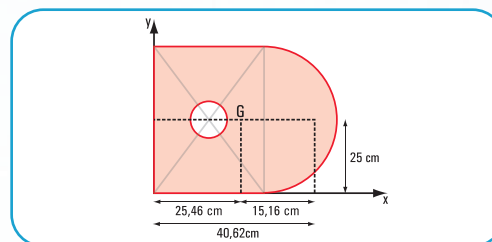


Figura 3.66

$$J_{x_1} = \frac{30 \text{ cm} \times 50^3 \text{ cm}^3}{12} + 1500 \text{ cm}^2 \times 0$$

$$J_{x_1} = 312.500 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{\pi \times r^4}{8}$$

$$J_{x_2} = 153.320,31 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_3} = \frac{\pi \times r_1^4}{4}$$

$$J_{x_3} = \frac{3,14 \times 5^4 \text{ cm}^4}{4}$$

$$J_{x_3} = 490,63 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_G} = J_{x_1} + J_{x_2} - J_{x_3}$$

$$J_{x_G} = 465.329,68 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = J_{y_1} + J_{y_2} - J_{y_3}$$

$$J_{y_1} = \frac{50 \times 30^3}{12} + 1.500 \times 10,46^2$$

$$J_{y_1} = 112.500 + 164.117,4$$

$$J_{y_1} = 276.617,4 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{\pi \times r^4}{8} - \frac{8 \times r^4}{9\pi} + F_2 \cdot (x_2)^2$$

$$J_{y_2} = \left( \frac{3,14 \times 25^4}{8} - \frac{8 \times 25^4}{9 \times 3,14} \right) + 981,25 \cdot (x_2)^2$$

$$J_{y_2} = 153.320,31 - 110.580,33 + 981,25 \times 15,16^2$$

$$J_{y_2} = 42.739,98 + 225.516,37$$

$$J_{y_2} = 268.256,35 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_3} = 490,63 \text{ cm}^4 + 78,5 \text{ cm}^2 \cdot (10,46)^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow J_{y_3} = 9.079 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 276.617,4 \text{ cm}^4 + 268.256,35 \text{ cm}^4 - 9.079 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 535.794,75 \text{ cm}^4$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas son:

$$x_G = 25,46 \text{ cm}$$

$$y_G = 25 \text{ cm}$$

Los momentos de inercia baricéntricos son:

$$J_{x_G} = 465.329,68 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 535.794,75 \text{ cm}^4$$

### • Caso 2

Consideramos la sección compuesta formada por figuras simples. Presentamos tres modelos alternativos.

### Modelos alternativos

#### Modelo 1

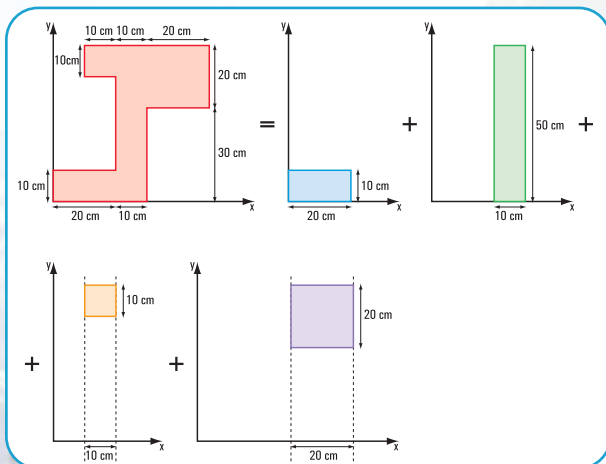


Figura 3.67

#### Modelo 2

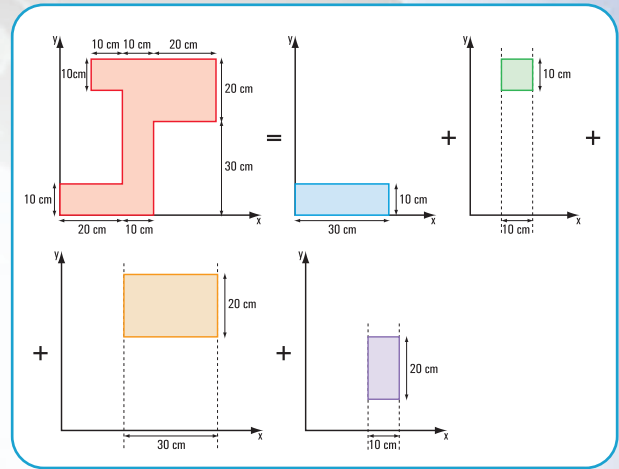


Figura 3.68

#### Modelo 3

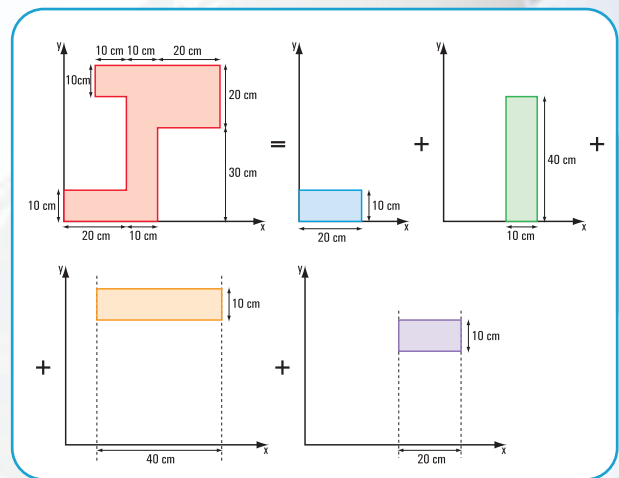


Figura 3.69

Nuestro modelo es el N° 1.

