

SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES

Prefacio

A medida que transcurre el desarrollo de este libro, nos adentramos cada vez más en los saberes que nos brinda la Estática. En este capítulo nos dedicamos a desentrañar las propiedades de los sistemas de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido.

Trabajamos con sistemas de fuerzas coplanares (pertenecientes a un mismo plano) concurrentes en un punto y con los sistemas de fuerzas no concurrentes.

Definimos procedimientos para hallar la fuerza que permite reemplazar, con el mismo efecto, al sistema de fuerzas, ya sea de fuerzas concurrentes como no concurrentes; y para completar el capítulo nos dedicamos al equilibrio de dichos sistemas.

Al final del mismo, de igual modo, que en el capítulo anterior, proponemos una serie de problemas para pensar y resolver, algunos de los cuales son problemas que integran los contenidos desarrollados en los capítulos 1 y 2.

*...y continuamos con
las fuerzas*



2.1.- Fuerzas concurrentes. Composición de fuerzas. Determinación de la resultante

En el año 1586, Stevinus utilizó en sus trabajos el denominado principio del paralelogramo, aunque no lo enunció formalmente.

Fueron Newton y Varignon quienes lo hicieron en forma clara y precisa.

El enunciado de dicho principio, conocido también como Primer Principio de la Estática establece lo siguiente:

El efecto de dos fuerzas, aplicadas en un mismo punto de un cuerpo rígido, es equivalente al de una única fuerza denominada resultante, también aplicada en el mismo punto y cuya intensidad y dirección están definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores representativos de las fuerzas componentes.

Este principio nos permite hallar en forma gráfica la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto.

A partir del planteo y resolución de los siguientes problemas, en los cuales aplicamos el principio del paralelogramo, podemos saber cómo se determina la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, mediante el método gráfico.

Problema 2.1

Los chicos juegan

Enunciado

Dos chicos juegan tirando de un trencito mediante dos sogas que están atadas en un mismo punto, tal como se muestra en la figura 2.1.

Cada chico aplica al trencito una fuerza, a través de su soga. Si otro niño quiere jugar solo, ¿cuál será la fuerza que debe aplicar al trencito para que se produzca el mismo efecto?

Para responder a la pregunta suponemos los siguientes datos:

$$F_1 = 3 \text{ N}$$

$$F_2 = 1,5 \text{ N}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.2), y en él aplicamos el método del paralelogramo. Por el extremo de \vec{F}_2 , trazamos una paralela a la recta de acción de \vec{F}_1 y por extremo de \vec{F}_1 una paralela a la recta de acción de \vec{F}_2 . La intersección de dichas rectas es el extremo de la fuerza resultante de las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

Respuesta

El módulo de la fuerza \vec{R} es $R = 4 \text{ N}$ y los ángulos: $\hat{\alpha}_1 = 337^\circ$ y $\hat{\alpha}_2 = 35^\circ$.



Figura 2.1

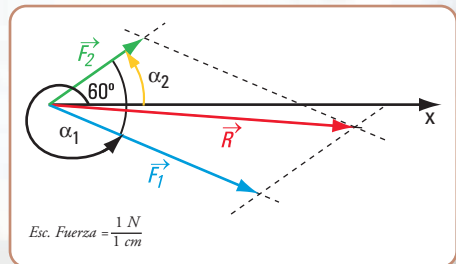


Figura 2.2

Problema 2.2

El contenedor molesta a los vecinos



Enunciado

Un contenedor que contiene residuos y está en la mitad de una calle completamente lleno molesta a los vecinos. Deciden trasladarlo hasta una de las cuatro esquinas más próxima.

Como es muy pesado, el traslado lo efectúan tres vecinos: Juan, Marcelo y Daniel, mediante tres cables de acero, atados de una manija ubicada en una de los laterales del contenedor (Figura 2.3).



Imagen 2.1. Contenedor



Figura 2.3. Los vecinos arrastran el contenedor

Nos imaginamos que las intensidades de las fuerzas que cada uno ejerce sobre el mismo son:

Juan	?	$S_1 = 200 \text{ N}$
Marcelo	?	$S_2 = 330 \text{ N}$
Daniel	?	$S_3 = 350 \text{ N}$

A la hora, el contenedor aparece nuevamente a 20 m de la esquina. Los tres hombres ya se habían retirado, sólo se encuentra Joaquín, otro vecino, quien decide arrastrarlo solo.

¿Cuál será la fuerza que debe realizar Joaquín para que el efecto sea el mismo que el realizado por los otros tres hombres?

Desarrollo

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre: aplicamos el principio del paralelogramo en forma sucesiva (Figura 2.4.).

2. Otra forma (Figura 2.5)

Podemos evitar el trazado de la resultante mediante el siguiente procedimiento:

Por el extremo a de \vec{S}_1 trazamos una paralela a la recta de acción de \vec{S}_2 y sobre ésta llevamos, en la escala correspondiente, la intensidad de \vec{S}_2 , obteniendo el punto a' ; por este punto trazamos una paralela a la recta de acción de \vec{S}_3 y en la escala correspondiente la intensidad de \vec{S}_3 determinando

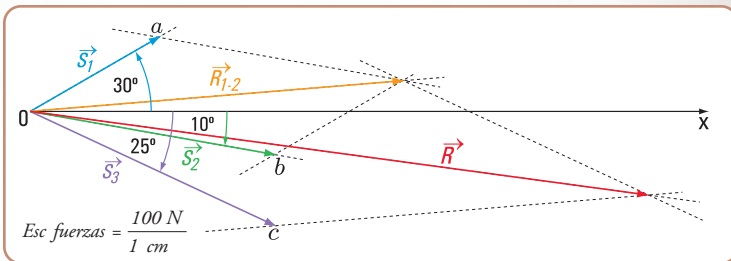


Figura 2.4. Diagrama de sólido libre (aplicación del principio del paralelogramo)

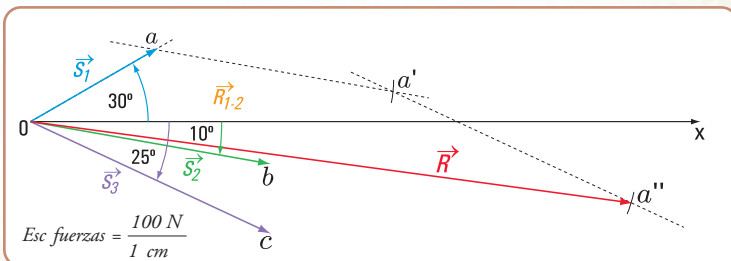


Figura 2.5. Diagrama de sólido libre

el punto a'' .

El vector con origen en o y extremo en a'' representa a la fuerza resultante \vec{R} .

El polígono $oaa'a''$ recibe el nombre de **polígono de fuerzas**.

Si el punto a'' es distinto de o , entonces el polígono de fuerzas es abierto. Si el punto a'' coincide con o , entonces el polígono de fuerzas es cerrado y la resultante es nula.

Respuesta

La intensidad de la fuerza \vec{R} es igual a 830 N.

Problema 2.3

El trabajo en un club náutico

Enunciado

En un club náutico un bote de goma tuvo que ser trasladado a la guardería para su reparación. Para sacarlo del agua dos hombres tiraron de un cabo que estaba atado en la proa (Figura 2.6).

Si cada uno realiza una fuerza de intensidad $F = 200$ N, ¿cuál es la fuerza resultante?



Figura 2.6

Desarrollo

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.7).
2. Calculamos el valor de la intensidad de la fuerza resultante.

$$R = F_1 + F_2$$

$$R = 200 \text{ N} + 200 \text{ N}$$

$$R = 400 \text{ N}$$

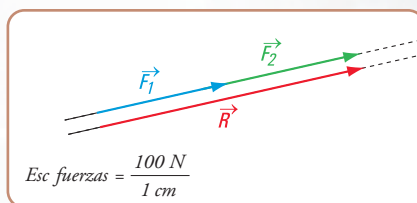


Figura 2.7

Respuesta

La fuerza resultante es colineal con \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , de igual sentido y módulo $R = 400$ N.

Problema 2.4

...y ahora jugamos nosotros

Enunciado

Jugamos a la cinchada en el patio de la escuela durante una clase de Educación Física. De un lado están los alumnos del 1.º 1.ª, ciclo básico y del otro nosotros, los de 1.º 2.ª, ciclo básico (Figura 2.8).

Si los jóvenes del 1.º 1.ª emplean una fuerza \vec{F}_1 de intensidad $F_1 = 750$ N y los 1.º 2.ª en sentido contrario y colineal con \vec{F}_1 , una fuerza \vec{F}_2 , de intensidad $F_2 = 1.050$ N, ¿cuál es la



Figura 2.8

fuerza resultante? ¿Qué curso ganó?

Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.9). Sumando los vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , cada uno con su signo, obtenemos el vector \vec{R} (Figura 2.10). El módulo o intensidad de \vec{R} se obtiene realizando la suma algebraica de las intensidades de \vec{F}_2 y \vec{F}_1 .

Consideramos que F_2 tiene signo positivo y F_1 signo negativo, entonces:

$$\begin{aligned} R &= F_2 - F_1 \\ R &= 1.050 \text{ N} - 750 \text{ N} \\ R &= 300 \text{ N} \end{aligned}$$

Respuesta

La fuerza \vec{R} resultante es colineal con \vec{F}_2 y \vec{F}_1 de sentido de \vec{F}_2 e intensidad $R = 300 \text{ N}$.

¡Ganamos! ¡Olé, olé, olé... olé, olá, olá!...
¡primero segunda es el ganador!

No consideramos las fuerzas que pueden hacer los alumnos con los pies sobre el piso.

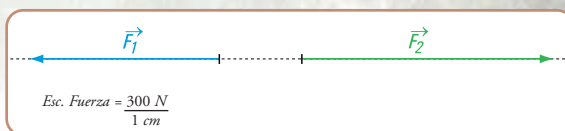


Figura 2.9. Diagrama de sólido libre

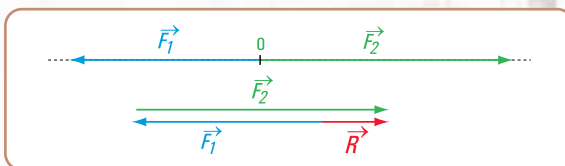


Figura 2.10. Resultante del sistema de fuerzas colineales



Figura 2.11. El grupo festeja (Coni está en el grupo)

Conclusión

1. La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto se halla aplicando la regla del paralelogramo. Para más de dos fuerzas se emplea la regla del paralelogramo en forma sucesiva o bien el denominado polígono de fuerzas.
2. Si las fuerzas son colineales (igual recta de acción), y de igual sentido, la resultante es colineal con las fuerzas dadas; de igual sentido y de intensidad $R = F_1 + F_2 + \dots$
3. Si las fuerzas son colineales y de distinto sentido, la resultante es colineal con las fuerzas, con el mismo sentido que el de la fuerza de mayor intensidad de cada una de las fuerzas.

Método analítico

En el apartado anterior hemos desarrollado un método gráfico para la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes: principio del paralelogramo y polígono de fuerzas.

En este ítem nos ocupamos de la composición de fuerzas, pero en forma analítica. El gráfico lo usamos, sólo como apoyo al desarrollo algebraico.

Caso 1

Consideramos, por ejemplo, el caso de una embarcación que es remolcada por otras dos, mediante

cables de acero atados en el mismo lugar (Figura 2.12). Queremos reemplazar el efecto de las fuerzas que realizan los cables por el de uno solo. Llevamos esta situación a un diagrama de sólido libre y lo referimos al sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) (Figura 2.13).



Figura 2.12

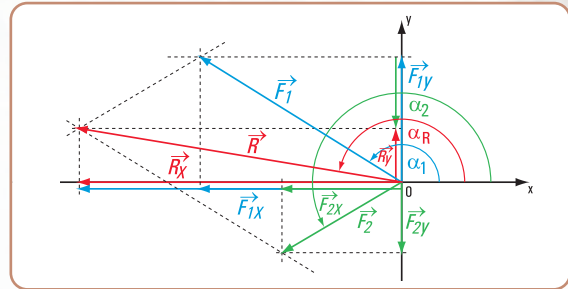


Figura 2.13. Diagrama de sólido libre

Proyectamos ambas fuerzas sobre los ejes x y y .

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} \end{cases}$$

Reemplazando a F_{1x} ; F_{1y} ; F_{2x} ; F_{2y} , en función de senos y cosenos.

$$\begin{cases} R \times \cos \alpha_R = F_1 \times \cos \alpha_1 + F_2 \times \cos \alpha_2 \\ R \times \sin \alpha_R = F_1 \times \sin \alpha_1 + F_2 \times \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Ambas expresiones matemáticas nos dan las proyecciones según x y según y respectivamente de la resultante \vec{R} en función de las proyecciones de sus componentes.

