01

Buscando Circunferencias y Elipses

Segundo Ciclo, Tercer Año

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Circunferencia - Elipse	Las Geometrías

inet | Instituto Nacional de Educación Tecnológica

Ministerio de Educación Argentina

Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

Autora: Prof. Ing. Haydee Noceti.
Diseño Gráfico: Carolina Macedra y Federico Timerman.

www.inet.edu.ar

Orientaciones para el/la docente para la colección de los materiales

Tradicionalmente, la enseñanza ha sido en abstracto, rutinaria, mecánica no razonada, donde la pregunta: ¿para qué me sirve? era, y tal vez sigue siendo, muy común escuchar en boca de los/as alumnos/as. Seguramente, por no ser significativa para ellos/as.

Pero el paradigma de la enseñanza ha cambiado y, por supuesto, nuestra forma de enseñar. En la actualidad, la tecnología nos ayuda a ponernos en una posición diferente frente a nuestras prácticas docentes. Buscamos una manera distinta de enseñanza de la Matemática frente a la forma tradicional.

Ésta es una buena oportunidad para utilizar estrategias de enseñanza que sean atractivas y motivantes para nuestros/as estudiantes, tal como la resolución de problemas matemáticos en los que intervengan objetos reales. En este caso proponemos trabajar con objetos pertenecientes o vinculados a las obras del arte pictórico y arquitectónico, así como a la música, a la naturaleza y al deporte.

Sabemos que los/as jóvenes son nativos digitales y el porcentaje de estudiantes que usan herramientas digitales es muy alto. Por eso, desde esta colección de materiales que les presentamos, se propone el uso de recursos digitales de distribución gratuita y que los/as estudiantes pueden encontrar en Internet y bajar a su compu o como aplicación en su Tablet o celular.

Por otra parte, en la Colección de libros digitales: **"Las Ciencias Naturales y la Matemática"** publicada por el INET en la biblioteca de la página web: ***www.inet.edu.ar***, existen cinco títulos que utilizaremos para realizar los materiales que diseñamos.

Estos libros son: **"Las Geometrías"**, **"Funciones Elementales. Para construir modelos matemáticos"**, **"Los Números"**, **"Aventuras Matemáticas"** y **"Estadística para Todos"**.

Los otros recursos digitales que se utilizarán para resolver las actividades son: GeoGebra, Power Point, videos, videojuegos, Powton, EDpuzzle, Kahoot, MusseScore y videos de YouTube.

Es sabido que el aprendizaje de la Matemática para un porcentaje elevado de jóvenes no es atractivo. Por ello la/el docente se constituye en un facilitador del aprendizaje orientando y motivando en forma permanente a sus alumnos/as.

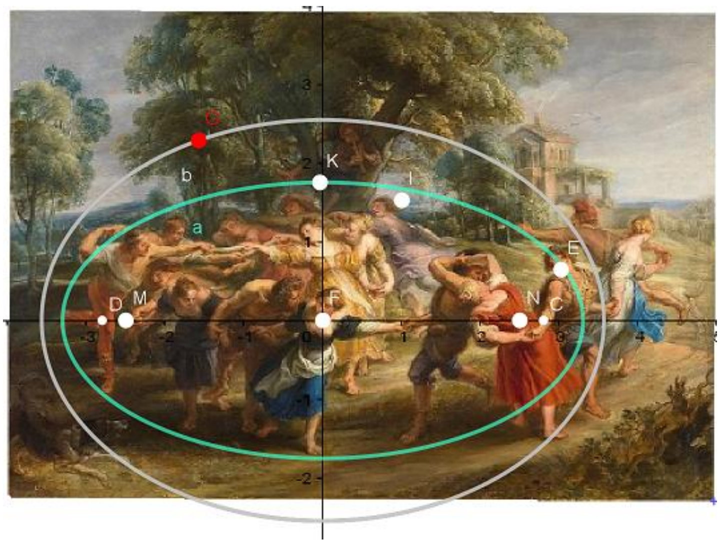
Las actividades que aquí presentamos, organizadas por temáticas, están dirigidas para el trabajo de los/as estudiantes. El diseño de cada temática incluye los siguientes ítems:

1) Una breve introducción.
2) Contenidos.
3) Objetivos.
4) Recursos.
5) Consignas.

El trabajo **Buscando Circunferencias y Elipses** consta de cuatro actividades que los/as estudiantes deberán realizar mediante la búsqueda en Internet, el uso de GeoGebra y el vínculo con el libro “Las Geometrías” publicado por el INET.

Con el propósito que el/la profesor/a tenga una visión adelantada de posibles resultados de los trabajos de los/as alumnos/as se presentan algunos ejemplos.

Trabajo sobre “La Danza de los Aldeanos”



- A = (-4, -2.26)
- B = (4.96, -2.3)
- C = (2.8, 0)
- D = (-2.8, 0)
- E = (3.02, 0.64)
- a: $49.11x^2 + 174.55y^2 = 535.73$
- F = (0, 0)
- J = (0, -2)
- I = (1, 1.52)
- K = (-0.04, 1.75)
- M = (-2.5, 0)
- N = (2.5, 0)
- G = (-1.58, 2.28)
- c: $103.7x^2 + 203.7y^2 = 1320.18$
- b: $103.7x^2 + 203.7y^2 = 1320.18$

VISTA GEOMÉTRICA **VISTA ALGEBRAICA**

1

a: $49.11x^2 + 174.55y^2 = 535.73$

$$\rightarrow \ a: \frac{4911}{100} x^2 + \frac{3491}{20} y^2 = \frac{53573}{100}$$

