

ELECTRÓNICA

Guía de estudio 8: Circuitos RLC serie

Nivel: Secundario - Modalidad Educación Técnico-Profesional.

Ciclo: Segundo ciclo.

Especialidades: Electrónica, Electricidad.

Fuente de esta guía: Material de estudio de Escuela ORT.

Autores: Ing. Rubén Bernardoni, Ing. Oscar D. Novodvoretz.

Introducción

En esta guía se ve el comportamiento de circuitos serie que incluyen tres componentes: resistencias, capacitores e inductores. A través de diagramas fasoriales y expresiones matemáticas se muestran los desfases entre corrientes y tensiones, así como las magnitudes de corrientes, tensiones e impedancias. Se incluyen cálculos numéricos. Por último, se analiza el concepto de resonancia.

¿Qué estamos aprendiendo?: Análisis y resolución de circuitos RLC serie.

Es conveniente haber completado las guías 6 y 7 para comprender esta guía.

Materiales de estudio:

Recursos: Apunte de Cátedra de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario

<https://www.fceia.unr.edu.ar/tci/utiles/Apuntes/Cap11-2013%20Res%20de%20fase.pdf>



Conceptos relevantes, explicaciones y ejercitaciones.

Circuitos RLC

Un circuito en alterna con inductores y/o capacitores varía su comportamiento dependiendo de la frecuencia y del valor de estos componentes.

En general, teniendo en cuenta todas las posibilidades, podemos encontrarnos con circuitos que tengan los siguientes comportamientos:

- Resistivo puro.
- Inductivo puro.
- Capacitivo puro.
- Resistivo-Inductivo (o **R-L**).
- Resistivo-Capacitivo (o **R-C**).
- Inductivo-Capacitivo (o **L-C**).
- Resistivo-Inductivo-Capacitivo (o **R-L-C**).

Circuito RL Serie

En la figura 1 se muestra un circuito del tipo R-L serie. A partir de los datos que se proporcionan a continuación, analizaremos inicialmente la resolución que nos permita calcular la impedancia del circuito y la intensidad de la corriente que circula por el mismo. Los datos son:

$$\bar{V} = 100 V \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

$$f = 50 \text{ Hz.}$$

$$R = 100 \Omega.$$

$$L = 0,75 \text{ H.}$$

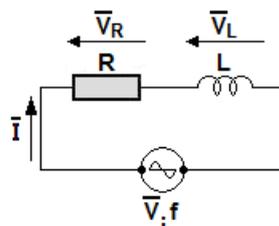


Figura 1: Circuito R-L serie. Se indican la corriente y las dos caídas de tensión que se producen en el mismo.

Como ocurre en todo circuito serie, la corriente es el elemento común a los componentes del mismo. En nuestro caso, dicha corriente produce dos caídas de tensión

que sumadas deben verificar la Segunda Ley de Kirchoff; de esta manera, es posible escribir:

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L \quad 1$$

- La caída de tensión en la resistencia (fasor \mathbf{V}_R) está en fase con la corriente (fasor \mathbf{I}).
- La caída de tensión en el inductor (fasor \mathbf{V}_L) adelanta 90° respecto de la corriente (fasor \mathbf{I}).

Esto nos permitirá trazar un diagrama vectorial **cuantitativo** de corriente y tensión, tal como el que se observa en la figura 2:

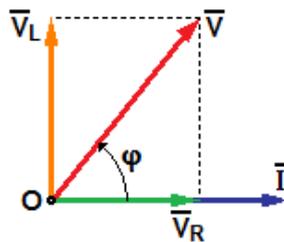


Figura 2: Diagrama vectorial de corriente y tensiones del circuito R-L serie.

El diagrama de la figura 2 responde a la expresión 1. En el mismo se observa que el vector representativo de la tensión \mathbf{V} forma un ángulo φ con el vector representativo de la corriente \mathbf{I} . Este ángulo representa el **desfasaje** resultante entre tensión y corriente, y se ve que la tensión adelanta respecto de la corriente. El valor del ángulo φ depende de los valores de los módulos de \mathbf{V}_R y \mathbf{V}_L pero, por tratarse de un circuito R-L serie, dicho ángulo será siempre positivo.

En base al diagrama de la figura 2, la expresión 1 se puede reescribir en la forma:

$$\bar{V} = V_R + j \cdot V_L \quad 2$$

De la expresión 2 es posible obtener el módulo del vector \mathbf{V} aplicando el Teorema de Pitágoras, y el ángulo del vector \mathbf{V} empleando la trigonometría; entonces, sucesivamente:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \quad 3$$

$$\varphi = \text{arc tan} \left[\frac{V_L}{V_R} \right] \quad 4$$

En resumen, si tomamos el vector de corriente como referencia, los fasores de corriente y tensión del circuito R-L serán, en general:

$$\bar{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \quad 5$$

$$\bar{V} = V \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad 6$$

Si ahora dividimos cada uno de los fasores del diagrama de tensiones de la figura 2 por el fasor de la corriente, obtendremos el diagrama de impedancia correspondiente al circuito R-L, tal como se muestra en la figura 3:

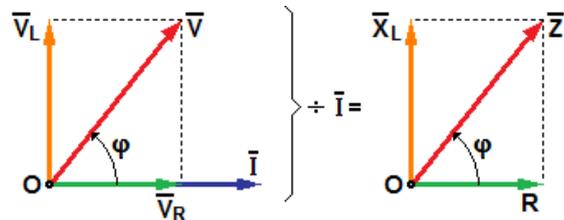


Figura 3: Obtención del diagrama de impedancias a partir del diagrama de tensiones.