### 2.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Completamos el siguiente cuadro con los resultados

Figuras simples	Superficie $cm^2$	$x_{iG}$ $cm$	$y_{Gi}$ $cm$	$F_i \cdot x_{iG}$ $cm^3$	$F_i \cdot y_{iG}$ $cm^3$
Rectángulo 1	$F_1 = 20 \times 10$ $F_1 = 200$	10	5	2.000	1.000
Rectángulo 2	$F_2 = 10 \times 50$ $F_2 = 500$	25	25	12.500	12.500
Rectángulo 3	$F_3 = 10 \times 10$ $F_3 = 100$	15	45	1.500	4.500
Rectángulo 4	$F_4 = 20 \times 20$ $F_4 = 400$	40	40	16.000	16.000
Total	$\Sigma F = 1.200$			$S_{y_G} = 32.000$	$S_{x_G} = 34.000$

$$x_G = \frac{S_{y_G}}{\sum F_i} \Rightarrow x_G = \frac{32.000 \text{ cm}^3}{1.200 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 26,7 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_{x_G}}{\sum F_i} \Rightarrow y_G = \frac{34.000 \text{ cm}^3}{1.200 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 28,33 \text{ cm}$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas de la sección compuesta son:

$$x_G = 26,7 \text{ cm}$$

$$y_G = 28,33 \text{ cm}$$

### • Caso 3

Consideramos a la sección compuesta formada por figuras simples. Presentamos tres modelos alternativos.

#### Modelo 1

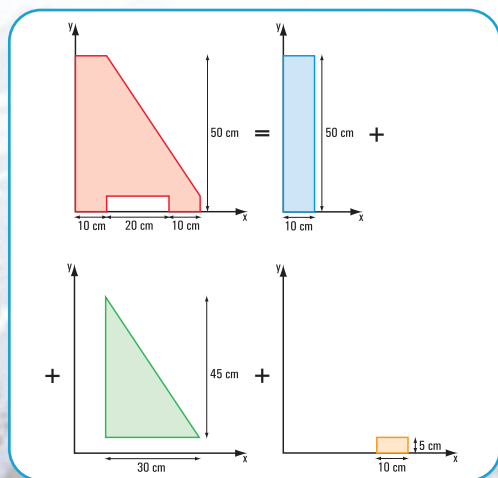


Figura 3.70

#### Modelo 2

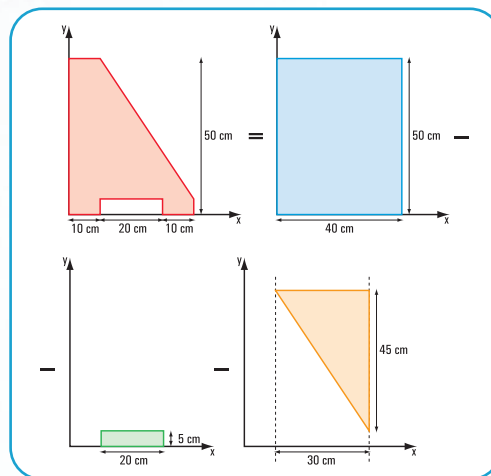


Figura 3.71

#### Modelo 3

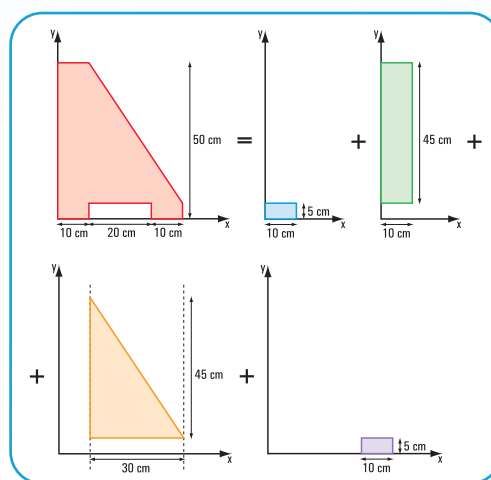


Figura 3.72

Elegimos el modelo 1.

### 3.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro.



Figuras simples	Superficie $cm^2$	$x_{iG}$ $cm$	$y_{iG}$ $cm$	$F_i, x_{iG}$ $cm^3$	$F_i, y_{iG}$ $cm^3$
Rectángulo 1	$F_1 = 10 \times 50$ $F_1 = 500$	5	25	2.500	12.500
Triángulo 2	$F_2 = \frac{45 \times 30}{2}$ $F_2 = 675$	20	20	13.500	13.500
Rectángulo 3	$F_3 = 10 \times 5$ $F_3 = 50$	35	2,5	1.750	125
Total	$\Sigma F_i = 1.225$			$S_{y_G} = 17.750$	$S_{x_G} = 26.125$

$$x_G = \frac{S_{y_G}}{\Sigma F_i} \Rightarrow x_G = \frac{17.750 \text{ cm}^3}{1.225 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 14,49 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_{x_G}}{\Sigma F_i} \Rightarrow y_G = \frac{26.125 \text{ cm}^3}{1.225 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 21,33 \text{ cm}$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas de la sección compuesta son:

$$x_G = 14,49 \text{ cm}$$

$$y_G = 21,33 \text{ cm}$$

### • Caso 4

Consideramos a la sección compuesta formada por figuras simples. Presentamos dos modelos alternativos.

