1

Haydeé Noceti
Sol Avancini Noceti

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

Prefacio

A partir de este capítulo nos introducimos totalmente, en los principios, conceptos y aplicaciones de la estática.

Seguramente al lector le surgirán algunas preguntas, tales como:
¿qué es la Estática?, ¿para qué?, ¿cómo influyen en nuestra vida cotidiana sus principios, conceptos, desarrollos…?
Las respuestas a estas y a otras preguntas las encontraremos a medida que se desarrollen las diferentes temáticas, ya sea en este capítulo como en los siguientes.

La primera temática, con la que damos comienzo el presente capítulo, es un concepto clave. Este concepto constituye el eje alrededor del cual gira la estática; nos estamos refiriendo al concepto de **fuerza**.

Todas los temas desarrollados: representación gráfica, componentes rectangulares, momento de una fuerza respecto de un punto, traslación de fuerzas, descomposición de una fuerza en dos direcciones, leyes de Newton,... siempre van acompañados con ejercicios y problemas resueltos.

Los problemas planteados simulan situaciones reales. Asimismo, al final del capítulo proponemos ejercicios y problemas para **pensar y resolver**, como una forma de aplicar los saberes desarrollados durante el mismo.

Si bien somos rigurosos en cuanto a los contenidos, lenguaje y/o simbología, pretendemos que el lector encuentre en este libro un espacio amigable de aprendizaje de temáticas que, en algunos casos, no son simples.

1.1.- Concepto de fuerza

***VOLVIÓ EL DIEZ* - La Selección goleó 4-0 a Venezuela**
Título de la tapa de Clarín del domingo 29/03/2009

El sábado 28 de marzo de 2009 comenzó una nueva era en el fútbol, la "era de Maradona". Ahora, como director técnico del equipo argentino. Y debutó con un gran triunfo; Argentina le ganó a Venezuela por 4-0 con goles de Messi, Maxi Rodríguez, Carlitos Tévez y de Sergio Agüero.
Todos sabemos qué es un gol: la pelota debe entrar en el arco. El gol puede ser a favor o en contra. En el primer caso la pelota es introducida por un jugador en el arco rival, y en el segundo, la pelota la introduce en su propio arco.
Pero nos vamos a detener en el análisis de las jugadas previas al gol, desde el punto de vista de la física.


Imagen 1.1. *Goooo...l; gooooo...l*

Analicemos la jugada de Zanetti en ese partido, entre Argentina y Venezuela, por las eliminatorias para el Mundial de 2010.

Así la relató el locutor de FOX SPORTS [1]

"... frente al arco de Argentina, Rosales pierde la pelota, la toma Zanetti quien se adelanta al arquero Carrizo, la tira al medio, la recibe Heinze, se traba con Rosales y logra enviar la pelota a los pies de Zanetti.

Zanetti pasa a uno, a dos, a tres jugadores venezolanos, siempre con la pelota en sus pies.

¡Qué jugada la del Puppi! Cruza el medio campo, sigue sorteando rivales, mira… lo ve a Tévez, le tira la pelota, Tévez ve a Messi, se la coloca a sus pies, vuelve a Tévez, y....
Messi con un pique vibrante llega al área rival, recibe la pelota de Tévez, la para y tira... goooooooool… argentino. ¡Qué jugada, sí, sí, sí, sí..., señores! Messi dejó al arquero en el camino, y de zurda goooool… argentino"

¿Qué es lo que causa los diferentes movimientos de la pelota y los cambios en la dirección de los mismos?

Resulta evidente que, en cada una de las jugadas del relato anterior, el pie o la cabeza del jugador le aplica a la pelota una **fuerza**, provocando así un movimiento o bien un cambio en su dirección (**Imagen 1.2**).
Fuerzas son las que hacen que el Puppi Zanetti, en su carrera vertiginosa, sorteando rivales, lleve en todo el recorrido la pelota en sus pies, la pare y la pase a sus compañeros.
Fuerza es el puntapié que, con sus botines, aplica el jugador cuando le provoca un faul, dejando a su rival en el suelo.
Fuerzas son aquellas que le aplica Messi a la pelota, cuando la recibe de Tévez: la para y la pone, nuevamente, en movimiento hasta el gol.

[1] No se trata de una reproducción textual, sino de una recreación del relato realizado por el comentarista de ese programa de TV.

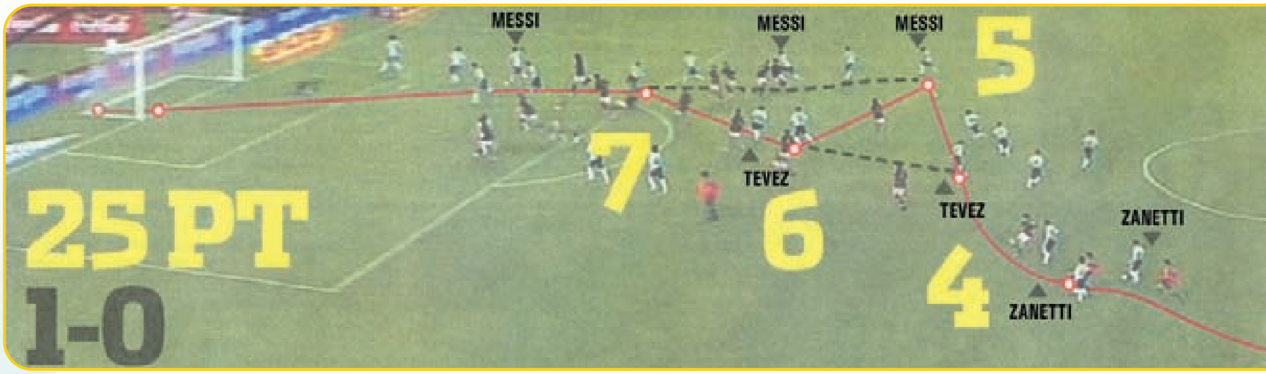


Imagen 1.2. *La jugada de Puppi Zanetti que culmina con el gol de Messi*

Advertimos en todos los casos, que estamos diciendo **qué es una fuerza**, a través del efecto que provoca. Estos ejemplos nos conducen a dar la siguiente definición de fuerza.

*Una fuerza tiene la **capacidad** de cambiar el estado del movimiento de un cuerpo, incluyendo el de reposo.*

¿Qué significa *tiene la capacidad*?

Nos está diciendo que una fuerza no provoca necesariamente un cambio en el movimiento, sino que **es capaz de**, ya que, no siempre ante una fuerza se produce un movimiento, por ejemplo, una fuerza puede equilibrarse con otra fuerza o fuerzas, siendo el efecto nulo; por lo tanto, no hay movimiento, pero sí fuerza.

Con el fin de poder estudiar el efecto de las fuerzas sobre un cuerpo, resulta necesario representarlas en el plano o en el espacio. Nosotros, sólo utilizamos en este libro la representación de las fuerzas en el plano.

◆ Representación de una fuerza en el plano

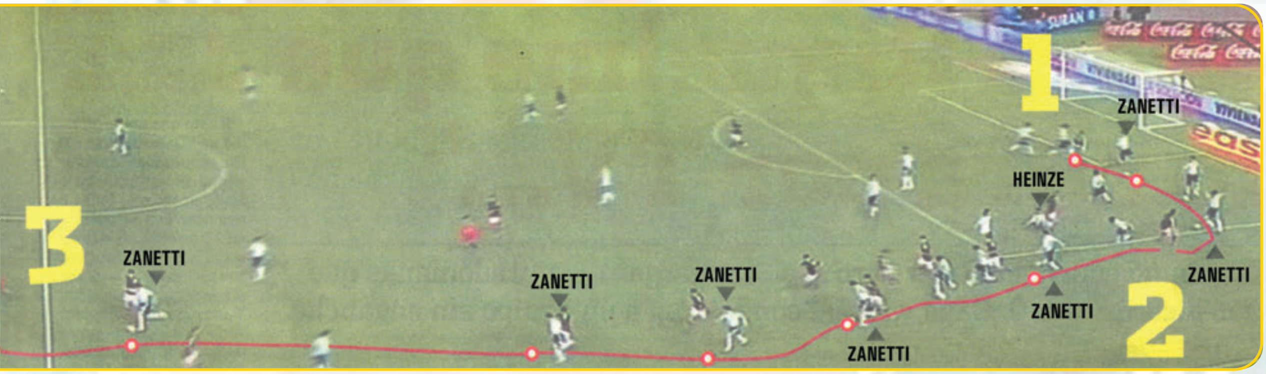
Una fuerza queda determinada mediante los siguientes elementos:

1. punto de aplicación;
2. dirección y sentido;
3. módulo o intensidad.

En el plano, las fuerzas se representan mediante vectores, por cuanto los vectores tienen las mismas características que las fuerzas.
Un vector es un par ordenado de puntos y por ser ordenado debe conocerse cuál es el primer punto y cuál es el segundo.
El dibujo de una flecha es un buen indicador de la representación de un vector.

Ejemplo
El vector (a , b) tiene la siguiente representación “a→b”, también puede ser así :“a↷b”, o “a⤻b”, o “a↝b”, o...

No interesa la forma de la flecha, ya que sólo necesitamos saber cuál es el primer elemento y cuál es el segundo. No obstante, dado que en el desarrollo de los diferentes temas se usan gráficos geométricos representamos las fuerzas mediante una flecha recta (**Figura 1.1**).
En este caso *a* es el primer elemento del par y *b* el segundo.



Podemos visualizar distintas representaciones de fuezas en la **figura** 1.2.

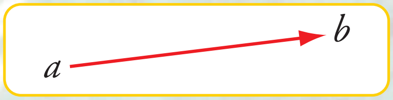


Figura 1.1. *Representación gráfica de una fuerza*

Por otra parte, para facilitar el cálculo analítico, las fuerzas se representan en un sistema de coordenadas; el que nosotros utilizamos es el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales o rectangulares (en el plano) (**Figura 1.3**).

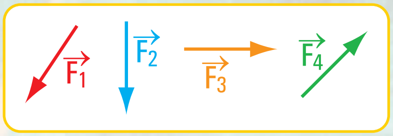


Figura 1.2. *Representación gráfica de distinas fuerzas*

Representación de una fuerza en el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano (*x* , *y*) (Figura 1.4)

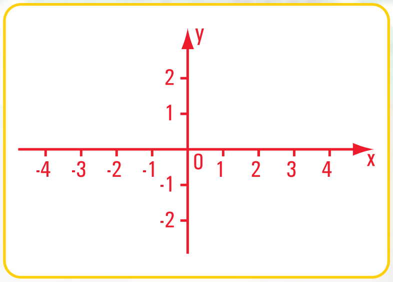


Figura 1.3. *Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales*

Punto de aplicación: 0

El punto de aplicación puede ser considerado en cualquier lugar de la recta de acción de la fuerza (principio de transmisibilidad).

Dirección: es la recta de acción.

Sentido: está dado por el ángulo definido por el eje ***x*** y la recta de acción de la fuerza.

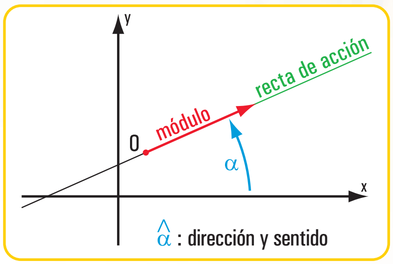


Figura 1.4. *Representación de una fuerza en coordenadas cartesianas ortogonales*

Módulo o intensidad: el módulo o intensidad es, en la escala correspondiente, el valor del segmento determinado por el punto de origen y el extremo de la flecha.
Dado que el sentido de una fuerza es expresado mediante el valor de un ángulo, entonces debemos definir el concepto de ángulo y fijar una convención de signos.

Imagen 1.3. *Alumnos de 1er año, Ciclo Superior, de la E.T. N°34 de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, en una clase de Estática*

Una forma de definir a los ángulos

Pensemos por un momento en una semirrecta que gira alrededor de su origen, la parte del plano barrida en el giro es ***un ángulo.*** *El giro puede hacerse en el mismo sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario* ***(Figura 1.5)****.*

Diferenciamos a ambos sentidos mediante signos ***(Figura 1.6)****.*

Convención de signos

- Signo positivo del ángulo (+) cuando la semirrecta origen de ángulos gira en sentido contrario al de las agujas del reloj.

- Signo negativo del ángulo (–) cuando la semirrecta origen de ángulos gira en el mismo sentido que las agujas del reloj[2]*.*

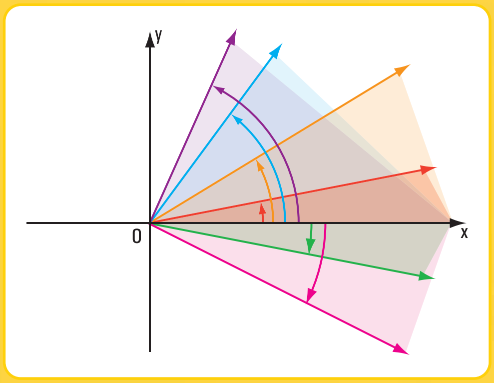


Figura 1.5. *Representación gráfica de ángulos en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales*

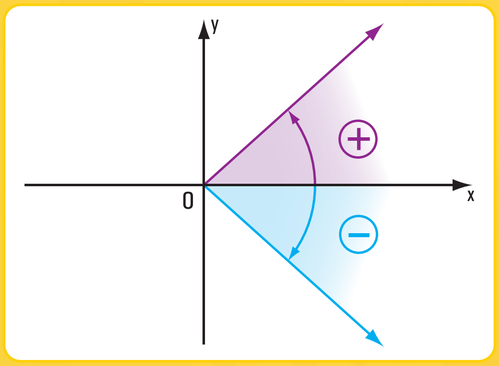


Figura 1.6. *Signos de los ángulos*

Cuando representamos una fuerza en el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, se presentan cuatro casos, a saber:

Caso I (Figura 1.7 a)
La fuerza está en el primer cuadrante: $0 \leq \alpha \leq \pi/2$

Caso II (Figura 1.7 b)
La fuerza está en el segundo cuadrante: $\pi/2 < \alpha \leq \pi$

Caso III (Figura 1.7 c)
La fuerza está en el tercer cuadrante: $\pi < \alpha \leq 3/2\,\pi$

Caso IV (Figura 1.7 d)
La fuerza está en el cuarto cuadrante: $3/2\,\pi < \alpha \leq 2\pi$

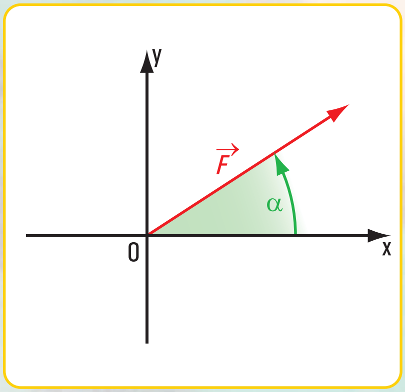


Figura 1.7 a

[2] En el desarrollo de este libro consideramos a los ángulos siempre con signo positivo.

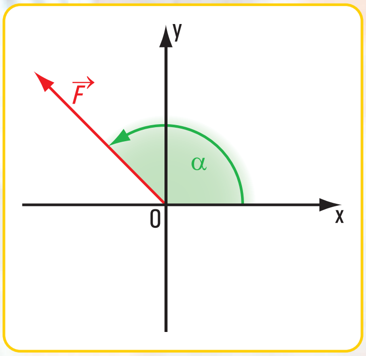


Figura 1.7 b

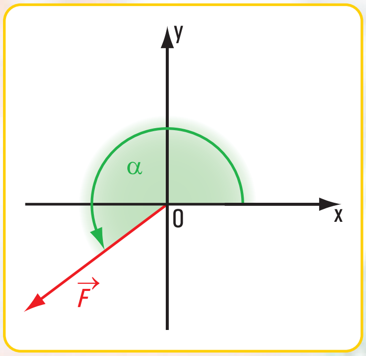


Figura 1.7 c

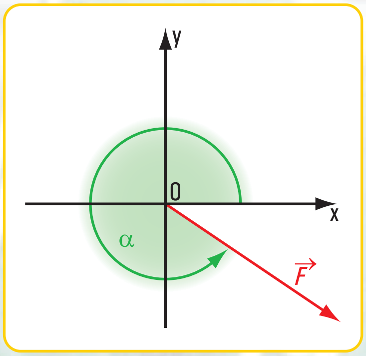


Figura 1.7 d

◆ Componentes rectangulares de una fuerza

Las componentes rectangulares de una fuerza son las proyecciones de la misma sobre los ejes x e y (**Figura 1.8**).
$\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ son las componentes de $\vec{F}$ según los ejes x e y.
Se pueden presentar las siguientes situaciones.

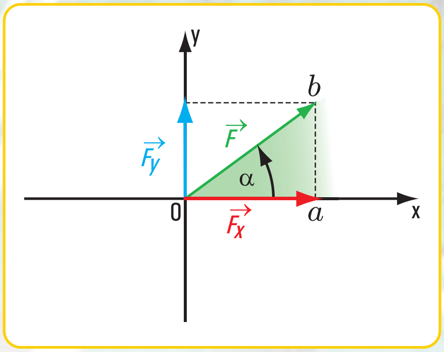


Figura 1.8. *Representación de las componentes de una fuerza*

• Situación I

Conocemos el módulo o intensidad, la dirección y el sentido de la fuerza y debemos hallar las intensidades de sus componentes: F_x y F_y.[3]
Las fuerzas $\vec{F}$, $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$, forman un triángulo rectángulo $o\overset{\triangle}{a}b$.[4]

En el $o\overset{\triangle}{a}b$ rectángulo:

la intensidad o módulo de $\vec{F}_x$ se obtiene :

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\,.\cos\alpha$$

la intensidad o módulo de $\vec{F}_y$ se halla así :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\,.\operatorname{sen}\alpha$$

• Situación II

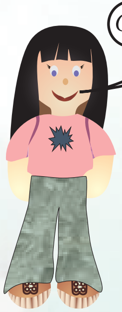
Conocemos las fuerzas componentes de una fuerza $\vec{F}$: F_x y F_y, y debemos hallar el módulo o intensidad, la dirección y el sentido de la fuerza $\vec{F}$.

En el $o\overset{\triangle}{a}b$ rectángulo, $F = +\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$ (*módulo de* $\vec{F}$)

$$tg\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \alpha = arc\ tg\ \frac{F_y}{F_x}\ (\textit{dirección y sentido de } \vec{F})$$

[3] Cuando hacemos referencia a la fuerza la indicamos con flecha sobre la letra: $\vec{F}$. Si expresamos módulo o intensidad escribimos sin flecha: F.
[4] Indicamos a los puntos con letras minúsculas y a las rectas con mayúsculas, siguiendo la notación de la teoría de conjuntos, ya que la recta la consideramos como un conjunto y los puntos como sus elementos.

◆ Aplicamos los conceptos y desarrollos anteriores en los ejercicios y problemas siguientes



Ejercicio Nº 1.1

Datos: $F = 0{,}5\ N$ intensidad o módulo de $\vec{F}$
$\hat{\alpha} = 30^o$ dirección y sentido de $\vec{F}$
Incógnitas: módulo de las componentes F_x y F_y

Desarrollo
Aplicamos las expresiones matemáticas de las funciones trigonométricas al ángulo α del triángulo de fuerzas (**Figura 1.9**).

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \,.\, \cos\alpha$$

$$F_x = 0{,}5\,N \,.\, \cos 30^o$$

$$F_x = 0{,}433\,N$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

$$F_y = 0{,}5\,N \,.\, \operatorname{sen} 30^o$$

$$F_y = 0{,}25\,N$$

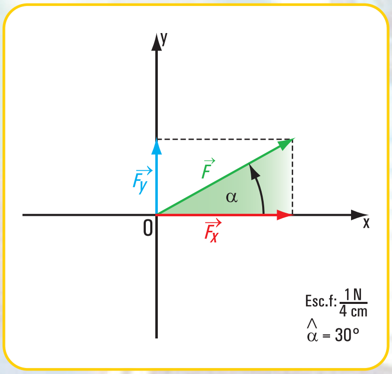


Figura 1.9

Respuesta
Los módulos o intensidades de las componentes rectangulares de $\vec{F}$ son: $F_x = 0{,}433$ N y $F_y = 0{,}25$ N. Como la fuerza $\vec{F}$ pertenece al primer cuadrante, se verifica que ambas componentes son positivas.

Ejercicio Nº 1.2
El módulo de la fuerza $\vec{F}$ es $F = 0{,}2$ N, la dirección y el sentido están dados por $\hat{\alpha} = 135^o$ (**Figura 1.10**), ¿cuáles son las intensidades de $\vec{F_x}$ y $\vec{F_y}$?