Estas expresiones las podemos generalizar para más de dos fuerzas.

Para n fuerzas

$$\begin{cases} R_x = R \times \cos \alpha_R \Rightarrow R \times \cos \alpha_R = \sum_{i=1}^n F_i \times \cos \alpha_i \\ R_y = R \times \sin \alpha_R \Rightarrow R \times \sin \alpha_R = \sum_{i=1}^n F_i \times \sin \alpha_i \end{cases}$$

Como R_x y R_y son las componentes rectangulares de \vec{R} , para hallar la intensidad de \vec{R} aplicamos una de las consecuencias del teorema de Pitágoras.

$$R = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

La dirección y sentido de \vec{R} la determinamos mediante el ángulo α_R .

$$\begin{aligned} \cos \alpha_R &= \frac{R_x}{R} \Rightarrow \alpha_R = \arccos \frac{R_x}{R} \\ \text{o bien} \\ \sin \alpha_R &= \frac{R_y}{R} \Rightarrow \alpha_R = \arcsin \frac{R_y}{R} \\ \text{o} \\ \operatorname{tg} \alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R = \arctg \frac{R_y}{R_x} \end{aligned}$$

Otra forma la podemos visualizar en la figura 2.14.



Figura 2.14.a

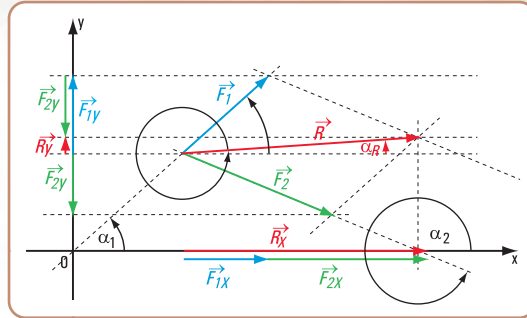


Figura 2.14.b Diagrama de sólido libre

Conclusión 1

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto se la define mediante dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes.

Caso 2

Consideramos un sistema de fuerzas concurrentes en un punto a . Tomamos momento con respecto a un punto b coplanar con las fuerzas. (Figura 2.15)

De acuerdo con el teorema de Varignon:

$$M_{\vec{R}}^b = \sum_{i=1}^m M_i^b$$

El momento de la resultante respecto de un punto b es igual a la sumatoria de los momentos de cada una de las fuerzas respecto del punto b .

Expresamos la resultante \vec{R} en función de dos componentes, según la dirección ab y según la perpendicular a la recta ab .

Nuevamente aplicamos Varignon a la resultante \vec{R} , y a sus componentes \vec{R}_1 y \vec{R}_2 .

$$M_{\vec{R}}^b = M_{\vec{R}_1}^b + M_{\vec{R}_2}^b$$

$$M_{\vec{R}}^b = 0 + M_{\vec{R}_2}^b$$

$$M_{\vec{R}}^b = M_{\vec{R}_2}^b \Rightarrow M_{\vec{R}}^b = R_2 \times d$$

$$\text{Si } M_{\vec{R}}^b = R_2 \times d \Rightarrow R_2 = \frac{M_{\vec{R}}^b}{d} \quad \text{Intensidad de } \vec{R}_2.$$

El segmento $\overline{a_1 r}$ coincide con la proyección R_x . Por r trazamos la normal al eje x y por el extremo de \vec{R}_2 la paralela a la recta ab , determinando el punto r_1 .

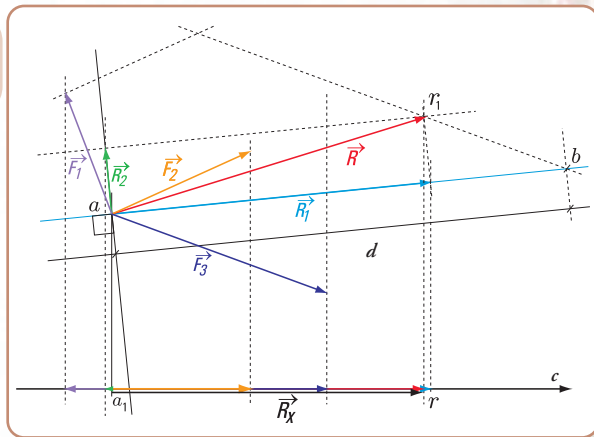


Figura 2.15

Conocida la intensidad de \vec{R}_2 y sabiendo que la dirección es perpendicular a la distancia d , y que el sentido lo da el $M_{\vec{R}}^b$, podemos trazar con origen en a el vector representativo de \vec{R}_2 . Mediante el principio del paralelogramo de fuerzas determinamos el vector \vec{R} , que representa a la resultante del sistema de fuerzas. Consideramos ahora el eje x ; proyectamos el sistema de fuerzas sobre dicho eje $R_x = \sum_{i=1}^n P_i \times \cos \alpha_i$

El vector \vec{ar}_1 es el representativo de la resultante \vec{R} . De este modo queda determinada la intensidad, dirección y sentido de \vec{R} .

Hasta ahora no hemos dado ninguna limitación al eje de proyección.

¿Podrá ser el eje normal o perpendicular a la recta determinada por el punto de concurrencia y el centro de momentos?

Supongamos que dicha recta de acción sea perpendicular al eje x (Figura 2.16).

$$\text{Pr oy}_x \vec{R} = \text{Pr oy}_x \vec{R}_2 + \text{Pr oy}_x \vec{R}_1$$

$$\text{Pr oy}_x \vec{R} = \text{Pr oy}_x \vec{R}_2 + 0$$

$$\text{Pr oy}_x \vec{R} = \text{Pr oy}_x \vec{R}_2$$

\vec{R}_2 en intensidad, dirección y sentido fue obtenida por la ecuación de momentos. Si consideramos de este modo al eje, nos faltaría un elemento para definir a la resultante.

Esto significa que el eje de proyección no puede ser perpendicular a la recta determinada por el centro de momentos y el punto de concurrencia de las fuerzas.

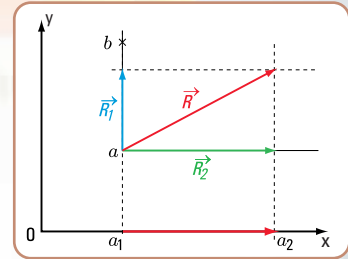


Figura 2.16

Conclusión 2

La resultante de un sistema de fuerzas queda definida mediante una ecuación de proyección sobre un eje y una ecuación de momentos respecto de un punto b .

El eje no puede ser perpendicular a la recta determinada por el punto de concurrencia de las fuerzas y el centro de momentos.

Caso 3

Dado el sistema de fuerzas concurrentes en a , tomamos momento de las fuerzas respecto de b y de c .

$$\begin{cases} M_R^b = \sum_{i=1}^n M_i^b \\ M_R^c = \sum_{i=1}^n M_i^c \end{cases}$$

Descomponemos a la resultante en dos direcciones: en una perpendicular a la recta ba (R_1), y otra según la recta ba (R_2) (Figura 2.17).

Por el teorema de Varignon y sabiendo que $R_2 \cdot d_2 = 0$, resulta:

$$M_R^b = R_1 \times d \Rightarrow R_1 = \frac{M_R^b}{d}$$

Si por el punto a trazamos el vector representativo de \vec{R} , con el sentido correspondiente, de acuerdo al signo del momento M_R^b , y por el extremo del mismo una paralela a la recta ba , sobre ésta debe encontrarse el extremo del vector representativo de \vec{R} .

Supongamos que descomponemos a \vec{R} en la dirección ca y en la perpendicular a la misma, entonces:

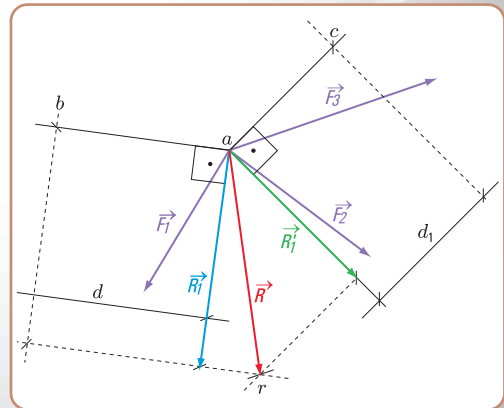


Figura 2.17

$$M_R^c = R'_1 \times d_1 \Rightarrow R'_1 = \frac{M_R^c}{d_1}$$

Trazamos por a el vector representativo a \vec{R}_1 y por su extremo una paralela a ca . El punto de intersección r de las paralelas a ab y a ca , define el vector \vec{ar} , que es el representativo de la resultante \vec{R} . Sobre dicha paralela debe estar el extremo del vector representativo de \vec{R} .

Conclusión 3

La resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto queda definida mediante dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos coplanares con las fuerzas.

Resolvemos los siguientes problemas

Problema 2.5

Un conducto de aire caliente cuelga del cielorraso.

Enunciado

En la escuela a la que concurríamos están reparando el sistema de calefacción por aire. Un tramo de un conducto de calefacción está colgado del cielorraso mediante tres cables de acero que lo sostienen de un mismo lugar (Figura 2.18).

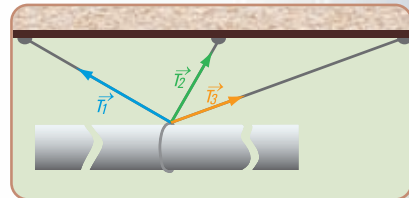


Figura 2.18. Tramo del conducto colgado

Supongamos que las fuerzas que realizan los cables son las siguientes:

$$T_1 = 200 \text{ N} \quad \alpha_1 = 150^\circ$$

$$T_2 = 150 \text{ N} \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

$$T_3 = 140 \text{ N} \quad \alpha_3 = 20^\circ$$

(No consideramos el peso propio del conducto)

Si se quiere reemplazar los tres cables por un único cable que cumpla el mismo efecto, ¿cuál es la fuerza que se debe realizar?

Desarrollo

1. Dibujamos el diagrama de sólido libre.

Hallamos la resultante del sistema de fuerzas en forma gráfica, al solo efecto de visualizar el método analítico. Podemos hacerlo a mano alzada (sin escala) (Figura 2.19).

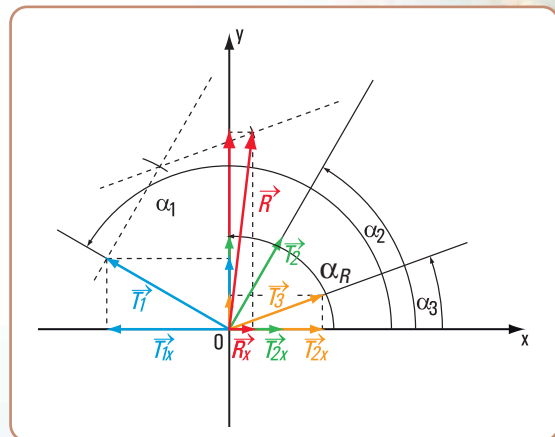


Figura 2.19

2. Resolvemos en forma analítica mediante dos ecuaciones de proyección sobre los ejes x e y .

Cálculo de la proyección de \vec{R} sobre el eje x

$$R_x = \sum_{i=1}^3 T_{ix} \Rightarrow R_x = T_{1x} + T_{2x} + T_{3x}$$

$$R_x = T_1 \times \cos \alpha_1 + T_2 \times \cos \alpha_2 + T_3 \times \cos \alpha_3$$

$$R_x = 200 \text{ N} \times \cos 150^\circ + 150 \text{ N} \times \cos 60^\circ + 140 \text{ N} \times \cos 20^\circ$$

$$R_x = 200 \text{ N} \times (-0,87) + 150 \text{ N} \times 0,5 + 140 \text{ N} \times 0,94$$

$$R_x = -174 \text{ N} + 75 \text{ N} + 131,6 \text{ N}$$

$$R_x = 32,6 \text{ N}$$

Cálculo de la proyección de \vec{R} sobre el eje y

$$R_y = \sum_{i=1}^3 T_{iy} \Rightarrow R_y = T_{1y} + T_{2y} + T_{3y}$$

$$R_y = T_1 \times \sin \alpha_1 + T_2 \times \sin \alpha_2 + T_3 \times \sin \alpha_3$$

$$R_y = 200 \text{ N} \times \sin 150^\circ + 150 \text{ N} \times \sin 60^\circ + 140 \text{ N} \times \sin 20^\circ$$

$$R_y = 200 \text{ N} \times 0,5 + 150 \text{ N} \times 0,87 + 140 \text{ N} \times 0,34$$

$$R_y = 100 \text{ N} + 130,5 \text{ N} + 47,6 \text{ N}$$

$$R_y = 278,1 \text{ N}$$

Cálculo de la intensidad de \vec{R}

$$R = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = +\sqrt{(32,6 \text{ N})^2 + (278,1 \text{ N})^2}$$

$$R = +\sqrt{1.062,76 + 77.339,61 \text{ N}}$$

$$R = +\sqrt{78.402,37 \text{ N}}$$

$$R = 280 \text{ N}$$

Cálculo de la recta de acción y del sentido de \vec{R}

$$\hat{\alpha}_R = \arctg \frac{R_y}{R_x}$$

$$\hat{\alpha}_R = \arctg \frac{278,1 \text{ N}}{32,6 \text{ N}} \Rightarrow \hat{\alpha}_R = 83,3^\circ$$

Respuesta

El conducto puede sostenerse mediante un único cable de acero con el mismo efecto que los tres dados. La fuerza resultante tiene una intensidad $R = 280 \text{ N}$, y la dirección y sentido están dados por $\alpha_R = 83,3^\circ$



Imagen 2.2.