### Modelo 1

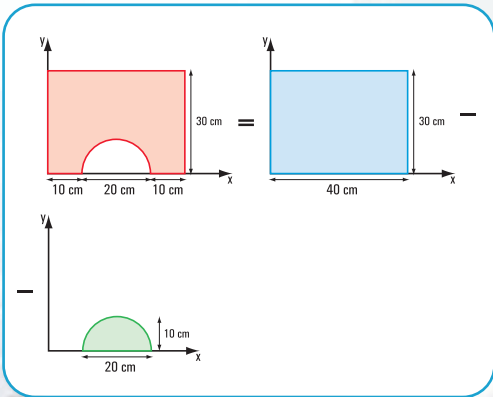


Figura 3.73

### Modelo 2

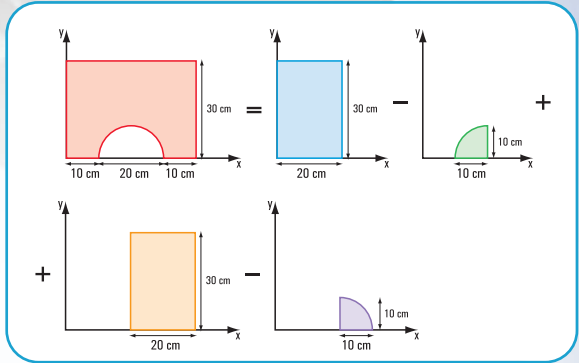


Figura 3.74

Elegimos el modelo 1

### 4.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro.

Figuras simples	Superficie $cm^2$	$x_{iG}$ $cm$	$y_{iG}$ $cm$	$F_i, x_{iG}$ $cm^3$	$F_i, y_{iG}$ $cm^3$
Rectángulo 1	$F_1 = 40 \times 30$ $F_1 = 1.200$	20	15	24.000	18.000
Semicírculo	$F_2 = \frac{\pi \times r^2}{2}$ $F_2 = \frac{3,14 \times 10^2}{2}$ $F_2 = -157$	20	$y_G = \frac{4r}{3\pi}$ $y_G = \frac{4 \times 10}{3 \times 3,14}$ $y_G = 4,25$	-3.140	-667,25
Total	$\Sigma F_i = 1.043$			$S_{y_G} = 20.860$	$S_{x_G} = 17.332,75$

$$x_G = \frac{20.860 \text{ cm}^3}{1.043 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 20 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{17.332,75 \text{ cm}^3}{1.043 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 16,62 \text{ cm}$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas de la sección compuesta son:

$$x_G = 20 \text{ cm}$$

$$y_G = 16,62 \text{ cm}$$

### • Caso 5

### Desarrollo

La sección dada puede considerarse como una sec-

ción constituida por figuras simples.

Los modelos alternativos pueden ser los siguientes:

### Modelo 1

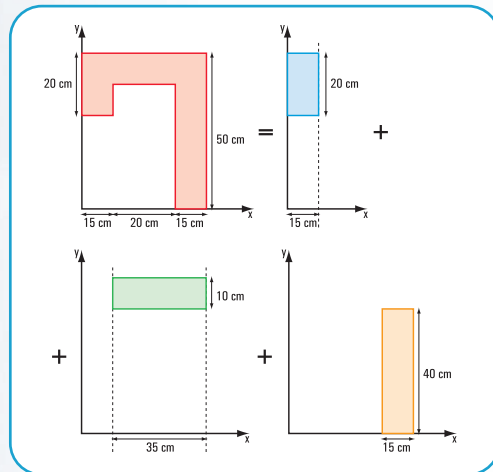


Figura 3.75

### Modelo 2

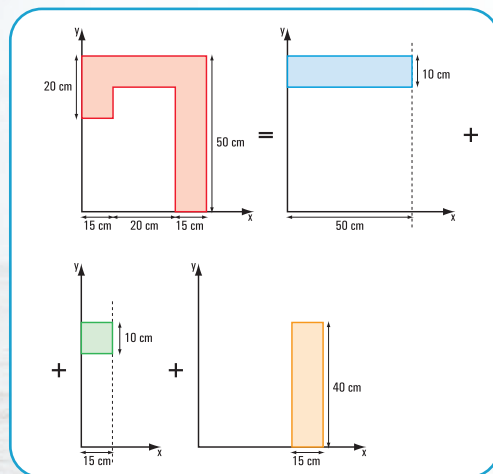


Figura 3.76

### Modelo 3

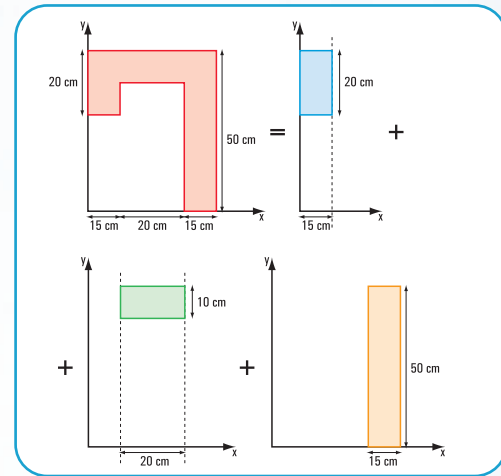


Figura 3.77

Existen otros modelos, pero los dejamos para que el lector los arme.

Nosotros elegimos el tercer modelo.