2

a

Resuelve: $\left\{ x = -\frac{\sqrt{-17455\, y^2 + 53573}}{\sqrt{4911}}, x = \frac{\sqrt{-17455\, y^2 + 53573}}{\sqrt{4911}} \right\}$

3

b: $103.7x^2 + 203.7y^2 = 1320.18$

$$\rightarrow \ b: \frac{1037}{10} x^2 + \frac{2037}{10} y^2 = \frac{66009}{50}$$

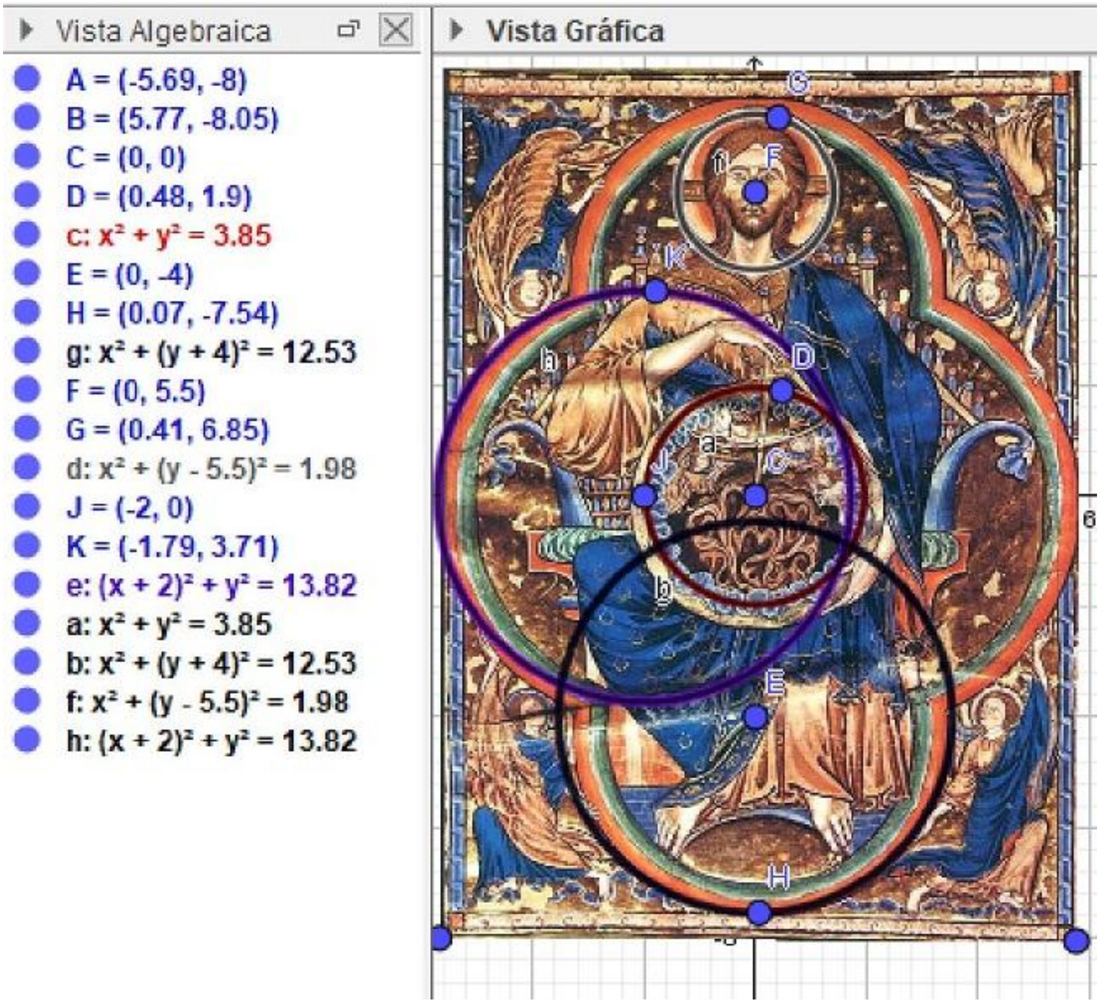
4

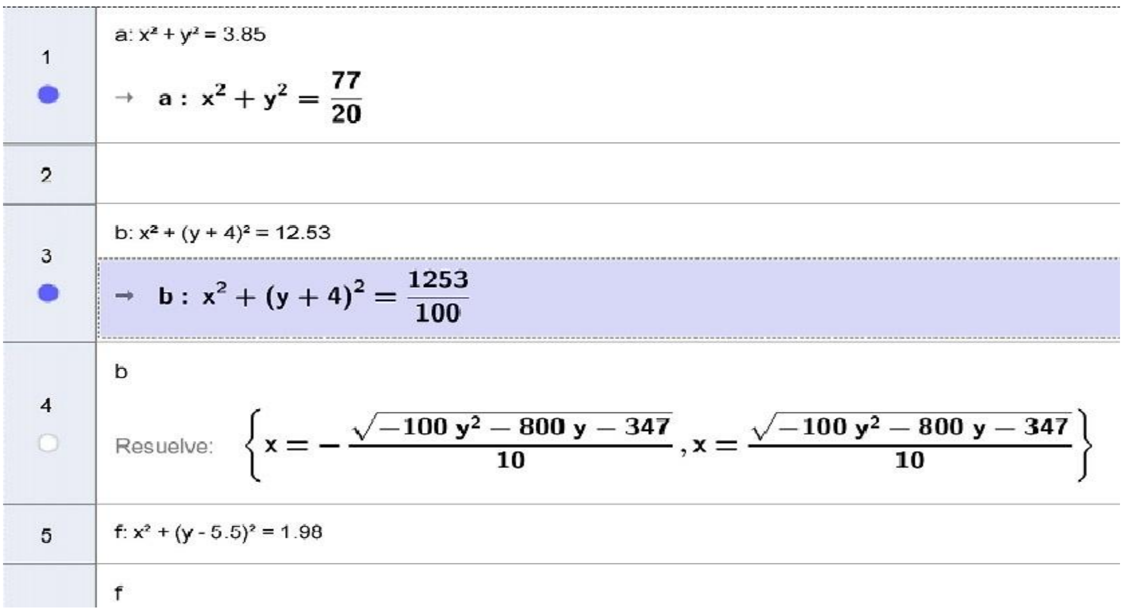
b

Resuelve: $\left\{ x = -\sqrt{-3395\, y^2 + 22003} \cdot \frac{\sqrt{15555}}{5185}, x = \sqrt{-3395\, y^2 + 22003} \cdot \frac{\sqrt{15555}}{5185} \right\}$

VISTA CAS (Computer Algebra System)