La fogata de San Juan, 1943. Óleo sobre tela, 155 x 236,5 cm. Antonio Berni. Colección particular

Problema 2.6

Volvemos a la casa de la familia Montesión.



Un adorno cuelga del cielorraso de la habitación de la hija más pequeña.

Enunciado

Del cielorraso de la habitación de la hija menor de la familia Monteserín, de tres años de edad, cuelga un adorno sostenido por cuatro tanzas (Figura 2.20). Cada tanza ejerce fuerzas sobre el adorno.

$$F_1 = 12 \text{ N} \quad \alpha_1 = 30^\circ$$

$$F_2 = 15 \text{ N} \quad \alpha_2 = 100^\circ$$

$$F_3 = 20 \text{ N} \quad \alpha_3 = 120^\circ$$

$$F_4 = 18 \text{ N} \quad \alpha_4 = 60^\circ$$

Despreciamos el peso del adorno

¿Cuál es la fuerza que provoca el mismo efecto que las cuatro fuerzas dadas?

Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.21).

De acuerdo con el principio de transmisibilidad de las fuerzas, consideramos como punto de aplicación de cada una de las fuerzas, al centro de coordenadas o .

Para analizar, en forma aproximada, la dirección y sentido de la fuerza resultante \vec{R} utilizamos el método gráfico del polígono de fuerzas.

Resolvemos en forma analítica mediante dos ecuaciones de proyección sobre los ejes x e y .

Cálculo de la intensidad de \vec{R}_x

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$R_x = F_1 \times \cos \alpha_1 + F_2 \times \cos \alpha_2 + F_3 \times \cos \alpha_3 + F_4 \times \cos \alpha_4$$

$$R_x = 12 \text{ N} \times \cos 30^\circ + 15 \text{ N} \times \cos 100^\circ + 20 \text{ N} \times \cos 120^\circ + 18 \text{ N} \times \cos 60^\circ$$

$$R_x = 12 \text{ N} \times 0,87 + 15 \text{ N} \times (-0,17) + 20 \text{ N} \times (-0,5) + 18 \text{ N} \times 0,5$$

$$R_x = 10,44 \text{ N} + (-2,55 \text{ N}) + (-10 \text{ N}) + 9 \text{ N}$$

$$R_x = 6,89 \text{ N}$$

Cálculo de la intensidad de \vec{R}_y

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$R_y = 12 \text{ N} \times \sin 30^\circ + 15 \text{ N} \times \sin 100^\circ + 20 \text{ N} \times \sin 120^\circ + 18 \text{ N} \times \sin 60^\circ$$

$$R_y = 6 \text{ N} + 14,77 \text{ N} + 17,32 \text{ N} + 15,6 \text{ N}$$

$$R_y = 53,69 \text{ N}$$

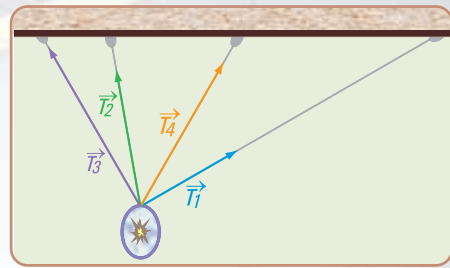


Figura 2.20

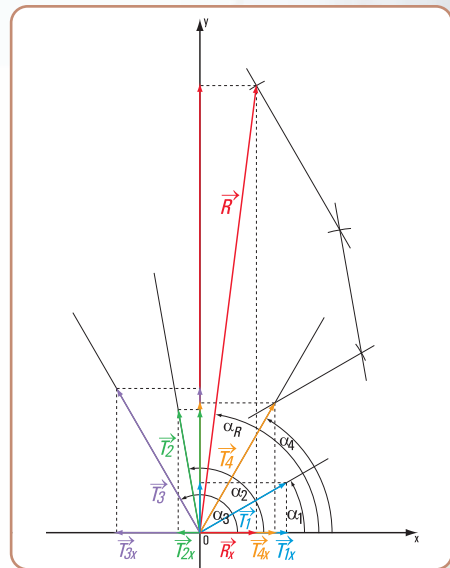


Figura 2.21. Diagrama de sólido libre y aplicación del polígono de fuerzas



Imagen 2.3. *La gallina ciega*, 1973, Antonio Berni. Óleo y materiales varios sobre madera, 160 x 210 cm. Colección particular

Cálculo de la intensidad de \vec{R}

$$R = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = +\sqrt{(6,89 \text{ N})^2 + (53,69 \text{ N})^2}$$

$$R = +\sqrt{47,47 + 2.882,62 \text{ N}}$$

$$R = 54,13 \text{ N}$$

Cálculo de la dirección y del sentido de \vec{R}

$$\alpha_R = \arctg \frac{R_y}{R_x}$$

$$\alpha_R = \arctg \frac{53,69 \text{ N}}{6,89 \text{ N}} \Rightarrow \alpha_R = 82,7^\circ$$

Respuesta

El adorno puede colgarse mediante un sola tanza con igual efecto que las cuatro dadas. La fuerza que se ejerce (resultante) tiene una intensidad $R = 54,13 \text{ N}$ y la dirección y el sentido están dados por $\alpha_R = 82,7^\circ$.

Problema 2.7

Un paseo por el puerto de San Nicolás.

Enunciado

Mientras paseamos por el puerto de San Nicolás (Provincia de Buenos Aires - Argentina), observamos que una caja cuelga de un camión grúa mediante un cable (Figura 2.22).

Creemos que:

1. la fuerza del cable es: $T_1 = 5.000 \text{ N}$ y la dirección y sentido están dados por $\alpha_1 = 110^\circ$
2. la fuerza en la cuerda para mantener a la caja en la posición deseada: $T_2 = 525 \text{ N}$ y su dirección y sentido $\alpha_2 = 300^\circ$
3. la caja pesa $P = 5.400 \text{ N}$

¿Cuál es la fuerza resultante de las tres fuerzas?

Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.23).

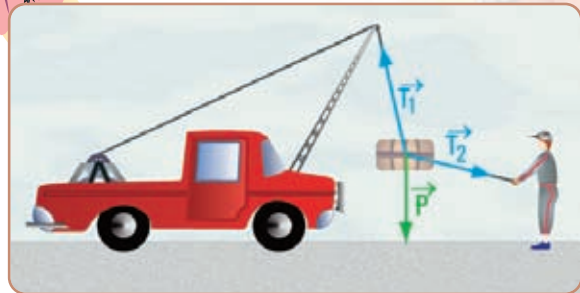


Figura 2.22

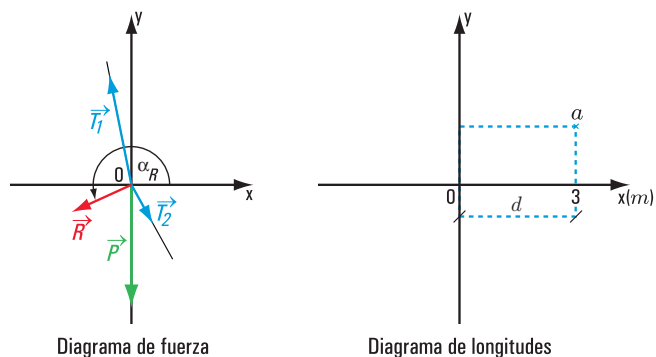


Figura 2.23

Resolvemos el cálculo de la resultante, mediante una ecuación de proyección y una de momento respecto de un punto.

$$R_x = T_{1x} + T_{2x} + P_x$$

$$R_x = T_1 \times \cos \alpha_1 + T_2 \times \cos \alpha_2 + P_x$$

$$R_x = 5.000 \text{ N} \times \cos 110^\circ + 525 \text{ N} \times \cos 300^\circ + 5.400 \text{ N} \times \cos 270^\circ$$

$$R_x = (-1.710) \text{ N} + 262,5 \text{ N} + 0 \text{ N}$$

$$R_x = (-1.447,5) \text{ N} \Rightarrow R_x = -1,4475 \text{ kN}$$

Tomamos momento respecto de *a* (usamos los ángulos con sentido positivo)

$$\sum M^a = -P \times d - T_2 \times \sin \alpha_2 \times d_2 + T_1 \times \sin \alpha_1 \times d_1$$

$$R_y \times d_R = (-5.400) \text{ N} \times 3 \text{ m} - 525 \text{ N} \times \sin 120^\circ \times 3 \text{ m} + 5.000 \text{ N} \times \sin 110^\circ \times 3 \text{ m}$$

$$R_y \times d_R = (-16.200) \text{ Nm} - 525 \text{ N} \times (+0,87) \times 3 \text{ m} + 5.000 \text{ N} \times 0,94 \times 3 \text{ m}$$

$$R_y \times d_R = (-16.200) \text{ Nm} - 1.370,25 \text{ Nm} + 14.100 \text{ Nm}$$

$$R_y \times d_R = -3.470,25 \text{ N} \Rightarrow R_y = -1.156,75 \text{ N} \Rightarrow R_y = -1,15675 \text{ kN}$$

Cálculo del módulo de \vec{R}

$$R = +\sqrt{(-1,15675 \text{ kN})^2 + (-1,4475 \text{ kN})^2}$$

$$R = \sqrt{1,3381 + 2,0953 \text{ kN}}$$

$$R = \sqrt{3,4334 \text{ kN}}$$

$$R = 1,8529 \text{ kN}$$

Cálculo de α_R :

$$\hat{\alpha}_R = \arctg \frac{R_y}{R_x}$$

$$\hat{\alpha}_R = \arctg \frac{-1,15675 \text{ N}}{-1,4475 \text{ N}} \Rightarrow \hat{\alpha}_R = \arctg 0,7991$$

$$\hat{\alpha}_R = 38,6^\circ \text{ valor obtenido por calculadora.}$$

Como R_x y R_y son negativos, el vector representativo de la resultante \vec{R} , está en el tercer cuadrante.

$$\hat{\alpha}_R = 180^\circ + 38,6^\circ$$

$$\hat{\alpha}_R = 218,6^\circ$$

Respuesta

El módulo de \vec{R} es $R = 1,8529 \text{ kN}$ y la dirección y sentido están dados por: $\hat{\alpha}_R = 218,6^\circ$.



Imagen 2.4
La vela verde de Paul Signac.
Museo de Orsay - París



Imagen 2.5. *Las vacaciones de Juanito*, 1972.
Antonio Berni. Pintura acrílica

2.2.- Equilibrio de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas está en equilibrio estático si la fuerza resultante de todas esas fuerzas es nula.

Si referimos el sistema de fuerzas a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) , entonces podemos expresar que:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{ix} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones matemáticas son las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de fuerzas concurrentes en el plano esté en equilibrio.

Analizamos el equilibrio en forma gráfica. Para ello, utilizamos el polígono de fuerzas y observamos que, si el sistema está en equilibrio el polígono de fuerzas es cerrado.

¿Cómo trazamos el polígono de fuerzas?

Para trazar el polígono de fuerzas seguimos el siguiente proceso:

1. establecemos un orden para considerar a las fuerzas;
2. a partir de un punto dibujamos, siguiendo el orden establecido todas las fuerzas, una a continuación de la otra. El polígono que queda determinado es el denominado polígono de fuerzas.

Se presentan dos casos

Caso I

Si el extremo de la última fuerza coincide con el origen de la primera, entonces el polígono de fuerzas es cerrado; la resultante es nula y el cuerpo está en equilibrio.

Caso II

Si el extremo de la última fuerza no coincide con el origen de la primera fuerza, entonces el polígono de fuerzas es abierto; la resultante no es nula y el cuerpo no está en equilibrio.