El diagrama (o triángulo) de impedancia de la figura 3 nos muestra que la impedancia Z de nuestro circuito es un vector que, en general, puede escribirse en la forma exponencial, o bien en la forma binómica. Ambas formas se indican, respectivamente, en las expresiones 7 y 8:

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad 7$$

$$\bar{Z} = R + j \cdot X_L \quad 8$$

Mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras podemos calcular el módulo Z del vector impedancia, tal como indica la expresión 9, y mediante la expresión 10 calcularemos el ángulo de dicho vector:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad 9$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{X_L}{R} \right] \quad 10$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la impedancia del circuito. En primer lugar, calcularemos la reactancia inductiva X_L :

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

$$X_L = 2 \times 3,14 \times 50 \text{ Hz} \times 0,75 \text{ H}$$

$$X_L = 235,5 \Omega$$

Mediante la expresión 9 calculamos el módulo de la impedancia:

$$Z = \sqrt{(100 \Omega)^2 + (235,5 \Omega)^2}$$

$$Z \cong 256 \Omega$$

Mediante la expresión 10 calculamos el argumento (o ángulo) de la impedancia:

$$\varphi = \text{arc tg} \left[\frac{235,5 \Omega}{100 \Omega} \right]$$

$$\varphi = 67^\circ$$

En definitiva, el valor de la impedancia de nuestro circuito R-L es:

$$\bar{Z} = 256 \Omega \cdot e^{j.67^\circ}$$

... o bien, expresada en su forma binómica:

$$\bar{Z} = (100 + j.235,5)\Omega$$

Esta última expresión es la que permite dibujar el diagrama o triángulo de impedancias del circuito que estamos analizando, y que se representa en la figura 4:

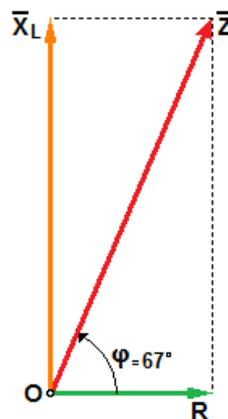


Figura 4: Diagrama o triángulo de impedancias del circuito R-L del ejemplo (en escala).

Ahora, conociendo los valores de las componentes de la impedancia del circuito (R y X_L), podremos calcular la intensidad de la corriente que circula por el mismo. Puesto que poseemos el dato de la tensión de alimentación, aplicaremos la Ley de Ohm:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j.0^\circ}}{256 \Omega \cdot e^{j.67^\circ}}$$

$$\bar{I} = 0,39 \text{ A} \cdot e^{-j.67^\circ}$$

El resultado obtenido muestra que, dado que el circuito es de carácter inductivo, la corriente debe estar atrasada respecto de la tensión de alimentación. A partir de aquí estamos en condiciones de calcular las caídas de tensión que se producen en el circuito.

La caída de tensión en el resistor es:

$$\begin{aligned}\bar{V}_R &= \bar{R} \cdot \bar{I} = 100 \ \Omega \cdot e^{j.0^\circ} \cdot 0,39 \text{ A} \cdot e^{-j.67^\circ} \\ \bar{V}_R &= 39 \text{ V} \cdot e^{-j.67^\circ}\end{aligned}$$

Con este resultado vemos que, como no podía ser de otra manera, *la caída de tensión en el resistor está en fase con la corriente*.

Por otra parte, la caída de tensión en el inductor es:

$$\begin{aligned}\bar{V}_L &= \bar{X}_L \cdot \bar{I} = 235,5 \ \Omega \cdot e^{j.90^\circ} \cdot 0,39 \text{ A} \cdot e^{-j.67^\circ} \\ \bar{V}_L &= 91,85 \text{ V} \cdot e^{j.23^\circ}\end{aligned}$$

Como era previsible, este resultado nos confirma que *la caída de tensión en el inductor adelanta 90° respecto de la corriente*.

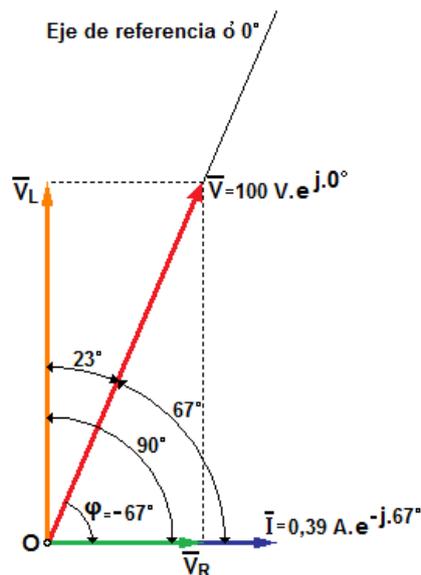


Figura 5: Resumen gráfico de los resultados obtenidos del circuito R-L serie. Este diagrama recibe el nombre de "triángulo de tensiones".

Circuito RC Serie

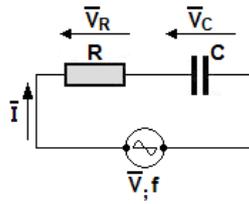


Figura 6: Circuito R-C serie. Se indican la corriente y las dos caídas de tensión que se producen en el mismo.

Para el circuito de la figura 6 propondremos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= 100 V \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \\ f &= 50 \text{ Hz.} \\ R &= 100 \Omega. \\ C &= 32 \mu F = 32 \cdot 10^{-6} F.\end{aligned}$$

Nuevamente, y por tratarse de un circuito serie, la corriente es el elemento común a los componentes del mismo. Dicha corriente (hasta aquí de valor desconocido) produce dos caídas de tensión que sumadas deben verificar la Segunda Ley de Kirchoff; de esta manera, es posible escribir:

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C \quad 11$$

Los valores de estas caídas de tensión también se desconocen. Pero, otra vez, es posible plantear una solución aplicando los conceptos resultantes del capítulo de "Circuitos en Régimen Alterno Senoidal". Allí concluimos que:

- La caída de tensión en la resistencia (fasor \mathbf{V}_R) está en fase con la corriente (fasor \mathbf{I}).
- La caída de tensión en el capacitor (fasor \mathbf{V}_C) atrasa 90° respecto de la corriente (fasor \mathbf{I}).