### 5.1. Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro

Figuras simples	Superficie $cm^2$	$x_{iG}$ $cm$	$y_{iG}$ $cm$	$S_y$ $x_{G_i} \times F_i$ $cm^3$	$S_y$ $y_{G_i} \times F_i$ $cm^3$
Rectángulo 1	$F_1 = 20 \times 15$ $F_1 = 300$	7,5	40	2.250	12.000
Rectángulo 2	$F_2 = 20 \times 10$ $F_2 = 200$	25	45	5.000	9.000
Rectángulo 3	$F_3 = 50 \times 15$ $F_3 = 750$	42,5	25	31.875	18.750
$\Sigma F = 1.250$				39.125	39.750

$$x_G = \frac{39.125 \text{ cm}^3}{1.250 \text{ cm}^2} \quad y_G = \frac{39.750 \text{ cm}^3}{1.250 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 31,3 \text{ cm} \quad y_G = 31,8 \text{ cm}$$

### 5.2. Cálculo de los momentos de inercia baricéntricos

Cálculo de  $J_{x_G}$  y  $J_{y_G}$

$$J_{x_1} = \frac{15 \times 20^3}{12} + 300 \times 8,2^2$$

$$J_{x_1} = 30.172 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{20 \times 10^3}{12} + 200 \cdot (13,2)^2$$

$$J_{x_2} = 36.514,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_3} = \frac{15 \times 50^3}{12} + 750 \cdot (6,8)^2$$

$$J_{x_3} = 156.250 + 34.680$$

$$J_{x_3} = 190.930 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_G} = 257.616,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3}$$

$$J_{y_1} = \frac{20 \times 15^3}{12} + 300 \times 23,8^2$$

$$J_{y_1} = 5.625 + 169.932$$

$$J_{y_1} = 175.557 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{10 \times 20^3}{12} + 20 \times 10 \times 6,3^2$$

$$J_{y_2} = 6.666,67 + 7.938$$

$$J_{y_2} = 14.604,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_3} = \frac{50 \times 15^3}{12} + 750 \times 11,2^2$$

$$J_{y_3} = 108.142,5 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 175.557 \text{ cm}^4 + 14.604,67 \text{ cm}^4 + 108.142,5 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 298.304,17 \text{ cm}^4$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas son:

$$x_G = 31,3 \text{ cm}$$

$$y_G = 31,8 \text{ cm}$$

Los momentos de inercia baricéntricos son:

$$J_{x_G} = 257.616,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_G} = 298.304,17 \text{ cm}^4$$

### III. Vigas Compuestas

#### Ejercicio N° 1

#### Desarrollo

La sección dada en la **figura 3.78** puede considerarse como una sección constituida por la sección del perfil

normal (formado por tres rectángulos), y las dos chapas.

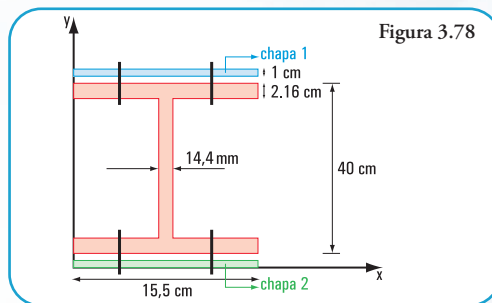


Figura 3.78

#### Cálculo de las coordenadas baricéntricas

Escribimos los resultados en el siguiente cuadro

Figuras simples y/o sección del perfil	Superficie $\text{cm}^2$	$x_{iG}$ $\text{cm}$	$y_{iG}$ $\text{cm}$	$S_{y_G} \times x_{iG} \times F_i$ $\text{cm}^3$	$S_{x_G} \times y_{iG} \times F_i$ $\text{cm}^3$
Chapa 1	$F_{c1} = 15,5 \times 1$ $F_{c1} = 15,5$	7,75	41,5	120,13	643,25
Rectángulo 1	$F_1 = 15,5 \times 2,16$ $F_1 = 33,48$	7,75	39,92	259,47	1.336,52
Rectángulo 2	$F_2 = 51,38$	7,75	21	398,20	1.078,98
Rectángulo 3	$F_3 = 33,48$	7,75	2,08	259,47	69,64
Chapa 2	$F_{c2} = 15,5 \times 1$ $F_{c2} = 15,5$	7,75	0,5	120,13	7,75
	$\Sigma F_i = 149,34$			$S_{y_G} = 1.157$	$S_{x_G} = 3.136,14$

$$x_G = \frac{1.157 \text{ cm}^3}{149,34 \text{ cm}^2} \quad y_G = \frac{3.136,14 \text{ cm}^3}{149,34 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 7,75 \text{ cm} \quad y_G = 21 \text{ cm}$$

#### Cálculo de $J_{x_G}$

$$J_{x_G} = J_{chapa 1} + J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} + J_{chapa 2}$$

$$J_{chapa 1} = \frac{15,5 \times 1^3}{12} + 15,5 \times 20,5^2$$

$$J_{chapa 1} = 1,29 + 6.513,9$$

$$J_{chapa 1} = 6.515,19 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_1} = \frac{15,5 \times 2,16^3}{12} + 33,48 \cdot (18,92)^2$$

$$J_{x_1} = 13,02 + 11.984,7$$

$$J_{x_1} = 11.997,72 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_3} = \frac{15,5 \times 2,16^3}{12} + 33,48 \cdot (18,92)^2$$

$$J_{x_3} = 13,02 + 11.984,7$$

$$J_{x_3} = 11.997,72 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{1,44 \times 35,68^3}{12}$$

$$J_{x_2} = 5.450,74 \text{ cm}^4$$

$$J_{\text{chapa 2}} = \frac{15,5 \times 1^3}{12} + 15,5 \times 20,5^2$$

$$J_{\text{chapa 2}} = 1,29 + 6513,9$$

$$J_{\text{chapa 2}} = 6.515,19 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_G} = 6.515,19 \times 2 \text{ cm}^4 + 11.997,72 \times 2 \text{ cm}^4 + 5.450,74 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_G} = 42.476,56 \text{ cm}^4$$