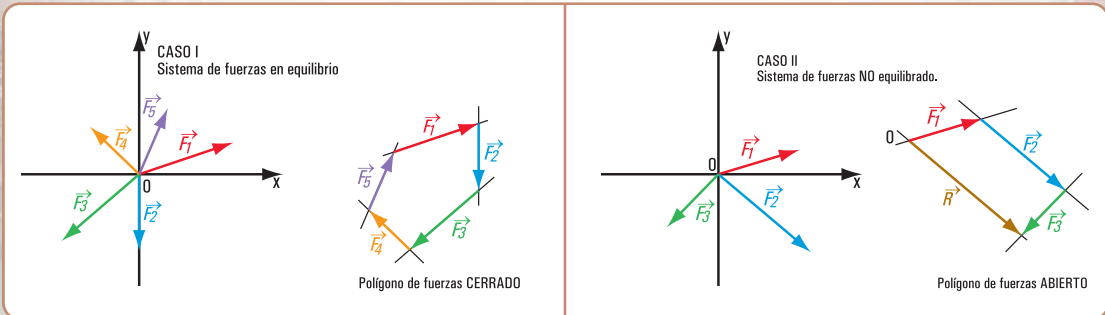


Figura 2.24. Polígono de fuerzas cerrado

Figura 2.25. Polígono de fuerzas abierto

2.2.1. Los problemas del equilibrio de fuerzas concurrentes: una forma de resolverlos

Existen problemas referidos a situaciones reales que pueden expresarse como problemas relativos al equilibrio de un cuerpo rígido.

Para resolverlos, es decir para encontrar la/s solución/es al planteo propuesto, podemos trabajar en forma analítica o bien en forma gráfica o con ambas formas en simultáneo.

Nosotros tomamos la decisión de utilizar la forma analítica y el gráfico lo usamos sólo como ayuda para una mejor visualización del problema.

Los gráficos son:

1. dibujo representativo de la situación real;
2. dibujo de una partícula significativa del cuerpo con todas las fuerzas aplicadas al mismo (diagrama de sólido libre).

Problema N ° 2.8



El carguero Don Tito está operando en el puerto de la ciudad de Rosario

Enunciado

El carguero Don Tito opera en el puerto de la ciudad de Rosario descargando y cargando contenedores de diferentes empresas. El carguero pesa 250 kN.

Para atracar en el puerto se requiere la ayuda de tres remolcadores: Don Juan, Forastero y Titán.

En la hoja de ruta de cada uno de los remolcadores se expresa que las fuerzas que realiza cada uno y que pueden mover a Don Tito son:

$\vec{F}_1 \rightarrow (F_1 = 100 \text{ kN} \quad \alpha_1 = 45^\circ)$ es la fuerza realizada por Don Juan.

$\vec{F}_2 \rightarrow (F_2 = 150 \text{ kN} \quad \alpha_2 = 0^\circ)$ fuerza que efectúa Forastero.

$\vec{F}_3 \rightarrow (F_3 = 100 \text{ kN} \quad \alpha_3 = 300^\circ)$ fuerza que hace Titán.

1. ¿Los remolcadores pueden mover al carguero?
2. ¿Cuál es la fuerza resultante?
3. Si el sistema de fuerzas no está en equilibrio, y deseamos que Don Tito no se mueva, ¿qué debemos hacer?

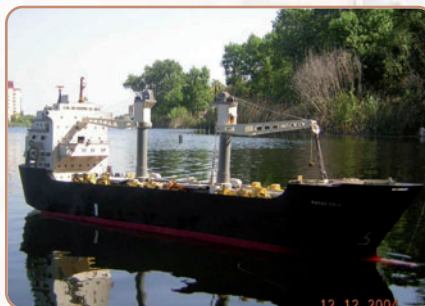


Imagen 2.6. El carguero Don Tito

Desarrollo

1. Consideramos una partícula del barco y dibujamos el diagrama del sólido libre referido a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) en el plano (Figura 2.26).

2. Si el sistema de fuerzas está en equilibrio debe verificarse que:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 \times \cos \alpha_1 + F_3 \times \cos \alpha_3 + F_2 \times \cos \alpha_2 + P \times \cos \alpha = 0$$

$$100 \text{ kN} \times \cos 45^\circ + 100 \text{ kN} \times \cos 300^\circ + 150 \text{ kN} \times \cos 0^\circ + 250 \text{ kN} \times \cos 270^\circ = 0$$

$$100 \text{ kN} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 100 \text{ kN} \times 0,5 + 150 \text{ kN} \times 1 + 0 = ?$$

$$71 \text{ kN} + 50 \text{ kN} + 150 \text{ kN} = 271 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \times \sin \alpha_1 + F_2 \times \sin \alpha_2 + F_3 \times \sin \alpha_3 + P \times \sin \alpha = 0$$

$$100 \text{ kN} \times \sin 45^\circ + 150 \text{ kN} \times \sin 0^\circ + 100 \text{ kN} \times \sin 300^\circ + 250 \text{ kN} \times \sin 270^\circ = ?$$

$$100 \text{ kN} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 150 \text{ kN} \times 0 + 100 \text{ kN} \times (-0,87) + 250 \text{ kN} \times (-1) = ?$$

$$71 \text{ kN} + 0 - 87 \text{ kN} - 250 \text{ kN} = -266 \text{ kN}$$

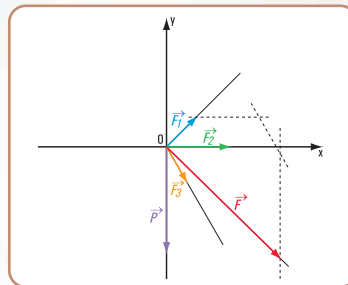


Figura 2.26. Diagrama de sólido libre

3. Cálculo de la fuerza \vec{F}
Intensidad de la fuerza \vec{F} , resultante de (F_x, F_y)

$$F_x = 271 \text{ kN}$$

$$F_y = (-266) \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = \sqrt{(271 \text{ kN})^2 + (-266 \text{ kN})^2}$$

$$F = \sqrt{73.441 \text{ kN}^2 + 70.756 \text{ kN}^2}$$

$$F = \sqrt{144.197 \text{ kN}^2}$$

$$F = 380 \text{ kN}$$

Dirección y sentido de la fuerza \vec{F} .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{(-266) \text{ kN}}{271 \text{ kN}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = (-0,9815)$$

$$\hat{\alpha} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-0,9815)$$

$$\hat{\alpha} = -44,46^\circ$$



(valor obtenido en la calculadora).

Como F_y es negativa y F_x es positiva, entonces el valor real $\hat{\alpha}_{\text{real}} = 315,54^\circ$.



Imagen 2.7. Puerto, 1926. Antonio Berni. Óleo sobre cartón, 60,5 x 78 cm. Colección particular

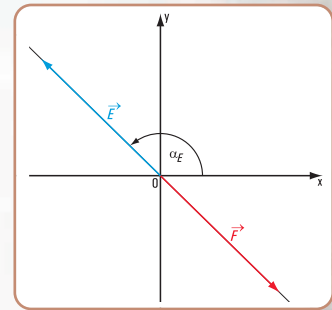


Figura 2.27

Respuesta

El sistema de fuerzas no está en equilibrio estático ya que las componentes F_x y F_y de la fuerza resultante son distintas de cero. Los remolcadores pueden mover a Don Tito.

Don Tito se mueve en una dirección cuyo ángulo con la horizontal es $\alpha = 315,54^\circ$ y la intensidad de la fuerza que lo empuja es $F = 380 \text{ kN}$.

La equilibrante tiene intensidad $E = 380 \text{ kN}$ y la dirección y sentido $\alpha_E = 180^\circ - 44,46^\circ \Rightarrow \alpha_E = 135,54^\circ$ (Figura 2.27).

2.3.- Resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes

Método gráfico

En el ítem 2.1 de este capítulo hemos desarrollado el método gráfico para determinar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto: el denominado polígono de fuerzas.

En el caso de un sistema de fuerzas no concurrentes no alcanza con el trazado de un polígono de fuerzas, ya que no se conoce ningún punto de la recta de acción de la resultante.

Sabemos que la intersección de dos rectas en un plano es un punto propio o bien uno impropio (rectas paralelas). Por este motivo un primer procedimiento para determinar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes, por ejemplo el sistema $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, es el que se visualiza en la figura 2.28.

1. Se determina la resultante (R_1) de dos fuerzas cualesquiera \vec{F}_1, \vec{F}_2 , mediante el método del paralelogramo. El punto de intersección de \vec{R}_1 con \vec{F}_3 es a .

2. Se halla la resultante de \vec{R}_1 con \vec{F}_3 ; se obtiene R_2 . El punto de intersección de \vec{R}_2 con \vec{F}_4 es b .

3. Se determina la resultante de \vec{R}_2 con \vec{F}_4 , \vec{R} es la resultante del sistema $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$.

Este procedimiento no resulta cómodo para un número más grande de fuerzas.
El denominado *polígono funicular* es el que nos resuelve el problema.

Polígono funicular

Dado el sistema de fuerzas no concurrentes (Figura 2.29), cuyos módulos son:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \text{ N} \\ F_2 &= 0,5 \text{ N} \\ F_3 &= 2 \text{ N} \\ F_4 &= 1,8 \text{ N} \end{aligned}$$

describimos otro **procedimiento gráfico** para la determinación de la resultante del sistema.

2.3.1. Procedimiento para la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes mediante el denominado *polígono funicular*

Método gráfico

1. Trazamos el polígono de fuerzas de modo que los vectores representativos de las fuerzas se consideran una continuación del otro (Figura 2.30).
2. Elegimos un punto o arbitrario. A este punto se lo denomina **polo del polígono funicular**.
3. Proyectamos desde el mismo el origen y el extremo de los vectores representativos de cada una de las fuerzas. Se obtienen los segmentos \overline{ao} , \overline{bo} , \overline{co} , \overline{do} , \overline{eo} . Estos segmentos reciben el nombre de rayos polares y se los suele indicar con números: 1, 2, 3, 4, 5.

4. Por un punto cualquiera del plano trazamos una paralela al rayo polar 1, la llamamos I hasta la intersección m con la recta de acción de F_1 .
Por el punto m trazamos una paralela II al rayo 2 hasta la intersección n con F_2 , y así sucesivamente hasta la última paralela.
5. Las rectas I, II, III, ... se denominan lados del polígono funicular.

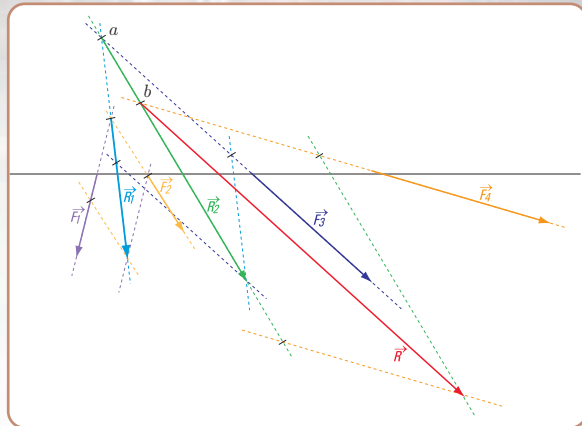


Figura 2.28

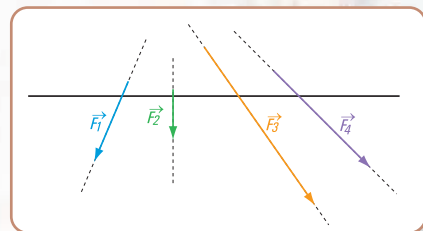


Figura 2.29

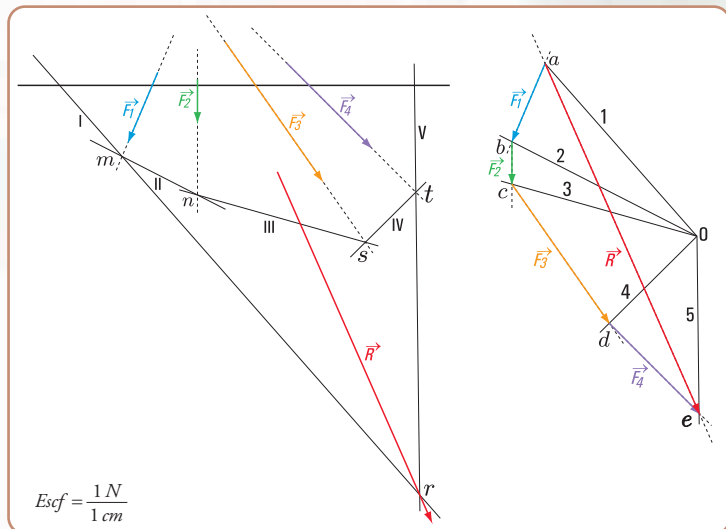


Figura 2.30

- La intersección del primer lado del polígono funicular con el último lado es un punto de la recta de acción de la resultante del sistema.
- El módulo de \vec{R} , la dirección y el sentido están dados por el vector representativo \vec{ae} en el polígono de fuerzas.

El polígono funicular nos permite determinar un punto de la recta de acción de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes.

Resultados obtenidos en forma gráfica

$$\alpha_R = 290^\circ$$

$$R = \frac{1\text{ N}}{1\text{ cm}} \times 5\text{ cm}$$

$$R = 5\text{ N}$$

Método analítico

Podemos determinar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes, en forma analítica, mediante tres grupos de sistemas de ecuaciones.