...en base a lo cual podremos trazar un diagrama vectorial **cuantitativo** de corriente y tensión, tal como el que se representa en la figura 7:

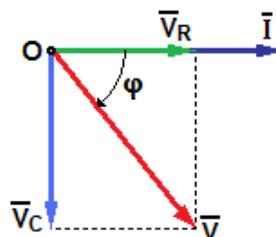


Figura 7: Diagrama vectorial de corriente y tensiones del circuito R-C serie.

El diagrama de la figura 7 es la representación gráfica de la expresión 11. En él se ve que el vector representativo de la tensión \mathbf{V} forma un ángulo φ con el vector representativo de la corriente \mathbf{I} . Este ángulo representa el **desfasaje** resultante entre la tensión de alimentación del circuito y la corriente, y se aprecia que la tensión adelanta respecto de la corriente. El valor del ángulo φ depende de los valores de los módulos de \mathbf{V}_R y \mathbf{V}_C , pero, por tratarse de un circuito R-C serie, dicho ángulo será siempre negativo.

En base al diagrama de la figura 7, la expresión 11 se puede reescribir en la forma:

$$\bar{V} = V_R - j \cdot V_C \quad 12$$

De la expresión 12 se obtiene el **módulo del vector \mathbf{V}** aplicando el Teorema de Pitágoras, y también el ángulo del vector \mathbf{V} empleando la trigonometría; entonces, sucesivamente:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \quad 13$$

$$\varphi = \text{arc tan} \left[\frac{-V_C}{V_R} \right] \quad 14$$

En resumen, si tomamos el vector de corriente como referencia, los fasores de corriente y tensión del circuito R-C serán, en general:

$$\bar{I} = I \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \quad 15$$

$$\bar{V} = V \cdot e^{-j \cdot \varphi} \quad 16$$

Dividiendo cada uno de los fasores del diagrama de tensiones de la figura 7 por el fasor de la corriente, obtendremos el diagrama o triángulo de impedancias del circuito R-C, que se muestra en la figura 8:

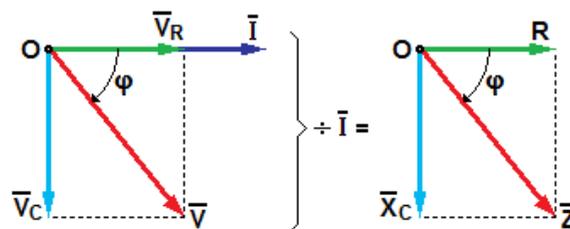


Figura 8: Obtención del diagrama de impedancias a partir del diagrama de tensiones.

La composición entre los vectores representativos de la resistencia y de la reactancia capacitiva nos ha dado como resultado el vector representativo de la impedancia. Este vector puede ser expresado en cualquiera de las dos formas siguientes, según la necesidad operativa:

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{-j \cdot \varphi} \quad 17$$

$$\bar{Z} = R - j \cdot X_C \quad 18$$

El Teorema de Pitágoras nos permitirá calcular el módulo **Z** del vector impedancia (expresión 19), mientras que la trigonometría nos permitirá calcular el ángulo φ de dicho vector (expresión 20):

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad 19$$

$$\varphi = \text{arc tan} \left[\frac{-X_C}{R} \right] \quad 20$$

Para calcular la impedancia del circuito, en primer lugar, hallaremos el valor de la reactancia capacitiva X_C :

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$X_C = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 50 \text{ Hz} \times 32 \times 10^{-6} \text{ F}}$$

$$X_C \cong 100 \Omega$$

Mediante la expresión 19 calculamos el módulo de la impedancia:

$$Z = \sqrt{(100 \Omega)^2 + (100 \Omega)^2}$$

$$Z \cong 141 \Omega$$

Mediante la expresión 20 calculamos el argumento (o ángulo) de la impedancia **Z**:

$$\varphi = \text{arc tg} \left[\frac{-100 \Omega}{100 \Omega} \right]$$

$$\varphi = -45^\circ$$

Por lo tanto, el valor de la impedancia de nuestro circuito R-C es, expresado en forma exponencial:

$$\bar{Z} = 141 \Omega \cdot e^{-j.45^\circ}$$

... mientras que expresado en forma binómica es:

$$\bar{Z} = (100 - j.100)\Omega$$

Esta última expresión permite dibujar, en escala, el triángulo de impedancias correspondiente al circuito bajo análisis:

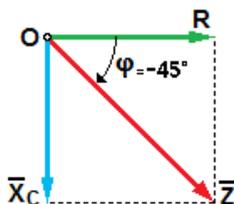


Figura 9: Diagrama o triángulo de impedancias del circuito R-C del ejemplo (en escala).

Conociendo el valor de la impedancia del circuito, podemos calcular la intensidad de la corriente que circula por el mismo aplicando la Ley de Ohm:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j.0^\circ}}{141 \Omega \cdot e^{-j.45^\circ}}$$

$$\bar{I} = 0,707 \text{ A} \cdot e^{j.45^\circ}$$

Tal como era de esperar, el carácter capacitivo de la impedancia del circuito hace que la corriente esté adelantada un cierto ángulo respecto de la tensión de alimentación. Luego, el conocimiento del valor de la corriente permite calcular los valores de las caídas de tensión que se producen en el circuito.

La caída de tensión en el resistor es:

$$\bar{V}_R = \bar{R} \cdot \bar{I} = 100 \Omega \cdot e^{j.0^\circ} \cdot 0,707 \text{ A} \cdot e^{j.45^\circ}$$

$$\bar{V}_R = 70,7 \text{ V} \cdot e^{j.45^\circ}$$

Nuevamente, la caída de tensión en el resistor está en fase con la corriente.