### Respuesta

Las coordenadas baricéntricas del perfil son:

$$x_G = 7,75 \text{ cm}$$

$$y_G = 21 \text{ cm}$$

El momento de inercia del perfil respecto del eje  $x$  baricéntrico es  $J_{x_G} = 42.476,56 \text{ cm}^4$

## CAPÍTULO 5

### PENSAR Y RESOLVER .....

#### Problema N° 5.10

#### Desarrollo

##### 1- Cálculo de $R_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow R_a \times \cos 30^\circ \times 6 \text{ m} - q \times \frac{(6 \text{ m})^2}{2} = 0$$

$$R_a = \frac{35 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2}{2 \times \cos 30^\circ \times 6 \text{ m}}$$

$$R_a = \frac{35 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2}{2 \times 0,87 \times 6 \text{ m}}$$

$$R_a = 120,7 \text{ kN}$$

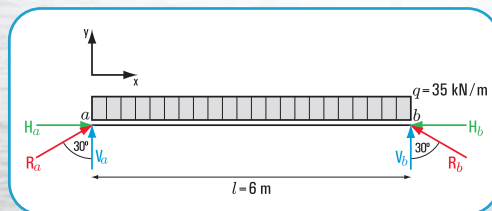


Figura 5.117. Diagrama de sólido libre

##### 2. Cálculo de $V_a$ y $H_a$

$$V_a = R_a \times \cos 30^\circ$$

$$V_a = 120,7 \text{ kN} \times 0,87$$

$$V_a = 105 \text{ kN}$$

$$H_a = R_a \times \sin 30^\circ$$

$$H_a = 120,7 \text{ kN} \times 0,5$$

$$H_a = 60,35 \text{ kN}$$

##### 3. Cálculo de $R_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -R_b \times \cos 30^\circ \times 6 \text{ m} + q \times \frac{(6 \text{ m})^2}{2} = 0$$

$$-R_b \times \cos 30^\circ \times 6 \text{ m} = \frac{-35 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2}{2}$$

$$R_b = \frac{35 \text{ kN/m} \times 36 \text{ m}^2}{2 \times \cos 30^\circ \times 6 \text{ m}}$$

$$R_b = 120,7 \text{ kN}$$

##### 4. Cálculo de $V_b$ y $H_b$

$$V_b = R_b \times \cos 30^\circ$$

$$V_b = 120,7 \text{ kN} \times 0,87$$

$$V_b = 105 \text{ kN}$$

$$H_b = R_b \times \sin 30^\circ$$

$$H_b = 120,7 \text{ kN} \times 0,5$$

$$H_b = 60,35 \text{ kN}$$

El signo de  $H_b$  es negativo

##### 5. Verificación

$$\sum \text{Proy}_y = 0$$

$$-35 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} + 105 \text{ kN} + 105 \text{ kN} = 0$$

$$-210 \text{ kN} + 210 \text{ kN} = 0$$

$$\sum \text{Proy}_x = 0$$

$$H_a + H_b = 0$$

$$60,35 \text{ kN} + (-60,35 \text{ kN}) = 0$$

### Respuesta.

Las columnas soportan las siguientes cargas: 120,7 kN en el apoyo  $a$  y en el  $b$ .

#### Problema N° 5.11

#### Desarrollo

##### 1. Cálculo del momento de empotramiento



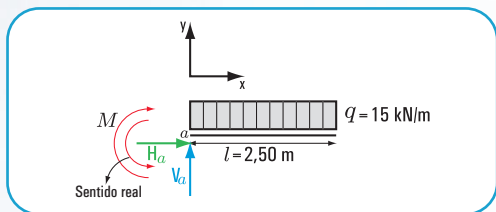


Figura 5.117. Diagrama de sólido libre

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow q \times l \times \frac{l}{2} + M = 0$$

$$M = -q \times \frac{l^2}{2}$$

$$M = -\frac{15 \text{ kN/m} \times (2,50 \text{ m})^2}{2}$$

$$M = -46,9 \text{ kN m}$$

El signo negativo significa que el sentido tomado *a priori* del momento no es correcto.

El sentido correcto es negativo.

2. Cálculo de  $H_a$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_a = 0$$

3. Cálculo de  $V_a$

$$\sum \text{Proy}_y = 0 \Rightarrow V_a - q \times l = 0$$

$$V_a = q \times l$$

$$V_a = 15 \text{ kN/m} \times 2,50 \text{ m}$$

$$V_a = 37,5 \text{ kN}$$

### Respuesta

Las reacciones de vínculo en el apoyo a son:

$$M = 46,9 \text{ kN m}$$

$$V_a = 37,5 \text{ kN}$$

$$H_a = 0$$

### Ejercicio N° 5.8

#### Desarrollo

1. Cálculo de las reacciones en los apoyos a y b.

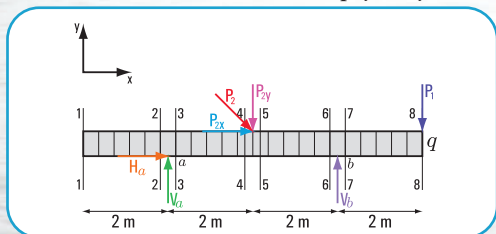


Figura 5.118. Diagrama de sólido libre

a.