Desarrollo

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \,.\, \cos\alpha$$

$$F_x = 0{,}2\,N \,.\, \cos 135^o$$

$$F_x = 0{,}2\,N \,.\, (-\,0{,}707)$$

$$F_x = -0{,}1414\,N$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

$$F_y = 0{,}2\,N \,.\, 0{,}707$$

$$F_y = 0{,}1414\,N$$

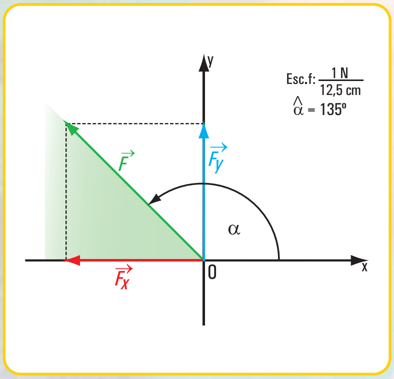


Figura 1.10

Respuesta
Las componentes rectangulares de $\vec{F}$ son: F_x = - 0,1414 N y F_y = 0,1414 N.
Como la fuerza $\vec{F}$ está en el segundo cuadrante, se verifica que la componente según x es negativa y la componente en y es positiva.

Ejercicio Nº 1.3
La dirección y el sentido de una fuerza $\vec{P}$ están dados por el ángulo $\hat{\alpha}$ = 240º y su intensidad es P = 1 N (**Figura 1.11**), ¿cuál es el módulo de $\vec{P}_x$ y el de $\vec{P}_y$?

Desarrollo

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \cdot \cos\alpha$$

$$P_x = 1\,N \cdot \cos 240^o$$
$$P_x = 1\,N \cdot (-0{,}5)$$
$$P_x = -0{,}5\,N$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$P_y = 1\,N \cdot \operatorname{sen} 240^o$$
$$P_y = 1\,N \cdot (-0{,}866)$$
$$P_y = -0{,}866\,N$$

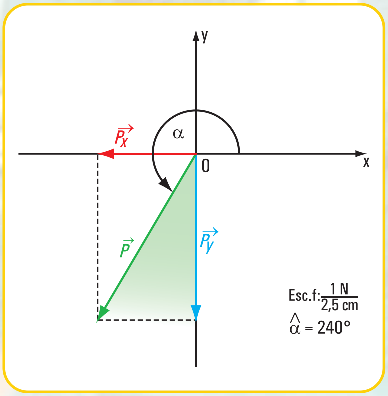


Figura 1.11

Respuesta
Los módulos de las componentes rectangulares de $\vec{P}$ son P_x = -0,5 N y P_y = -0,866 N.
Como la fuerza $\vec{P}$ pertenece al tercer cuadrante se verifica que P_x es negativa y en P_y también negativa.

Ejercicio Nº 1.4

Datos: S = 0,02 kN
α = 300º

Hallar S_x y S_y

Desarrollo

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{S} \Rightarrow S_x = S \cdot \cos\alpha$$

$$S_x = 0{,}02\,kN \cdot \cos 300^o$$
$$S_x = 0{,}02\,kN \cdot 0{,}5$$
$$S_x = 0{,}01\,kN$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{S_y}{S} \Rightarrow S_y = S \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$S_y = 0{,}02\,kN \cdot \operatorname{sen} 300^o$$
$$S_y = 0{,}02\,kN \cdot (-0{,}866)$$
$$S_y = -0{,}017\,kN$$

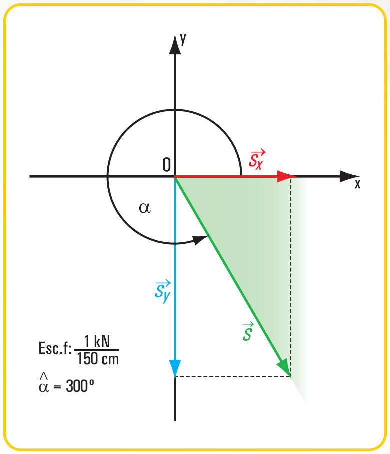


Figura 1.12

Respuesta

Las componentes de $\vec{S}$ son: S_x = 0,01 kN y S_y = -0,017 kN.
Como la fuerza está en el cuarto cuadrante se verifica que la componente según *x* es positiva y la proyección sobre *y*, negativa.

Ejercicio Nº 1.5

Datos

$F_x = 1\ N$
$F_y = 0,8\ N$

Hallar: F y α_F

Desarrollo

En el triángulo de fuerzas de la **figura 1.13** aplicamos una consecuencia del Teorema de Pitágoras.

$$F = +\sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}$$
$$F = +\sqrt{(1\ N)^2 + (0,8\ N)^2}$$
$$F = +\sqrt{1,64\ N^2}$$
$$F = +1,28\ N$$

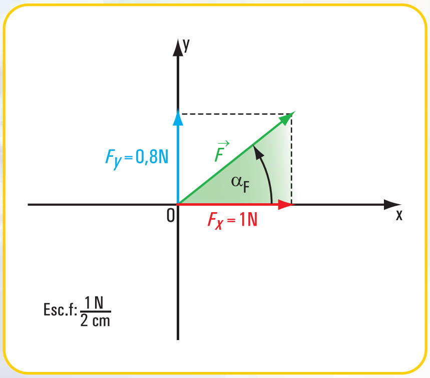


Figura 1.13

Aplicamos las funciones trigonométricas.

$$tg\ \alpha_F = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow tg\ \alpha_F = \frac{0,8\ N}{1\ N}$$
$$tg\ \alpha_F = 0,8$$
$$\alpha_F = arctg\ 0,8$$
$$\alpha_F = 38,66^o$$

Respuesta

El módulo de $\vec{F}$ es +1,28 N y el ángulo α_F que da la dirección y el sentido de F es α_F = 38,66°.
Como la fuerza $\vec{F}$ está en el primer cuadrante (las proyecciones según *x* y según *y* son positivas), el ángulo α_F pertenece al primer cuadrante.

Ejercicio Nº 1.6

Las componentes rectangulares de una fuerza $\vec{Z}$ tienen las siguientes intensidades:
Z_x = - 0,001 kN y Z_y = 0,002 kN (**Figura 1.14**),¿cuál es el módulo, la dirección y el sentido de $\vec{Z}$?

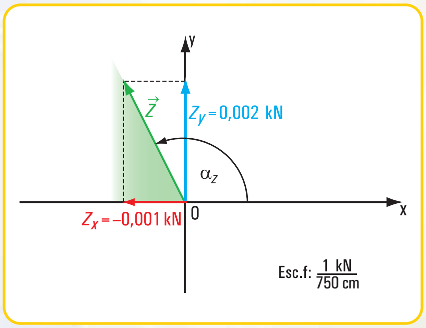


Figura 1.14

Desarrollo

$$Z = +\sqrt{Z_x^{\ 2} + Z_y^{\ 2}}$$
$$Z = +\sqrt{(-\ 0,001\ kN)^2 + (0,002\ kN)^2}$$
$$Z = +\sqrt{10^{-6} + 4 . 10^{-6}\ kN}$$
$$Z = +\sqrt{10^{-6} . 5\ kN}$$
$$Z = +10^{-3}\sqrt{5}\ kN$$
$$Z = +2,24 . 10^{-3}\ kN \text{ módulo de } Z$$

$$tg\ \alpha_Z = \frac{Z_y}{Z_x} \Rightarrow tg\ \alpha_Z = \frac{0{,}002}{-0{,}001}$$

$$tg\ \alpha_Z = -2 \Rightarrow \alpha_Z = arc\ \ tg\ (-2)$$

$$\alpha_Z = -63{,}43^o$$

El valor α_z = - 63,43° es el obtenido mediante la calculadora. En este caso, como Z_x es negativa y Z_y es positiva, el ángulo α_z pertenece al segundo cuadrante.

Entonces
α_r = 180° - 63,43°
α_r = 116,57° este valor da la dirección y el sentido de Z.

Respuesta
La intensidad o módulo de $\vec{Z}$ es Z = 2,24 × 10^{-3} kN y la dirección y sentido están dados por α = 116,57°.

Resolvemos los siguientes problemas

Problema Nº 1.1

Caminamos por una calle de Buenos Aires

Un poste está sostenido por un cable de acero

Enunciado

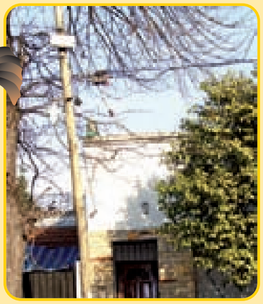


Imagen 1.4 *Una calle de Buenos Aires*

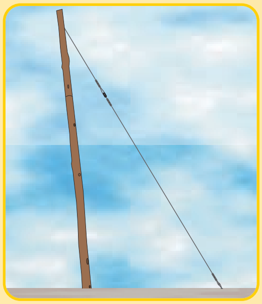


Figura 1.15. *Esquema de un poste ubicado en una calle de Buenos Aires*

Nos preguntamos,... ¿por qué se habrá colocado ese cable? Analizamos la situación desde nuestros conocimientos de la física. Evidentemente, el cable se colocó para evitar la caída del poste, dado que el cable ejerce sobre el poste una fuerza que evita su caída.
Suponiendo que la fuerza actuante del cable sobre el poste es $\vec{T}$, ¿qué necesitamos conocer para determinar su intensidad, dirección y sentido?
Necesitamos saber, por ejemplo la componente de la fuerza $\vec{T}$ en la dirección horizontal y en la dirección vertical.
Para ello pensamos que T_x = +66,7 N y la intensidad de la componente vertical T_y = -100 N.
Entonces con estos datos (**Figura 1.15**), ¿cuál es el valor del módulo de $\vec{T}$, su dirección y sentido?

Desarrollo
Dibujamos el diagrama de sólido libre[5] (**Figura 1.16**)

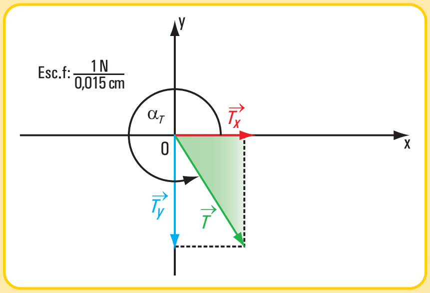


Figura 1.16. *Diagrama de sólido libre*

[5] El diagrama de sólido libre es un dibujo que debe ser claro y preciso, en el cual se esquematiza al cuerpo rígido y a las fuerzas que actúan en el mismo. Se indican dimensiones, magnitudes de las fuerzas, ángulos, etc.

$$T = +\sqrt{T_x^{\,2} + T_y^{\,2}}$$
$$T = +\sqrt{(+66{,}7\ N)^2 + (-100\ N)^2}$$
$$T = +\sqrt{4.448{,}89\ N + 10.000\ N}$$
$$T = +\sqrt{14.448{,}89\ N}$$
$$T = +120{,}20\ N$$

$$tg\ \alpha_T = \frac{T_y}{T_x}$$
$$tg\ \alpha_T = \frac{-100\ N}{+66{,}7\ N}$$
$$tg\ \alpha_T = -1{,}499$$
$$\alpha_T = arctg\ (-1{,}499)$$
$$\alpha_T = -56{,}29^o$$ *éste es el valor que se obtiene en la calculadora.*

Como el signo de la componente T_x es positivo y el de T_y es negativo, entonces el ángulo está en el cuarto cuadrante.

$\alpha_T = 360° - 56{,}29°$
$\alpha_T = 303{,}71°$

Respuesta
El valor de intensidad de $\vec{T}$ es 120,20 N y la dirección y el sentido de la fuerza $\vec{T}$ están dados por $\alpha_T = 303{,}71°$.

Problema Nº 1.2

Unos chicos juegan con un carrito sobre una rampa

Enunciado

Unos jovencitos juegan con un carrito sobre una rampa; uno de ellos tira del carro con una soga ejerciendo una fuerza (**Figura 1.17**). Pensamos que la intensidad de $\vec{F}$ es F= 0,4 N y a simple vista el ángulo de inclinación de la rampa con la horizontal es $\beta = 10°$. Con estos datos, ¿cuáles son las intensidades de las componentes F_x y F_y?

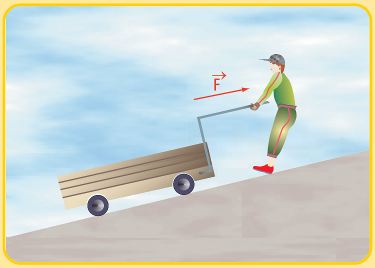


Figura 1.17. *Esquema de situación*

Desarrollo
Dibujamos el diagrama de sólido libre (**Figura 1.18**).
En el triángulo de fuerzas de la **figura 1.18** aplicamos las funciones trigonométricas al ángulo de $\beta = 10°$.

$$sen\ 10^o = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\,.\,sen\ 10^o$$
$$F_y = 0{,}4\ N\,.\,0{,}1736$$
$$F_y = 0{,}0694\ N$$

$$cos\ 10^o = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\,.\,cos\ 10^o$$
$$F_x = 0{,}4\ N\,.\,cos\ 10^o$$
$$F_x = 0{,}4\ N\,.\,0{,}9848$$
$$F_x = 0{,}39392\ N$$

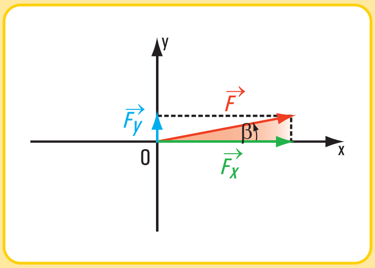


Figura 1.18. *Diagrama de sólido libre*

Respuesta
Las componentes de la fuerza $\vec{F}$ son: $F_x = 0{,}39392$ N y $F_y = 0{,}0694$ N.

1.2.- Leyes de Newton

◆ Primera ley de Newton del movimiento

Newton tomó como base para expresar la denominada *primera ley* las experiencias realizadas por Galileo.

Galileo observó que los cuerpos tienden a mantener su estado de reposo o permanecer en movimiento uniforme.

A esta tendencia Galileo la llamó *inercia*.

Isaac Newton vinculó el concepto de *masa de un cuerpo* con el de *inercia*, expresando que "Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea derecha (recta) a menos que sea impulsado a cambiar ese estado por fuerzas que actúen sobre él".[6]

Isaac Newton (1642-1727): *fue el creador junto con Gottfried W. Leibniz (1646-1716) del cálculo infinitesimal y descubridor de la ley de gravitación universal.*

Definió tres leyes de movimiento, conocidas como la primera, segunda y tercera ley de Newton del movimiento.

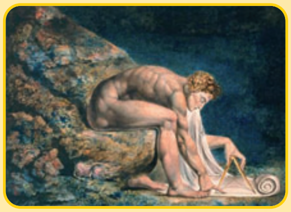


Imagen 1.5. *Pintura de William Blake, inspirada en Newton*

Inercia
Todo cuerpo tiende a mantener un estado de reposo o de permanecer en movimiento uniforme según una dirección recta.

Actualmente, la primera ley de Newton se expresa así:

Un cuerpo en reposo permanece en reposo, y un cuerpo ya en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante, excepto que se le aplique una fuerza no equilibrada.

◆ Segunda ley de Newton del movimiento

Si volvemos a la jugada de Zanetti que culmina con el gol de Messi en el partido del 28 de marzo de 2009 frente a Venezuela observamos que, en todos los casos siempre que hubo un cambio en el movimiento de la pelota, fue producto de una fuerza dada por el pie o por la cabeza de un jugador. Es lógico pensar que a mayor fuerza se produce una mayor aceleración y a menor fuerza la aceleración es menor.
Es decir, la aceleración es directamente proporcional a la fuerza total o neta que se aplica sobre un cuerpo. Esto significa que si Zanetti, en un momento dado le aplicó a la pelota una fuerza de intensidad F le produjo una aceleración a, y si en otro momento la fuerza fue de intensidad $2F$, la aceleración habrá sido $2a$.

Podemos expresar en símbolos: $a \cong F$ (1)
Por otra parte, a mayor masa la aceleración será menor y viceversa, a menor masa la aceleración será mayor. O sea, masa y aceleración son inversamente proporcionales.

En símbolos: $a \cong \frac{1}{m}$ (2)

[6] Traducción del inglés de *"A Source Book in Physics - W. F. Magi"*, Cambridge, MA - Harvard University Press, 1963.

Podemos escribir ambas expresiones matemáticas, la (1) y la (2) en una sola fórmula:

$$a \cong \frac{F}{m} \rightarrow F \text{ total o neta.}$$

En el lenguaje coloquial, la segunda ley de Newton, la expresamos así:
La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el mismo e inversamente proporcional a su masa

Los distintos momentos en el *Súper*

Imagen 1.6

1. Tomamos el carro. Está vacío (**Figura 1.19 a**).
La fuerza $\vec{F}$ no equilibrada provoca una aceleración $\vec{a}$. El carro tiene una masa m. Si queremos ir más rápido debemos incrementar la fuerza $\vec{F}$.

2. Comenzamos a cargar el carro con mercadería. La masa m se incrementa (**Figura 1.19 b**).
Si se duplica la masa, la aceleración se reduce a la mitad.

3. Finalizamos nuestras compras.

Tenemos el carro lleno hasta la parte superior del mismo, nos faltan unos metros para llegar a la caja (**Figura 1.19 c**).

La masa total se incrementó, por lo tanto, tuvimos que aumentar la fuerza total en la misma proporción, para mantener constante a la aceleración.

Distintos momentos en el *Súper*

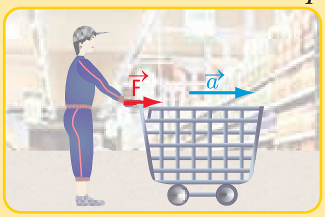


Figura 1.19 a

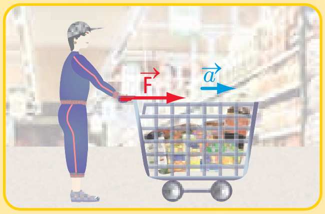


Figura 1.19 b

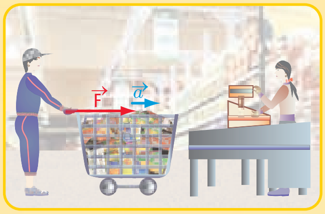


Figura 1.19 c

La fuerza neta o fuerza total la podemos expresar en símbolos: $F_{neta} = \sum_{i=1}^{m} F_i$

La fuerza neta aplicada a un cuerpo produce una aceleración $\vec{a}$. Si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo están en equilibrio, la $\sum_{i=1}^{m} F_i = 0$, entonces la aceleración $\vec{a}$ es nula. El cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme.

Si la fuerza neta es distinta de 0, entonces la aceleración $\vec{a}$ es distinta de 0 y tiene la misma dirección que la fuerza.

La segunda ley de Newton la podemos expresar en símbolos así: $F = ma$ (3)

Relación entre la masa y el peso de un cuerpo

En la revista OLÉ del domingo 29 de marzo de 2009 en la sección referida al Club River Plate aparecen los siguientes dichos de Gorosito:

- "Estoy contento de que el Tanque haya perdido peso". "Bajó alrededor de tres kilos en siete días y ganó resistencia aeróbica" (en el mes de marzo de 2009 Gorosito era el entrenador de River y el Tanque, el jugador Cristian Fabbiani, también de River).

Observamos en la promoción que hace un supermercado que, en cada uno de los productos de almacén, panadería, gastronomía, perfumería y limpieza, se informa *su peso*.

¿Qué se quiere significar con la expresión "los tres kilos que bajó Fabbiani", o los 100 g; los 2 kg,... que aparecen en la promoción del supermercado?

En realidad, en ninguno de los dos casos presentados corresponde hablar de *peso*, debería decir *masa*.

Veamos el porqué.

Imagen 1.7. *Promoción del SUPER, Clarín, 29/03/09 - Pág. 65*

Según la expresión matemática (3) $F = ma$

$$[F] = [m] \cdot [a]$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$N = kg \cdot \frac{m}{s^2} \quad (4)$$

Se lee, unidad de fuerza es igual a la unidad de masa por la unidad de aceleración.

En el sistema SI (sistema internacional de medidas), la unidad de fuerza es el Newton (N).

Esto significa que una fuerza de 1 newton provoca en una masa de 1 kg una aceleración de $1\frac{m}{s^2}$ (1 metro sobre segundos al cuadrado).

También la expresión matemática $F = ma$ nos permite relacionar la fuerza peso[7] con la masa del cuerpo. Denominamos $\vec{P}$ al peso del cuerpo y la aceleración es la debida a la gravedad (g).

Entonces: $P = mg$

[7] El peso es la fuerza de atracción de un cuerpo celeste (para nosotros la Tierra) sobre un cuerpo.

Esto significa que el peso de un mismo cuerpo, es decir de igual masa, depende del lugar de la Tierra y/o del cuerpo celeste donde se encuentre.

Para una aceleración de gravedad $g = 9{,}8\dfrac{m}{s^2} \Rightarrow P = masa \times 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$ *o sea* $P = 9{,}8\, masa \times \dfrac{m}{s^2}$

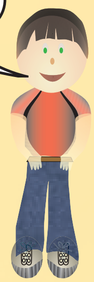
Para una masa de 1 kg

$$P = 9{,}8\ \boxed{kg \times \frac{m}{s^2}} \rightarrow 1\,N$$

Entonces P = 9,8 N, significa que un cuerpo de 1 kg masa tiene un peso aproximado de 9,8 N.