Por otra parte, la caída de tensión en el capacitor es:

$$\overline{V}_C = \overline{X}_C \cdot \overline{I} = 100 \, \Omega \cdot e^{-j.90^\circ} \cdot 0,707 \, \text{A} \cdot e^{j.45^\circ}$$

$$\overline{V}_C = 70,7 \, \text{V} \cdot e^{-j.45^\circ}$$

Se verifica que la caída de tensión en el capacitor retrasa 90° respecto de la corriente.

Con los resultados obtenidos podemos construir el diagrama vectorial de tensiones, que también se denomina "triángulo de tensiones". Este diagrama se encuentra representado en la figura 10, y en él se aprecia la relación de fase entre cada una de las caídas de tensión, la tensión de alimentación y la corriente que circula por el circuito.

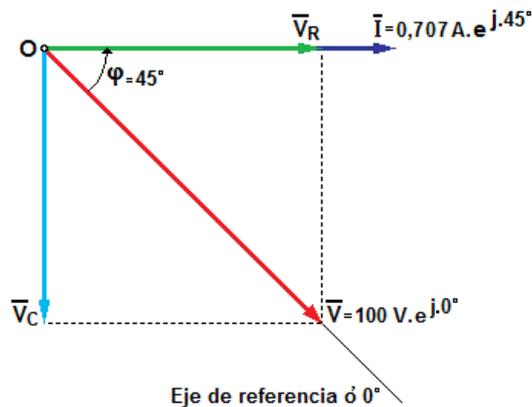


Figura 10: Diagrama vectorial de tensiones del circuito R-L serie.

Circuito RLC serie

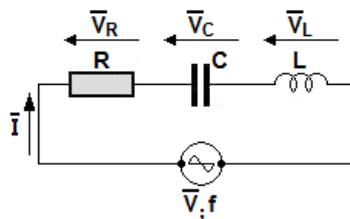


Figura 11: Circuito R-L-C serie. Se indican la corriente y las tres caídas de tensión que se producen en el mismo.

Para el circuito de la figura 11 propondremos los mismos valores de componentes empleados en los dos ejemplos anteriores. Así, los datos son los siguientes:

$$\overline{V} = 100 \, \text{V} \cdot e^{j.0^\circ}$$

$$f = 50 \, \text{Hz}.$$

$$R = 100 \, \Omega.$$

$$L = 0,75 \, \text{H}.$$

$$C = 32 \, \mu\text{F} = 32 \cdot 10^{-6} \, \text{F}.$$

Puesto que ya conocemos los valores de las reactancias inductiva y capacitiva, podemos dibujar en forma inmediata, y en escala, el diagrama de impedancias correspondiente a este circuito:

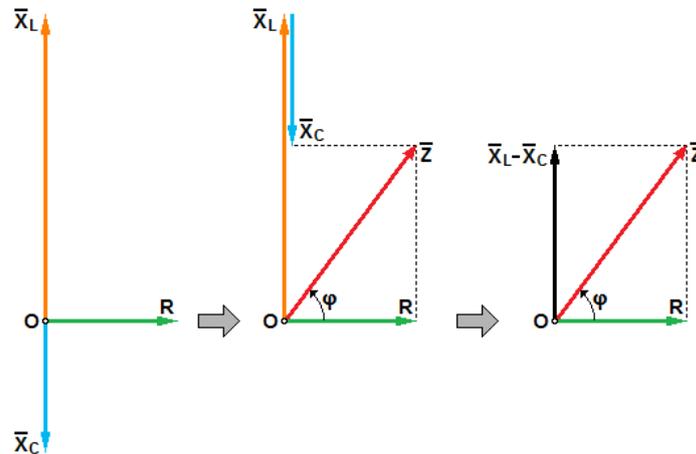


Figura 12: Construcción del diagrama de impedancias del circuito R-L-C serie.

El diagrama de impedancias de la figura 12 responde a la siguiente expresión matemática:

$$\bar{Z} = R + j.X_L - j.X_C$$

... o bien:

$$\bar{Z} = R + j.(X_L - X_C) \quad 21$$

El módulo Z del vector impedancia será calculado mediante el Teorema de Pitágoras:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 22$$

... mientras que el argumento de dicho vector se obtiene de la expresión:

$$\varphi = \text{arc tan} \left[\frac{X_L - X_C}{R} \right] \quad 23$$

Luego, los resultados obtenidos a partir de las expresiones 22 y 23 nos permitirán escribir el valor del vector impedancia en su forma exponencial ya conocida, que es:

$$\bar{Z} = Z.e^{\pm j.\varphi} \quad 24$$

Entonces, si reemplazamos los valores conocidos en la expresión 21 tendremos:

$$\bar{Z} = 100 \Omega + j.(235,5 - 100)\Omega$$

$$\bar{Z} = (100 + j.135,5)\Omega$$

Este último resultado pone de manifiesto que el circuito R-L-C que hemos planteado posee una **impedancia equivalente** formada por una resistencia de 100Ω conectada en serie con un inductor cuya reactancia es de $135,5 \Omega$ **cuando la frecuencia del generador es de 50 Hz**. Aquí debe observarse que, si el valor de la frecuencia fuese otro, la componente imaginaria $X_L - X_C$ también poseería un valor diferente al actual, puesto que tanto X_L como X_C dependen de la frecuencia.