- La resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes queda definida mediante dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera del plano.

$$\begin{cases} R_x = \sum \text{Proy}_x \vec{F} \Rightarrow R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \\ R_y = \sum \text{Proy}_y \vec{F} \Rightarrow R_y = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i \\ M_R^0 = \sum_{i=1}^n M_i^0 \end{cases}$$

- La resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes queda definida mediante dos ecuaciones de momentos respecto a dos puntos cualesquiera del plano y una ecuación de proyección sobre un eje. Este eje no puede ser perpendicular a la recta determinada por los puntos con respecto a los cuales se toman momentos.

$$\begin{cases} M_R^a = \sum_{i=1}^n M_i^a \\ M_R^b = \sum_{i=1}^n M_i^b \\ R_x = \sum_{i=1}^n \text{Proy}_x F_i \Rightarrow R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \end{cases}$$

- La resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes queda definida mediante tres ecuaciones de momento respecto a tres puntos cualesquiera, siempre que dichos puntos no pertenezcan a una misma recta.

$$\begin{cases} M_R^a = \sum_{i=1}^n M_i^a \\ M_R^b = \sum_{i=1}^n M_i^b \\ M_R^c = \sum_{i=1}^n M_i^c \end{cases}$$

Resolvemos los siguientes ejercicios

Ejercicio N° 2.1

Hallar la resultante del siguiente sistema de fuerzas. Utilizar el método analítico.

Datos

$$F_1 = 1 \text{ N} \quad \hat{\alpha}_1 = 250^\circ$$

$$F_2 = 0,5 \text{ N} \quad \hat{\alpha}_2 = 255^\circ$$

$$F_3 = 2 \text{ N} \quad \hat{\alpha}_3 = 290^\circ$$

$$F_4 = 1,5 \text{ N} \quad \hat{\alpha}_4 = 315^\circ$$

Desarrollo

Aplicamos el primer grupo de los sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i \\ M_R^0 = \sum_{i=1}^n M_i^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + F_4 \cos \alpha_4 \\ R_y = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + F_4 \sin \alpha_4 \\ M_R^0 = F_1 \sin \alpha_1 \times d_1 + F_2 \sin \alpha_2 \times d_2 + F_3 \sin \alpha_3 \times d_3 + F_4 \sin \alpha_4 \times d_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = 1 \text{ N} \cos 250^\circ + 0,5 \text{ N} \cos 255^\circ + 2 \text{ N} \cos 290^\circ + 1,5 \text{ N} \cos 315^\circ \\ R_y = 1 \text{ N} \sin 250^\circ + 0,5 \text{ N} \sin 255^\circ + 2 \text{ N} \sin 290^\circ + 1,5 \text{ N} \sin 315^\circ \\ M_R^0 = 1 \text{ N} \sin 70^\circ \times 3 \text{ cm} + 0,5 \text{ N} \sin 75^\circ \times 7 \text{ cm} + 2 \text{ N} \sin 70^\circ \times 10 \text{ cm} + 1,5 \text{ N} \sin 45^\circ \times 13 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = -0,34 \text{ N} + (-0,13) \text{ N} + 0,68 \text{ N} + 1,06 \text{ N} \Rightarrow R_x = 1,27 \text{ N} \\ R_y = -0,94 \text{ N} + (-0,49) \text{ N} - 1,88 \text{ N} + (-1,06) \text{ N} \Rightarrow R_y = -4,37 \text{ N} \\ M_R^0 = +2,82 \text{ N cm} + 3,38 \text{ N cm} + 18,8 \text{ N cm} + 13,79 \text{ N cm} \\ M_R^0 = 38,79 \text{ N cm} \quad (\text{con este valor se halla la distancia desde } \vec{R} \text{ a } o) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(1,27 \text{ N})^2 + (-4,37 \text{ N})^2}$$

$$R = \sqrt{1,61 + 19,1 \text{ N}}$$

$$R = \sqrt{20,71 \text{ N}}$$

$$R = 4,55 \text{ N} \quad (\text{módulo de } \vec{R})$$

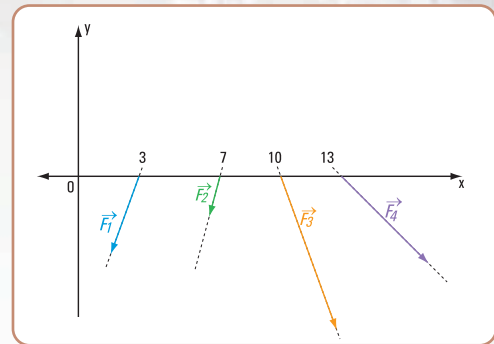


Figura 2.31



Imagen 2.8. *Escuelita rural*, 1956. Antonio Berni. Pigmento al agua y albúmina sobre tela, 183 x 305 cm. Colección particular

$$\hat{\alpha}_R = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$

$$\hat{\alpha}_R = \arctan \left(\frac{-4,37 \text{ N}}{1,27 \text{ N}} \right)$$

$$\hat{\alpha}_R = -73,80^\circ \text{ (Valor dado por la calculadora)}$$

Como R_y es negativa y R_x positiva,
el ángulo α_R ϵ al 4º cuadrante

$$\hat{\alpha}_R = 360^\circ - 73,80^\circ$$

$$\hat{\alpha}_R = 286,20^\circ$$



Imagen 2.9. *Juanito Laguna aprende a leer*, 1961, Antonio Berni, óleo y materiales varios sobre arpillera, 210 x 300 cm. Colección Museo Nacional de Bellas Artes

Si comparamos los resultados obtenidos en forma gráfica (**Figura 2.32**) y en forma analítica, observamos que prácticamente son iguales, tanto la intensidad de \vec{R} , como el valor del ángulo $\hat{\alpha}_R$.

Respuesta

En forma gráfica	$R = 4,6 \text{ N}$	$\alpha_R = 287^\circ$
En forma analítica	$R = 4,55 \text{ N}$	$\alpha_R = 286,20^\circ$

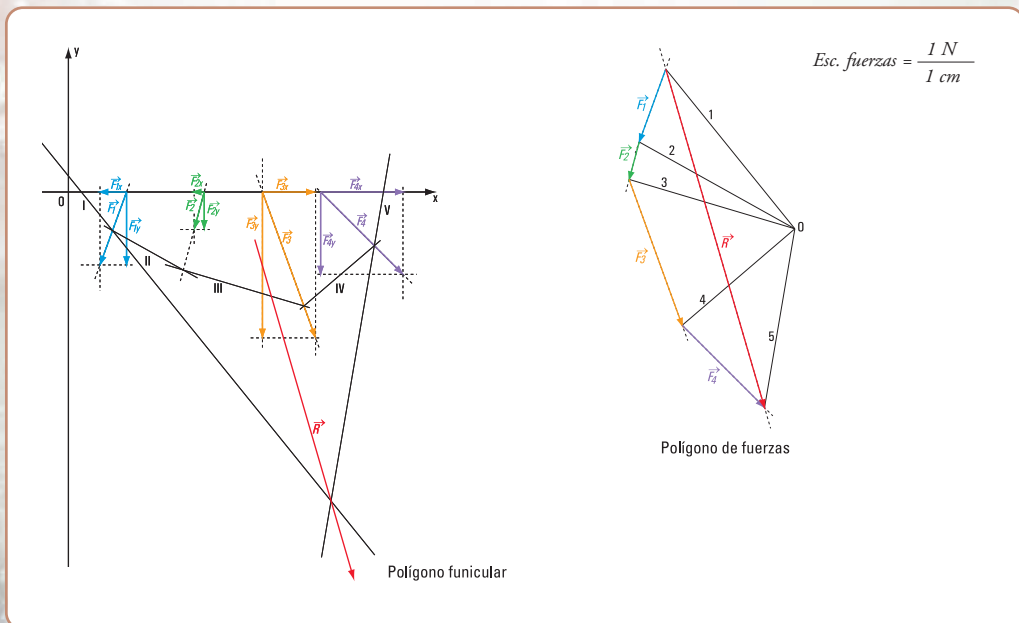


Figura 2.32

Ejercicio N° 2.2

Dado el siguiente sistema de fuerzas no concurrentes (Figura 2.33), hallar su resultante en forma analítica.

DATOS

$$\begin{array}{lll} F_1 = 2 \text{ N} & \hat{\alpha}_1 = 30^\circ & d_1 = 4 \text{ cm} \\ F_2 = 4 \text{ N} & \hat{\alpha}_2 = 90^\circ & d_2 = 2 \text{ cm} \\ F_3 = 6 \text{ N} & \hat{\alpha}_3 = 180^\circ & d_3 = 6 \text{ cm} \end{array}$$

Desarrollo

Aplicamos el segundo grupo de los sistemas de ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_R^o = \sum_{i=1}^n M_i^o \Rightarrow M_R^o = -F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 4 \text{ cm} - F_3 \cdot 6 \text{ cm} \\ M_R^a = \sum_{i=1}^n M_i^a \Rightarrow M_R^a = -F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 7 \text{ cm} + F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 2 \text{ cm} - F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot 3 \text{ cm} - F_3 \cdot 8 \text{ cm} \\ R_x = \sum_{i=1}^n \text{Proy}_x F_i \Rightarrow R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos \alpha_i \Rightarrow R_x = F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 \end{array} \right.$$

$$M_R^o = -2 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 \text{ cm} - 6 \text{ N} \cdot 6 \text{ cm}$$

$$M_R^o = -4 \text{ N cm} - 36 \text{ N cm}$$

$$M_R^o = -40 \text{ N cm} \quad (1)$$

$$M_R^a = -2 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \cdot 7 \text{ cm} - 4 \text{ N} \cdot \sin 90^\circ \cdot 3 \text{ cm} - 6 \text{ N} \cdot 8 \text{ cm} + 2 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 \text{ cm}$$

$$M_R^a = -7 \text{ N cm} - 12 \text{ N cm} - 48 \text{ N cm} + 3,48 \text{ N cm}$$

$$M_R^a = -63,52 \text{ N cm} \quad (2)$$

$$R_x = 2 \text{ N} \cos 30^\circ + 4 \text{ N} \cos 90^\circ + 6 \text{ N} \cos 180^\circ$$

$$R_x = 1,74 \text{ N} + 0 + (-6) \text{ N}$$

$$R_x = -4,26 \text{ N} \quad (3)$$

Consideramos una recta perpendicular al eje x por el punto a y por el punto o .

Suponemos aplicada la resultante en un punto de su recta de acción ubicado sobre la perpendicular al eje x trazada por el punto o .

Calculamos M_R^o

$$M_R^o = R_x \cdot d_{ly} \Rightarrow d_{ly} = \frac{|M_R^o|}{|R_x|}, \text{ siendo } d_{ly} \text{ la distancia de la componente } R_x \text{ al punto } o$$

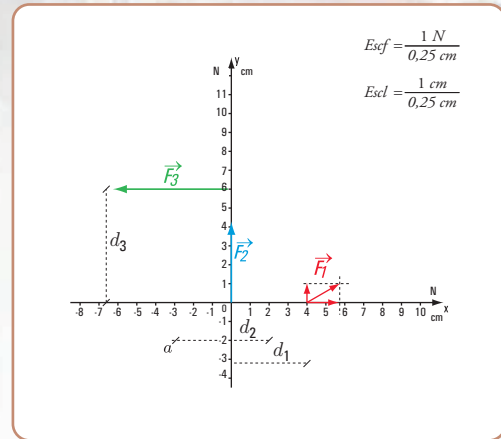


Figura 2.33

$$d_{1y} = \frac{40 \text{ Ncm}}{4,26 \text{ N}}$$

$$d_{1y} = 9,4 \text{ cm}$$

Suponemos aplicada la resultante en un punto de su recta de acción ubicado sobre la perpendicular al eje x trazada por el punto a .

Calculamos M_R^a

$$M_R^a = R_x \cdot d_{2y} \Rightarrow d_{2y} = \left| \frac{M_R^a}{R_x} \right|, \text{ siendo } d_{2y} \text{ la distancia de la componente } R_x \text{ al punto } a$$

$$d_{2y} = \frac{63,52 \text{ Ncm}}{4,26 \text{ N}}$$

$$d_{2y} = 14,91 \text{ cm}$$

Sobre la perpendicular al eje x trazada por el punto o se lleva, en la escala correspondiente el valor de $d_{1y} = 9,4 \text{ cm}$ de modo que el signo del momento coincida con el de M_R^o .

En forma similar, se traza la perpendicular al eje x por el punto a y, sobre ella se considera el valor de $d_{2y} = 14,91 \text{ cm}$, en la escala que corresponda, con la condición que se mantenga el signo del momento M_R^a .

En ambos casos los momentos tienen signo negativo.