$$\sum M^a = 0$$

$$P_1 \cdot 6 \text{ m} - V_b \cdot 4 \text{ m} + q \cdot 8 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} + P_2 \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$540 \text{ Nm} - V_b \cdot 4 \text{ m} + 1.600 \text{ Nm} + 49,49 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$-V_b \cdot 4 \text{ m} + 2.239 \text{ Nm} = 0$$

$$-V_b \cdot 4 \text{ m} = -2.239 \text{ Nm}$$

$$V_b = \frac{-2.239 \text{ Nm}}{-4 \text{ m}}$$

$$V_b = 559,75 \text{ N}$$

b.

$$\sum M^b = 0$$

$$P_1 \cdot 2 \text{ m} + V_a \cdot 4 \text{ m} - q \cdot 16 \text{ m} - P_2 \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$180 \text{ Nm} + V_a \cdot 4 \text{ m} - 1.600 \text{ Nm} - 98,99 \text{ Nm} = 0$$

$$V_a \cdot 4 \text{ m} = -180 \text{ Nm} + 1.600 \text{ Nm} + 98,99 \text{ Nm}$$

$$V_a = \frac{1.518,99 \text{ Nm}}{4 \text{ m}}$$

$$V_a = 379,74 \text{ N}$$

c. Verificación

$$\sum \text{Proy}_y = 0$$

$$-800 \text{ N} - 90 \text{ N} + 379,74 \text{ N} + 559,75 \text{ N} -$$

$$-49,49 \text{ N} = 0$$

2. Cálculo del esfuerzo de corte

$$\text{En } 1-1; Q_{1-1} = 0$$

$$\text{En } 2-2 \text{ (izq); } Q_{2-2} = q \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = -100 \text{ N/m} \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = -200 \text{ N}$$

$$\text{En } 2-2 \text{ (der); } Q_{2-2} = -200 \text{ N} + 379,74 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = 179,74 \text{ N}$$

$$\text{En } 4-4 \text{ (izq); } Q_{4-4} = 179,74 \text{ N} - q \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{4-4} = 179,74 \text{ N} - 100 \text{ N/m} \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{4-4} = 179,74 \text{ N} - 200 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = -20,26 \text{ N}$$

$$\text{En } 4-4 \text{ (der); } Q_{4-4} = -20,26 \text{ N} - 49,49 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = -69,75 \text{ N}$$

$$\text{En } 6-6 \text{ (izq); } Q_{6-6} = -69,75 \text{ N} - 200 \text{ N}$$

$$Q_{6-6} = -269,75 \text{ N}$$



En 7-7 (der);  $Q_{7-7} = -269,75 \text{ N} + 559,75 \text{ N}$   
 $Q_{7-7} = 290 \text{ N}$

En 8-8 (izq);  $Q_{8-8} = 290 \text{ N} - 200 \text{ N}$   
 $Q_{8-8} = 90 \text{ N}$

En 8-8 (der);  $Q_{8-8} = 90 \text{ N} - 90 \text{ N} \Rightarrow Q_{8-8} = 0$

En el tramo,  $Q = 0$  en  $x = 3,80 \text{ m}$

### 3. Cálculo del momento flexor

En 1-1;  $M_{1-1} = 0$

En 2-2;  $M_{2-2} = -q \times 2 \text{ m}$   
 $M_{2-2} = -100 \text{ N} \times 2 \text{ m}$   
 $M_{2-2} = -200 \text{ Nm}$

En 7-7;  $M_{7-7} = -q \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m} - P_1 \times 2 \text{ m}$   
 $M_{7-7} = -200 \text{ Nm} - 180 \text{ Nm}$   
 $M_{7-7} = -380 \text{ Nm}$

En 5-5;  $M_{5-5} = -q \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m} + 379,74 \text{ N} \times 2 \text{ m}$   
 $M_{5-5} = -100 \text{ N/m} \times 8 \text{ m}^2 + 759,48 \text{ Nm}$   
 $M_{5-5} = -800 \text{ Nm} + 759,48 \text{ Nm}$   
 $M_{5-5} = -40,52 \text{ Nm}$

En 6-6;  $M_{6-6} = -q \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m} + V_a \times 4 \text{ m} - P_2 \times 2 \text{ m}$   
 $M_{6-6} = -100 \text{ N/m} \times 18 \text{ m}^2 + 379,74 \text{ N} \times 4 \text{ m} - 98,99 \text{ Nm}$   
 $M_{6-6} = -1.800 \text{ Nm} + 1518,96 - 98,99 \text{ Nm}$   
 $M_{6-6} = -380 \text{ Nm}$

$M_{8-8} = -3.200 \text{ Nm} + 2.278,44 \text{ Nm} - 197,96 \text{ Nm} + 1119,5 \text{ Nm}$   
 $= 0,02 \text{ Nm}$   
 $\approx 0 \text{ Nm}$

$M_{\text{máx}} = -100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 3,80 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} + 379,74 \cdot 1,80 \text{ m}$   
 $= 75,53 \text{ Nm}$

### 4. Cálculo del esfuerzo normal

$P_{2x} = P_2 \times \cos 315^\circ$   
 $P_{2x} = 49,49 \text{ N}$

$\sum \text{Proy}_x = 0 \Rightarrow H_a + P_{2x} = 0$   
 $H_a = -49,49 \text{ N}$

El sentido adoptado para  $H_a$  no es correcto. Corresponde el sentido contrario.