Mediante la expresión 22 calcularemos el módulo Z de la impedancia:

$$Z = \sqrt{(100 \Omega)^2 + (135,5 \Omega)^2}$$

$$Z = 168,4 \Omega$$

Mediante la expresión 23 calcularemos el argumento φ de la impedancia:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{135,5 \Omega}{100 \Omega} \right]$$

$$\varphi \cong 54^\circ$$

Por lo tanto, la notación exponencial de la impedancia de este circuito es:

$$\bar{Z} = 164,8 \Omega \cdot e^{j.54^\circ}$$

La corriente que circula por el circuito es:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j.0^\circ}}{164,8 \Omega \cdot e^{j.54^\circ}}$$

$$\bar{I} \cong 0,607 \text{ A} \cdot e^{-j.54^\circ}$$

La caída de tensión en cada uno de los componentes es:

$$\bar{V}_R = \bar{R} \cdot \bar{I} = 100 \Omega \cdot e^{j.0^\circ} \cdot 0,607 \text{ A} \cdot e^{-j.54^\circ}$$

$$\bar{V}_R = 60,7 \text{ V} \cdot e^{-j.54^\circ}$$

$$\bar{V}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = 235,5 \Omega \cdot e^{j.90^\circ} \cdot 0,607 \text{ A} \cdot e^{-j.54^\circ}$$

$$\bar{V}_L \cong 143 \text{ V} \cdot e^{j.36^\circ}$$

$$\bar{V}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = 100 \Omega \cdot e^{-j.90^\circ} \cdot 0,607 \text{ A} \cdot e^{-j.54^\circ}$$

$$\bar{V}_C = 60,7 \text{ V} \cdot e^{-j.144^\circ}$$

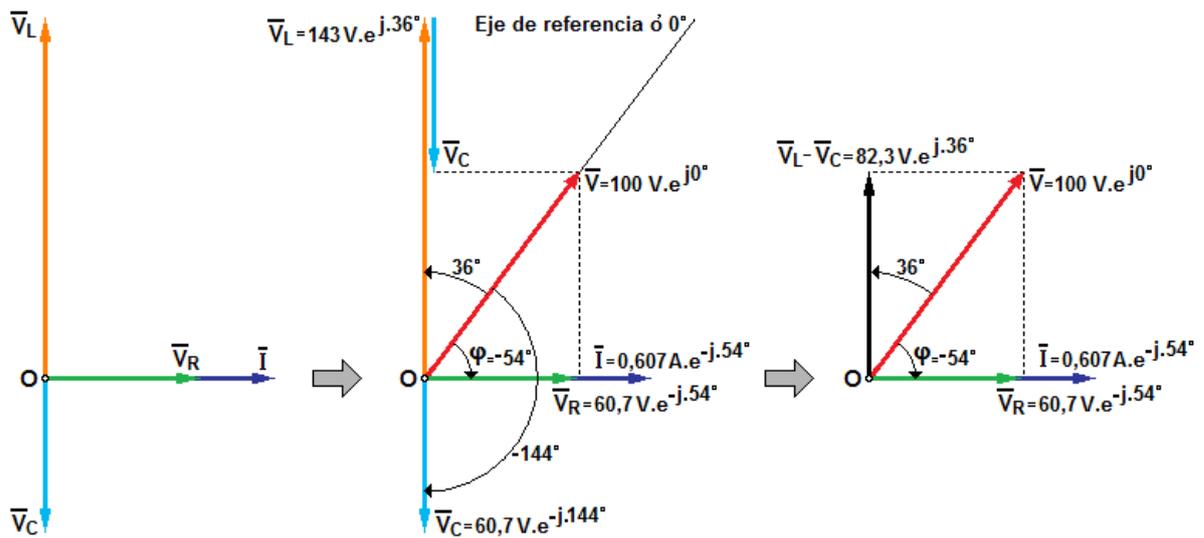


Figura 13: Construcción en escala del diagrama fasorial de tensiones del circuito R-L-C serie. El diagrama de la izquierda representa a cada una de las caídas de tensión con su ángulo de fase respecto de la corriente. El diagrama central representa la suma vectorial de las caídas de tensión. El diagrama de la derecha es el resultado de dicha suma.

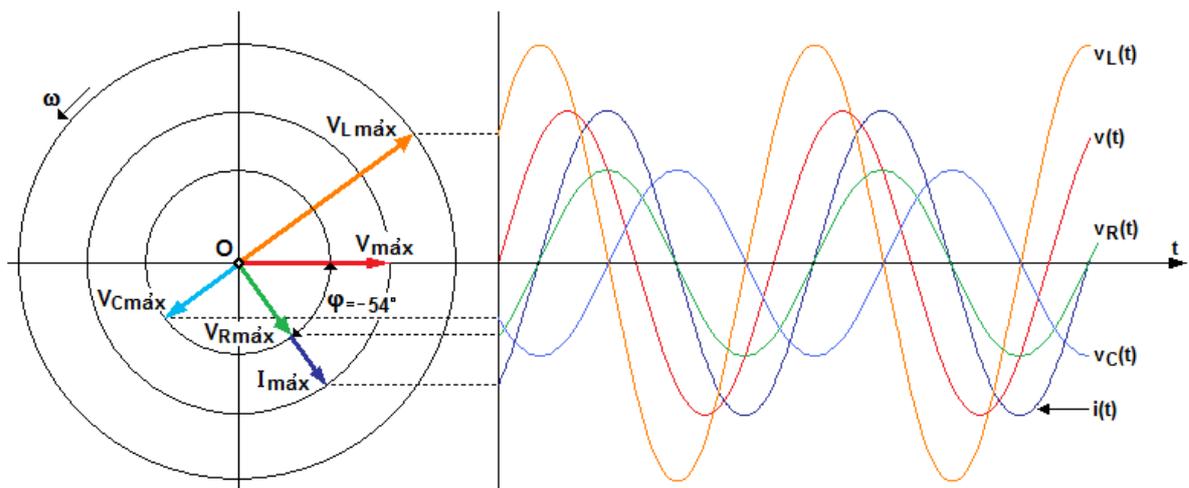


Figura 14: Diagrama vectorial de tensiones y corriente del circuito R-L-C serie. A la derecha se observan las señales senoidales correspondientes a cada una de las caídas de tensión, la tensión de alimentación y la corriente. Estas señales son el resultado de los vectores giratorios armónicos o fasores.