Determinación del ángulo $\hat{\alpha}_R$

$$\text{tg } \alpha_R = \frac{3,5 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} \Rightarrow \hat{\alpha}_R = \text{arc tg } 1,17$$

$$\hat{\alpha}_R = 49,48^\circ$$

$$\hat{\alpha}_R = 180^\circ - 49,48^\circ$$

$$\hat{\alpha}_R = 130,52^\circ$$

Determinación del módulo de R

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{|R|} \Rightarrow |R| = \frac{4,26 \text{ N}}{0,65}$$

$$\Rightarrow |R| = 6,55 \text{ N}$$

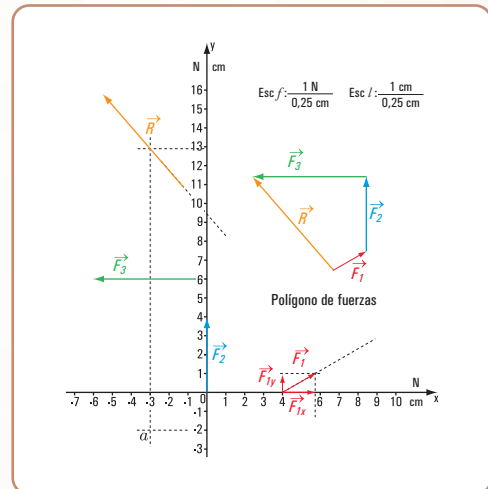


Figura 2.34. Determinación de la resultante del sistema de fuerzas no concurrente. Método gráfico - numérico

Comparamos los resultados con el método gráfico - numérico

Si comparamos los resultados obtenidos por el método analítico y el gráfico observamos que la diferencia es admisible.

Método analítico	$R \approx 6,55 \text{ N}$	$\alpha_R \approx 130,52^\circ$
Método gráfico -numérico	$R \approx 6,5 \text{ N}$	$\alpha_R \approx 132^\circ$

Resolvemos el siguiente problema

Problema N ° 2.9

Una visita a una fábrica de plásticos



Enunciado

Visitamos la fábrica de artículos de plástico “Plastimar” que fabrica entre otros productos, carritos para trasladar mercadería del almacén de comestible. Para saber la resistencia del carro se somete al mismo a un sistema de fuerzas (Figura 2.35) con las siguientes características:

$$\begin{aligned} F_1 &= 100 \text{ N} & \alpha_1 &= 0^\circ \\ F_2 &= 200 \text{ N} & \alpha_2 &= 270^\circ \\ F_3 &= 150 \text{ N} & \alpha_3 &= 210^\circ \\ F_4 &= 150 \text{ N} & \alpha_4 &= 180^\circ \end{aligned}$$

El encargado del sector desea averiguar el valor de la fuerza que provoca el mismo efecto que la totalidad del sistema. Nosotros lo ayudamos (Figura 2.35).

Desarrollo

El sistema es un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano. Representamos dicho sistema en coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) (Figura 2.36 a).

1. Cálculo de la intensidad, sentido y dirección de R.

Aplicamos dos ecuaciones sobre x y sobre y.

$$R_x = \sum_{i=1}^4 F_i \times \cos \alpha_i$$

$$R_x = 100 \text{ N} \times \cos 0^\circ + 200 \text{ N} \times \cos 270^\circ + 150 \text{ N} \times \cos 210^\circ + 150 \text{ N} \times \cos 180^\circ$$

$$R_x = 100 \text{ N} + 0 \text{ N} + 150 \text{ N} \times (-0,87) + 150 \text{ N} \times (-1)$$

$$R_x = -180,5 \text{ N}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 F_i \times \sin \alpha_i$$

$$R_y = 100 \text{ N} \times \sin 0^\circ + 200 \text{ N} \times \sin 270^\circ + 150 \text{ N} \times \sin 210^\circ + 150 \text{ N} \times \sin 180^\circ$$

$$R_y = 0 + (-200 \text{ N}) + 150 \text{ N} \times (-0,5) + 0$$

$$R_y = -200 \text{ N} - 75 \text{ N} + 0$$

$$R_y = -275 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{(-180,5)^2 + (-275)^2} \text{ N}$$

$$R = \sqrt{32.580,25 + 75.625}$$

$$R = 329 \text{ N}$$



Imagen 2.10. Juanito Laguna going to the factory, 1977. Antonio Berni. Materiales vivos, 180 x 120 cm. Colección Aníbal Jozanni

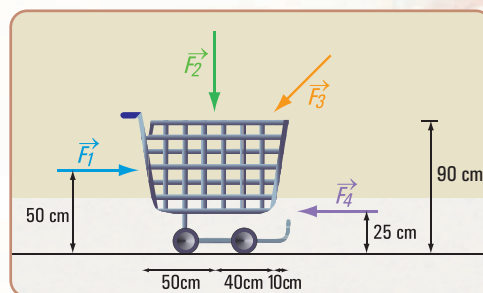


Figura 2.35

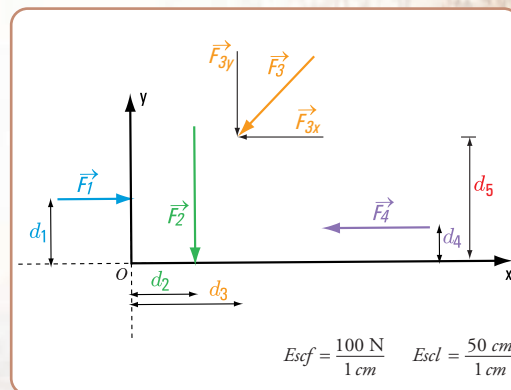


Figura 2.36 a

$$\hat{\alpha}_R = \arctan \frac{-275 \text{ N}}{-180,5 \text{ N}}$$

$$\hat{\alpha}_R = 56,72^\circ$$

Dado que las componentes en x e y son negativas el real valor del ángulo es:

$$\hat{\alpha}_R = 180^\circ + 56,72^\circ$$

$$\hat{\alpha}_R = 236,72^\circ$$

2. Determinación de un punto por donde pasa la recta de acción de la resultante

Consideramos el momento del sistema de fuerzas y el de la resultante respecto del punto o .

$$M_R^o = M_{F_1}^o + M_{F_2}^o + M_{F_3}^o + M_{F_4}^o$$

$$R \times d = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_{3x} \cdot d_5 + F_{3y} \cdot d_3 + F_4 \cdot d_4$$

$$R_y \times d_x = 100 \text{ N} \times 50 \text{ cm} + 200 \text{ N} \times 50 \text{ cm} - 150 \text{ N} \times |\cos 210^\circ| \times 90 \text{ cm} + 150 \text{ N} \times |\sin 210^\circ| \times 90 \text{ cm} - 150 \text{ N} \cdot 25 \text{ cm}$$

$$R_y \times d_x = 5.000 \text{ Ncm} + 10.000 \text{ Ncm} - 11.745 \text{ Ncm} + 6.750 \text{ Ncm} - 3.750 \text{ Ncm}$$

$$R_y \times d_x = 6.255 \text{ Ncm}$$

$$d_x = \frac{6.255 \text{ Ncm}}{275 \text{ N}}$$

$$d_x = 22,75 \text{ cm}$$

$$d = \frac{6.255 \text{ Ncm}}{329 \text{ N}} \Rightarrow d = 19,01 \text{ cm}$$

Respuesta

La intensidad de la resultante es $R = 329 \text{ N}$.

La dirección y sentido están dados por $\alpha_R = 236^\circ,72$.

Un punto perteneciente a la resultante es $r \equiv (22,75 ; 0)$.

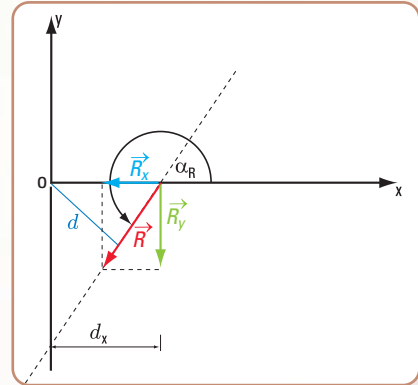


Figura 2.36 b

2.4. Equilibrio de sistemas de fuerzas no concurrentes

Condiciones analíticas, necesarias y suficientes. Ecuaciones de equilibrio

Una camioneta de la fábrica *Plastimar* que transporta mercadería lleva en la carrocería posterior cuatro cajones. El peso de la camioneta descargada es de $P = 150 \text{ N}$ y el de los cajones:

Cajón 1 $\rightarrow P_1 = 30 \text{ N}$

Cajón 2 $\rightarrow P_2 = 30 \text{ N}$
 Cajón 3 $\rightarrow P_3 = 50 \text{ N}$
 Cajón 4 $\rightarrow P_4 = 50 \text{ N}$

El suelo ejerce sobre las ruedas, tanto delanteras como traseras, fuerzas externas reactivas. El sistema total, que está constituido por las fuerzas: peso de la camioneta y de los cajones (fuerzas externas activas) y las externas reactivas en las ruedas conforman un sistema en equilibrio (Figura 2.37 b).

En este caso resulta importante conocer la intensidad de las fuerzas reactivas, por ejemplo para saber si el pavimento resiste.

Para resolver este problema debemos conocer las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano esté en equilibrio.

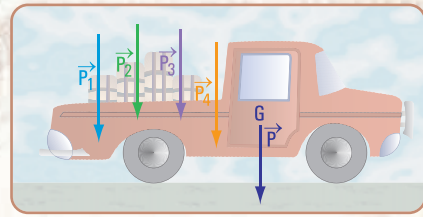


Figura 2.37 a

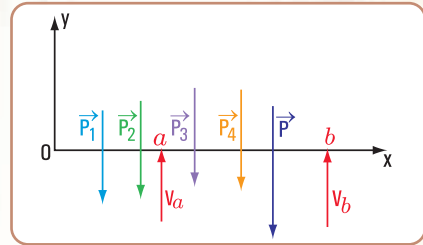


Figura 2.37 b. Sistema de fuerzas no concurrentes

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas no concurrentes esté en equilibrio, es que la resultante del sistema sea nula.

En forma gráfica, esto significa que, tanto el polígono de fuerzas como el polígono funicular son cerrados.

Expresada esta condición mediante ecuaciones matemáticas, se presentan las siguientes posibilidades:

1. Primera posibilidad

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \text{Proy}_y F = 0 \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_x F = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i^c = 0 \end{array} \right.$$

Justificación

1. De existir una resultante R , necesariamente su recta de acción debe ser perpendicular al eje x , y perpendicular al eje y . Evidentemente no puede ser la resultante perpendicular, simultáneamente, a dos rectas, entonces la resultante es nula.
2. Para que se cumpla la condición que establece que la proyección de las fuerzas sobre dos ejes sea igual a cero, sólo puede darse si el sistema es un par o bien se encuentra en equilibrio.
3. Por la tercera ecuación, se descarta la posibilidad de que sea un par, ya que el momento de un par respecto de un punto cualquiera es constante y no puede ser nulo.

Conclusión

La condición analítica necesaria y suficiente que debe cumplir un sistema plano de fuerzas no concurrentes para que esté en equilibrio es que la sumatoria de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes x e y (no coincidentes ni paralelos) debe ser igual a cero y la sumatoria de los momentos de las fuerzas respecto de un punto cualquiera también debe ser nula.

2. Segunda posibilidad

También otra forma de expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de fuerzas no concurrentes es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_i^a = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i^b = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \end{array} \right. \quad \text{o}$$

Justificación

1. Si existe una resultante \vec{R} , el punto a debe pertenecer a la recta de acción de R , ya que el momento del sistema de fuerzas es igual al momento de su resultante.

Como $M_R^a = R \cdot d$ si $M_R = 0 \Rightarrow R = 0$, o bien $d = 0$, como $R \neq 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow a \in$ a la recta de acción de \vec{R} .

2. El sistema está en equilibrio y no es un par de fuerzas, ya que el momento de un par respecto de un punto cualquiera nunca es cero.

3. En forma similar sucede al tomar momento con respecto al punto b . Si $M^b = 0$ se debe cumplir que:

- la recta de acción de \vec{R} pasa por b ,
- el sistema está en equilibrio.

4. De cumplirse en forma simultánea las dos ecuaciones de momento igual a cero $M_i^a = 0$

$M_i^b = 0 \Rightarrow$ que los puntos a y b deben pertenecer a la recta de acción de \vec{R} ,

o bien el sistema debe estar en equilibrio.

5. Considerando nula la proyección de las fuerzas del sistema sobre un eje, entonces la recta de acción de la resultante es perpendicular al eje o bien el sistema está en equilibrio.

6. Si se cumplen simultáneamente las tres condiciones, descartando que el eje sea perpendicular a la recta ab , de existir resultante los puntos a y b deberán pertenecer a la recta de acción de \vec{R} (por lo indicado en el ítem 4, y por lo establecido en 5). Dicha recta de acción deberá ser perpendicular al eje.