Problema Nº 1.3

Si **mi masa** es de 50 kg, ¿cuál es **mi peso** en el lugar de la Tierra donde $g = 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$?
¿Cuánto pesaré en la Luna?



Desarrollo

Peso en la Tierra donde $g = 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$

$$P = 9{,}8\frac{m}{s^2} \times 50\ kg$$

$$P = 490\ N$$

La aceleración de la gravedad en la Luna es la sexta parte de la gravedad en la Tierra.

Peso en la Luna → $P = \dfrac{1}{6}\,.\,490\ N$

$$P = 81{,}7\ N$$

Respuesta

En el lugar del planeta Tierra donde la aceleración de la gravedad es de $9{,}8\dfrac{m}{s^2}$ peso 490 N, y en la Luna 81,7 N.

Problema Nº 1.4

Nuestro automóvil sufre un desperfecto mecánico.

Enunciado

Nos vamos de paseo en nuestro automóvil… ¿Qué sucede…? En plena avenida se detiene el vehículo; ha sufrido un desperfecto.

Con la ayuda de algunos transeúntes lo arrimamos hacia el cordón de la vereda. Pedimos auxilio a una empresa encargada de realizar tareas de mecánica ligera y de remolcar, en caso necesario.

Cuando el auxilio llega y, después de varios intentos para solucionar el problema, el auto no arranca. Decidimos trasladarlo a un taller mecánico.

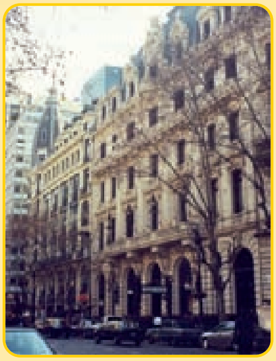


Imagen 1.8. *Avenida donde se detiene nuestro auto*

Con una barra enganchan el automóvil al camión de auxilio (**Figura 1.20**)[8]. En su marcha el auxilio ejerce sobre el automóvil de masa m = 1.200 kg una fuerza $\vec{T}$.
Si el módulo de la fuerza $\vec{T}$ es T = 10.500 N, ¿cuál es la aceleración del automóvil? (se desprecia la fuerza de fricción).

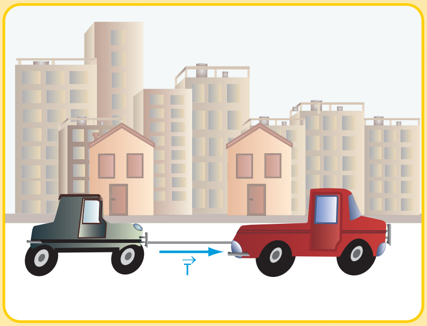


Figura 1.20. *Nuestro automóvil remolcado*

Desarrollo
Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$T = m.a \Rightarrow a = \frac{T}{m}$$

$$a = \frac{10.500\ N}{1.200\ kg} \Rightarrow a = \frac{10.500\ kg\ m}{1.200\ kg\ s^2}$$

$$a = 8{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \text{ en la dirección de la fuerza } \vec{T}.$$

Respuesta
La aceleración en la dirección y sentido de la fuerza $\vec{T}$ es $a = 8{,}75\,\frac{m}{s^2}$

Problema Nº 1.5

Dos carros transportan bolsas de papas.

Enunciado

La última Semana Santa la pasamos en la quinta de nuestro amigo Federico ubicada en Balcarce, provincia de Buenos Aires, Argentina.

En la mañana del sábado fuimos al campo, vimos cómo un tractor tiraba de dos carros que contenían bolsas de papas y que estaban unidos, uno detrás del otro, mediante una barra de acero (**Figura 1.21**).

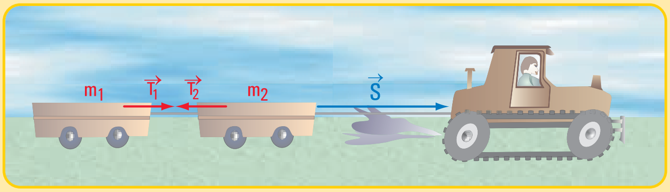


Figura 1.21. *Dibujo de los carros en la quinta*

Nos preguntamos, ¿cuál será la intensidad de la aceleración? y, ¿cuál será la fuerza $\vec{T}$ de la barra de acero?

Desarrollo
Para dar respuesta a las preguntas anteriores debemos reflexionar acerca de qué datos necesitamos. Para ello analizamos la situación.
El tractor ejerce una fuerza sobre la barra. Supongamos que la fuerza del tractor es $\vec{S}$ de intensidad S = 2.000 N y que el tractor y los carros apoyan sobre una superficie sin fricción.

Cada carro tiene una masa, por ejemplo m_1 = 150 kg y m_2 = 120 kg respectivamente (**Figura 1.22 a**)

Consideramos que con estos datos ya estamos en condiciones de realizar el cálculo.

[8] Por razones de seguridad, el camión de auxilio no debe arrastrar al vehiculo averiado, sino transportarlo colocándolo sobre su carrocería.

1. Cálculo de la aceleración a

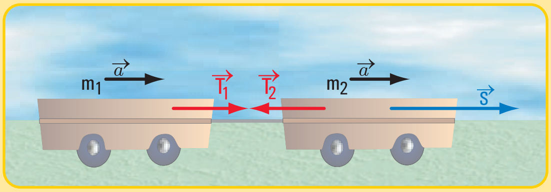


Figura 1.22 a. *Carros aislados*

La masa total es

$m = m_1 + m_2$

$m = 150\ kg + 120\ kg$

$m = 270\ kg$

Aplicamos la segunda ley de Newton.

$S = m \times a$

$a = \dfrac{S}{m}$

$a = \dfrac{2.000\ N}{270\ kg}$

$a = 7{,}41 \dfrac{m}{s^2}$

2. Cálculo de la fuerza $\vec{T}$ de la barra de acero

Referimos el sistema de fuerzas al sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

$T_1 = m_1 \times a$

$T_1 = 150\ kg \times 7{,}41 \dfrac{m}{s^2}$

$T_1 \cong +1.111\ N$

De acuerdo con el diagrama de sólido libre (**Figura 1.22b**).

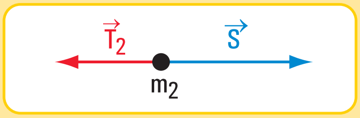


Figura 1.22 b. *Diagrama de sólido libre para m_2*

$S_{\substack{neta\\ o\\ total}} = S - T_2 \quad S \text{ es positiva y } T_2 \text{ es negativa}$

$Si\ S_{neta} = m_2 . a \Rightarrow m_2 . a = S - T_2$

$T_2 = S - m_2 . a$

$T_2 = 2.000\ N - 120\ kg . 7{,}41 \dfrac{m}{s^2}$

$T_2 = 2.000\ N - 889{,}2\ N$

$T_2 = 1.110{,}8\ N$

$T_2 \cong 1.111\ N$

$T_1 \cong T_2 \Rightarrow T \cong 1.111\ N$ *Fuerza de la barra de acero.*

Respuesta

La aceleración es $a = 7{,}41 \dfrac{m}{s^2}$ y la fuerza $\vec{T}$ de la barra de acero tiene una intensidad $T \cong 1.111\ N$ en la misma dirección de la fuerza $\vec{S}$.

Tercera ley de Newton

Un automóvil se desplaza por una calle a excesiva velocidad. Después de recorrer unos kilómetros, al llegar a una bocacalle, el automóvil colisiona contra un muro (**Figura 1.23**).

En el momento de la colisión el auto aplica al muro una fuerza. Simultáneamente, el muro produce una fuerza sobre el auto de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario.

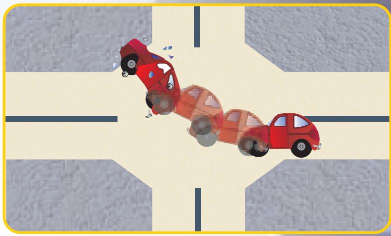


Figura 1.23

Parte de la intensidad de esta fuerza es absorbida por la carrocería, provocando la deformación de la misma. Lo que queda de la fuerza es lo que produce el desplazamiento del vehículo en sentido contrario al del impacto.

En este caso se cumple la denominada Tercera ley de Newton del movimiento o principio de acción – reacción.

Para toda fuerza – acción – aplicada sobre un cuerpo, existe otra fuerza de igual intensidad, dirección y sentido contrario – reacción –.

Tal vez el lector encuentra una contradicción entre la tercera y la segunda ley de Newton.
A una fuerza activa siempre existe una reactiva, tal que $F_{act.} + F_{react.} = 0$ (tercera ley), entonces ¿cómo es posible que en determinados casos la fuerza neta sea distinta de cero (segunda ley)?
Tal contradicción no existe, pues mientras la tercera ley se refiere a objetos diferentes, la segunda se aplica a un mismo cuerpo o sistema.

Para una mejor comprensión de esta ley resolvemos el siguiente problema.

Problema Nº 1.6

Enunciado

La familia Monteserín decide mudarse de piso. Del tercer piso se traslada al quinto.
Los hijos varones de la familia son los más entusiastas y quienes realizan el traslado de los muebles y objetos pequeños.
En el nuevo departamento colocan una cajonera con juguetes de sus hermanos más pequeños sobre un taburete. Ante el temor de que no se mantenga en reposo, lo sostienen mediante dos sogas.

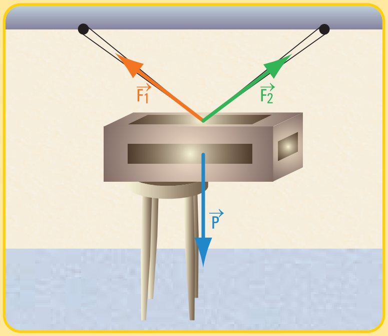


Figura 1.24

Si las intensidades, la dirección y el sentido de las fuerzas de las sogas y el peso de la cajonera son las indicadas en la **figura 1.25 a**, y la superficie de apoyo se la considera sin fricción:

- ¿cuáles son los módulos de los componentes según *x* e *y* de las fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$?

- si se saca el taburete, ¿cuál es la fuerza reactiva?

Imagen 1.9. *La habitación de los chicos*

Desarrollo
1. Dibujamos el diagrama de sólido libre (**Figura 1.25 a**)

2. Expresamos las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ según sus componentes rectangulares: $\vec{F}_{1x}$; $\vec{F}_{1y}$; $\vec{F}_{2x}$; $\vec{F}_{2y}$.

En el triángulo de fuerzas de la **figura 1.25 b** aplicamos las funciones trigonométricas correspondientes al ángulo de 45°.

$$sen\ \ 135^o = \frac{F_{1y}}{F_1}$$

$$F_1 \times sen\ \ 135^o = F_{1y}$$

$$5\ N \times 0{,}707 = F_{1y} \Rightarrow F_{1y} = 3{,}54\ N$$

$$cos\ \ 135^o = \frac{F_{1x}}{F_1}$$

$$F_1 \times cos\ \ 135^o = F_{1x}$$

$$5\ N \times (-0{,}707) = F_{1x} \Rightarrow F_{1x} = -3{,}54\ N$$

Ahora, aplicamos las funciones seno y coseno al ángulo de 30° (**Figura 1.25 c**)

$$sen\ \ 30^o = \frac{F_{2y}}{F_2}$$

$$F_2 \times sen\ \ 30^o = F_{2y}$$

$$3\ N \times 0{,}5 = F_{2y} \Rightarrow F_{2y} = 1{,}5\ N$$

$$cos\ \ 30^o = \frac{F_{2x}}{F_2}$$

$$F_2 \times cos\ \ 30^o = F_{2x}$$

$$3\ N \times 0{,}87 = F_{2x} \Rightarrow F_{2x} = 2{,}61\ N$$

3. Aplicamos la tercera ley de Newton.

Si sacamos el taburete es evidente que la cajonera no continuará en la misma situación. Para que así sea, se debe aplicar, por la tercera ley de Newton, una fuerza –reactiva– de igual dirección e intensidad y de sentido contrario a la que ejerce el cajón sobre el taburete.

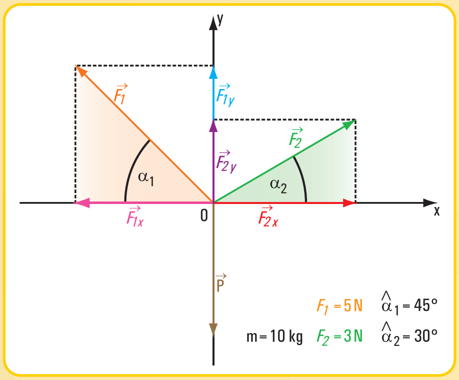


Figura 1.25 a *Diagrama de sólido libre*

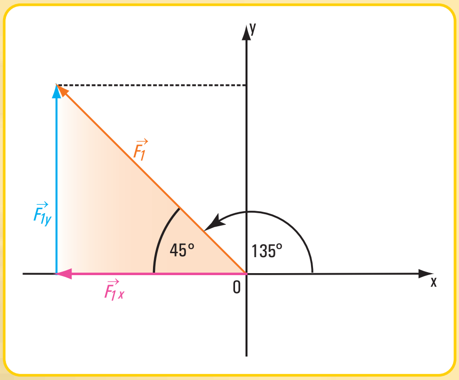


Figura 1.25 b

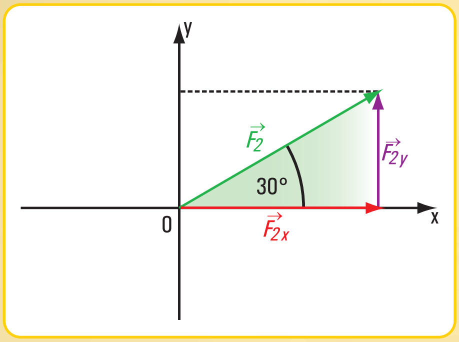


Figura 1.25 c

Cálculo de la fuerza que ejerce el cajón sobre el taburete en la dirección y (**Figura 1.26 a**).

$$F_a = 3{,}54\ N + 1{,}5\ N - 100\ N,\ consideramos\ P = m.g \Rightarrow P = 10\ kg.10\frac{m}{s^2} \Rightarrow P = 100\ N$$

$$F_a = -94{,}96\ N$$

La fuerza reactiva (fuerza que ejerce el taburete sobre el cajón en y) es:

$$F_{r_y} = 94{,}96\ N$$

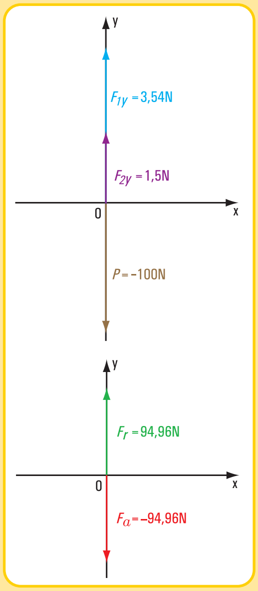


Figura 1.26 a

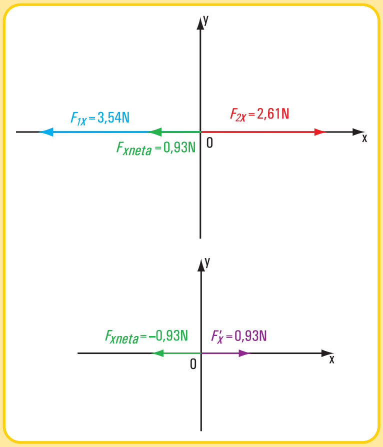


Figura 1.26 b

4. En la dirección x (**Figura 1.26 b**)

$$F_{x\ neta} = 2{,}61\ \text{N} - 3{,}54\ \text{N}$$
$$F_{x\ neta} = -0{,}93\ \text{N}$$
$$F_{x\ neta} + F_{x\ reactiva} = 0$$
$$F_{x\ reactiva} = F_{x\ neta}$$
$$F_{x\ reactiva} = 0{,}93\ \text{N}$$
$$F_{reactiva} = \sqrt{(94{,}96\ \text{N})^2 + (0{,}93\ \text{N})^2}$$
$$= 94{,}963\ \text{N}$$
$$\alpha_{F_{reactiva}} = ar\ tg\ \frac{94{,}96}{0{,}93}$$
$$= 89{,}44^{o}$$

Respuesta

1. Los módulos de las componentes de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son: F_{1y}=3,54 *N*; F_{1x}=-3,54 *N*; F_{2y} = 1,5 *N* y F_{2x} = 2,61 *N*.
2. La fuerza reactiva está definida por $F_{reactiva}$ = 94,963 *N* y $\alpha_{F_{reactiva}}$ = 89,44°.

◆ Ley universal de la gravitación de Newton

Otra de las leyes enunciadas por Isaac Newton es la denominada *Ley universal de la gravitación* La ley hace referencia a la interacción gravitacional[9] entre dos partículas o masas punto. Por ejemplo, si existen dos masas punto en el Universo: m_1 y m_2, separadas por una distancia r, ambas tienen interacción de atracción (**Figura 1.27 a**). Las fuerzas de atracción son de igual intensidad, dirección y sentido contrario; dependen de las masas punto y de la separación entre ambas (se produce acercamiento).

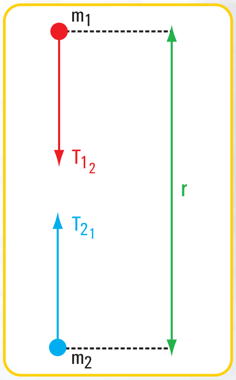


Figura 1.27 a. *Fuerzas de atracción gravitacional de dos partículas o masas punto*

El módulo de la fuerza de interacción es menor cuanto más separadas estén las masas, y es mayor para separaciones menores. Esto significa que la intensidad de la fuerza de interacción es inversamente proporcional a la separación entre las dos masas punto.

$T \cong \frac{1}{r^2}$[10] (5), siendo T la intensidad de la fuerza de interacción y r la separación entre las masas.

Por otra parte, la ley de Newton establece que la fuerza gravitacional es directamente proporcional a las masas.

$T \cong m_1.m_2$ (6)

Las expresiones matemáticas (5) y (6) las podemos escribir mediante una sola expresión:

$$T \cong \frac{m_1.m_2}{r^2}$$

Pero en toda proporcionalidad existe una constante de proporcionalidad que permite colocar un igual

[9] Interacción gravitacional significa la atracción mutua entre dos partículas.

[10] El simbolo ≅ significa "proporcional"

en la expresión anterior. En este caso, la constante de proporcionalidad es:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2 / kg^2}$

G es constante gravitacional universal

Entonces: $T = G\dfrac{m_1 . m_2}{r^2}$ [11]

Enunciado de la ley gravitacional de Newton
La fuerza de gravedad entre dos partículas cualesquiera en el mismo universo es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

Si bien la ley gravitacional está definida para partículas, es posible extenderla a los cuerpos (**Figura 1.27 b**).

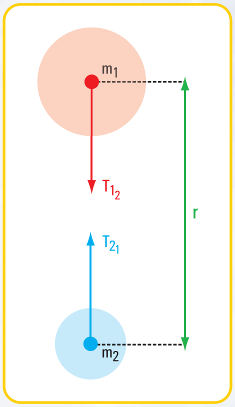


Figura 1.27 b. *Esferas homogéneas. Las masas se consideran concentradas en sus centros*

¿Cuánto vale la fuerza de gravedad cuando la separación entre las masas tiende a ser infinitamente grande?

$$\lim_{r\to\infty} F = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{G\ \mathrm{m_1 \times m_2}}{r_2}\right)$$
$$\lim_{r\to\infty} F = 0$$
$$= 0 \Rightarrow \text{no hay atracción}$$

Conclusión
La fuerza gravitacional de la Tierra sobre los otros cuerpos disminuye a medida que estos se alejan de la Tierra. El campo gravitacional se extiende al infinito, pero no desaparece por grande que sea su distancia.

*Henry Cavendish determinó el valor de **G** en el año 1798, 71 años después de la muerte de Newton. El valor de **G** lo encontró en forma experimental.*

Cavendish fabricó una balanza: colocó en una caja de vidrio una barra con dos pequeñas esferas fijas en ambos extremos, colgada de un hilo largo y delgado, para evitar las interferencias de las corrientes de aire.

En el exterior de la caja colgó otras dos esferas de gran masa que giraban alrededor de un eje.

Cuando las masas externas lograron el equilibrio, cambió la posición de las esferas grandes, mientras que la barra con las esferas pequeñas giraba un determinado ángulo, como consecuencia de la atracción gravitatoria ejercida por las esferas grandes. Midiendo el ángulo de deflexión y conociendo la resistencia a la torsión del hilo, Cavendish pudo determinar la fuerza de atracción de las esferas grandes sobre las más pequeñas.