En este punto resulta de interés analizar qué ocurre a la hora de efectuar mediciones de tensión y corriente en los circuitos de corriente alterna senoidal que contienen componentes reactivos. Tal como hemos visto en el presente capítulo, tensiones y corrientes están caracterizadas por un módulo que equivale a su valor numérico, y por un argumento o ángulo que se mide respecto de un eje de referencia. En otras palabras, las tensiones y las corrientes son magnitudes vectoriales (rigurosamente, fasoriales).

Pero la gran mayoría de los instrumentos de medición (voltímetros y amperímetros, tanto analógicos como digitales) que se emplean en la práctica sólo miden el módulo (el valor eficaz) de la tensión o de la corriente, pero no la fase.

Con el fin de dejar en claro lo expresado, la figura 15 muestra el circuito R-L-C serie bajo análisis en el que se han incluido cinco voltímetros destinados a medir simultáneamente las caídas de tensión y la tensión de alimentación. El valor de tensión indicado por cada uno de los voltímetros será:

- El voltímetro **V1** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el resistor R, es decir, el módulo del fasor V_R . O sea: $V_R = 60,7$ V.
- El voltímetro **V2** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el capacitor C, es decir, el módulo del fasor V_C . O sea: $V_C = 60,7$ V.
- El voltímetro **V3** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el inductor L, es decir, el módulo del fasor V_L . O sea: $V_L = 143$ V.
- El voltímetro **V4** indica la sumatoria entre el valor eficaz de la caída de tensión en el capacitor C y el valor eficaz de la caída de tensión en el inductor L (la diferencia de potencial entre el borne izquierdo del capacitor y el borne derecho del inductor), es decir, el módulo del fasor $V_L - V_C$. O sea: $V_L - V_C = 82,3$ V.
- El voltímetro **V5** indica el valor eficaz de la tensión de alimentación, es decir, el módulo del fasor V . O sea: $V = 100$ V.

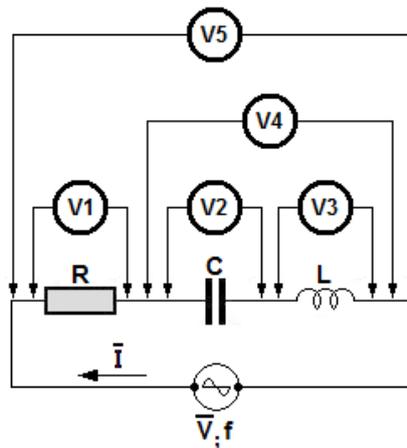


Figura 15: Medición de tensiones en el circuito R-L-C serie.
(Ver texto).

Resonancia del circuito RLC serie

El carácter de la componente imaginaria $X_L - X_C$ depende exclusivamente de la frecuencia una vez que se han fijado los valores de L y C . Es decir que, según sea el valor de la frecuencia, la serie L-C se podrá comportar como un inductor equivalente, o bien como un capacitor equivalente.

Pero también puede ocurrir que la componente imaginaria de la impedancia sea nula.

$$(X_L - X_C) = 0 \quad 25$$

...o bien:

$$X_L = X_C \quad 26$$

...o bien:

$$2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad 27$$

La igualdad de la expresión 27 puede cumplirse en las siguientes tres condiciones:

- Cuando la inductancia posea el valor particular $L=L_0$ dado por la expresión:

$$L_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot C} \quad 28$$

- Cuando la capacidad posea el valor particular $C=C_0$ dado por la expresión:

$$C_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot L} \quad 29$$

- Cuando la frecuencia posea el valor particular $f=f_0$, denominada "**frecuencia de resonancia**", que está dado por la expresión:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad 30$$

Se dice que un circuito tipo "serie" se encuentra en estado de resonancia cuando la componente imaginaria de su impedancia es nula.

En definitiva, el cumplimiento de cualquiera de las tres condiciones analizadas hace que la componente imaginaria de la impedancia se anule, razón por la cual su expresión se convierte en:

$$\bar{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C)$$

$$Z = Z_0 = R = Z_{MIN} \quad 31$$

La expresión 31 permite adelantar algunas conclusiones iniciales de suma importancia:

- 1) Cuando el circuito R-L-C serie se encuentra en **estado de resonancia** la impedancia del mismo alcanza su valor mínimo, y éste coincide con el valor de la resistencia **R**.
- 2) Puesto que la impedancia alcanza su valor mínimo, el valor de la corriente del circuito es el máximo posible.
- 3) Puesto que la impedancia del circuito es de carácter resistivo puro, la corriente del circuito está en fase con la tensión de alimentación, es decir que **$\varphi=0$** .
- 4) La potencia activa es máxima.

Entonces, continuando con nuestro ejemplo de circuito R-L-C serie, calcularemos el valor de la frecuencia que debería tener el generador de tensión para que el circuito entre en estado de resonancia. Posteriormente determinaremos las consecuencias mediatas que se desprenden de dicho estado.