Esto no es posible, ya que una fuerza no puede tener más que una sola recta de acción.

Por lo tanto, el sistema está en equilibrio.

Conclusión

Para que un sistema plano de fuerzas no concurrentes esté en equilibrio se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

- la proyección del sistema de fuerzas sobre un eje igual a cero;
- el momento del sistema de fuerzas respecto de un punto cualquiera, es igual a cero;
- el momento del sistema de fuerzas respecto de un punto es igual a cero.

3. Tercera posibilidad

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \text{Proy}_y F = 0 \\ \sum_{i=1}^n \text{Proy}_x F = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i^c = 0 \end{array} \right.$$

Para que un sistema plano de fuerzas no concurrentes esté en equilibrio se deben cumplir las siguientes ecuaciones: tres ecuaciones de momentos respecto de tres puntos no alineados, cada una igual a cero.

Justificación

Como hemos analizado en el caso anterior, si al tomar momentos del sistema de fuerzas con respecto a los puntos a y b , la sumatoria de los momentos resultan nulos en forma simultánea, se puede dar que:

- el sistema se encuentre en equilibrio;
- los puntos a y b pertenezcan a la recta de acción de la resultante, si ésta es 0.

Si en forma simultánea se plantea una tercera ecuación de momentos respecto

de un punto c igual a cero, la única posibilidad es que el sistema esté en equilibrio, ya que no puede darse que los puntos a , b y c pertenezcan a la recta de acción de la resultante.

Nota. Observamos que en los tres modos de definir un sistema de fuerzas no concurrentes en equilibrio, siempre una de las ecuaciones es de momento.

Cuadro síntesis

Ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes

$$1. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 & \text{Sumatoria de la proyecciones de las fuerzas sobre el eje } x \text{ es igual a cero.} \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 & \text{Sumatoria de la proyecciones de las fuerzas sobre el eje } y \text{ es igual a cero.} \\ \sum_{i=1}^n M_i^a = 0 & \text{Sumatoria de los momentos de las fuerzas respecto de un punto es igual a cero.} \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_i^a = 0 & \text{Sumatoria de los momentos de las fuerzas respecto de un punto es igual a cero.} \\ \sum_{i=1}^n M_i^b = 0 & \text{Sumatoria de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto es igual a cero.} \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad \text{o bien} \quad \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 & \text{Sumatoria de las proyecciones de las fuerzas con respecto a un eje es igual a cero.} \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_i^a = 0 & \text{Sumatoria de los momentos con respecto a tres puntos no alineados es igual a cero.} \\ \sum_{i=1}^n M_i^b = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_i^c = 0 \end{cases}$$

... y ahora el lector puede resolver el problema que hemos planteado al comienzo del ítem 2.4.

¡Cuidado!
Debes agregar datos



Aplicamos los casos anteriores al siguiente problema

Problema N° 2.10



En una acería, se fijan grúas a un muro...

Enunciado

En una acería donde se fabrican perfiles de acero, en la playa de acopio se tienen que instalar grúas fijas para cargar los perfiles en los camiones de transporte.

La máxima carga que tendrá que levantar cada una de las grúas es $P_1 = 380 \text{ kg}$, y el peso de las grúas es $P = 1.020 \text{ N}$.

La distancia máxima entre el centro de gravedad de la grúa y la sección de apoyo es de 3 m y la proyección horizontal de la grúa es de 8 m .

Se desea sujetar la grúa a la pared mediante una articulación y un balancín. Para dimensionar dichos vínculos se hace necesario conocer las componentes de las fuerzas reactivas en los apoyos (Figura 2.38 a).

Desarrollo

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 2.38 b).

En la articulación las componentes de la reacción son R_{ya} y R_{xa} ; y en el balancín R_{xb} .

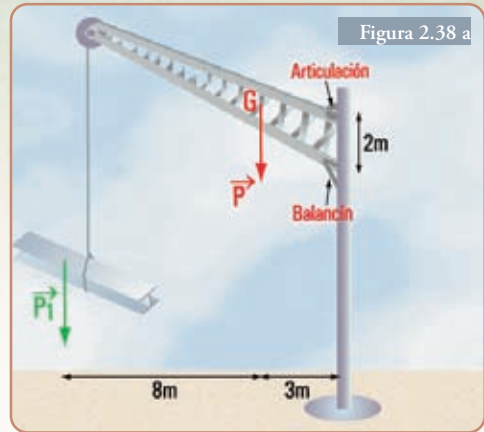


Figura 2.38 a

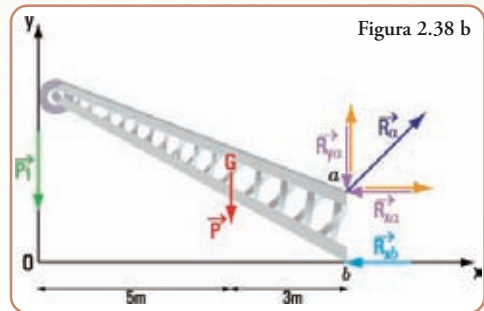


Figura 2.38 b

Una articulación restringe dos grados de libertad: la traslación en la dirección del eje de la pieza y la traslación en la dirección perpendicular al eje.

Por este motivo las componentes de la reacción tienen la dirección x e y

Un balancín restringe solamente un grado de libertad: en la dirección perpendicular al eje. Su reacción tiene dirección perpendicular al eje.

a. Cálculo de las intensidades, dirección y sentido de los componentes de las reacciones.

Como el sistema está en equilibrio se cumplen las condiciones de equilibrio.

$$\begin{cases} \sum M^a = 0 \Rightarrow -P_1 \times 8 \text{ m} - P \times 3 \text{ m} + R_{xb} \times 2 \text{ m} = 0 \\ \sum M^b = 0 \Rightarrow -P_1 \times 8 \text{ m} - P \times 3 \text{ m} - R_{xa} \times 2 \text{ m} = 0 \\ \sum P_y = 0 \Rightarrow -P_1 - P - R_{ya} = 0 \end{cases}$$

b. Cálculo de P_1 en newton (N)

$$P_1 = 380 \text{ kg} \Rightarrow P_1 = 380 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ (consideramos } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$P_1 = 3.800 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow P_1 = 3.800 \text{ N}$$

c. Cálculo de las componentes rectangulares de las reacciones en los apoyos de la grúa a la pared.

$$-3.800 \text{ N} \times 8 \text{ m} - 1.020 \text{ N} \times 3 \text{ m} + R_{x_b} \times 2 \text{ m} = 0$$

$$R_{x_b} \times 2 \text{ m} = 30.400 \text{ Nm} + 3.060 \text{ Nm}$$

$$R_{x_b} = \frac{33.460 \text{ Nm}}{2 \text{ m}}$$

$$R_{x_b} = 16.730 \text{ N}$$

$$-3.800 \text{ N} \times 8 \text{ m} - 1.020 \text{ N} \times 3 \text{ m} - R_{x_a} \times 2 \text{ m} = 0$$

$$R_{x_a} = \frac{33.460 \text{ Nm}}{-2 \text{ m}}$$

$$R_{x_a} = -16.730 \text{ N}$$

$$-3.800 \text{ N} - 1.020 \text{ N} - R_{y_a} = 0$$

$$-R_{y_a} = 3.800 \text{ N} + 1.020 \text{ N}$$

$$R_{y_a} = -4.820 \text{ N}$$

El signo negativo significa que los sentidos de las componentes de R_{y_a} y R_{x_a} son contrarios al adoptado: $R_{x_a} \rightarrow$; $R_{y_a} \uparrow$.

1. Cálculo de la intensidad de la reacción en a .

$$R_a = \sqrt{R_{x_a}^2 + R_{y_a}^2} \Rightarrow R_a = \sqrt{(16.730 \text{ N})^2 + (4.820 \text{ N})^2}$$

$$R_a = \sqrt{279.893 + 23.232} \Rightarrow R_a = 551 \text{ N}$$

2. Cálculo de la dirección y sentido de la reacción en a .

$$\hat{\alpha}_R = \arctg \frac{R_{y_a}}{R_{x_a}} \Rightarrow \hat{\alpha}_R = \arctg \frac{4.820}{16.730}$$

$$\hat{\alpha}_R = \arctg 0,29 \Rightarrow \hat{\alpha}_R = 16,17^\circ$$

Respuesta

Las componentes de las reacciones en a y en b son:

$$R_{x_a} = 16.730 \text{ N} \quad R_{x_b} = 16.730 \text{ N} \quad R_{y_a} = 4.820 \text{ N}$$

La fuerza reactiva en a es: $R_a = 551 \text{ N}$ y $\hat{\alpha}_R = 16,17^\circ$.



Imagen 2.11. Las plumas. Construcción de la Ciudad de las Ciencias y de las Artes. Valencia - España



Imagen 2.12
La Torre Eiffel - París (1889).
Alejandro Gustavo Eiffel. Una emblemática estructura de acero, exponente del Art Nouveau



Imagen 2.13. Metro de París.
Héctor Guimard (1900). Estructura de acero



Para pensar y resolver

Proponemos los siguientes ejercicios y problemas para pensar y resolver aplicando todos los conocimientos dados en el presente capítulo.

Al final del libro, encontraremos el desarrollo y la solución a cada actividad planteada.

Intente resolver cada uno, sin mirar su desarrollo y su resultado.

I.- Resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes

Ejercicio N° 2.3

Hallar la resultante del sistema de fuerzas no concurrentes (Figura 2.39) mediante el método analítico y verificar con el método gráfico.

Datos

$P_1 = 4 \text{ N}$	$\alpha_1 = 90^\circ$	$d_1 = 2 \text{ cm}$
$P_2 = 5 \text{ N}$	$\alpha_2 = 180^\circ$	$d_2 = 2 \text{ cm}$
$P_3 = 6 \text{ N}$	$\alpha_3 = 270^\circ$	$d_3 = 1 \text{ cm}$

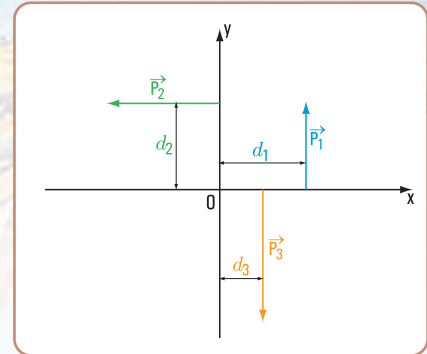


Figura 2.39

Ejercicio N° 2.4

Hallar la resultante del sistema de fuerzas no concurrentes (Figura 2.40) mediante el método analítico y verificar con el método gráfico.

Datos

$T_1 = 6 \text{ N}$	$\alpha_1 = 0^\circ$	$d_1 = 3 \text{ cm}$
$T_2 = 3 \text{ N}$	$\alpha_2 = 270^\circ$	$d_2 = 5 \text{ cm}$
$T_3 = 2 \text{ N}$	$\alpha_3 = 45^\circ$	$d_3 = 0 \text{ cm}$

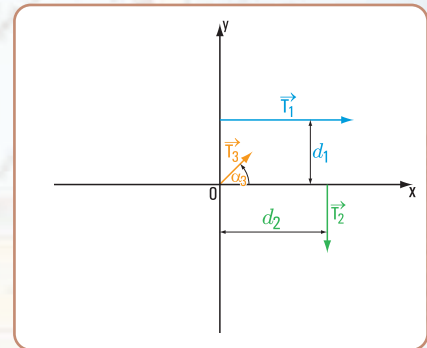


Figura 2.40

Ejercicio N° 2.5.

Hallar la resultante del sistema de fuerzas no concurrentes (Figura 2.41) mediante el método analítico y verificar con el método gráfico.

Datos

$S_1 = 2 \text{ N}$	$\alpha_1 = 30^\circ$	$d_1 = 2 \text{ cm}$	$d'_1 = 1 \text{ cm}$
$S_2 = 4 \text{ N}$	$\alpha_2 = 150^\circ$	$d_2 = 5 \text{ cm}$	$d'_2 = 3 \text{ cm}$
$S_3 = 6 \text{ N}$	$\alpha_3 = 180^\circ$	$d_3 = 0 \text{ cm}$	

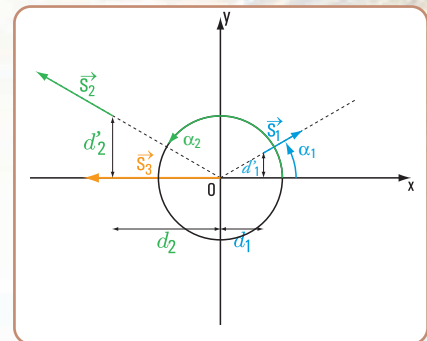


Figura 2.41

II.- Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes

Problema N° 2.11

Reacciones en los apoyos de una viga de acero

Enunciado

Un perfil de acero que apoya sobre dos columnas recibe cargas de otra viga (P_v) y de una columna P_c (Figura 2.42):

$$P_v = 60 \text{ k N} \quad P_c = 75 \text{ k N}$$

En los apoyos las reacciones son:

$$V_a, V_b \text{ y } H_a = 0$$

Se desprecia el peso propio del perfil. El sistema de todas las fuerzas está en equilibrio.