Sabemos que: $F = \dfrac{G\ \mathrm{m_1 . m_2}}{r^2} \Rightarrow G = \dfrac{\mathrm{F}_x\, r^2}{\mathrm{m_1 . m_2}}$

Cuando nos referimos a la masa de un cuerpo, por lo general la asociamos a la fuerza gravitacional y a la aceleración de la gravedad. En este caso, la determinamos así:

Si $F = \mathrm{m}_g . g \Rightarrow \mathrm{m}_g = \dfrac{F}{g}$ (masa gravitacional)

[11] Newton expresó la ley de la gravitación como una proporcionalidad, él no conoció la constante de proporcionalidad.

¿Será posible determinar la masa de un cuerpo sin considerar la aceleración de la gravedad o en ausencia de ésta?

Si recordamos la segunda ley de Newton, $F = m_i \,.\, a \Rightarrow m_i = \dfrac{F}{a}$ (masa inercial)

Entre la masa gravitacional m_g y la masa inercial m_i no existe una diferencia significativa. En forma experimental se determinó que dicha diferencia es aproximadamente de 10^{-12}. Esto implica que se puede hallar la masa de un cuerpo sin tener en cuenta la aceleración de la gravedad.

Resolvamos los siguientes problemas

Problema Nº 1.6

Relación entre la masa de un cuerpo en la Tierra y la masa del mismo cuerpo en la Luna

Enunciado

¿Por qué un cuerpo en la Tierra pesa seis veces más que en la Luna?

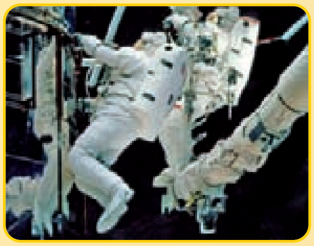


Imagen 1.10. *Un astronauta en el espacio*

Desarrollo

Para responder a la pregunta, partimos de la ley de la gravitación universal

$$T = G\frac{m_1.m_2}{r^2}$$

Recordemos que $G = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\,\dfrac{N\,m^2}{kg^2}$ (constante gravitacional);

m_1 y m_2 son las masas de las partículas y r es la distancia entre las mismas.

En la superficie de la Tierra el peso de un cuerpo es: $P_{cuerpo(Tierra)} = \dfrac{G.m_T.m_c}{r_T^2}$ (7) ; m_T(masa de la Tierra); m_c(masa del cuerpo) y r_T el radio de la Tierra.

En la superficie de la Luna el peso del mismo cuerpo es: $P_{cuerpo(Luna)} = \dfrac{G.m_L.m_c}{r_L^2}$ (8) ; m_L(masa de la Luna); m_c(masa del cuerpo) y r_L el radio de la Luna.

Dividimos miembro a miembro las expresiones (7) y (8)

$$\frac{P_{cT}}{P_{cL}} = \frac{m_T}{m_L}.\frac{r_L^2}{r_T^2}$$

Si $r_T = 6{,}38 \times 10^6\ m$

$r_L = 1{,}74 \times 10^6\ m$

$m_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$

$m_L = 7{,}35 \times 10^{22}\ kg$

$$\frac{P_{cT}}{P_{cL}} = \frac{5{,}97x10^2}{7{,}35}.\frac{1{,}74^2}{6{,}38^2}$$

$$\frac{P_{cT}}{P_{cL}} = \frac{1.807{,}5}{299{,}2}$$

Peso $_{\text{cuerpo Tierra}}$ = 6,04 peso $_{\text{cuerpo en la Luna}}$

Imagen 1.11. *Los astros sobre Villa Cartón,* 1962, Antonio Berni, pigmento al agua y metal sobre madera, 150 x 105 cm

Hemos encontrado la respuesta a la pregunta que encabeza este problema aplicando la ley de gravitación universal para un cuerpo ubicado en la superficie de la Tierra y para el mismo cuerpo en la superficie de la Luna.

Respuesta
El peso de un cuerpo en la Tierra es, aproximadamente, seis veces el peso del mismo cuerpo en la superficie de la Luna.

Problema Nº 1.7

El peso de un objeto o de una persona en Júpiter

Enunciado

Si la masa de Júpiter es 318 veces la masa de la Tierra y el diámetro de Júpiter es 10 veces mayor que el diámetro de la Tierra, ¿cuál es el peso en Júpiter de una persona que sobre la superficie de la Tierra pesa 600 N?

Desarrollo

$$\frac{P_{cT}}{P_{cJ}} = \frac{m_T}{m_J} \cdot \frac{r_J^2}{r_T^2}$$

$$\frac{P_{cT}}{P_{cJ}} = \frac{5{,}97.10^{24}}{318.5{,}97.10^{24}} x \frac{(63{,}8.10^6)^2}{6{,}38^2.10^{12}}$$

$$\frac{P_{cT}}{P_{cJ}} = \frac{63{,}8^2}{318.6{,}38^2}$$

$$\frac{P_{cT}}{P_{cJ}} = 0{,}31$$

$$\frac{P_{cT}}{0{,}31} = P_{cJ}$$

$$Si \; P_{cT} = 600 \; N \Rightarrow P_{cJ} = \frac{600 \; N}{0{,}31}$$

$$P_{cJ} = 1.935 \; N$$

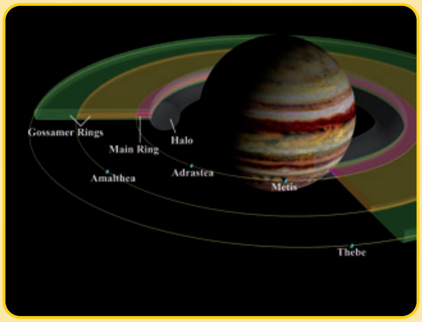


Imagen 1.12 a. *Júpiter y sus anillos*

Imagen 1.12 b. *La Tierra, fotografía tomada por la tripulación del Apolo 17 (1972). La nave espacial viajaba entre la Tierra y la Luna. El color rojizo corresponde al África y a Arabia Saudita. El color blanco son nubes y masas de hielo en la Antártica*

Respuesta
La persona de 600 N sobre la superficie terrestre pesa en Júpiter 1.935 N

Problema Nº 1.8

La masa de una persona en la Tierra

Enunciado

En un lugar de la Tierra donde $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, una persona pesa 720 N, ¿cuál es la masa de esa persona? (**Figura 1.28**)

Desarrollo
Aplicamos la segunda ley de Newton

$$P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g}$$

$$m = \frac{720\ N}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}}$$

$$m = 73{,}4\ kg$$

Respuesta
La masa es de 73,4 *kg*

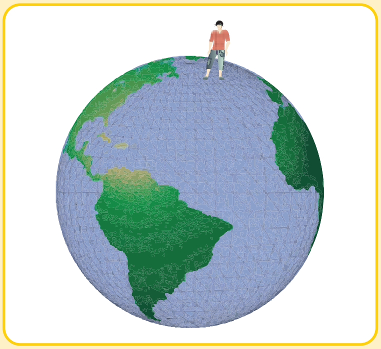
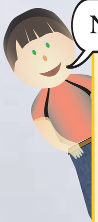


Figura 1.28. *Una persona en la superficie de la Tierra*

Problema Nº 1.9



Enunciado

Una agencia de turismo está promocionando futuros viajes a la Luna. Por cada futuro pasajero se confecciona una ficha, en la que indica, entre otros datos, el peso de cada pasajero en la Tierra y el que tendría en la Luna.

Para saber el peso en la Luna, se hace necesario conocer el valor de la aceleración de la gravedad en ella.

¿Cómo calcula la agencia de turismo el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna?

Desarrollo
Una respuesta que muchos darán, será la de ir a buscar el dato a un catálogo o a un libro específico. Si bien la respuesta es correcta, desde este libro mostramos el proceso de cálculo.

$$P_{\text{Tierra}} = m \cdot g_T$$
$$P_{\text{Luna}} = m \cdot g_L$$

Dividimos miembro a miembro ambas expresiones

$$\frac{P_{\text{Tierra}}}{P_{\text{Luna}}} = \frac{m.g_T}{m.g_L}$$

En el primer miembro reemplazamos la relación $\frac{P_{\text{Tierra}}}{P_{\text{Luna}}}$ por su valor 6,04 (obtenido en el problema 1.6)y simplificamos *m*.

Imagen 1.13. *La Luna y su eco,* 1960, Antonio Berni, óleo, plástico, metal y materiales varios sobre hardboard, 73 x 100 cm

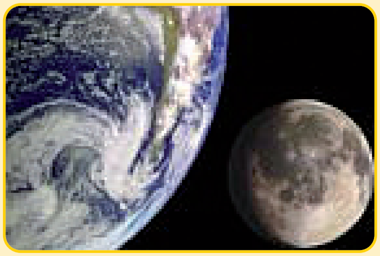


Imagen 1.14. *Tierra - Luna*

$$6{,}04 = \frac{g_T}{g_L} \Rightarrow g_L = \frac{9{,}81}{6{,}04}\frac{m}{s^2}$$

$$g_L = 1{,}62\ \frac{m}{s^2}$$

Respuesta

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es $g_L = 1{,}62\ \frac{m}{s^2}$

1.3.- Momento estático de una fuerza respecto de un punto

En las articulaciones de nuestro cuerpo, los músculos son los que permiten a los huesos la rotación alrededor de ellas. Por ejemplo, al levantar un objeto con el antebrazo, el músculo bíceps hace que se produzca una rotación alrededor del eje de la articulación. Un brazo robótico realiza un movimiento similar (**Figura 1.29 a**). Si queremos apretar un tornillo a una madera utilizamos un destornillador, rotándolo alrededor de su eje longitudinal (**Figura 1.29 b**). Del mismo modo sucede si un operario quiere roscar un agujero con una terraja. Para hacerlo debe girar la terraja (**Figura 1.29 c**).

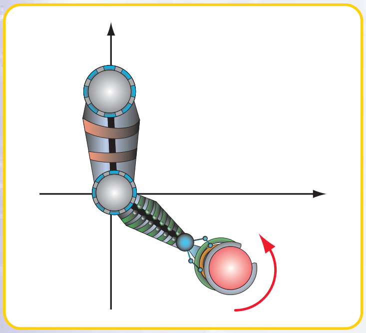


Figura 1.29 a. *Brazo robótico levantando una pelota*

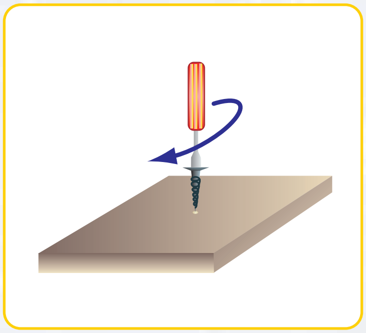


Figura 1.29 b
Destornillador apretando un tornillo

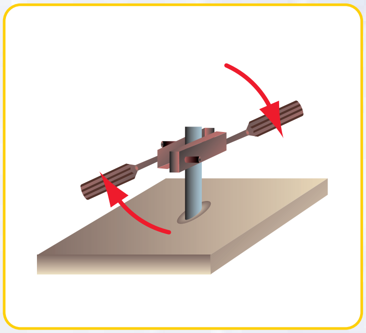


Figura 1.29 c
Terraja para roscar un agujero

¿Qué es lo que en cada caso provoca el giro o rotación?

Dibujamos el diagrama de sólido libre para cada situación (**Figuras: 1.30 a; 1.30 b y 1.30 c**).
La respuesta a la pregunta la encontramos al definir el concepto de *momento estático de una fuerza respecto de un punto*.

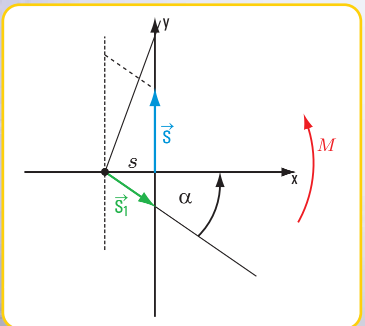


Figura 1.30 a. *Antebrazo levantando una pelota*

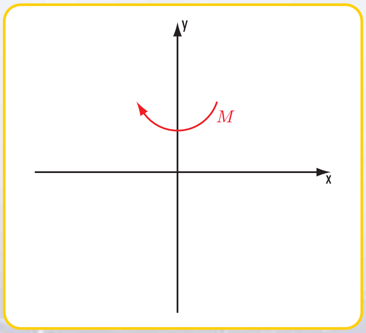


Figura 1.30 b. *Destornillador apretando un tornillo en un bloque de madera*

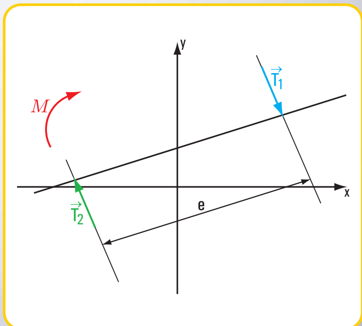


Figura 1.30 c. *Terraja roscando un agujero*

*El momento estático de una fuerza $\vec{P}$ con respecto de un punto es igual al producto del módulo o intensidad de $\vec{P}$ por la distancia **d** entre la recta de acción de la fuerza y el punto **o**. El efecto de un momento estático sobre un cuerpo rígido es un giro.*

En símbolos, $M^o = P \cdot d$

Unidades de momento en el sistema SI (Sistema internacional de medidas)
Unidad de fuerza: N, kN.
Unidad de longitud: m, cm.
Unidad de momento estático: N m; N cm; kN m; kN cm.

El punto *o* respecto del cual tomamos momento, se denomina *centro de momentos* y la distancia *d*, brazo de palanca o brazo de fuerza.
En el caso del antebrazo el momento estático está dado por la fuerza $\vec{S}$ y la distancia de ésta al punto de rotación ubicado en el codo.
En los otros dos casos también se produce un momento, pero debido a dos fuerzas que definimos en el apartado 1.4 de este mismo capítulo.

◆ Propiedad del momento estático de una fuerza respecto de un punto

Consideramos un cuerpo rígido genérico al que se le aplica una fuerza $\vec{T}$ de origen *a* y extremo *b* y un punto *o* que pertenece al mismo plano de $\vec{T}$ (coplanar con $\vec{T}$), observamos que *d* es una de las alturas del triángulo $o\overset{\triangle}{a}b$ (**Figura 1.31**).

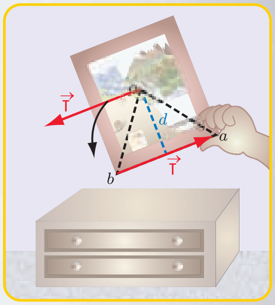


Figura 1.31

Entonces si:

$$M = T.d \quad y \quad Área\ o\overset{\triangle}{a}b = \frac{\overline{a\,b}\,.d}{2} \Rightarrow M = 2\ Área\ o\overset{\triangle}{a}b$$

Podemos expresar que:

El valor numérico del momento de una fuerza respecto de un punto es el doble del área del triángulo que tiene como base el segmento de longitud igual a la intensidad de la fuerza (en una escala determinada) y por altura, la distancia al centro de momentos, o sea, el brazo de palanca.

Convención de signos del momento de una fuerza

Asignamos signo positivo (+) cuando el sentido del giro coincide con el sentido de las agujas del reloj (dextrorso o dextrógiro), y negativo (-) cuando el giro se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj (sinistrorso o sinistrógiro).

¿Cuándo el momento de una fuerza respecto de un punto es cero?

Para que exista un momento, debe existir una fuerza y una distancia, entonces: $si\ \ M = 0 \Rightarrow F = 0$
$o \quad d = 0$

Es decir, para que el momento de una fuerza respecto de un punto sea cero se deben dar, por lo menos, una de las siguientes situaciones:

1- la intensidad de la fuerza es cero;
2- la distancia al centro de momentos es nula (el centro de momentos pertenece a la recta de acción de la fuerza).

El área de un triángulo es la medida de la superficie del triángulo, siendo:

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{superficie del triángulo}}{\text{unidad de medida de la superficie}}$$

Consideremos el área y no la superficie, por cuanto el área es adimensional
Ejemplo: si la superficie de un triángulo es 2 m^2, el área respecto de la unidad de medida $\mathbf{m^2}$ *es 2.*

◆ Representación vectorial del momento de una fuerza

El momento de una fuerza respecto de un punto depende de tres parámetros, a saber:

- intensidad de la fuerza;
- distancia desde la recta de acción de la fuerza al centro de momentos;
- sentido de la fuerza.

Entonces podemos considerarlo como una magnitud vectorial y representarlo mediante un vector perpendicular al plano, donde yacen la fuerza y el centro de momentos (**Figura 1.32 a**).

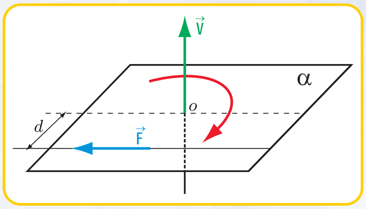


Figura 1.32 a. *Vector representativo del momento de una fuerza*

Módulo del vector $\vec{v}$

$\left|\vec{v}\right| = \left|F \,.\, d\right|$ módulo del vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto de $F \,.\, d$.

Sentido del vector (Figura 1.32 b)

El sentido de $\vec{v}$ lo determinamos imaginando un observador con los pies en *o* que ve girar a la fuerza $\vec{F}$. En este caso de izquierda a derecha, o sea, en el sentido de las agujas del reloj.

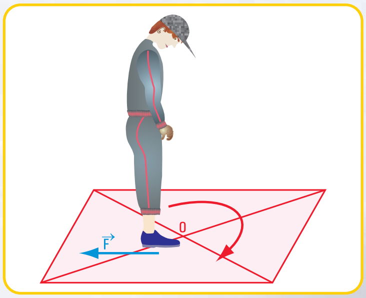


Figura 1.32 b. *Determinación del sentido del vector $\vec{v}$*

◆ Teorema de Varignon

El matemático Stevin Simon (1548-1620), conocido como Simón de Brujas, de origen flamenco, nacido en Brujas (Bélgica) fue el inventor de un carruaje o ***yate*** *terrestre impulsado por velas, destinado al traslado de personas a una velocidad de 80 km/h.*

Como matemático, se destacó por ser el primero en reconocer la validez de los números negativos, al aceptarlos como solución en los problemas.

También desarrolló el algoritmo para la obtención del máximo común divisor de los polinomios.

Estudiando el equilibrio de los cuerpos en un plano inclinado, al parecer, esbozó por primera vez el Teorema de Varignon.

El nombre de Varignon se debe al matemático francés Pierre Varignon (1654-1722), quien en su obra Nueva Mecánica o Estática, enunció por primera vez la regla de fuerzas concurrentes.

Consideramos un sistema de dos fuerzas concurrentes en un plano y, como siempre, lo referimos a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Proyectamos las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ *y* $\vec{R}$ sobre los ejes *x* e *y*, obtenemos $\vec{F}_{1x}$, $\vec{F}_{2x}$ *y* $\vec{R}_x$ (proyecciones sobre *x*); $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ *y* $\vec{R}_y$ (proyecciones sobre *y*)(**Figura 1.33**).

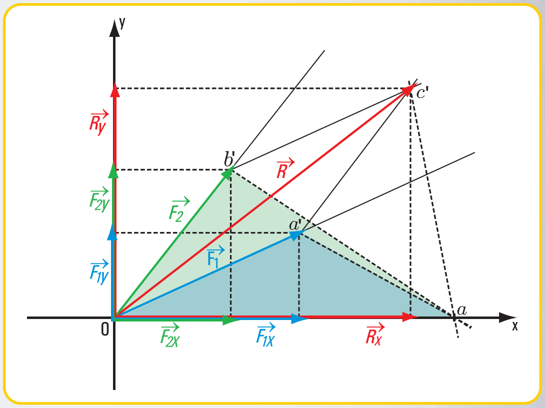


Figura 1.33

Consideramos un punto *a* perteneciente al plano de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Las áreas de los triángulos que se forman son:

$$Área\ \ o\overset{\Delta}{a}a' = \frac{\overline{oa}.\ F_{1y}}{2} \qquad (9)$$

$$Área\ \ o\overset{\Delta}{a}b' = \frac{\overline{oa}\ F_{2y}}{2} \qquad (10)$$

$$Área\ o\overset{\Delta}{a}c' = \frac{\overline{oa}\ R_y}{2}$$

Como $R_y = F_{1y} + F_{2y}$

$$Área\ o\overset{\Delta}{a}c' = \frac{\overline{oa}}{2}\left(F_{1y} + F_{2y}\right)$$

$$Área\ o\overset{\Delta}{a}c' = \frac{\overline{oa}\ F_{1y}}{2} + \frac{\overline{oa}\ F_{2y}}{2}$$

Reemplazando los términos del segundo miembro por las expresiones matemáticas (**9**) y (**10**), obtenemos la siguiente expresión matemática.

$$Área\ o\overset{\Delta}{a}c' = Área\ o\overset{\Delta}{a}a' + Área\ o\overset{\Delta}{a}b'$$

Pero recordemos que el valor numérico del momento de una fuerza respecto de un punto es igual al doble del área del triángulo que tiene como base el segmento que representa la intensidad de la fuerza y por altura la distancia al centro de momentos.
Esto implica que:

$2\ Área\ o\overset{\Delta}{a}c' = M^{a}_{\vec{R}}$ *(momento de la resultante respecto de **a**)*

$2\ Área\ o\overset{\Delta}{a}a' = M^{a}_{\vec{F_1}}$ *(momento de $\vec{F}_1$ repecto de **a**)*

$2\ Área\ o\overset{\Delta}{a}b' = M^{a}_{\vec{F_2}}$ *(momento de $\vec{F}_2$ repecto de **a**)*

Entonces:

$$2\,\acute{A}rea\ o\ \overset{\Delta}{a}\ c' = 2\,\acute{A}rea\ o\ \overset{\Delta}{a}\ a' + 2\,\acute{A}rea\ o\ \overset{\Delta}{a}\ b'$$

$$M_R^a = M_{F_1}^a + M_{F_2}$$

Generalizando

$$M_R^a = M_{F_1}^a + M_{F_2}^a + M_{F_3}^a + \ldots$$

Esta expresión matemática traducida al lenguaje coloquial significa:
"El momento de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes con respecto a un punto coplanar con las mismas, es igual a la suma de los momentos con respecto al mismo punto de cada una de las componentes".