Reemplazando los valores conocidos de **L** y **C** en la expresión 30 tendremos:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,75 \text{ H} \cdot 32 \cdot 10^{-6} \text{ F}}}$$

$$f_0 = 32,48 \text{ Hz}$$

Por lo tanto, y de acuerdo con la expresión 31, la impedancia en estado de resonancia es:

$$Z_0 = R = 100 \Omega$$

En consecuencia, el nuevo valor de la corriente, que es la corriente de resonancia, será:

$$\overline{I}_0 = \frac{\overline{V}}{Z_0} = \frac{\overline{V}}{R} = \frac{100 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \Omega \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}$$

$$\overline{I}_0 = 1 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

Puesto que la frecuencia de funcionamiento del generador ha sido modificada, será necesario calcular los nuevos valores de las reactancias inductiva y capacitiva (X_{L0} y X_{C0} respectivamente). Pero, en base a la expresión 26, los módulos de ambas reactancias deben ser iguales. Entonces:

$$X_{L0} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 32,48 \text{ Hz} \cdot 0,75 \text{ H}$$

$$X_{L_0} \cong 153,1 \Omega$$

$$X_{C_0} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 32,48 \text{ Hz} \cdot 32 \cdot 10^{-6} \text{ F}}$$

$$X_{C_0} \cong 153,1 \Omega$$

Ahora podemos calcular el nuevo valor de la caída de tensión en cada uno de los componentes:

$$\overline{V_{R_0}} = \overline{R} \cdot \overline{I_0} = 100 \Omega \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

$$\overline{V_{R_0}} = 100 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

$$\overline{V_{L_0}} = \overline{X_{L_0}} \cdot \overline{I_0} = 153,1 \Omega \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \cdot 1 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

$$\overline{V_{L_0}} \cong 153,1 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 90^\circ}$$

$$\overline{V_{C_0}} = \overline{X_{C_0}} \cdot \overline{I_0} = 153,1 \Omega \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \cdot 1 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$$

$$\overline{V_{C_0}} = 153,1 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$$

En los resultados obtenidos se puede apreciar que, en primer lugar, los vectores representativos de las reactancias inductiva y capacitiva poseen módulos idénticos, pero entre ellos existe un ángulo de 180° (se encuentran sobre la misma recta de acción, pero con sentidos opuestos). Esto hace que, en estado de resonancia, ambos vectores se cancelen mutuamente (se cumple la expresión 30). Como consecuencia, el vector impedancia queda representado sólo por el vector representativo de la resistencia (expresión 31). En segundo lugar, y en absoluta concordancia con lo anterior, ocurre lo mismo con los vectores representativos de las caídas de tensión en el inductor y en el capacitor: ambas caídas de tensión se cancelan mutuamente, razón por la cual **la caída de tensión en la resistencia es igual a la tensión de alimentación**.

Estos resultados se encuentran representados gráficamente en la figura 16. A la izquierda de la misma se aprecia el diagrama de tensiones del circuito R-L-C serie; en este diagrama se debe observar que el ángulo de desfase φ entre la corriente y la tensión de alimentación es nulo. A la derecha de la figura 16 se muestra el diagrama de impedancias.

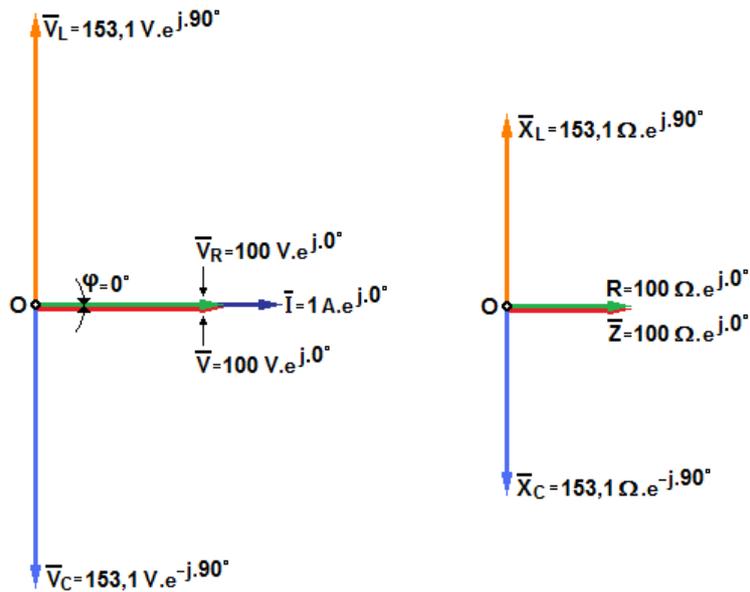


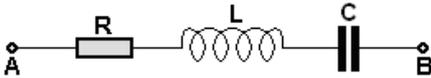
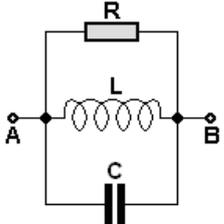
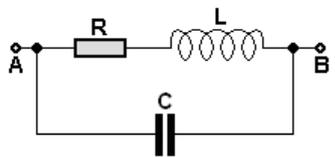
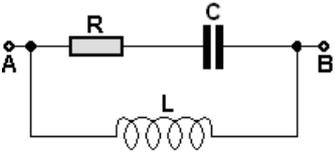
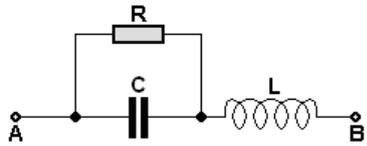
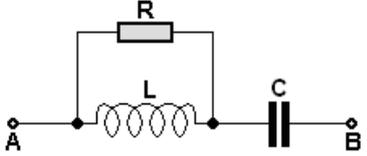
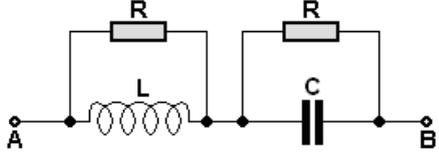
Figura 16: Diagramas de tensiones y de impedancias (en escala) correspondiente al circuito R-L-C serie en estado de resonancia.