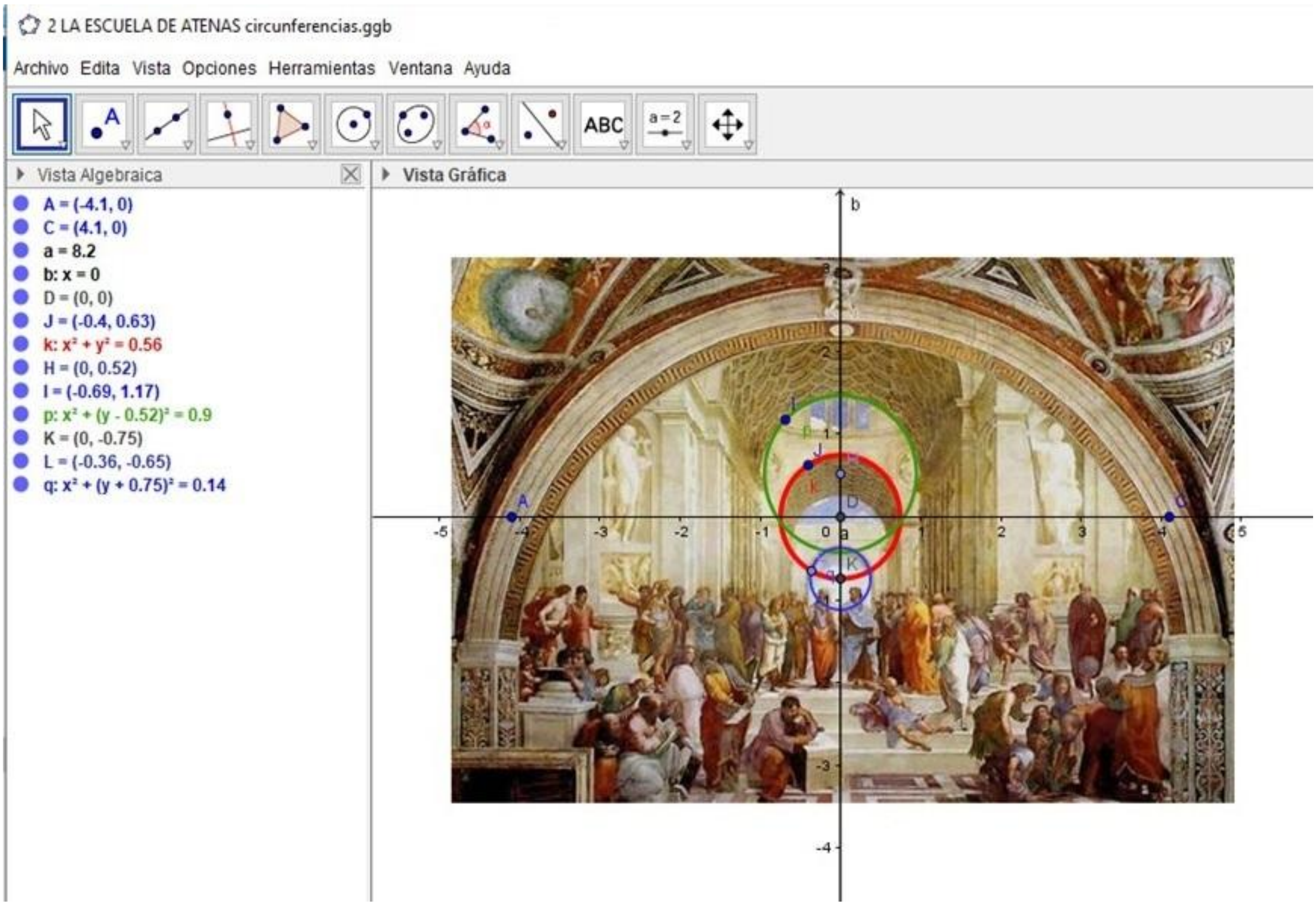
Trabajo sobre Cristo El Geómetra



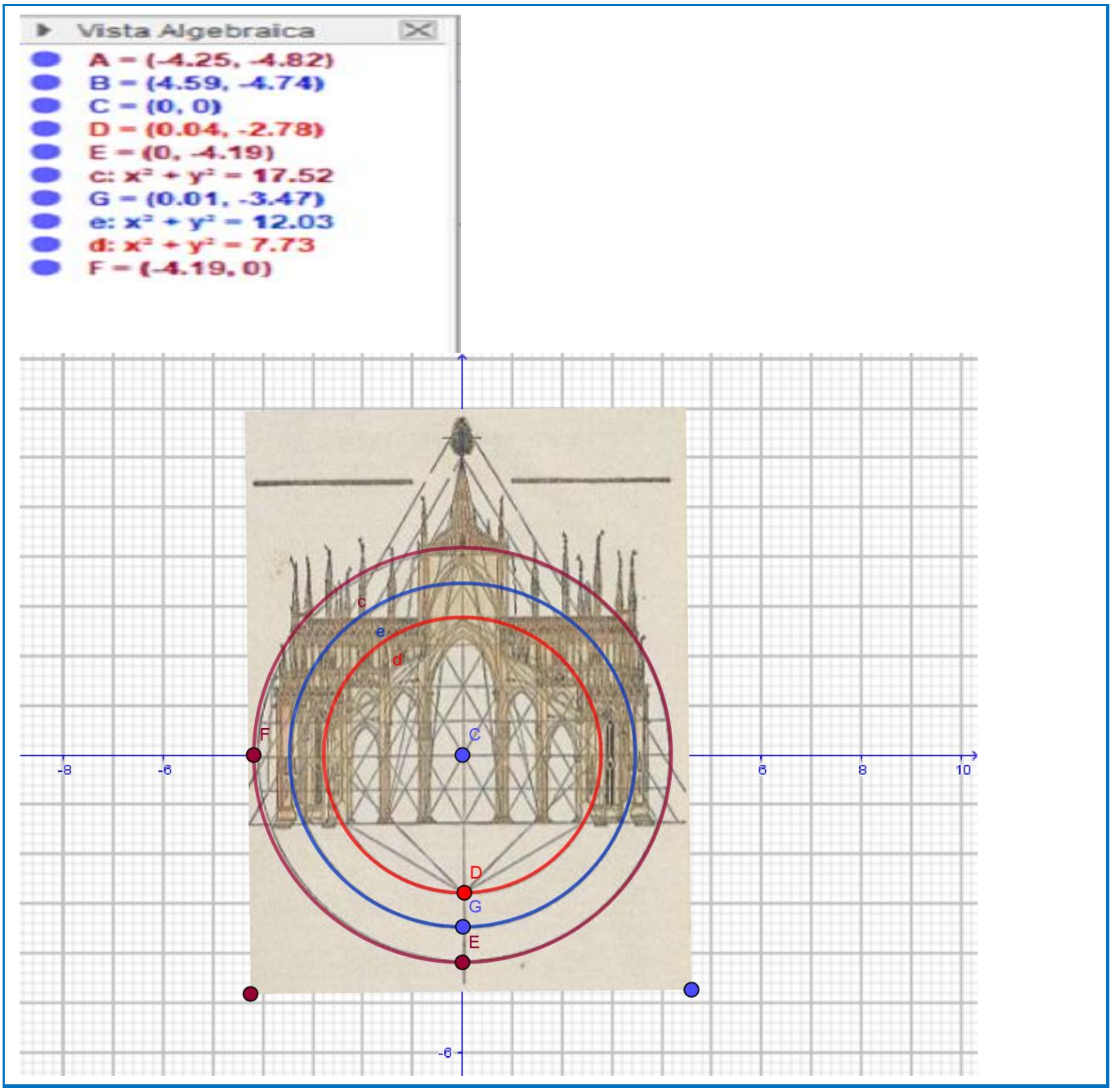


VISTA CAS (Computer Algebra System)

Trabajo sobre "La Escuela de Atenas"



Trabajo sobre el plano original de la Catedral de Milán



¿Cómo evaluar el aprendizaje?

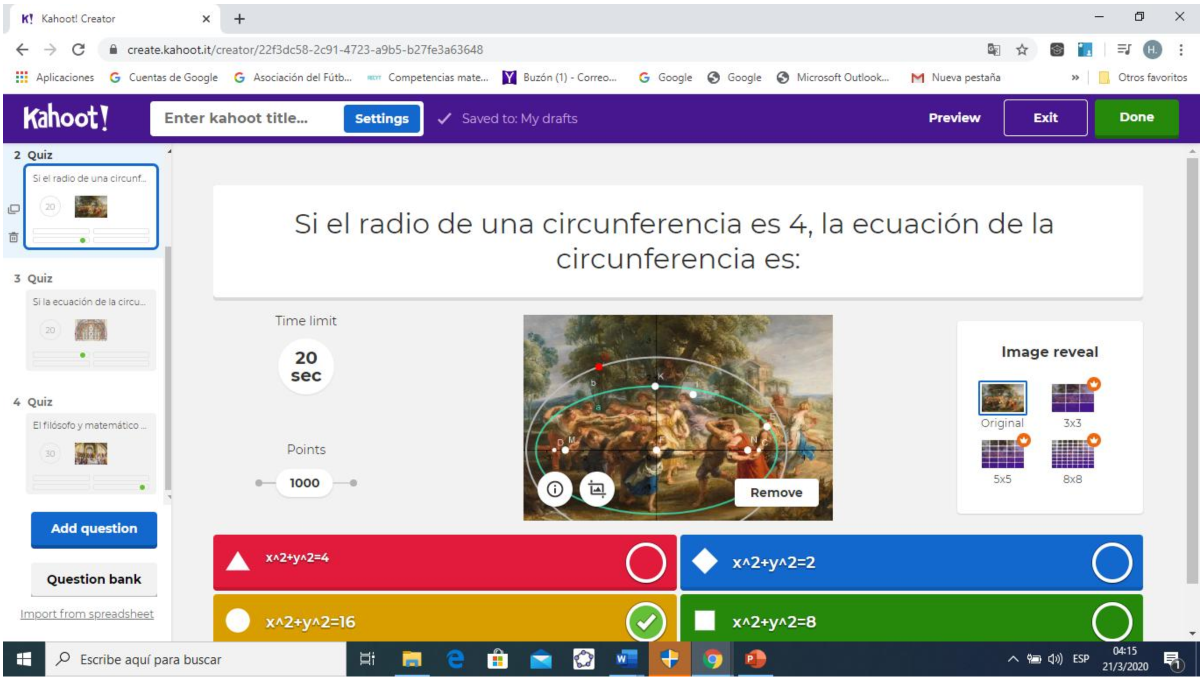
Recordemos que la evaluación forma parte del proceso de aprendizaje y para que el aprendizaje sea significativo se debe partir de los conocimientos previos de los/as estudiantes. Conocer los saberes que tienen los/as estudiantes resulta sumamente importante, así como averiguar sus expectativas frente al aprendizaje. Existen muchas formas, pero en este caso un cuestionario puede ser una buena manera de indagación. Habilitar un grupo de WhatsApp o cualquiera otra forma favorece la evaluación inicial y la formativa.