Este enunciado corresponde al denominado *Teorema de Varignon.*

1.4.- Pares de fuerzas

En la base del cerro se organizan diferentes juegos: partidos de polo, de voley, lanzamientos de aros,... (Imagen 1.15 *a*). Los niños, mientras sus padres descansan en la confitería, se entretienen con unos aros que lanzan por el aire, tal como se ve en la figura 1.34 *a*.
En cada extremo del diámetro del aro se ejerce una fuerza, constituyendo el conjunto un sistema de dos fuerzas de igual intensidad, dirección (rectas paralelas) y sentido contrario.

Imagen 1.15 *a*. *Juegos en el Cerro Catedral. Bariloche - República Argentina*

Las fuerzas que permiten la rotación del aro son similares a las que se realizan cuando se destapa una botella con un **sacacorcho.**
Ambas fuerzas cosntituyen un par de fuerzas.

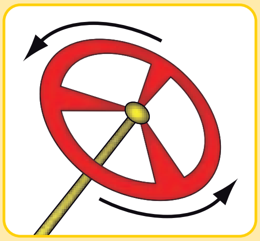


Figura 1.34 *a*

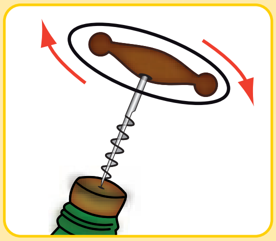


Figura 1.34 *b*

Signo del momento de un par de fuerzas

Convención
Si el giro que produce el momento tiene el sentido de las agujas del reloj, entonces el momento es de signo positivo ***(Figura 1.34 c).***
Si la rotación que provoca el momento tiene el sentido contrario a las agujas del reloj, entonces el momento es de signo negativo ***(Figura 1.34 c).***

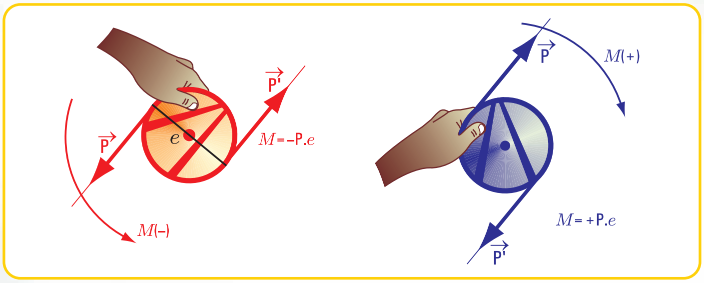
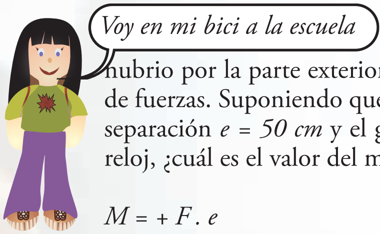


Figura 1.34 *c*
El aro gira en un sentido (positivo) y en el otro sentido (negativo)

Imagen 1.15 *b.* *En el Jardín de Luxemburgo* (1883) - Renoir

◆ Propiedades de los pares de fuerzas

1. Dado que los pares de fuerzas quedan caracterizados por sus momentos, una propiedad importante es la referida a la igualdad de pares de fuerzas. Decimos que los pares de fuerzas son iguales cuando lo son sus momentos, tanto en intensidad como en signo.



En una bocacalle debo girar. Tomo el manubrio por la parte exterior. En ese momento estoy aplicando un par de fuerzas. Suponiendo que la intensidad de la fuerza sea $F = 10\ N$, la separación $e = 50\ cm$ y el giro lo hago en el sentido de las agujas del reloj, ¿cuál es el valor del momento que provoca el giro?

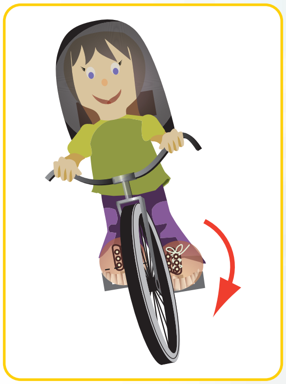


Imagen 1.16 *a.* *En bicicleta, tomo el manubrio por la parte exterior*

$M = + F \,.\, e$
$M = + 10\ N \,.\, 50\ cm$
$M = + 500\ N\ cm$
$M = + 5\ N\ m$

Respuesta
El valor del momento que provoca el giro es de $5\ N\ m$.

Si en cambio, giro el manubrio tomándolo por la parte interior, con un par de fuerzas de intensidad $F = 12{,}5\ N$[12], separación $e = 40\ cm$ y sentido de las agujas del reloj, ¿cuál es el valor del momento que le provoca el giro?

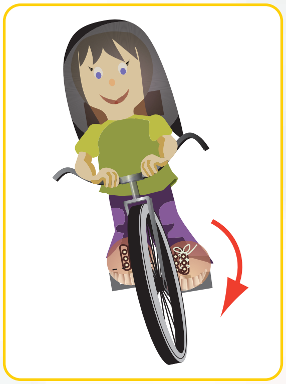


Imagen 1.16 *b.* *En bicicleta, tomo el manubrio por la parte interior*

$M = + F \,.\, e$
$M = + 12{,}5 \,.\, 40\ cm$
$M = + 500\ cm$
$M = + 5\ N\ m$

Respuesta
El momento que provoca el giro es de $M = 500\ N\ cm$ o bien $M = 5\ N\ m$.
En ambos casos, ¿realizo el mismo giro con mi bicicleta?

Sí, porque ambos momentos son iguales en intensidad y en signo; no obstante haber variado la intensidad de la fuerza y la separación entre las rectas de acción de las fuerzas.

[12] 10 N = 1 kg = 1.000 g

2. Otra propiedad de los pares, establece que el momento de un par de fuerzas es igual al momento del par respecto de un punto cualquiera de su plano, y es constante.

Ejemplo

Consideramos un par de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido A y un punto cualquiera de su plano; por ejemplo el punto c (**Figura 1.35**). Dado que las rectas de acción de las fuerzas son paralelas, conforman un caso específico de fuerzas concurrentes; ambas rectas concurren a un punto impropio del plano, entonces podemos aplicar el Teorema de Varignon.

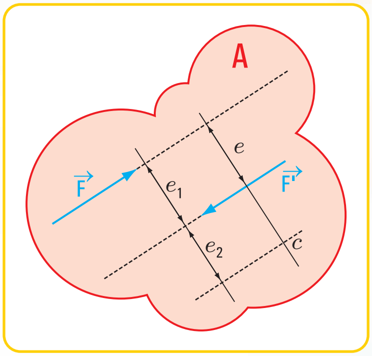


Figura 1.35

$$M^c_{\vec{F}} = +F.(e_1 + e_2) \qquad \textit{Momento de } \vec{F} \textit{ respecto del punto } \boldsymbol{c}$$

$$M^c_{\vec{F'}} = -F'.\, e_2 \qquad \textit{Momento de } \vec{F'} \textit{ respecto del punto } \boldsymbol{c}$$

$$M^c_{\vec{F}} + M^c_{\vec{F'}} = +F(e_1 + e_2) + (-F'.\, e_2) \qquad \textit{Momento del sistema de fuerzas respecto del punto } \boldsymbol{c}$$

$$= Fe_1 + Fe_2 - F'e_2 \Rightarrow M_{par} = Fe_1 \Rightarrow M_{par} = cte$$

Hemos demostrado mediante un desarrollo matemático que:

El momento de un par de fuerzas respecto de un punto cualquiera de su plano no varía o sea es constante, independiente del centro de momentos, e igual al momento del par.

3. Tercera propiedad de los pares.

El efecto de un par de fuerzas no altera si rotamos la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas un ángulo cualquiera alrededor de uno de sus extremos (**Figura 1.36**).

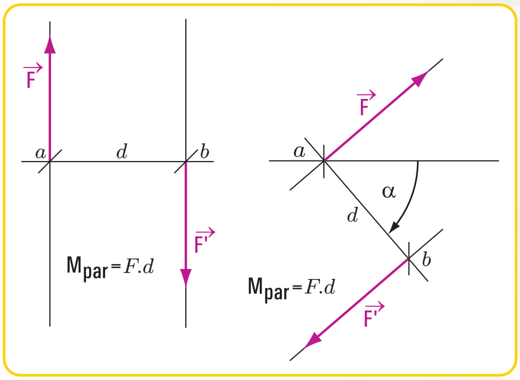


Figura 1.36

4. Suma de dos pares de fuerzas.

La suma de dos pares de fuerzas es igual a la suma algebraica de sus respectivos momentos. Esta suma da el momento del par resultante (**Figura 1.37 a**).

Supongamos un cuerpo rígido B al que le aplicamos dos pares de fuerzas: ($\vec{P}$, $\vec{P'}$) y ($\vec{F}$, $\vec{F'}$).

Aplicando las propiedades de los pares enunciados anteriormente, podemos trasladar el par ($\vec{P}$, $\vec{P'}$) hasta que sus rectas de acción coincidan con las del par ($\vec{F}$, $\vec{F'}$).
Como la distancia d_1 (brazo de palanca del par ($\vec{F}$, $\vec{F'}$)), es distinta a la distancia d_2 (brazo de palanca del par ($\vec{P}$, $\vec{P'}$)), realizamos un pequeño cálculo para que las mismas sean iguales.
Para ello, modificamos la distancia d_1 sin que se modifique el valor del momento del par ($\vec{P}$, $\vec{P'}$) (**Figura 1.37 b**).

Entonces: $M_{par} = P \,.\, d_1$

Para mantener el valor del par debemos cambiar el valor de la fuerza $\vec{P}$. Llamamos Y al nuevo valor de P (**Figura 1.37c**), entonces

$$P \,.\, d_1 = Y \,.\, d_2 \Rightarrow Y = \frac{P \,.\, d_1}{d_2}$$

$$M_{par\vec{F}} = F \,.\, d_2$$

$$M_{par\vec{F}} = Y \,.\, d_2$$

$$M_{par\vec{F}} + M_{par\vec{Y}} = (F + Y) \,.\, d_2 \;\Rightarrow\; M_{par\,(\vec{F}+\vec{Y})} = Fxd_2 + Pxd_1$$

Esta expresión matemática establece que:
La suma de los pares componentes es igual a la suma algebraica de sus respectivos momentos.

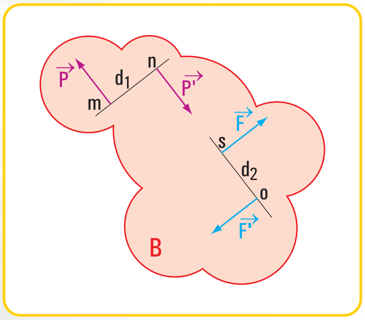


Figura 1.37 a

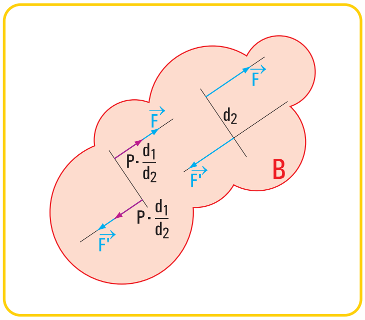


Figura 1.37 b

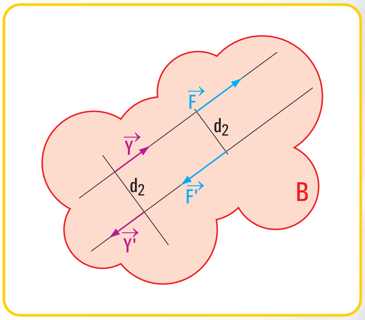


Figura 1.37 c

◆ Resultante de un par

La resultante de un par es nula.

◆ Efecto de un par de fuerzas

Retomando los ejemplos dados en el ítem 1.3 observamos que el destornillador para apretar el tornillo realiza giros y estos son provocados por un par de fuerzas. Del mismo modo sucede cuando un operario usa una terraja para roscar un agujero; la rotación se debe también a un par de fuerzas.

1.5.- Traslación de fuerzas

Ejemplo
Una columna de caño redondo metálico de iluminación de una calle de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires está empotrada en el suelo y libre en el extremo superior (**Figura 1.38 a**).
De la columna cuelga una lámpara, cuyo peso es $\vec{P}$.
La columna también tiene un peso ($\vec{P}_1$), que es una carga concentrada en el centro de gravedad (G) de la columna. Para calcular el diámetro del caño redondo metálico se hace necesario conocer el valor de la carga total que actúa sobre la columna (**Figura 1.38 b**).

Imagen 1.17. *Una columna de alumbrado en una calle de Bs. As.*

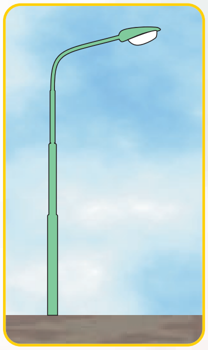


Figura 1.38 a

Para conocer la carga total que actúa sobre la columna y aplicada en el centro de gravedad (G), aparece aquí la necesidad de trasladar la fuerza $\vec{P}$ al centro de gravedad (G).

Para ello, se usa un artificio, sólo válido para el cálculo.

En el punto G (centro de gravedad) aplicamos un sistema de fuerzas nulo ($\vec{P}, \vec{P}'$) que no altera el sistema total.

El sistema de fuerzas dado es el que se visualiza en las **figuras 1.38 c y 1.38 d** y el sistema equivalente en la **figura 1.38 e**.

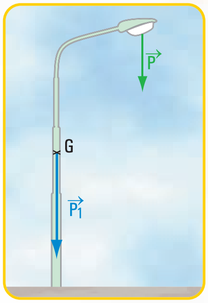


Figura 1.38 b

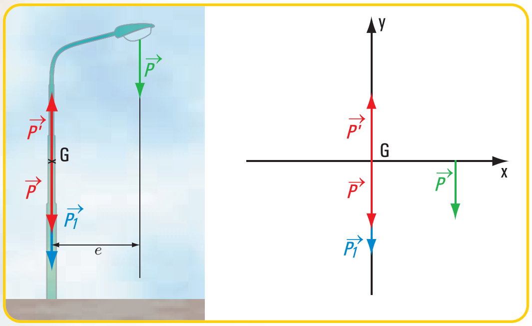


Figura 1.38 c

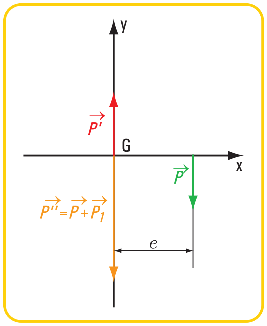


Figura 1.38 d

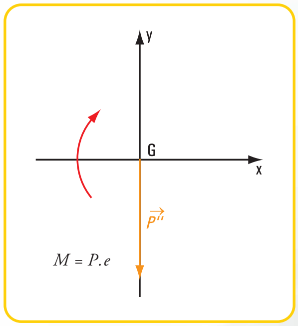


Figura 1.38 e

Ambos sistemas provocan el mismo efecto. Aparece un par de fuerzas ($\vec{P}, \vec{P}'$) de momento $M = P'.e$; el sistema primitivo se transforma en el sistema equivalente constituido por: la fuerza P'' de intensidad $P'' = P + P_1$ y el momento $M = P.e$.

De este modo hemos trasladado una fuerza a un punto.

1.6.- Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes con su punto de aplicación

Analicemos las siguientes situaciones problemáticas:

Problema Nº 1.10. Auxilio a una pequeña embarcación, la **Nefertitis**

Vamos a navegar.

Una pequeña embarcación de paseo, la *Nefertitis*, tuvo un desperfecto en su motor y quedó a la deriva en el río San Antonio, cerca de su desembocadura en el Río de la Plata.

Con el remolcador *Don Antonio* se intentó sacarla de esa posición mediante un cable atado en la proa de la Nefertitis y en la popa del *Don Antonio*.

Imagen 1.16
La Nefertitis en el río San Antonio

Imagen 1.18. *Nefertitis - Museo Egipcio Berlín (1999). En la actualidad está en el Neue Museum - Berlín (Rep. Fed. de Alemania)*

El *Don Antonio* pudo sacar a la *Nefertitis* de la varadura yendo en la misma dirección del eje, pero a los pocos kilómetros se quedó sin combustible.

Entonces se solicitó ayuda por radio y concurrieron al lugar otros dos remolcadores: *Don Tito* y *A pleno Sol*.

Se sabe que si se remolca con un solo barco y la dirección del cable forma con el eje de la embarcación varada un ángulo de + 30°, la fuerza que debe ejercer dicho barco es de 20 *kN*, y si se remolca en la misma dirección del eje de la *Nefertitis* la fuerza es de 30 *kN*.

En el manual de instrucciones de *Don Tito* y *A pleno Sol* se informa que cada uno puede ejercer como máximo una fuerza de 18 *kN*.

Entonces se discutieron las siguientes alternativas de solución:

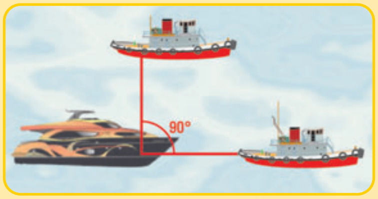


Figura 1.39 a

Alternativa I

El *Don Tito* ejercería una fuerza en la dirección del eje del barco y el *A pleno Sol* en la perpendicular al mismo (**Figura 1.39 a**).

Alternativa II

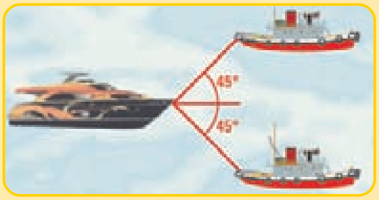


Figura 1.39 b

El *Don Tito* arrastraría al barco en la dirección que forma + 45° con el eje y el *Don Manuel* o el *A pleno Sol* en dirección de - 45° con el eje (**Figura 1.39 b**).

De estas soluciones se consideró aquella que cumpliera con los siguientes requisitos:

a. ninguna de las fuerzas deberá superar los 18 *kN;*
b. en caso de que, tanto en la primera alternativa como en la segunda se cumpla la condición anterior, se consideraría la alternativa donde la fuerza fuera menor.

¿Cuál fue la alternativa seleccionada? ¿Pudieron elegir ambas alternativas, o ninguna?

Desarrollo - Alternativa I

Para encontrar la solución dibujamos el diagrama de sólido libre en coordenadas cartesianas ortogonales (**Figura 1.39 c**).
Para la $F = 20\ kN$, hallamos las componentes de la fuerza $\vec{F}$ según los ejes *x* e *y*: $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$.
Las intensidades de dichas componentes se obtienen mediante la aplicación de las expresiones matemáticas del seno y coseno al ángulo de *30º*.

Entonces: $cos\ 30^o = \dfrac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F.cos\ 30^o$

$$sen\ 30^o = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F.sen\ 30^o$$

$$F_x = 20\ kN.0{,}87$$

$$F_x = 17{,}4\ kN$$

$$F_y = 20\ kN.0,5$$
$$F_y = 10\ kN$$

Las intensidades de las fuerzas que deben ejercer los remolcadores son:

Don Tito ejercerá una fuerza de 17,4 *kN* y
A pleno Sol ejercerá una fuerza de 10 *kN*.