### 5. Diagramas de esfuerzos característicos

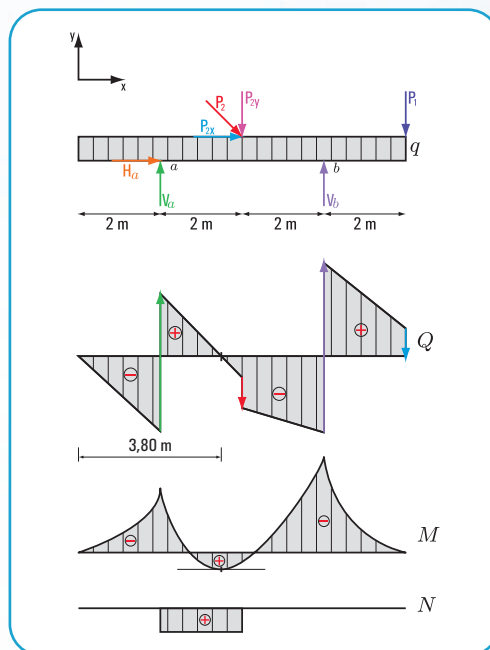


Figura 5.119. Diagramas de: carga, esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal

### Respuesta

Las reacciones en el apoyo  $a$  son  $V_a = 379,74 \text{ N}$  y  $H_a = 49,49 \text{ N}$ ; y en el apoyo  $b$   $V_b = 559,75 \text{ N}$ .

### Ejercicio N° 5.9

#### Desarrollo

1. Cálculo de las reacciones en el apoyo  $e$ .

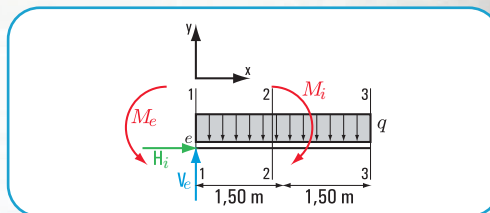


Figura 5.120. Diagrama sólido libre

$\sum M^c = 0 \Rightarrow q \times 3 \text{ m} + M_1 - M_e = 0$   
 $130 \text{ N/m} \times 3 \text{ m} \times 1,50 \text{ m} + 78 \text{ Nm} - M_e = 0$   
 $585 \text{ Nm} + 78 \text{ Nm} - M_e = 0$

$$M_i = -585 \text{ Nm} - 78 \text{ Nm}$$

$$M_i = -663 \text{ Nm}$$

$$\sum \text{Proy}_y F = 0 \Rightarrow -130 \text{ N/m} \times 3 \text{ m} + V_e = 0$$

$$V_e = 390 \text{ N}$$

$$\sum \text{Proy}_x F = 0 \quad H_e = 0$$

## 2. Cálculo de esfuerzo de corte

$$Q_{1-1} = V_e$$

$$Q_{1-1} = 390 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = V_e - q \times 1,50 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = 390 \text{ N} - 130 \text{ N/m} \times 1,50 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = 390 \text{ N} - 195 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = 195 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = V_e - q \times 3 \text{ m}$$

$$Q_{3-3} = 390 - 130 \text{ N/m} \times 3 \text{ m}$$

$$Q_{3-3} = 390 \text{ N} - 390 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = 0$$

$$Q_{x-x} = V_e - q \times x$$

$$Q_{x-x} = 390 \text{ N} - 130 \text{ N/m} \times x$$

$$Q_{x-x} = -130x + 390 \text{ N}$$

una función lineal con  
pendiente negativa

## 3. Cálculo de momento flexor

$$M_{1-1} = M_e$$

$$M_{1-1} = -663 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ izq}} = M_e + V_e \times 1,50 \text{ m} - \frac{q \times (1,50 \text{ m})^2}{2}$$

$$M_{2-2 \text{ izq}} = -663 \text{ Nm} + 390 \text{ N} \times 1,50 \text{ m} - \frac{130 \text{ N/m} \times (1,50 \text{ m})^2}{2}$$

$$M_{2-2 \text{ izq}} = -663 \text{ Nm} + 390 \text{ N} \times 1,50 \text{ m} - 146,25 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ izq}} = -663 \text{ Nm} + 585 \text{ Nm} - 146,25 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ izq}} = -224,25 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ der}} = -663 \text{ Nm} + 390 \text{ N} \times 1,50 \text{ m} - 146,25 \text{ Nm} + 78 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ der}} = -224,25 \text{ Nm} + 78 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2 \text{ der}} = -146,25 \text{ Nm}$$

$$M_{3-3} = M_e + V_e \times 3 \text{ m} - \frac{q \times (3 \text{ m})^2}{2} + M_i$$

$$M_{3-3} = -663 \text{ Nm} + 390 \text{ N} \times 3 \text{ m} - \frac{130 \text{ N/m} \times (3 \text{ m})^2}{2} + 78 \text{ Nm}$$

$$M_{3-3} = -663 \text{ Nm} + 1170 \text{ Nm} - 585 \text{ Nm} + 78 \text{ Nm}$$

$$M_{3-3} = 0 \text{ Nm}$$

## 4. Cálculo del esfuerzo normal

$$\sum \text{Proy}_x = 0 \Rightarrow H_e = 0$$

## 5. Diagramas de esfuerzos característicos

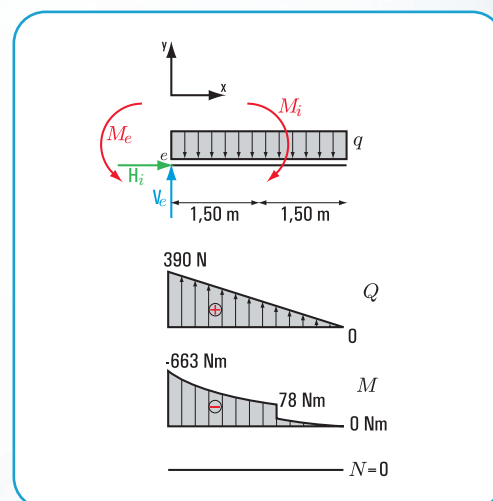


Figura 5.120. Diagramas de: carga, esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal

## Ejercicio N° 5.10

### Desarrollo

### 1. Cálculo de las reacciones de vínculo en los apoyos a y b.

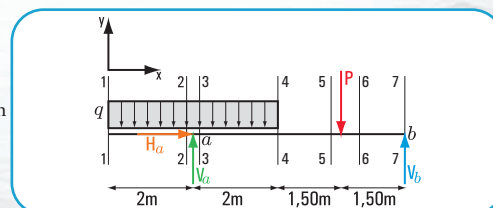


Figura 5.121. Diagrama de sólido libre

$$\sum M^a = 0$$

$$-q \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + q \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + P \cdot 3,50 \text{ m} - V_b \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$-180 \text{ Nm} + 180 \text{ Nm} + 17,5 \text{ Nm} - V_b \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$V_b = \frac{-17,5 \text{ Nm}}{-5 \text{ m}}$$

$$V_b = 3,5 \text{ N}$$

$$\sum M^b = 0$$

$$-q \cdot 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} + V_a \cdot 5 \text{ m} - P \cdot 1,50 \text{ m} = 0$$

$$-1.800 \text{ Nm} + V_a \cdot 5 \text{ m} - 7,5 \text{ Nm} = 0$$

$$V_a \cdot 5 \text{ m} = \frac{1807,5 \text{ Nm}}{5 \text{ m}}$$

$$V_a = 361,5 \text{ N}$$

### Verificación

$$\sum \text{Proy}_y = 0 \Rightarrow -q \times 4 \text{ m} + V_a - P + V_b = 0$$

$$-90 \text{ N/m} \times 4 \text{ m} + 361,5 \text{ N} - 5 \text{ N} + 3,5 \text{ N} = 0$$

$$-360 \text{ N} + 361,5 \text{ N} - 5 \text{ N} + 3,5 \text{ N} = 0$$

### 2. Cálculo de los esfuerzos de corte

$$Q_{1-1} = 0 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} \text{ izq} = -q \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} \text{ izq} = -90 \text{ N/m} \times 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} \text{ izq} = -180 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = -180 \text{ N} + 361,5 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = 181,5 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = -q \times 4 \text{ m} + 361,5 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = -90 \text{ N/m} \times 4 \text{ m} + 361,5 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = 1,5 \text{ N}$$

$$Q_{5-5} = 1,5 \text{ N}$$

$$Q_{6-6} = 1,5 \text{ N} - 5 \text{ N}$$

$$Q_{6-6} = -3,5 \text{ N}$$

$$Q_{7-7} \text{ izq} = -3,5 \text{ N}$$

$$Q_{7-7} \text{ der} = 3,5 \text{ N} - 3,5 \text{ N}$$

$$Q_{7-7} \text{ der} = 0 \text{ N}$$

### 3. Cálculo de momento flexor

$$M_{1-1} = 0 \text{ N}$$

$$M_{2-2} = -q \times l \times \frac{l}{2}$$

$$M_{2-2} = \frac{-90 \text{ N/m} \times (2 \text{ m})^2}{2}$$

$$M_{2-2} = \frac{-90 \text{ N/m} \times \frac{2}{4} \text{ m}^2}{\frac{2}{1}}$$

$$M_{2-2} = -180 \text{ Nm}$$

$$M_{4-4} = -q \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m} + V_a \times 2 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = -90 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m} + 361,5 \text{ N} \times 2 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = 3 \text{ Nm}$$

$$M_{5-5} = -90 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 4 \text{ m} \times 3,50 \text{ m} + 361,5 \text{ N} \times 3,50 \text{ m}$$

$$M_{5-5} = 5,25 \text{ Nm}$$

$$M_{7-7} = -90 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 4 \text{ m} \times 5 \text{ m} + 361,5 \text{ N} \times 5 \text{ m} - 5 \text{ N} \times 1,50 \text{ m}$$

$$M_{7-7} = 0$$

### 4. Cálculo del esfuerzo normal

$$\sum \text{Proy}_x = 0 \Rightarrow H_a = 0$$

### 5. Diagramas de esfuerzos característicos

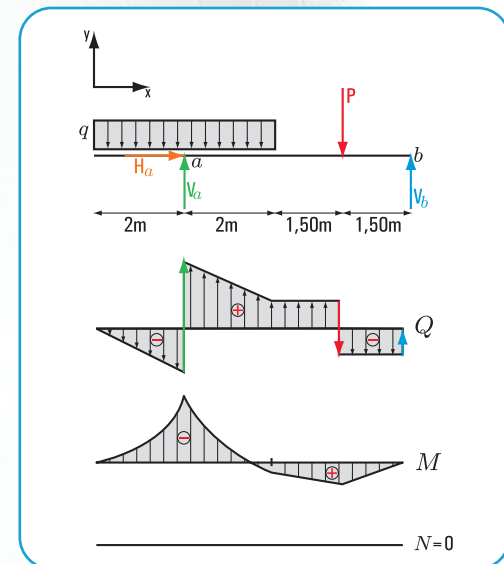


Figura 5.121. Diagramas de: carga, esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal

### Respuesta

Las reacciones de vínculo son:  $V_a = 361,5 \text{ N}$  y  $V_b = 3,5 \text{ N}$