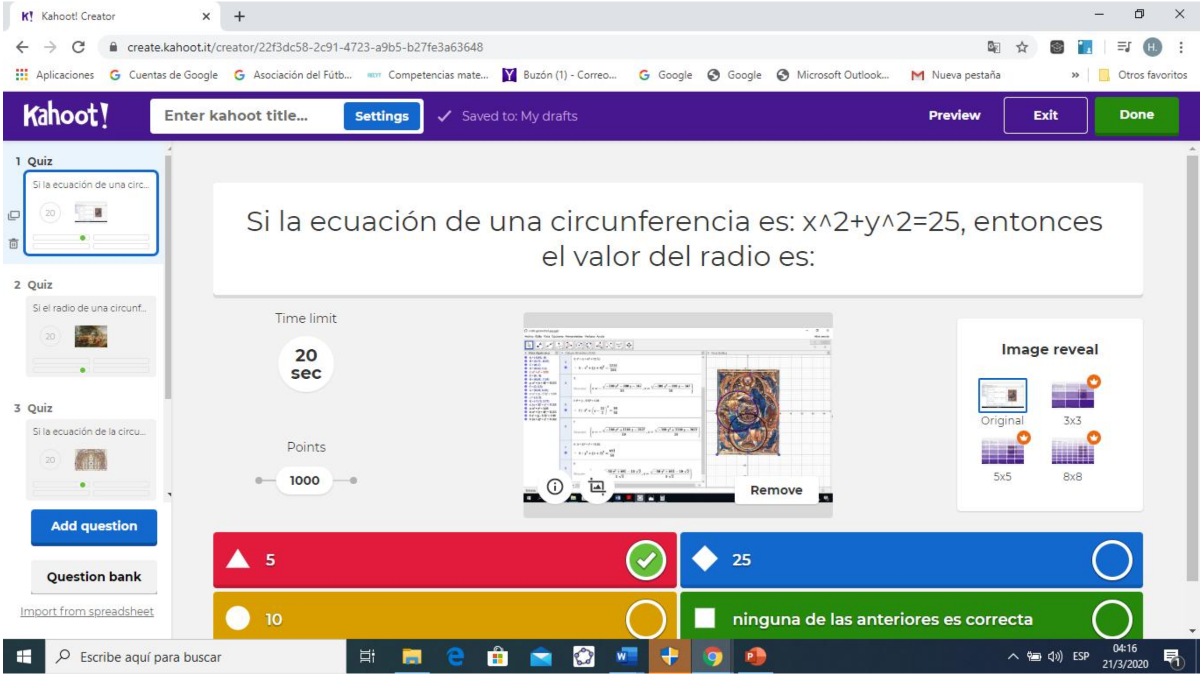
En el caso de la evaluación sumativa, resulta motivante crear un *Kahoot*.