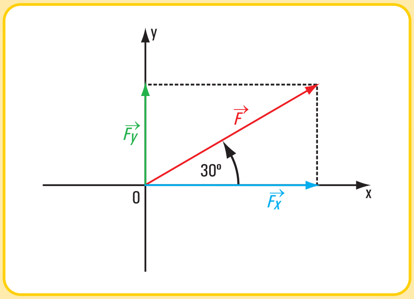


Figura 1.39 c

Desarrollo - Alternativa II

Denominamos $\vec{F_1}$ a la fuerza que debe ejercer *Don Tito* y $\vec{F_2}$ a la que tiene que realizar *A pleno Sol*

Presentamos el diagrama de sólido libre (**Figura 1.39 d**).
En los triángulos rectángulos de fuerzas se cumple:

$$\cos 45^o = \frac{F}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{F}{\cos 45^o}$$
$$F_1 = \frac{30\ kN}{0,71}$$
$$F_1 = 42,25\ kN$$
$$\cos(-45^o) = \frac{F}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F}{\cos(315^o)}$$
$$F_2 = \frac{30\ kN}{0,71}$$
$$F_2 = 42,25\ kN$$

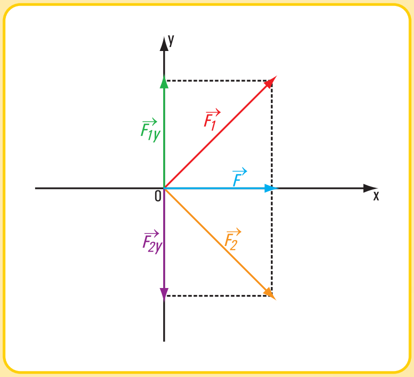


Figura 1.39 d

Las intensidades de las fuerzas que deben realizar los remolcadores son:

Don Tito ejercerá una fuerza F_1 = 42,25 *kN*;
A pleno Sol ejercerá una fuerza F_2 = 42,25 *kN*.

Conclusión

Entonces si se requiere que cada remolcador ejerza como máximo una fuerza de 18 *kN*, ¿cuál es la alternativa válida: la alternativa I, la II, ambas o ninguna ?
Veamos

¿Puede ser la alternativa II?

Utilizando esta alternativa las fuerzas que ejercen ambos remolcadores tienen una intensidad de 42,25 *kN*. Evidentemente, esta situación se la descarta porque la intensidad máxima de cada fuerza debe ser de 18 *kN*.

¿Qué pasa con la alternativa I?

Don Tito podrá remolcar a la *Nefertitis* con una fuerza F_x = 17,4 *kN* en una dirección que forme con el eje *x* un ángulo $\hat{\alpha}$=0°, mientras que *Don Antonio* podrá hacerlo con una fuerza F_y = 10 *kN* que forma con el eje *x* un ángulo $\hat{\alpha}$ =90°. Esta solución sirve ya que ambas fuerzas tienen una intensidad que no supera los 18 *kN*, que es la intensidad máxima permitida.

Problema Nº 1.11. Un gancho...

En un día espléndido caminamos por el hermoso paseo de Puerto Madero.

Puerto Madero está en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. En la fachada principal del último piso de uno de los edificios, se amuró provisoriamente un gancho que sobresale de dicha fachada.

Escuchamos la conversación entre quienes deciden retirarlo. Analizan varias posibilidades:

1. sacar el gancho realizando las correspondientes operaciones desde el techo del último piso;
2. sujetar un cable al gancho y un hombre que tire del cable desde la vereda.

Discuten ambas situaciones y se deciden por la última (**Figura 1.40 a**).

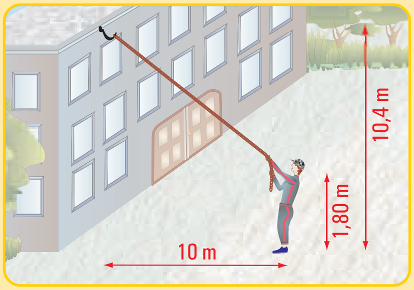


Figura 1.40 a

Conocen la fuerza que debe ejercer el hombre sobre el cable. Analizan si será más cómodo tirar por un solo cable, o bien utilizar uno en forma vertical y otro horizontal.

Se sabe que la altura desde el nivel de la vereda hasta el punto donde está atada la cuerda en el gancho es de 10,4 m, la altura desde el piso hasta la mano del operario donde toma la cuerda es de 1,80 m, la distancia en la dirección horizontal entre el hombre y la base del mástil de 10 m y el hombre debe ejercer una fuerza $\vec{F}$ sobre la cuerda de 280 N.

Con estos datos podemos conocer la intensidad y el sentido de las componentes: horizontal y vertical de la fuerza $\vec{F}$.

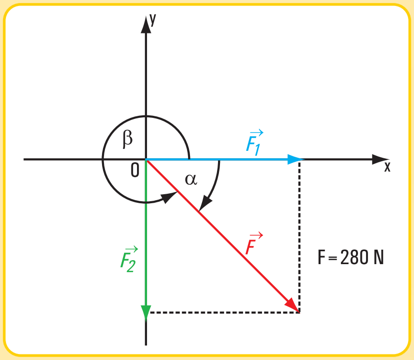


Figura 1.40 b

Desarrollo

a **.** Dibujamos el diagrama de sólido libre en coordenadas cartesianas ortogonales (**Figura 1.40 b**) y el diagrama de distancias (**Figura 1.40 c**).

b **.** Como no conocemos el valor del ángulo $\hat{\beta}$, debemos calcularlo.

Sabemos que:

$$tan\,\beta = \frac{h}{d}$$

$$tan\,\beta = \frac{8{,}60\ m}{10\ m}$$

$$tan\,\beta = 0{,}86 \qquad \Rightarrow \hat{\beta} = arctan\ 0{,}86$$

En la calculadora $\quad \hat{\beta} = 40{,}7^{o}$

nos da este valor $\quad \hat{\beta} = 40^{\circ}\,41'$

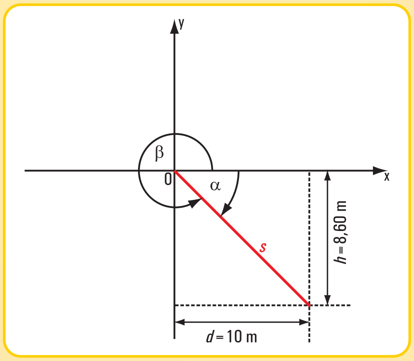


Figura 1.40 c

Pero, como el ángulo $\hat{\beta}$ pertenece al cuarto cuadrante, el valor real de $\hat{\beta}$ es:

$$\hat{\beta} = 360^o - 40{,}7^o$$

$$\hat{\beta} = 319{,}3^o$$

$$\hat{\beta} = 319^o\ 18'$$

c **.** Por otra parte, si utilizamos el diagrama de sólido libre:

$$\cos\hat{\beta} = \frac{F_1}{F} \Rightarrow F_1 = F \times \cos\hat{\beta}$$

$$F_1 = 280\ N \times \cos\ 319{,}3^o$$

$$F_1 = 280\ N \times 0{,}76$$

$$F_1 = 212{,}8\ N$$

$$\operatorname{sen}\hat{\beta} = \frac{F_2}{F} \Rightarrow F_2 = F \times \operatorname{sen}\hat{\beta}$$

$$F_2 = 280\ N \times \operatorname{sen}\ 319{,}3^o$$

$$F_2 = 280\ N \times (-0{,}65)$$

$$F_2 = -182\ N$$

Imagen 1.19. *Puerto Madero - Buenos Aires*

El signo negativo significa que el sentido real de la fuerza es así ↓.

d **. Conclusión**

Retomemos la pregunta inicial.

¿Qué resulta más conveniente, tirar de una sola cuerda o de dos?

Si se usa una sola cuerda, el operario debe aplicar una fuerza de intensidad 280 *N*.
Si se utilizan dos cuerdas, las intensidades de las fuerzas son: 212,8 *N* y 182 *N*. Es evidente que de este modo se reparten los esfuerzos.

Entonces:

- la fuerza F_1 tiene dirección horizontal, sentido hacia la derecha e intensidad F_1 = 212,8 *N*;
- la fuerza F_2 tiene dirección vertical, sentido hacia abajo e intensidad F_2 = 182 *N*.

La pregunta que nos queda pendiente es la siguiente: ¿cómo lo hacemos?

Problema Nº 1.1

Se necesita dimensionar las correas de una cabriada.

Enunciado

La estructura que recibe la carga de una cubierta a dos aguas de un taller mecánico que está a 50 m de nuestra casa (**Figura 1.41 a**) está formada por:

Imagen 1.20. *Una estructura metálica*

- cabriadas de perfiles de acero;
- cumbrera (perfil de acero).

La cabriada es un reticulado formado por barras unidas por sus extremos en puntos llamados nudos; siendo los ejes baricéntricos de las barras, coplanares; por eso es una cabriada plana.

El calculista de la estructura, para poder dimensionar cada una de las correas, es decir, para poder determinar el perfil o los perfiles que usará, necesita conocer la fuerza que debe absorber cada correa.

Nuestra función es la de calcular cada una de dichas fuerzas.

Suponemos que la cumbrera descarga en el nudo a con una carga $P = 200\ N$. El ángulo de elevación de las correas es $\hat{\alpha} = 27°$ (**ver figura 1.41 b**).

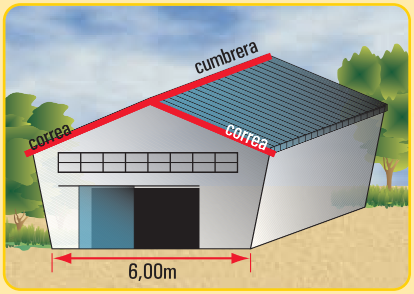


Figura 1.41 a. *Esquema del taller mecánico*

Desarrollo

1. Dibujamos el esquema de fuerzas (Figura 1.41 c).
Como punto de partida suponemos que los sentidos de las fuerzas $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ son los indicados en la **figura 1.41 c**.

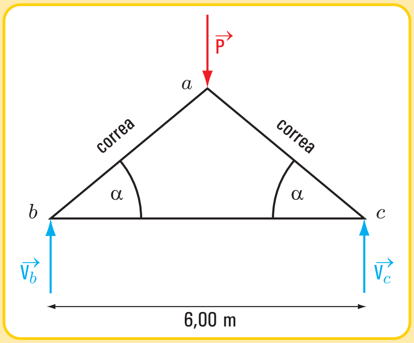


Figura 1.41 b. *Esquema de la cabriada con las fuerzas externas activas y reactivas en los apoyos*

Planteamos la solución al problema desde dos formas diferentes; mediante el cálculo gráfico y a través del analítico[13].

2. En forma gráfica mediante el triángulo de fuerzas (Figura 1.41 d).
En la escala de fuerzas correspondiente se dibuja la fuerza $\vec{P}$. Por el origen de $\vec{P}$ se traza una recta paralela a ac y por el extremo una paralela a ab.
Los valores de ac y ab en la escala de fuerzas fijada dan las intensidades de $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$.

$P_2 = 225$ N
$P_1 = 225$ N

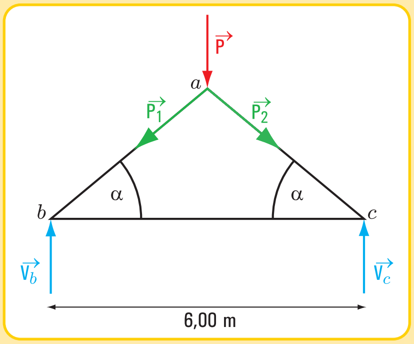


Figura 1.41 c. *Esquema de fuerzas*

3. En forma analítica.
Dibujamos el diagrama de sólido libre (figura 1.41 e).
Los valores de los ángulos son:

$\hat{\alpha} = 207^{o}$

$\hat{\beta} = 270^{o}$

$\hat{\gamma} = 333^{o}$

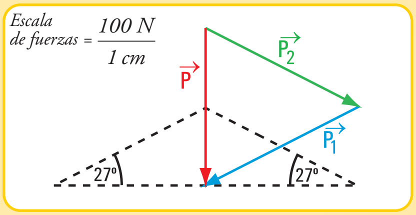


Figura 1.41 d. *Determinación gráfica de las intensidades de P_2 y de P_1*

[13] Actualmente los métodos gráficos no se usan, ya que la computadora los ha reemplazado. No obstante, en algunos casos, permiten una buena vizualización del problema.

En este caso, como los triángulos no son rectángulos (**figura 1.41 f**), y como conocemos un lado y dos ángulos utilizamos la expresión matemática del teorema del seno.

En el triángulo $\overset{\Delta}{omn}$

$$\frac{P}{sen\ 54^o} = \frac{P_2}{sen\ 63^o} = \frac{P_1}{sen\ 63^o}$$

$$P_2 = \frac{P\,.\,sen\ 63^o}{sen\ 54^o}$$

$$P_2 = \frac{200\,kN\,.\,0{,}9}{0{,}8}$$

$$P_2 = 225\ N$$

En forma análoga

$$P_1 = \frac{P\,.\,sen\ 63^o}{sen\ 54^o}$$

$$P_1 = \frac{200\,kN\,.\,0{,}9}{0{,}8}$$

$$P_1 = 225\ N$$

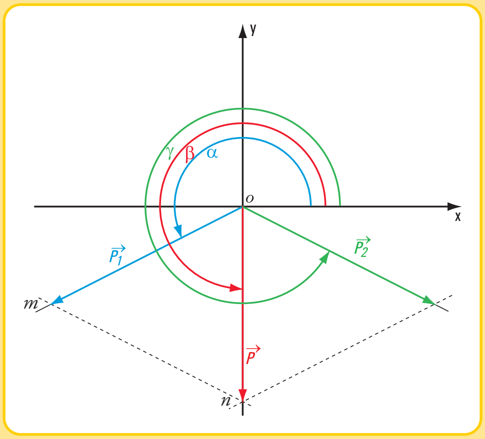


Figura 1.41 e. *Diagrama de sólido libre*

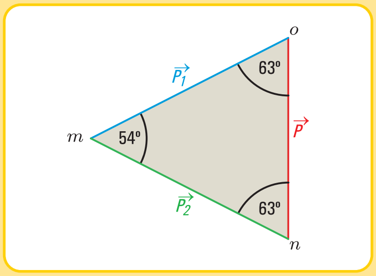


Figura 1.41 f. *Diagrama de sólido libre*

4.- Respuesta

Las intensidades de las fuerzas en las correas son:

$P_1 = 225\ N$
$P_2 = 225\ N$

Observación

Los valores de P_1 y P_2 obtenidos en forma analítica y gráfica coinciden.

En algunas situaciones los valores serán aproximadamente iguales, ya que el método gráfico no tiene la misma precisión que el analítico.

Problema Nº 1.13

Un poste de televisión está inclinado y a punto de caerse

Enunciado

Al caminar por la calle, vemos que un poste colocado por una empresa de televisión por cable, después de una fuerte tormenta de viento se inclinó con peligro de caída.

Con el propósito de colocarlo en posición vertical, la empresa quiere sujetarlo mediante un cable de acero, tal como se visualiza en la **figura 1.42 a.**

La empresa tiene entre los datos de este poste, la carga que actúa sobre él; que incluye su peso propio y el de todos los elementos que contiene: ganchos, cables, etc. Este valor es $P = 210\ N$.

Para dimensionar el cable de acero se necesita conocer la fuerza que él debe absorber.
Por otra parte a la empresa le interesa saber el valor de la componente de la fuerza $\vec{P}$ en la dirección horizontal y la máxima distancia en la dirección vertical, donde se debe amurar el cable para una separación entre el pie del poste y el cable de 2 m.

Imagen 1.21

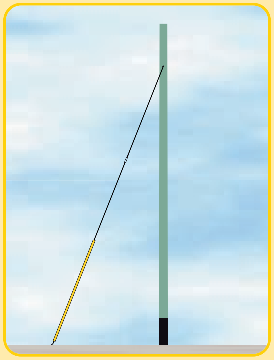


Figura 1.42 a

Desarrollo

1. Cálculo de la intensidad de la fuerza que absorbe el cable.

1.1. Dibujamos el diagrama de sólido libre (**figura 1.42** b).

1.2. Utilizamos las expresiones matemáticas de las funciones trigonométricas.

$$sen\ 50^o = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{P}{sen\ 50^o}$$

$$T = \frac{210\ N}{0{,}77}$$

$$T = 273\ N \qquad \hat{\alpha} = 230^o$$

$$tan\ 50^o = \frac{P}{C} \Rightarrow C = \frac{P}{tan\ 50^o}$$

$$C = \frac{210\ N}{1{,}2}$$

$$C = 175\ N \qquad \hat{\beta} = 0^o$$

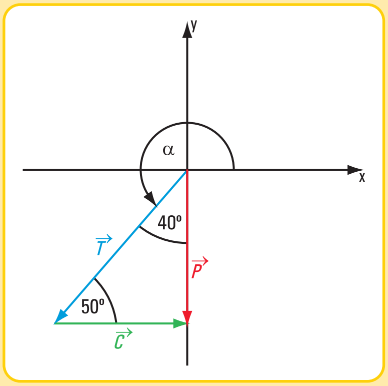


Figura 1.42 b. *Diagrama de sólido libre*

2. Cálculo de la distancia desde el pie hasta el punto donde se sujetará el cable en el poste.

2.1. Dibujamos el esquema de distancias (**figura 1.42 c**)

2.2. Aplicamos la función tangente al ángulo de

$$tan\ 50^o = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

$$\overline{ac} = 2\ m \times 1{,}2$$

$$\overline{ac} = 2{,}4\ m$$

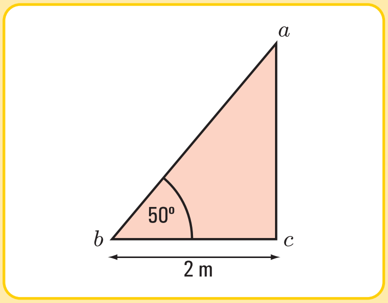


Figura 1.42 c. *Triángulo de distancias*

3. Respuestas

a . La fuerza que absorbe el cable es $\vec{T} = 273\ N$ con un ángulo $\hat{\alpha} = 230^o$.

b . La componente horizontal de $\vec{P}$ es $C = 175\ N$ con un ángulo $\hat{\beta} = 0^o$.

c . La máxima altura donde debe ser sujetado el cable en el poste es $\overline{ac} = 2{,}4\ m$ con un ángulo de inclinación de 50^o.

CONCLUSIONES

Los problemas resueltos anteriormente son casos concretos reales, en cada uno de los cuales se descompuso una fuerza en dos direcciones concurrentes en un punto.

El análisis de esta temática nos permite visualizar distintos casos.

Caso 1
Conocidas la fuerza (intensidad, dirección, sentido, punto de aplicación) y dos rectas de acción concurrentes con el punto de aplicación de $\vec{P}$, se desea hallar las fuerzas componentes según dichas rectas de acción.

La solución existe y es única.

Caso 2
Conocidas la dirección de una de las componentes, la intensidad de la otra y la fuerza $\vec{P}$, se desea hallar la intensidad y sentido de una de las componentes y la dirección y sentido de la otra.

Caso 3
Conocidas la dirección e intensidad de una de las componentes y la fuerza $\vec{P}$, se desea conocer la dirección, sentido e intensidad de la otra componente.

Caso 4
Conocidas la intensidad de ambas componentes y la fuerza $\vec{P}$, se desea conocer las direcciones y sentido de las fuerzas componentes.

- **Resolución de cada uno de los casos planteados**

Si bien en los problemas anteriores se resolvieron algunos de estos casos, nos parece oportuno tratar la temática, en forma general utilizando el método gráfico.

Caso1

Conocer la fuerza $\vec{P}$ significa tener como datos:

- la dirección y sentido (dado por el ángulo) y,
- la intensidad.

Las direcciónes (1) y (2) también están dadas por sus respectivos ángulos (**Figura 1.43 a**).

En forma gráfica la intensidad y sentido de las fuerzas componentes se hallan mediante la regla del paralelogramo en el diagrama de sólido libre (**Figura 1.43 b**).

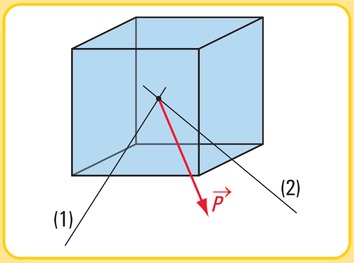


Figura 1.43 a

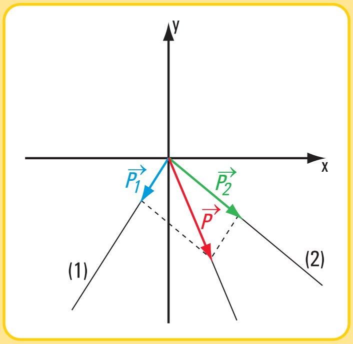


Figura 1.43 b. *Diagrama de sólido libre*

Mediante la escala de fuerzas:

$$Escf = \frac{valor\ de\ fuerza}{valor\ distancia}$$

$$Escf = \frac{N}{m}$$

se determinan P_1 y P_2.

Este caso siempre tiene solución y ésta es única.

Caso 2. Este caso tiene tres posibles soluciones

Solución 1

Datos (figura 1.44 a)

$P = 1{,}2\ N$
$P_1 = 0{,}75\ N$
$\hat{\alpha}_2 = 250^o$ *o* $\hat{\alpha}_2 = 70^o$
$\hat{\alpha} = 310^o$
Incógnitas: $\hat{\alpha}_1$ *y* $\vec{P_2}$

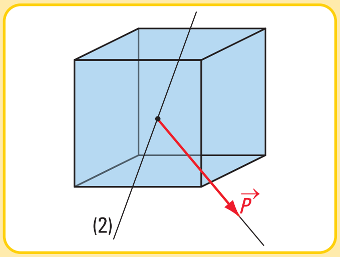


Figura 1.44 a

Búsqueda de solución

Representamos la fuerza en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales $(x\ ,\ y)$(**Figura 1.44 b**).
Por el extremo *o* de $\vec{P}$ trazamos la recta de acción de una de las componentes (2); por el otro extremo, y en la escala de fuerzas considerada, trazamos un arco de circunferencia de radio igual al valor de $P_1 = 2\ N$. En este caso el arco de circunferencia no corta a la recta (2). Entonces no existe solución.