Supongamos ahora que volvemos a implementar el circuito de medición representado en la figura 15 teniendo en cuenta que nuestro circuito R-L-C serie **se encuentra en estado de resonancia**. En estas condiciones encontramos que el valor de tensión indicado por cada uno de los voltímetros será:

- El voltímetro **V1** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el resistor R, es decir, el módulo del fasor V_R . O sea: $V_R = 100$ V.
- El voltímetro **V2** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el capacitor C, es decir, el módulo del fasor V_C . O sea: $V_C = 153,1$ V.
- El voltímetro **V3** indica el valor eficaz de la caída de tensión en el inductor L, es decir, el módulo del fasor V_L . O sea: $V_L = 153,1$ V.
- El voltímetro **V4** indica la sumatoria entre el valor eficaz de la caída de tensión en el capacitor C y el valor eficaz de la caída de tensión en el inductor L (la diferencia de potencial entre el borne izquierdo del capacitor y el borne derecho del inductor), es decir, el módulo del fasor $V_L - V_C$. O sea: $V_L - V_C = 0$ V (pues ambos fasores son iguales y opuestos).
- El voltímetro **V5** indica el valor eficaz de la tensión de alimentación, es decir, el módulo del fasor V . O sea: $V = 100$ V.

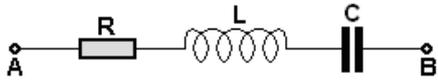
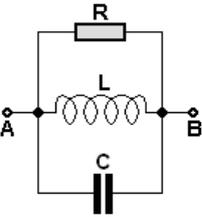
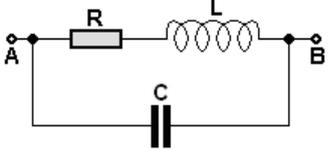
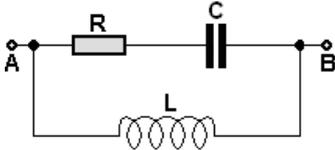
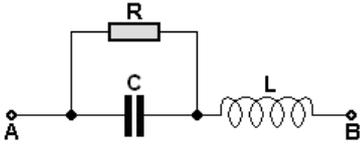
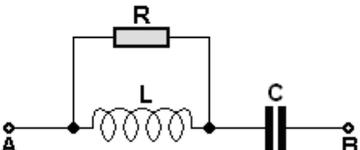
Ejercicio N° 1

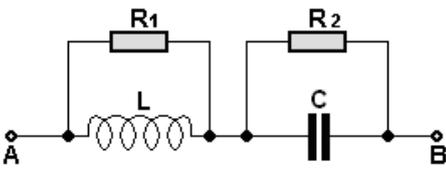
Para los siguientes circuitos hallá la impedancia entre los puntos A y B y la frecuencia de resonancia:

N°	CIRCUITO	DATOS	INCOGNITAS	
a)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
b)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
c)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
d)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
e)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
f)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$
g)		$R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$	$Z =$	$f_0 =$

Ejercicio N°2

Para los siguientes circuitos hallá las corrientes y tensiones en todos los componentes y verifique que se cumplen las leyes de Kirchoff. Indique el carácter inductivo, resistivo o capacitivo del circuito.

N°	CIRCUITO	DATOS	INCOGNITAS
a)		$V_{AB} = 100V \angle 40^\circ$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$ Carácter:	$I =$ $V_R =$ $V_L =$ $V_C =$ $V_R + V_L + V_C =$
b)		$V_{AB} = 100V \angle 120^\circ$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$ Carácter:	$i_{TOTAL} =$ $I_R =$ $I_L =$ $I_C =$ $I_R + I_L + I_C =$
c)		$V_{AB} = 150V \angle -120^\circ$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$ Carácter:	$i_{TOTAL} =$ $I_{RL} =$ $I_C =$ $V_R =$ $V_L =$ $V_R + V_L =$
d)		$V_{AB} = 200V \angle 30^\circ$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$ Carácter:	$i_{TOTAL} =$ $I_{RC} =$ $I_L =$ $V_R =$ $V_C =$ $V_R + V_C =$
e)		$V_{AB} = 10V \angle -60^\circ$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ $f = 50 \text{ Hz}$ Carácter:	$I_R =$ $I_C =$ $I_L =$ $V_R =$ $V_L =$ $V_R + V_C =$
f)		$V_{AB} = 14,14 \text{ V sen}(314.t)$ $R = 20 \Omega$ $L = 63,7 \text{ mHy}$ $C = 318,5 \mu\text{F}$ Carácter:	$I_R =$ $I_C =$ $I_L =$ $V_R =$ $V_C =$ $V_R + V_C =$

g)		$V_{AB} = 10V \cdot \text{sen}(377t - 30^\circ)$ $R_1 = R_2 = 20 \Omega$ $X_L = j20 \Omega$ $X_C = -j15 \Omega$ Carácter:	$V_C =$ $V_L =$ $V_L + V_C =$ $I_L =$ $I_{R1} =$ $I_C =$ $I_{R2} =$ $I_{R1} + I_L =$
----	---	---	---

Para seguir aprendiendo: Resonancia

Ejercicio N°3

Observe la figura 2 de la página 2 del apunte Respuesta en Frecuencia que puede verse en:

<https://www.fceia.unr.edu.ar/tci/utiles/Apuntes/Cap11-2013%20Res%20de%20fase.pdf>



- Ubique, sobre el eje de frecuencia, la frecuencia de resonancia.
- Indique el valor del módulo, para la frecuencia de resonancia. Compare ese valor con el valor de la resistencia.
- Ubique en el gráfico las curvas de reactancias capacitiva e inductiva.
- ¿Qué curva tiene más amplitud para frecuencias mayores a la de resonancia, X_L o X_C ? ¿El circuito se comporta de modo inductivo o capacitivo?
- ¿Qué curva tiene más amplitud para frecuencias menores a la de resonancia, X_L o X_C ? ¿El circuito se comporta de modo inductivo o capacitivo?

Compartí ejercitaciones y explicaciones con tus compañeras y compañeros. Busquen otros ejercicios similares. Anoten dudas, aquello que les da una idea que no está bien hecho o que tienen dudas. Consulten. Recuerden que aprender también incluye practicar.