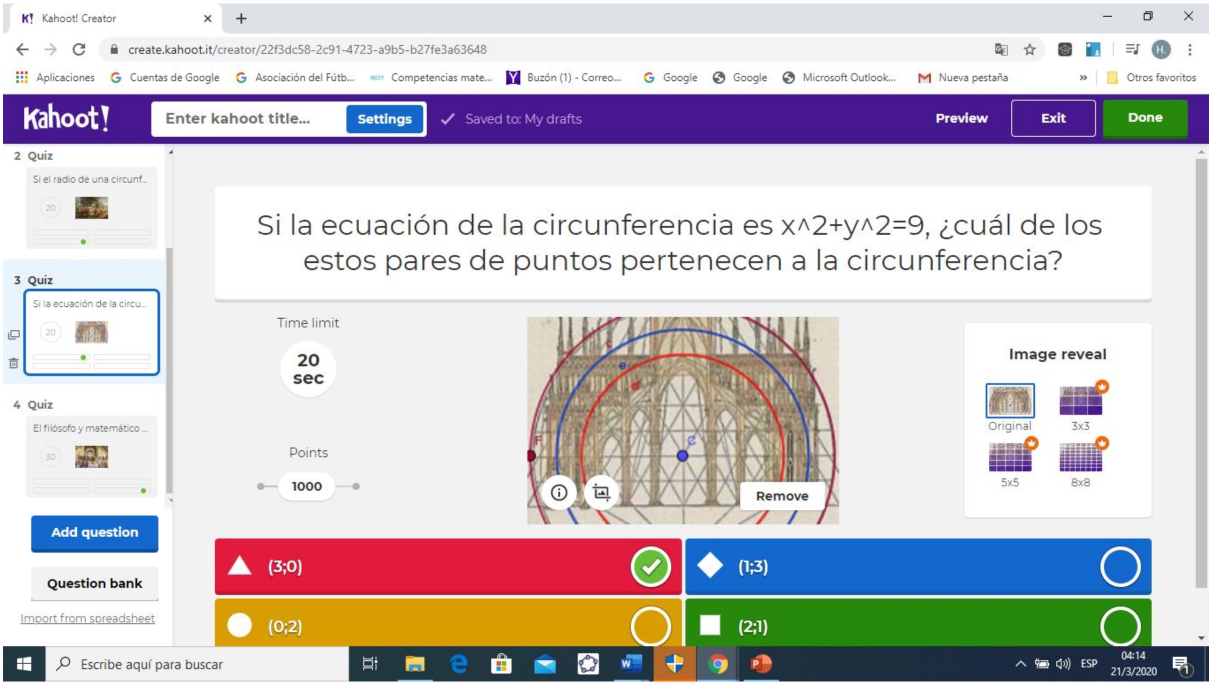
Kahoot es una plataforma que permite al docente armar preguntas para que sus alumnos y alumnas con su celular o Tablet respondan a dichas preguntas. Para ello tiene que fijar un día y una hora para que todo el grupo esté conectado. El/la profesor/a, que previamente preparó el Kahoot con todas las preguntas de respuesta múltiple, cuatro repuestas posibles siendo una sola la correcta, entrega en ese momento el PIN a sus estudiantes, que habrá obtenido al abrir el juego.

Durante el juego los/as alumnos/as obtienen un puntaje. Éste no solo depende de la respuesta correcta sino también del tiempo en dar la respuesta. Al término del juego aparece el podio con los tres puntajes más altos. El/la docente puede guardar el puntaje de cada estudiante y acumularlo a sucesivos juegos.

A modo de ejemplo, se presentan las pantallas del Kahoot preparado sobre el tema: Circunferencias y elipses.




Kahoot! Creator
create.kahoot.it/creator/22f3dc58-2c91-4723-a9b5-b27fe3a63648
Enter kahoot title...
Settings
Saved to: My drafts
Preview
Exit
Done
Si la ecuación de una circunferencia es: x^2+y^2=25, entonces el valor del radio es:
Time limit
20 sec
Points
1000
Image reveal
Remove
5
25
10
ninguna de las anteriores es correcta
Add question
Question bank
Import from spreadsheet
Escribe aquí para buscar
04:16
21/3/2020


Kahoot! Creator
create.kahoot.it/creator/22f3dc58-2c91-4723-a9b5-b27fe3a63648
Enter kahoot title...
Settings
Saved to: My drafts
Preview
Exit
Done
Si la ecuación de la circunferencia es x^2+y^2=9, ¿cuál de los estos pares de puntos pertenecen a la circunferencia?
Time limit
20 sec
Points
1000
Image reveal
Remove
(3;0)
(1;3)
(0;2)
(2;1)
Add question
Question bank
Import from spreadsheet
Escribe aquí para buscar
04:14
21/3/2020

Recordando

Si se interseca una superficie cónica con un plano se obtienen las denominadas secciones cónicas, según sea el ángulo de inclinación y la posición relativa del plano.

Así se obtienen:

1) si el plano es perpendicular al eje del cono la figura que se obtiene es una **circunferencia;**

2) si el plano es paralelo a una de las generatrices (rectas) es una **parábola**;

3) si el plano interseca a todas las generatrices de un mismo lado la figura que se obtiene es una **elipse**;

4) si el plano interseca a todas las generatrices, pero de ambos lados, la figura es una **hipérbola.**

Estas secciones cónicas también se las puede definir desde el concepto de: **lugar geométrico.**

Se entiende por **lugar geométrico** el conjunto de puntos que cumplen con una misma propiedad.

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto ubicado en el mismo plano denominada **centro**. La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro es el **radio**.

Ecuaciones de la circunferencia

Los modelos matemáticos que permiten entender situaciones reales en las que deba intervenir la circunferencia y, dado mediante fórmula es el siguiente:

$$x^2 + y^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Si el centro de la circunferencia es el punto $(a\ ;\ b)$, entonces la expresión matemática es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$ donde r es el radio

Si el centro de la circunferencia coincide con el centro de coordenadas, entonces la fórmula es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuaciones de la elipse

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) del mismo es una constante positiva.

Las elipses pueden ser más o menos achatadas, esta situación depende de lo que se denomina **excentricidad**. La excentricidad es un número que es igual al cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor.

Si denominamos “c” a la semidistancia focal y “a” al semieje mayor, entonces:

$$e = \frac{c}{a}$$ **excentricidad**

Ecuaciones de la elipse

1) Elipse con centro en el punto (h ; k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \; con \; a \neq b$$

2) Elipse con centro en el origen de coordenadas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1.\, o\ bien\ x^2 = a^2$. Esto significa que la intersección de la elipse con el eje “x” es $x = a\ y\ x = -a.$

Los puntos de coordenadas: $V \equiv (a;0)\ y\ V^{'} \equiv (-a;0)$ en el gráfico de coordenadas cartesianas se denominan **vértices de la elipse**.