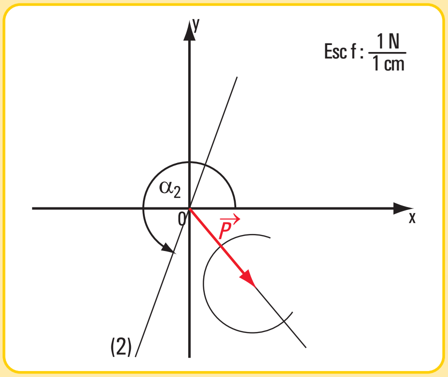


Figura 1.44 b. *Determinación gráfica de la solución*

Solución 2

Datos (Figura 1.45 a)

$P = 1{,}9\ N$
$P_1 = 3\ N$
$\hat{\alpha}_2 = 130^o$ *o* $\hat{\alpha}_2 = 310^o$
$\hat{\alpha} = 60^o$

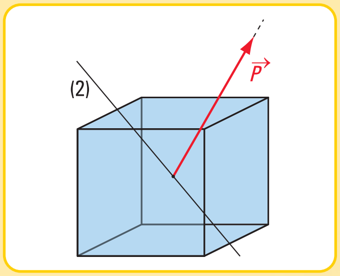


Figura 1.45 a

Búsqueda de solución
La solución gráfica se visualiza en la **figura 1.45 b**.

Como se ve en la **figura 1.45 b** la solución es doble.

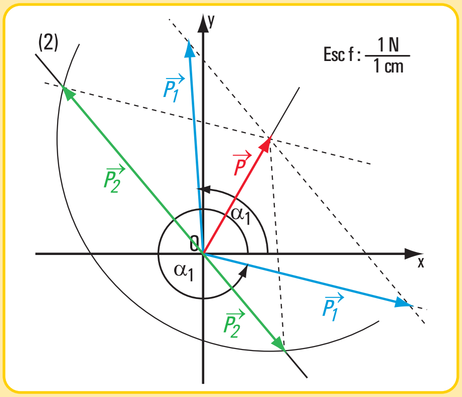


Figura 1.45 b. *Determinación gráfica de las soluciones*

Respuesta

$P_2 = 3\ N$ *para* $\hat{\alpha}_2 = 130^o$
o $P_2 = 1{,}7\ N$ *para* $\hat{\alpha}_2 = 310^o$
$\hat{\alpha}_1 = 347^o$
o $\hat{\alpha}_1 = 93^o$

Para limitar la respuesta debemos indicar más condiciones particulares, en este caso tenemos que determinar cuál es el valor de $\hat{\alpha}_2$ y cuál el de $\hat{\alpha}_1$.

Solución 3

Datos (Figura 1.46 a)

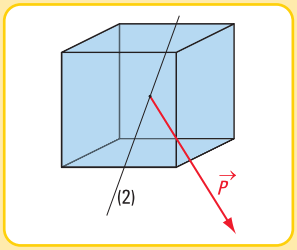


Figura 1.46 a

$P = 4\ N$
$P_1 = 3\ N$
$\hat{\alpha}_2 = 250^o$
$\hat{\alpha} = 302^o$

Hallar P_2 y $\hat{\alpha}_1$

Búsqueda de solución
La solución gráfica se visualiza en la **figura 1.46 b**.

Como se ve en la **figura 1.46 b** la solución es única

Respuesta
La solución es única: $P_2 = 2{,}4\ N$ y $\hat{\alpha}_1 = 342^o$

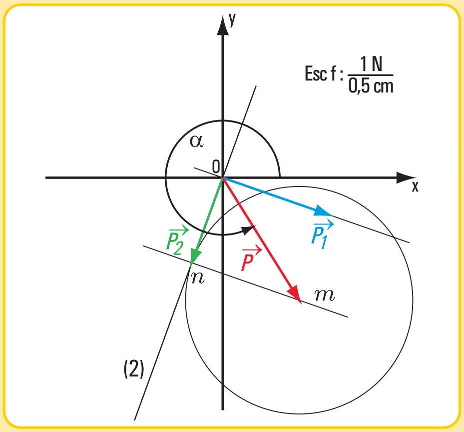


Figura 1.46 b. *Determinación gráfica de la solución*

Caso 3
Datos (Figura 1.47 a)

$P = 2\ N$ $\hat{\alpha} = 0^o$
$\hat{\alpha}_1 = 45^o$
$P_1 = 3\ N$

Hallar P_2 y $\hat{\alpha}_2$

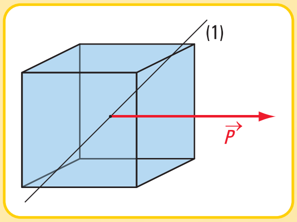


Figura 1.47 a

Búsqueda de solución
La solución gráfica se visualiza en la **figura 1.47 b.**

Respuesta

$P_2 = 2\ N$
$\hat{\alpha}_2 = 270^o$

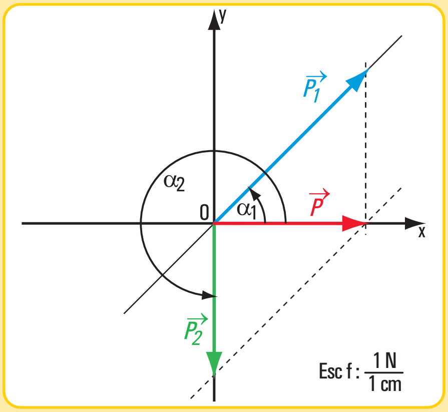


Figura 1.47 b. *Determinación gráfica de la solución*

Caso 4. Este caso presenta tres soluciones posibles

• Solución 1
Datos (Figura 1.48 a)

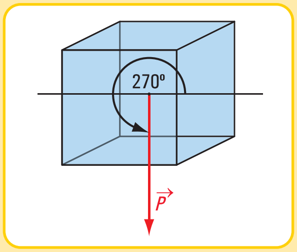


Figura 1.48 a

$P = 2{,}3\ N$
$\hat{\alpha} = 270^o$
$P_1 = 1{,}6\ N$
$P_2 = 2{,}2\ N$

Búsqueda de solución
En este caso $|P_1| + |P_2| > |P|$

Como se puede visualizar en el gráfico de la **figura 1.48 b**, existen dos soluciones:

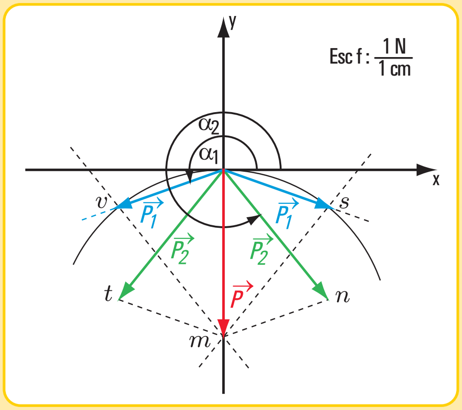


Figura 1.48 b. *Determinación gráfica de la solución*

$\hat{\alpha}_1 = 200^o$	$\hat{\alpha}_1 = 342^o$
$\hat{\alpha}_2 = 310^o$	$\hat{\alpha}_2 = 230^o$

• Solución 2
Datos (Figura 1.49 a)

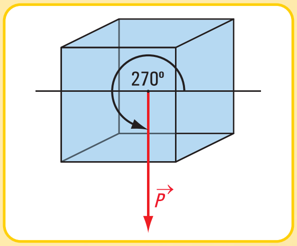


Figura 1.49 a

$|P| = 3\ N$
$|\alpha| = 270^o$
$|P_1| = 1{,}5\ N$
$|P_2| = 1{,}5\ N$

Búsqueda de solución
En este caso $|P_1| + |P_2| = |P|$

Como se puede visualizar en el gráfico de la **figura 1.49 b**, la solución es única y es igual a $|P|$.

Respuesta
Existe una única solución. Las fuerzas son colineales.

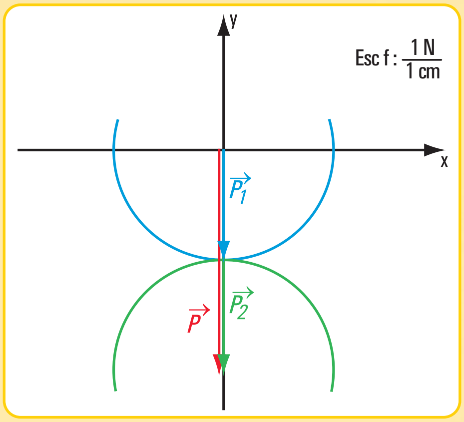


Figura 1.49 b. *Determinación gráfica de la solución*

- **Solución 3**

Datos (Figura 1.50 a)

$|P_1| + |P_2| < |P|$
$|P| = 3\ N$
$|P_1| = 1{,}5\ N$
$|P_2| = 1{,}2\ N$

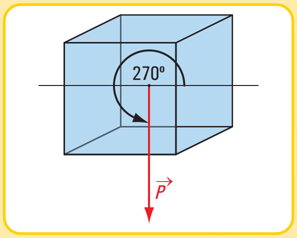


Figura 1.50 a

Búsqueda de solución
En este caso $|P_1| + |P_2| < |P|$

Analicemos el gráfico de la **figura 1.50 b**. Hemos trazado por el origen de P una circunferencia de radio igual a P_1 y por el extremo de P otra circunferencia de radio P_2.
Ambas circunferencias no tienen ningún punto de intersección. ¿ Qué significa?
Esto quiere decir que el problema no tiene solución.

Respuesta
No tiene solución.

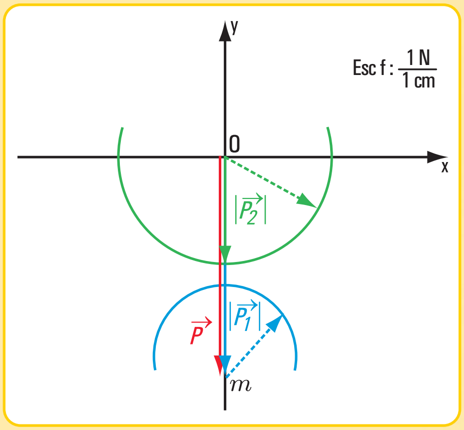


Figura 1.50 b. *Determinación gráfica de la solución*

1.6.1.- Descomposición de fuerza. Método analítico

Dado que, cuando planteamos la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes en su punto de aplicación estamos averiguando, en todos los casos posibles, sólo dos incógnitas; entonces desde el cálculo analítico implica plantear dos ecuaciones con dos incógnitas.

Se plantean los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.- Dos ecuaciones de proyección sobre los ejes *x* e *y*

$$F_x = \sum F_i \,.\, cos\ a_i \Rightarrow F \,.\, cos\ \alpha = F_1 \,.\, cos\ \alpha_1 + F_2 \,.\, cos\ \alpha_2 + ...$$

$$F_y = \sum F_i \,.\, sen\ a_i \Rightarrow F \,.\, sen\ \alpha = F_1 \,.\, sen\ \alpha_1 + F_2 \,.\, sen\ \alpha_2 + ...$$

2.- Una ecuación de proyección sobre un eje y una de momento respecto de un punto

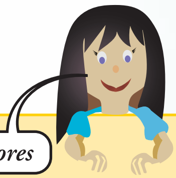
$$\begin{cases} F_x = \sum F_i \,.\, cos\ a_i \Rightarrow F \,.\, cos\ \alpha = F_1 \,.\, cos\ \alpha_1 + F_2 \,.\, cos\ \alpha_2 + ... \\ M^o = \sum M_i^{\,o} \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} F_y = \sum F_i \,.\, sen\ \alpha_i \Rightarrow F \,.\, sen\ \alpha = F_1 \,.\, sen\ \alpha_1 + F_2 \,.\, sen\ \alpha_2 + ... \\ M^o = \sum M_i^{\,o} \end{cases}$$

3.- Dos ecuaciones de momentos con respecto a dos puntos

$$\begin{cases} M^o = \sum M_i^{\,o} \\ M^a = \sum M_i^{\,a} \end{cases}$$



Volvemos a los problemas y ejercicios para aplicar las ecuaciones anteriores

Problema Nº 1.14

Enunciado
Un farol de alumbrado de la calle, cuya masa es m = 25 kg está sujetado por medio de dos cables que forman con la horizontal los ángulos $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$. Hallar las fuerzas componentes de la fuerza $\vec{P}$ en la dirección de cada uno de los cables (**Figura 1.51 a**).

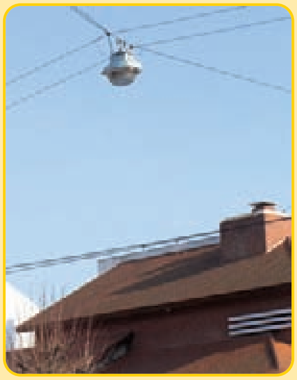


Imagen 1.22

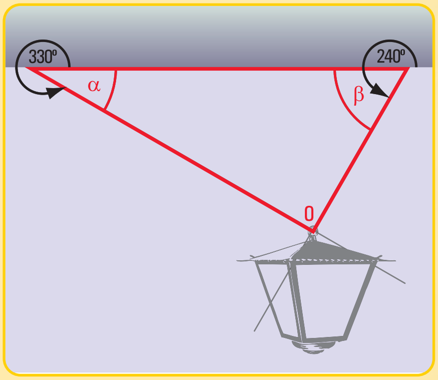


Figura 1.51 a

Desarrollo
1.- Hallamos el peso del farol
Suponemos que la aceleración de la gravedad es g= 9,8 $\frac{m}{s^2}$, entonces P = 25 kg x 9,8 $\frac{m}{s^2}$,
P = 245 N , peso del farol.
2.- Aplicamos dos ecuaciones de proyección sobre los ejes *x* e *y*

$$\begin{cases} F_x = \sum F_i \,.\, cos\ \alpha_i \Rightarrow F \,.\, cos\ \alpha = F_1 \,.\, cos\ \alpha_1 + F_2 \,.\, cos\ \alpha_2 + ... \\ F_y = \sum F_i \,.\, sen\ \alpha_i \Rightarrow F \,.\, sen\ \alpha = F_1 \,.\, sen\ \alpha_1 + F_2 \,.\, sen\ \alpha_2 + ... \end{cases}$$

Consideramos los ángulos α = 330° y β = 240°, ya que si visualizamos la descomposición de la fuerza $\vec{P}$ en $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ en forma gráfica (**Figura 1.51 b**), los ángulos que forman sus rectas de acción son: $\alpha = 330°$ y $\beta = 240°$

$$\begin{cases} P_x = \sum F_i \,.\, \cos \alpha_i \Rightarrow 245\,N \,.\, \cos 270^o = F_1 \,.\, \cos 330^o + F_2 \,.\, \cos 240^o \\ P_y = \sum F_i \,.\, \text{sen}\, \alpha_i \Rightarrow 245\,N \,.\, \text{sen}\, 270^o = F_1 \,.\, \text{sen}\, 330^o + F_2 \,.\, \text{sen}\, 240^o \end{cases}$$

$$\begin{cases} 245\,N \,.\, 0 = F_1 \,.\, 0{,}87 + F_2 \,.\, (-0{,}5) \\ 245\,N \,.\, (-1) = F_1 \,.\, (-0{,}5) + F_2 \,.\, (-0{,}87) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = F_1 \,.\, 0{,}87 + F_2 \,.\, (-0{,}5) \Rightarrow 0{,}87 \,.\, F_1\,N + (-0{,}5) \,.\, F_2\,N = 0\,N \\ -245\,N = F_1 \,.\, (-0{,}5) + F_2 \,.\, (-0{,}87) \Rightarrow (-0{,}5) \,.\, F_1\,N + (-0{,}87) \,.\, F_2\,N = -245\,N \end{cases}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver mediante diferentes métodos (igualación; sustitución; sumas y restas, y determinantes). Nosotros consideramos que el método de determinantes es el más simple. Por tal motivo, aplicamos este método.

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -245 & -0{,}87 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}87 \end{vmatrix}} \Rightarrow F_1 = \frac{0.(-0{,}87) - (-0{,}5)(-245)}{0{,}87(-0{,}87) - (-0{,}5)(-0{,}5)}$$

$$F_1 = \frac{-122{,}5}{-0{,}76 - (+0{,}25)} \Rightarrow F_1 = \frac{-122{,}5}{-1{,}01} \Rightarrow F_1 = 121{,}29\,N$$

$$F_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}87 & 0 \\ -0{,}5 & -245 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}87 \end{vmatrix}} \Rightarrow F_2 = \frac{0{,}87.(-245) - (-0{,}5).0}{0{,}87(-0{,}87) - (-0{,}5)(-0{,}5)}$$

$$F_2 = \frac{-213{,}15\text{ N}}{-1{,}01} \Rightarrow F_2 = 211{,}04\,N$$

Visualizamos también estos resultados, en forma aproximada, en el gráfico de la **figura 1.51 b.**

Respuesta
Las intensidad de las fuerzas componentes en la dirección de cada cable es: $F_1 = 121{,}29\,N$ y $F_2 = 211{,}04\,N$

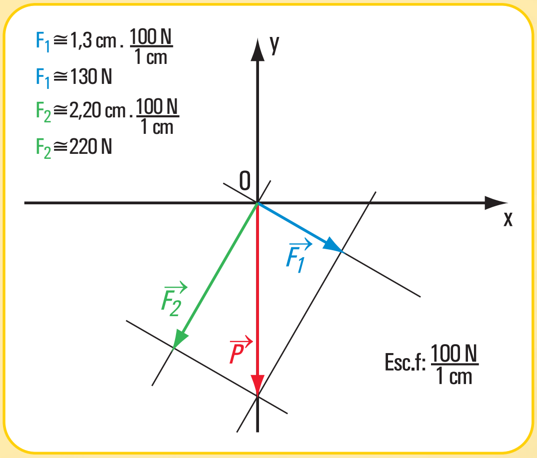


Figura 1.51 b. *Descomposición de $\vec{P}$ en $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$*

Ejercicio Nº 1.7
Del sistema de tres fuerzas concurrentes $(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{T}_2)$ en un punto se conocen los siguientes datos:

$T_2 = 50\ N$
$\alpha_1 = 20º$
$T_1 = 35\ N$
$\alpha = 0º$

La carga sobre el entrepiso en voladizo descarga en cada una de las viguetas de madera

Imagen 1.23. *Calle de San Francisco - Potosí' Pintura de Léonie Mathis*

Hallar P y α_2

Desarrollo
Se trata de la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes. Aplicamos dos ecuaciones de proyección sobre los ejes *x* e *y*.

$$\begin{cases} P \,.\, \cos\alpha = T_1 \,.\, \cos\alpha_1 + T_2 \,.\, \cos\alpha_2 \\ P \,.\, \text{sen}\,\alpha = T_1 \,.\, \text{sen}\,\alpha_1 + T_2 \,.\, \text{sen}\,\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P \,.\, \cos 0º = 50\,N \,.\, \cos 20º + 35\,N \,.\, \cos\alpha_2 \\ P \,.\, \text{sen}\, 0º = 50\,N \,.\, \text{sen}\, 20º + 35\,N \,.\, \text{sen}\,\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = 50\,N \,.\, 0{,}94 + 35\,N \,.\, \cos\alpha_2 \\ 0\,N = 50\,N \,.\, 0{,}34 + 35\,N \,.\, \text{sen}\,\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = 47\,N + 35\,N \,.\, \cos\alpha_2 \qquad (11) \\ 0\,N = 17\,N + 35\,N \,.\, \text{sen}\,\alpha_2 \end{cases}$$

$$35\,N \,.\, \text{sen}\,\alpha_2 = -\,17\,N$$
$$\text{sen}\,\alpha_2 = -\,0{,}49\,N$$
$$\alpha_2 = \text{arc sen}\,(-\,0{,}49)$$
$$\alpha_2 = -\,29{,}34º$$

$\alpha_2 = -\,29{,}34º$ es el valor que da la calculadora.