Hallar las fuerzas reactivas V_a, V_b .

Problema N° 2.12

Reacciones en los apoyos de una viga de madera

Enunciado

Una viga de madera apoya sobre dos muros de mampostería. Recibe una carga inclinada proveniente de una viga y otra carga con dirección perpendicular al eje que corresponde a la reacción de otra viga (Figura 2.43).

$$P_v = 50 \text{ k N} \quad P_y = 40 \text{ k N} \quad \alpha_1 = 30^\circ$$

Hallar las reacciones en los apoyos m y u

Problema N° 2.13

¿Qué longitud tiene una viga de un balcón?

Enunciado

Una viga de un balcón tiene el esquema de carga que se muestra en la figura 2.44.

$$P = 500 \text{ N} \quad V_t = 197,50 \text{ N}$$

$$P_1 = 140 \text{ N} \quad V_0 = 442,50 \text{ N}$$

¿Cuál debe ser la luz de la viga del balcón para que el sistema de fuerzas esté en equilibrio?

Problema N° 2.14

Una mina a cielo abierto...

Enunciado

Un carro que transporta mineral de una mina a cielo abierto se encuentra en reposo sobre unas vías que están en pendiente.

El peso del carro y el de la carga que transporta es $P_c = 20 \text{ k N}$. Para mantenerlo en la posición de reposo el carro está sujeto mediante un cable que ejerce una fuerza \vec{T} .

El ángulo de inclinación de las vías es $\alpha = 30^\circ$ (Figura 2.45).

¿Cuál es la fuerza \vec{T} en el cable?, y ¿cuáles son las fuerzas reactivas \vec{V}_S y \vec{V}_T ?

Nota. Consideramos al sistema de fuerzas como coplanares; el centro de gravedad coincide con la recta de acción de \vec{T} y despreciamos la fuerza de fricción entre las ruedas y el plano inclinado.

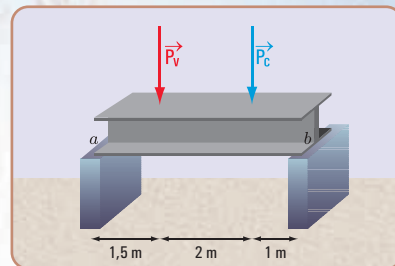


Figura 2.42

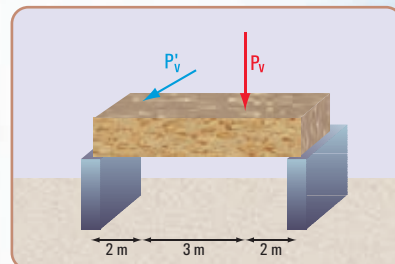


Figura 2.43

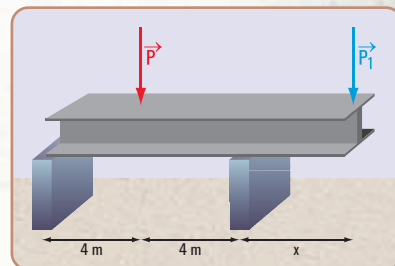


Figura 2.44

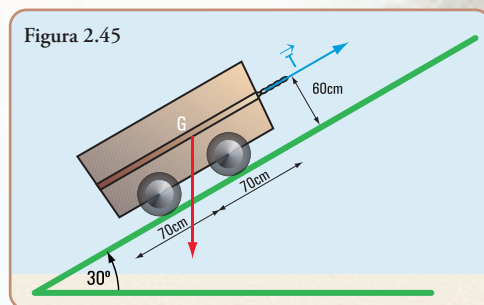


Imagen 2.14. Foto de una mina a cielo abierto



Imagen 2.15. Marquesina en la puerta de entrada del INET (Ciudad Autónoma de Bs. As.)

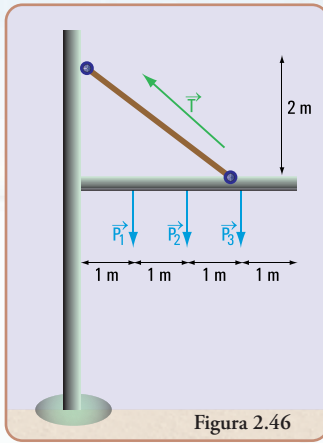


Figura 2.46

Problema N° 2.15

Se instala la marquesina de un edificio público

Enunciado

La marquesina que cubre la entrada de un edificio público está sostenida por un cable empotrado en un muro de hormigón armado. Se quiere colgar de la marquesina varios artefactos lumínicos.

El peso de la marquesina es $P = 75 \text{ k N}$.

Cada uno de los artefactos lumínicos pesa:

$$P_1 = 150 \text{ N} \quad P_2 = 150 \text{ N} \quad P_3 = 150 \text{ N}$$

La fuerza realizada por el cable es

$T = 120 \text{ k N}$ (Figura 2.46).

Hallar las fuerzas reactivas en el empotramiento de la marquesina en el muro.

III.- Problemas que integran el capítulo 1 y el 2

En los problemas que a continuación se plantean usamos nuestra imaginación al considerar, como escenarios vivientes, aquellos que algunos pintores expresaron en sus obras.

Los personajes salen de los cuadros y se transforman en protagonistas de una situación que bien puede ser de la vida cotidiana real.

Las pinturas que son objeto de nuestra imaginación son:

1. “La habitación de Vincent en Arlés” por Van Gogh, (1889); 56,5 x 74 cm, obra expuesta en el Museo de Orsay, París.
2. “Niños jugando”; tímpano cerámico de 11,10 x 3,90 m. Boceto: Primaldo Mónaco, 1959, ubicado en la estación Boedo de la línea E de Subterráneos. Buenos Aires.
3. “El café de noche” por Vincent van Gogh (1888); 72,4 x 92,4 cm, obra expuesta en la Art Gallery, Yale University.
4. “El puente de Langlois” por Van Gogh (1888), 54 x 65 m, obra expuesta en el Museo Kröller Müller Otterlo.

Nos imaginamos situaciones reales que constituyen problemas que podemos solucionar desde la óptica de la física y, específicamente, desde la estática. Como en el capítulo anterior, el desarrollo de cada problema está al final del libro.

Problema N° 2.16

“La habitación de Vincent en Arlés”

Enunciado

En la pintura muy conocida de Van Gogh denominada *La habitación de Vincent en Arlés* se observa una serie de cuadros colgados sobre las paredes de su habitación. Se supone que también son obras suyas.

Detrás de su cama se ve un cuadro que está sostenido en la pared por medio de dos cuerdas que cuelgan de un clavo, tal como se muestra en la figura y en la foto.



Imagen 2.16. Arlés - Francia



Imagen 2.17
La habitación de Vincent van Gogh

Suponemos que el cuadro tiene una masa de 10 kg y que los ángulos que forman las cuerdas con la horizontal son:

$$\alpha_1 = 135^\circ \quad \alpha_2 = 45^\circ \quad (\text{Figura 2.47})$$

¿Cuáles son las fuerzas en cada una de las cuerdas?

Problema N° 2.17

“Niños jugando”

Enunciado

En la línea E de la estación Boedo (Ciudad Autónoma de Buenos Aires) en el extremo del andén oeste se puede observar un mural cerámico de 11,10 m por 3,90 m, boceto de Primaldo Mónaco (1959) y realizado por Cerámica Villamayor.

El boceto representa, en un clima agradable, el candor de los niños jugando, entre los que se encuentra un joven subido a una escalera de dos hojas, al parecer arrancando frutas.

Si la masa de una de las hojas de la escalera es $m_c = 16 \text{ kg}$ y la masa del chico: $m_c = 40 \text{ kg}$, ¿cuál es la fuerza de fricción entre la escalera y el suelo?

Problema N° 2.18

“El café de noche”

Enunciado

El café de noche (1888), de Vincent van Gogh, es un óleo sobre lienzo de 72,4 x 92,4 cm que está ubicado en la Art Gallery, Yale University.

En el escenario hay algunos parroquianos sentados que conversan animadamente; uno de ellos está frente a una mesa de billar.

Pensemos por un momento en el juego que se pudo dar en esa escena.

El jugador le aplica una fuerza \vec{F}_1 a la bola con el taco, y luego, en una segunda jugada una fuerza \vec{F}_2 , y en una tercera una fuerza \vec{F}_3 y seguidamente en la cuarta jugada una fuerza \vec{F}_4 (Figura 2.48).

Supongamos que:

$$F_1 = 1 \text{ N} \quad \alpha_1 = 45^\circ$$

$$F_2 = 4 \text{ N} \quad \alpha_2 = 20^\circ$$

Si el jugador hubiese tirado de un solo tiro, ¿cuál sería el valor de \vec{F} y del ángulo α ?

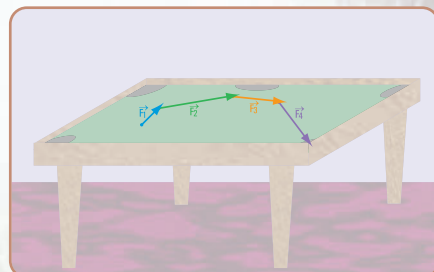
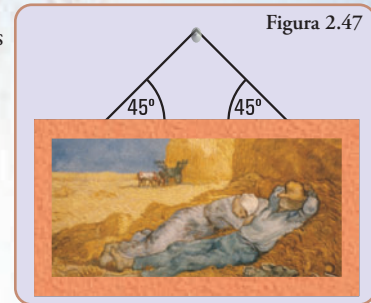


Figura 2.48. Gráfico del recorrido de la bola

Problema N° 2.19

“El puente de Langlois”

“Alrededor de las seis de aquella tarde, mi madre y yo estábamos lavando a la orilla del río, cerca de una barca medio hundida. El cielo estaba tan sereno que parecía nata celeste, el arroyo estaba calmo y azul; y de pronto escucho gritar: ¡Atención, estrella de oro, que silbaré!

Miré el puente levadizo, y justo en el medio, allí donde el puente se abre cuando pasan los botes, vi una calesa, y a aquel guapo muchacho dentro. Le dije a mamá con toda desenvoltura:

La ropa lavada llévala tú a casa. Yo me voy a la ciudad en coche con aquel muchacho. Es el sobrino de mi madrina.

Ve, ve. Pero, no regreses tarde.

Mientras subía al puente me sequé las manos. Un momento después estaba en el coche junto al muchacho, sacudí las riendas del caballo y nos dirigimos a la ciudad.



Imagen 2.20. El puente de Langlois, óleo de Vincent van Gogh

Fragmento de “La noche estrellada – van Gogh” por Pinin Carpi. Colección El arte para los niños.

El puente levadizo al que hace referencia la escritora es el puente de Langlois que, en el año 1888 pintó Van Gogh.

El puente apoya en dos muros, y se levanta desde el centro hacia ambas orillas para dar paso a las embarcaciones mediante cables que pasan por roldanas. El tablero del puente es de madera.

Por lo que se ve en la pintura de Van Gogh se puede dar una aproximación de su longitud. Nosotros consideramos que $l = 15$ m.

Si el peso propio del puente fuera $P = 600$ kN y, la sobrecarga debido al paso de los vehículos y personas, $P_1 = 450$ kN, ¿cuáles serán las reacciones de cada uno de los muros sobre el puente?

Epílogo

A través de la resolución de problemas y de ejercicios, hemos aplicado el procedimiento gráfico que nos permite hallar la resultante de un sistema plano de fuerzas concurrentes en un punto, mediante la aplicación de la regla del paralelogramo y/o del denominado polígono de fuerzas y, en forma analítica a través del planteo y resolución de sistemas de ecuaciones.

Asimismo, hemos desarrollado, en forma analítica, mediante el planteo y la resolución de propuestas concretas (resolución de problemas), el tema del equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes y no concurrentes.

Esta temática cobra fuerza, ya que, como pudimos observar en los problemas planteados, el equilibrio de las fuerzas lo encontramos permanentemente en nuestra vida cotidiana, de manera especial en problemáticas relacionadas con el equilibrio de los elementos estructurales de la estructura de un edificio, tal como es el caso de las vigas.

Hemos transitado ya por diferentes temáticas de la estática y de este modo nos estamos acercando a encontrar la respuesta a nuestra inquietud acerca de qué y del para qué se usa la estática. En tal sentido, en este capítulo hemos incorporado un concepto importantísimo que forma parte de la vida de los seres humanos: el concepto de equilibrio.

Como ya hemos detectado a través de la lectura de estos dos capítulos, continuamos ampliando y profundizando el concepto de fuerza, que constituye el corazón de la estática.