El segmento $\overline{V'V}$ se denomina **eje mayor**.

Si $x = 0 \ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1\ o\ bien\ y^2 = b^2$. Esta expresión significa que la intersección de la elipse con el eje “y” es $y = b\ \ e\ y = -b$

El segmento determinado por los puntos $T \equiv (0\,;\,b)\ \ y\ \ T^{''} \equiv (0\,;\,-b)$ se denomina **eje menor** de la elipse.

La ecuación de la elipse puede ser expresada también mediante la siguiente expresión matemática:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

En este caso los vértices son: $V \equiv (0\ \pm a)$. Los puntos extremos del **eje menor** son:

$$M \equiv (\pm b, 0)$$

Otra forma de escribir la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas es:

$$mx^2 + ny^2 = mn \quad \text{siendo } m \text{ y } n \text{ positivos } y\ m \neq n.$$

Si $m > n$, *el* ***eje mayor*** *está en el eje* x; *si* $m < n$, *el eje mayor está en el eje* "y".

Actividades para los/as estudiantes

Una breve introducción

¿Sabías que en el arte pictórico y en el arquitectónico está presente la Matemática?

Tal vez la respuesta sea: sí o no. En ambos casos con esta actividad tendrás la posibilidad de descubrir elementos matemáticos en obras pictóricas y en la arquitectura. Para ello te proponemos cuatro actividades que te permitirán aprender matemática mediante el encuentro con el arte.

En este trabajo se plantea el vínculo entre el arte pictórico y arquitectónico con el álgebra de la circunferencia y de la elipse, en el entendimiento que de este modo la Matemática se la hace más humanista y motivante.

Usamos como recurso el programa *GeoGebra* pues constituye un medio que favorece esta estrategia ya que permite la inserción de imágenes.

CONTENIDOS
Circunferencia y elipse: ecuaciones. Sistema de coordenadas cartesianas.

OBJETIVOS
1) Analizar las ecuaciones de la circunferencia y de la elipse en obras pictóricas y arquitectónicas.
2) Aplicar los saberes del álgebra en la resolución de las ecuaciones de la circunferencia y de la elipse y en la determinación de las coordenadas de sus puntos.

MODALIDAD
Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante Google Classroom 2020. Puede obtener información sobre su aplicación en: *https://www.youtube.com/playlist?list=PLclJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v*

RECURSOS
Software: *GeoGebra*, *Word*, *Editor de ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático), *Kahoot*, Internet.

Organizamos el trabajo en cuatro actividades.

Buscando circunferencias y elipses

ACTIVIDAD I

La Danza de los aldeanos es un óleo pintado por Rubens en el período 1636 - 1640 conservado en el Museo del Prado. Es una gran tabla donde decenas de campesinos aparecen danzando y bebiendo. El pintor, como muchos de los artistas pictóricos, usa las figuras geométricas para estructurar su obra. Si se observa esta pintura, se puede visualizar que los personajes están enmarcados en curvas elípticas.

Consignas Te solicitamos que:

1. Busques en Internet una imagen de la pintura: "La Danza de los Aldeanos".

2. Insertes la imagen en el GeoGebra lo más centrada posible.

3. Traces dos elipses, ambas que envuelvan a los aldeanos.

4. Determina las coordenadas de un punto de una de las elipses que pertenezca al primer cuadrante y de un punto del segundo cuadrante de la otra elipse.
Usando la hoja de cálculo del GeoGebra o bien una hoja de papel y un bolígrafo o el *Editor de ecuaciones del Word*, halla el valor de la distancia desde cada uno de esos puntos al centro de la respectiva elipse, encuentra las coordenadas de las intersecciones de cada elipse con los ejes *x* e *y*, y la de los focos. Verifica los resultados con la vista algebraica y con la del CAS.

5. Expresa las ecuaciones de ambas elipses y la de $\mathbf{16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0}$ en la forma: $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

ACTIVIDAD II

Cristo Geómetra es una ilustración de un manuscrito bíblico en la que el artista empleó cinco cónicas como estructura subyacente y donde se muestra a Cristo como un geómetra.

Consignas. Se te solicita que:

1. Busques en Internet la ilustración de "Cristo Geómetra" en la que aparece Cristo envuelto en cinco figuras cónicas.

2. Insertes la imagen en el GeoGebra en forma centrada, tratando que el centro de la imagen coincida con el centro de coordenadas.

3. Dibujes las siguientes cónicas: la que enmarca el rostro de Cristo; la central; la inferior central y la que está en el lateral izquierdo. Debes usar el botón correspondiente a la cónica (circunferencia o elipse) que consideres son las dibujadas por el artista que enmarcan a Cristo.

4. Utiliza las tres vistas: algebraica, cálculo simbólico (CAS) y la vista gráfica.

5. En la vista algebraica aparecerán las ecuaciones de cada una de las cónicas (circunferencia o elipse). Con lápiz y papel halla el valor del radio de cada una de las cónicas que representaste, determina las coordenadas del centro de cada una de las curvas y verifica con los resultados que se muestran en la vista algebraica. Puedes usar el *Editor de ecuaciones del Word*.

6. Sin construir la gráfica, expresa la ecuación de la cónica centrada que figura en la parte lateral derecha de la imagen.

7. Determina el valor de las coordenadas del punto de intersección de la cónica lateral izquierda con el eje "x" y con el eje "y". Presenta el desarrollo. Verifica con los resultados que se muestran en el Cálculo Simbólico - CAS.