El valor real es:

$\alpha_2 = 360º - 29{,}34º \Rightarrow \alpha_2 = 330{,}66º$

Reemplazando en (11) a α_2 por el valor hallado, obtenemos el valor de P

$P = 47\ N + 35\ N \,.\, \cos 330{,}66º$
$P = 77{,}51\ N$

Visualizamos también estos resultados, en forma aproximada, en el gráfico de la **figura 1.52.**

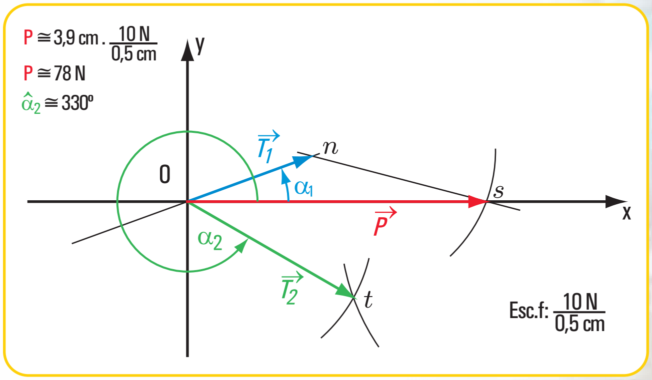


Figura 1.52. *Descomposición de $\vec{P}$ en $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$*

Respuesta
El módulo de P es 77,51 *N* y el ángulo que da la dirección y sentido de la fuerza $\vec{T}_2$ es:
$\alpha_2 = 330{,}66º$

Ejercicio Nº 1.8
Descomponer la fuerza $\vec{T}$ en las direcciones de las rectas r_1 y r_2 concurrentes con la fuerza $\vec{T}$.

Datos

$T = 10\ N$
$\alpha_1 = 45^o$
$\alpha_2 = 140^o$
$\alpha_T = 300^o$

Incógnitas: T_1 y T_2.

¿...y cómo distribuye la fuerza $\vec{P}$ (peso) Jane Avril?

Imegen 1.23 . *Jane Avril en el Jardín de París* (1893)
Enrique de Toulouse Lautrec - Museo de Albi

Desarrollo
Aplicamos las ecuaciones de proyección del sistema de fuerzas sobre los ejes *x* e *y*.

Ecuación de proyección sobre el eje *y*.

$$T \,.\, sen\ \alpha_T = T_1 \,.\, sen\ \alpha_1 + T_2 \,.\, sen\ \alpha_2$$

Ecuación de proyección sobre el eje *x*.

$$T \,.\, cos\ \alpha_T = T_1 \,.\, cos\ \alpha_1 + T_2 \,.\, cos\ \alpha_2$$

Reemplazamos en cada una de las ecuaciones por los valores correspondientes.

$$\begin{cases} 10\ N \,.\, sen\ 300^o = T_1 \,.\, sen\ 225^o + T_2 \,.\, sen\ 320^o \\ 10\ N \,.\, cos\ 300^o = T_1 \,.\, cos\ 225^o + T_2 \,.\, cos\ 320^o \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\ 8{,}66\ N = T_1 \,.\, (-\ 0{,}71) + T_2 \,.\, (-\ 0{,}64) \\ 5\ N = T_1 \,.\, (-\ 0{,}71) + T_2 \,.\, (0{,}77) \end{cases}$$

Para la resolución de este sistema de ecuaciones aplicamos el denominado método de determinantes

$$|T_1| = \frac{\begin{vmatrix} -\ 8{,}66 & -\ 0{,}64 \\ 5 & +0{,}77 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\ 0{,}71 & -\ 0{,}64 \\ -\ 0{,}71 & +\ 0{,}77 \end{vmatrix}} \Rightarrow |T_1| = \frac{(-\ 8{,}66)(+\ 0{,}77) - (-\ 0{,}64)\,.\,5}{(-\ 0{,}71)(+\ 0{,}77) - (-\ 0{,}64)\,.\,(-\ 0{,}71)}$$

$$|T_1| = \frac{-\ 6{,}67 + 3{,}2}{-\ 0{,}55 - 0{,}45}$$

$$|T_1| = \frac{-\ 3{,}47}{-\ 1}$$

$$|T_1| = 3{,}47\ N$$

$$|T_2| = \frac{\begin{vmatrix} -\ 0{,}71 & -\ 8{,}66 \\ -\ 0{,}71 & 5 \end{vmatrix}}{-\ 1} \Rightarrow |T_2| = \frac{-\ 0{,}71\,.(5) - (-\ 8{,}66)(-\ 0{,}71)}{-1}$$

$$|T_2| = \frac{-\ 3{,}55 - 6{,}15}{-\ 1}$$

$$|T_2| = 9{,}7\ N$$

¿...y aquí?

Imagen 1.24.
Jane Avril bailando en el Moulin Rouge (1892)
Enrique de Toulouse Lautrec - Museo de Louvre - París

Visualizamos también estos resultados, en forma aproximada, en el gráfico de la **figura 1.53**

Respuesta
El módulo de T_1 es *3,47 N* y, el de T_2 de *9,7 N*

Ejercicio Nº 1.9
Descomponer la fuerza $\vec{J}$ en dos direcciones concurrentes con la fuerza $\vec{J}$.

Datos

$J = 0{,}05\ kN$
$\hat{\alpha}_1 = 180^o$
$J_1 = 0{,}02\ kN$
$\hat{\alpha}_J = 35^o$

Incógnitas: J_2 y α_2

Desarrollo

$$\begin{cases} J\,.\cos\alpha_J = J_1\,.\cos\alpha_1 + J_2\,.\cos\alpha_2 \\ J\,.\operatorname{sen}\alpha_J = J_1\,.\operatorname{sen}\alpha_1 + J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}05\ kN\,.\cos 35^o = 0{,}02\ kN\,.\cos 180^o + J_2\,.\cos\alpha_2 \\ 0{,}05\ kN\,.\operatorname{sen} 35^o = 0{,}02\ kN\,.\operatorname{sen} 180^o + J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}041\ kN = -\ 0{,}02 + J_2\,.\cos\alpha_2 \\ 0{,}03\ kN \ \ = 0 + J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}061\ kN = J_2\,.\cos\alpha_2 \qquad (12) \\ 0{,}03\ kN \ \ = J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2 \qquad (13) \end{cases}$$

Dividimos miembro a miembro las expresiones (12) y (13)

$$\frac{0{,}03\ kN}{0{,}061\ kN} = \frac{J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2}{J_2\,.\cos\alpha_2}\ ,\ para\ J_2 \neq 0\ y\ \cos\alpha_2 \neq 0$$

$$0{,}49 = tg\ \alpha_2$$
$$\hat{\alpha}_2 = arc\ tg\ 0{,}49$$
$$\hat{\alpha}_2 = 26{,}10^o$$

Reemplazando a α_2 en la expresión (13) por el valor hallado,

$$J_2\,.\operatorname{sen}\alpha_2 = 0{,}03$$
$$J_2 = \frac{0{,}03}{\operatorname{sen} 26{,}10^o}$$
$$J_2 = \frac{0{,}03}{0{,}44}$$
$$J_2 = 0{,}068\ kN$$

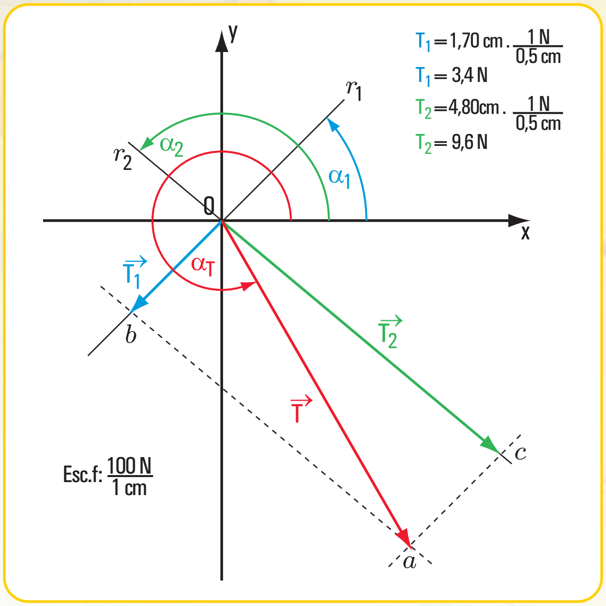


Figura 1.53. *Descomposición de* $\vec{P}$ *en* $\vec{T_1}$ y $\vec{T_2}$

¿Por qué el Maestro adopta esa posición?, ¿y las bailarinas?

Imagen 1.25. *La clase de danza* (1873-1876)
Edgardo Degas - Museo Orsay - París

Pudimos reemplazar a $\hat{\alpha}_2$ en la expresión (12), entonces:

$$J_2 = \frac{0{,}061}{\cos 26{,}10^o}$$

$$J_2 = \frac{0{,}061}{0{,}90}$$

$$J_2 = 0{,}068\ kN$$

Como podemos observar se obtiene igual resultado. Visualizamos también estos resultados, en forma aproximada, en el gráfico de la **figura 1.54**.

Respuesta

El módulo o intensidad de $\vec{J_2}$ es $J_2 = 0{,}068\ kN$ y la dirección y sentido de $\vec{J_2}$ están dados por $\hat{\alpha}_2 = 26{,}10^o$.

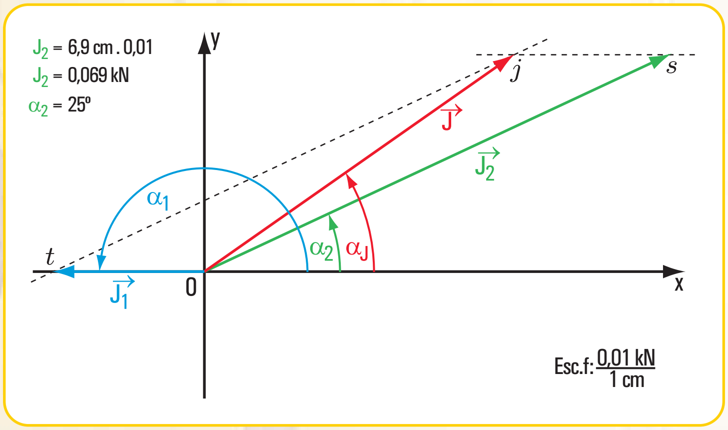


Figura 1.54. *Descomposición de $\vec{J}$ en $\vec{J_2}$ y $\hat{\alpha}_2$*

Para pensar y resolver

Los siguientes ejercicios y problemas son para pensar y resolver. Al final del libro encontramos las soluciones desarrolladas.

1.- Cálculo de las componentes rectangulares de una fuerza

Ejercicio Nº 1.10
Determinar las componentes rectangulares de cada una de las siguientes fuerzas (**Figura 1.55**) aplicadas a un cuerpo rígido.

F_1 = 1 N
F_2 = 1,5 N
F_3 = 0,7 N
F_4 = 2 N
F_5 = 0,5 N
α_2 = 40º
α_3 = 30º

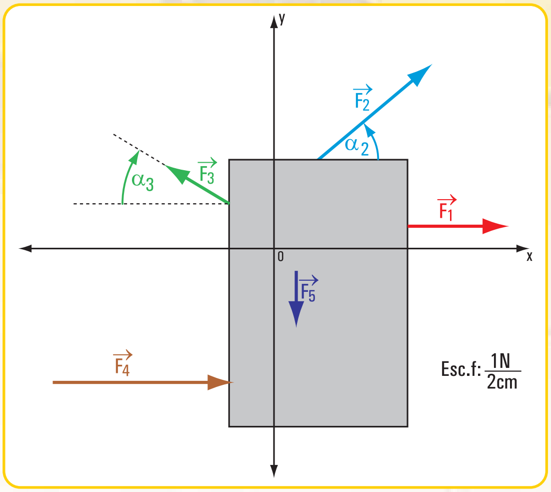


Figura 1.55

Ejercicio Nº 1.11
Hallar las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas aplicadas al bloque de madera (**Figura 1.56**).

E = 20 N
P = 5 kg
f = 0,01 kg

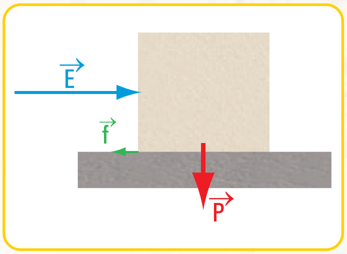


Figura 1.56

2.- Momento de una fuerza respecto de un punto

En el consultorio odontológico

Problema Nº 1.15
El pedal que hace funcionar un torno para uso odontológico tiene la forma que se visualiza en la **figura 1.57**. El odontólogo cuando trabaja con el torno lo hace funcionar empujando con el pie el extremo superior libre. Sobre el pedal ejerce una fuerza que denominamos $\vec{J}$, con un ángulo de inclinación α = 30º respecto de la dirección del plano inclinado del pedal y con una intensidad J = 12 N (**Figura 1.57**).
1.- ¿Qué efecto provoca la fuerza?
2.- ¿Cuál es la intensidad y el sentido del momento de $\vec{J}$ respecto de *a*?

Imagen 1.26. *En el consultorio odontológico*

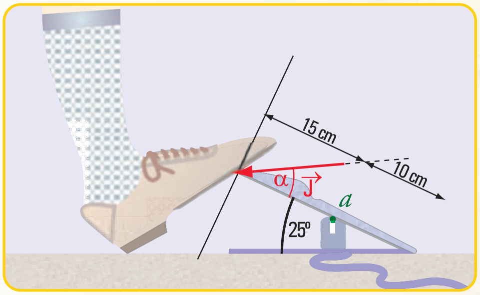


Figura 1.57

63

3.- Traslación de fuerzas

Ejercicio Nº 1.12
Trasladar la fuerza $\vec{Z}$ al punto G (**Figura 1.58**). Expresar el resultado de la traslación en forma gráfica y analítica. Z = 0,01 N

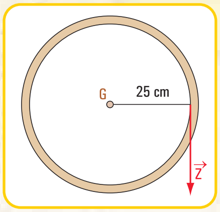


Figura 1.58

Ejercicio Nº 1.13
Trasladar la fuerza $\vec{T}$ al punto *a* (**Figura 1.59**). Expresar el resultado de la traslación en forma gráfica y analítica.
T = 1 N
d = 2 m

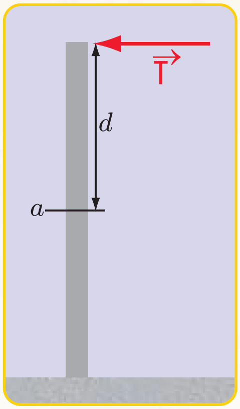


Figura 1.59

Ejercicio Nº 1.14
Trasladar la fuerza $\vec{F}$ al punto G (**Figura 1.60**). Expresar el resultado de la traslación en forma gráfica y analítica.

Datos
F = 0,1 N   d = 1 cm
P = 0,2 N

Ejercicio Nº 1.15
Trasladar las fuerzas $\vec{P_1}$ y $\vec{P_2}$ al punto *G* (**Figura 1.61**). Expresar el resultado en forma gráfica y en forma analítica.

Datos
P_1 = 10 N d_1 = 0,30 m
P_2 = 10 N d_2 = 0,30 m
P = 100 N

Ejercicio Nº 1.16
Trasladar las fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ al punto *o* mediante sus componentes rectangulares (**Figura 1.62**).

F_1 = 0,1 N α_1 = 20° y_1 = 80 cm
F_2 = 0,2 N α_2 = 20° y_2 = 80 cm
                                        x_2 = 90 cm x_1 = 40 cm

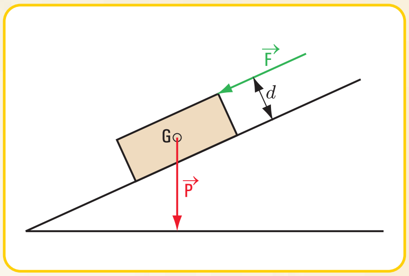


Figura 1.60

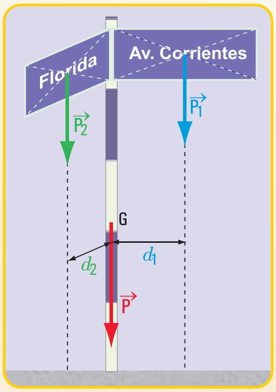


Figura 1.61

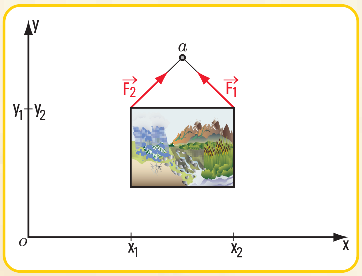


Figura 1.62

4.- Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes

Problema Nº 1.16

La familia Monteserín limpia su casa

Enunciado

Los hijos de la familia Monteserín limpian su dormitorio. Cada uno desempeña una tarea diferente. Cecilia pasa la lustradora de piso. Cuando la empuja aplica una fuerza. Si el módulo de dicha fuerza es E=25 N y la dirección e intensidad están dadas por $\alpha_E = 310°$(**Figura 1.63**), ¿cuáles son los módulos de las componentes horizontal y vertical? y, ¿qué efecto provoca cada una?

Imagen 1.27. Cecilia lustra el piso

Figura 1.63

Problema Nº 1.17

Unos jóvenes juegan con un plano inclinado

Enunciado

En una esquina del barrio de Villa Crespo (Buenos Aires - Argentina) unos jóvenes se entretienen con una tabla y una rueda. En un momento del juego, cada participante coloca su tabla en diferentes posiciones y tira la rueda desde arriba (**Figura 1.64**).

1.- ¿Cuáles son las fuerzas que intervienen?

2.- Si la fuerza $\vec{P}$ de la rueda tiene una intensidad P= 10 N, y los ángulos de inclinación son:

a.- $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6}$

b.- $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{4}$

c.- $\alpha_3 = \dfrac{\pi}{2}$

d.- P_1 es la componente en la dirección de la tabla y P_2 en la dirección normal,

2.1 – ¿cuáles son los valores de P_1 y P_2 en cada caso?;

2.2 – ¿para qué inclinación de la tabla, P_1 es máxima?;

2.3 – ¿para qué inclinación de la tabla, P_1 es mínima?

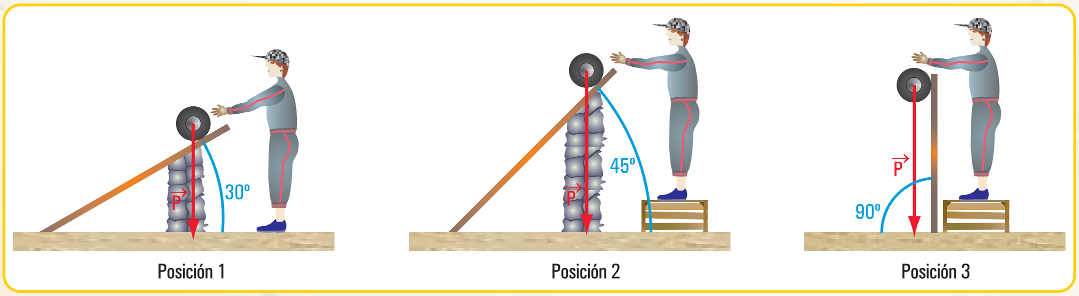


Figura 2.64

Problema Nº 1.18

Enunciado

Un equilibrista está colgado con una sola mano de dos cuerdas sujetas a una barra en los punto *a* y *b* (**figura 1.65**).

1.- ¿Cuáles son las fuerzas actuantes?
2.- Si el peso del equilibrista es P = 50 N; y si las cuerdas forman con las barras los siguientes ángulos $\hat{\alpha} = 30°$ y $\hat{\beta} = 60°$, ¿cuáles son las fuerzas componentes de $\vec{P}$ en la dirección de las cuerdas?
3.- ¿Qué relación existe entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ para que dichas componentes tengan igual intensidad?
4.- ¿Qué relación existe entre los módulos de los componentes y los ángulos de inclinación de las cuerdas?

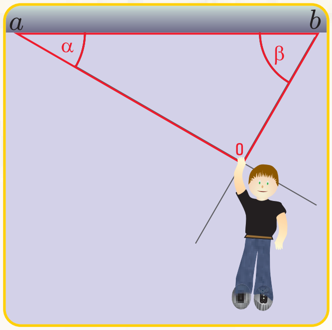


Figura 1.65

Epílogo

Los temas desarrollados: el concepto de fuerza, la representación en coordenadas cartesianas ortogonales, las componentes rectangulares de una fuerza, la descomposición de una fuerza en dos direcciones coplanares con ella, el concepto de momento respecto de un punto, el de pares de fuerzas… constituyen saberes que nos acompañarán durante el transcurso de todo el libro.

Son básicos y fundamentales, y se irán ampliando y profundizando en los próximos capítulos, de ahí la importancia de afianzar esos saberes para una correcta comprensión de las temáticas que abordaremos. En determinadas expresiones matemáticas colocamos las unidades sólo en el resultado. Lo hicimos, exclusivamente, para clarificar la marcha de los cálculos.

En este momento, ya podemos empezar a esbozar una respuesta a las preguntas, ¿qué es la estática?, y ¿para qué se utiliza?

Hemos trabajado durante el desarrollo de este capítulo con el concepto, representación, propiedades, componentes,… de las fuerzas aplicadas a cuerpos rígidos, entonces en una primera aproximación, podemos decir que: la estática es una parte de la física en la que intervienen las fuerzas.

Por otra parte, a través de simulaciones de situaciones reales de la vida cotidiana, hemos observado que la estática está en el mundo en el que vivimos y que es una parte intrínseca de ese mundo.