ACTIVIDAD III

La escuela de Atenas es una de las pinturas más destacadas de Rafael Sanzio. El boceto fue hecho entre 1509 y 1510 y pintada la obra entre 1510 y 1512. Está ubicada en los Museos Vaticanos, Ciudad del Vaticano, Roma.

Consignas. Se te solicita que:

1) Busques en la Internet la imagen de "La escuela de Atenas".

2) Insertes la imagen en el GeoGebra de modo que el eje "y" de coordenadas se ubique, aproximadamente, entre los dos filósofos que se ven en el centro de la imagen y el centro de coordenadas quede más arriba de la cabeza de los matemáticos centrales.

3) En la parte posterior, el autor pintó cuatro arcos que parecen ser arcos de circunferencias. Utilizando el GeoGebra intenta dibujar, en forma completa cada una de las curvas, siempre analizando si son circunferencias o elipses.

4) Una vez dibujadas las curvas aparecerán en la vista algebraica las respectivas ecuaciones. A partir de esas ecuaciones, con lápiz y papel o con el *Editor de ecuaciones del Word*, halla el radio de cada curva.

5) A partir de la ecuación de curva, determina en cada caso las coordenadas de los puntos de intersección con el eje "x" y con el eje "y". Verifica buscando mediante el uso del GeoGebra los valores hallados.

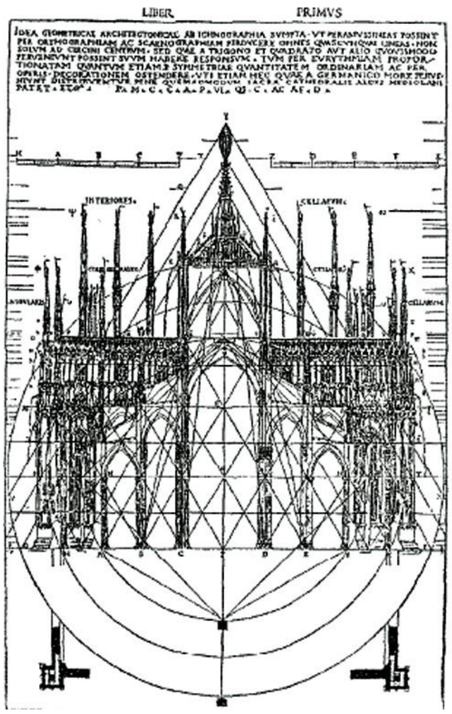
6) Indaga a través de Internet el significado de esta pintura de Rafael. Te darás cuenta que está muy relacionada con la Matemática.

ACTIVIDAD IV

La Catedral de Milán

En los casos anteriores hemos trabajado la matemática que encontramos en las obras pictóricas, ahora lo haremos en la arquitectura.

Una obra majestuosa es la Catedral de Milán (Italia), cuya construcción duró muchos años y con numerosos cambios.



El proyecto original del arquitecto César Caesariano, publicado en el año 1521 no se llegó a plasmar en la construcción. De los planos originales solo se respetó la cantidad de puertas de la fachada principal.

El plano de dicha fachada es un ejemplo de la presencia de la Matemática en las obras arquitectónicas de la época. Por eso usaremos una imagen de dicho plano para continuar con las circunferencias.

En este caso te brindamos la imagen del plano original de la Catedral o Duomo de Milán.

Consignas Se te solicita que:

1) Insertes la imagen en el GeoGebra tratando que el eje "y" coincida con el eje central marcado en la imagen y el eje "x" con la segunda recta horizontal contada desde abajo.

2) Dibujes las tres circunferencias que el autor marcó en el plano.

3) En la imagen se visualizan otras tres circunferencias concéntricas con las anteriores y de menor radio. Realiza el dibujo de estas tres circunferencias.

4) En la visión algebraica aparecen las ecuaciones de las seis circunferencias que dibujaste. Con lápiz, papel y la calculadora encuentra el valor de los radios de dichas circunferencias. Puedes usar el *Editor de ecuaciones del Word*.

5) Con los valores calculados halla el valor de la unidad de medida.

6) César Caesariano utilizó como unidad de medida el número catorce (número bíblico recurrente utilizado en el libro de las Revelaciones para indicar la cantidad de almas que se salvarán, así como varias dimensiones de la Nueva Jerusalén). Conociendo este número y analizando las circunferencias halla la altura hasta la base del pináculo de la torre central.

7) Ahora te invitamos a visitar la página 108 y 109 del libro **"Las Geometrías"** que puedes visualizar en la biblioteca digital del INET ***http://www.inet.edu.ar/index.php/material-de-capacitacion/nueva-serie-de-libros/las-geometrias/*** Parte 2, capítulo 6.

Lee el punto 6.1.2. y realiza las actividades con la linterna y la actividad del cono. Para esta última tarea utiliza el *GeoGebra*. Puedes ayudarte observando el video de YouTube:
https://www.youtube.com/watch?v=HQtJqit1LQg

8) Para que conozcas sobre los filósofos y matemáticos de la antigua Grecia te invitamos a que veas el vídeo que se titula: Hablemos de los matemáticos.

Te dejamos el link ***https://www.powtoon.com/online-presentation/dFEraVpRRif/hablamos-de-los-matematicos/?mode=movie#/***

O bien en *https://youtu.be/AbxIqBjgCFI*

Indaga un poco más y realiza una línea de tiempo ubicando los hechos que te resultaron más destacados de la historia de la Matemática.

9) Ahora realizarás un juego que te presentará tu profesor/a y que te permitirá saber si aprendiste o bien si tenés alguna duda sobre las temáticas que estuviste trabajando.

¡ÉXITOS!