

LAS SECCIONES DE LOS CUERPOS RÍGIDOS: PROPIEDADES

Prefacio

En el presente capítulo desarrollamos conceptos que están interrelacionados y que son importantes a la hora de tener que hallar la resistencia de los cuerpos frente a determinados tipos de esfuerzos, a los cuales dichos cuerpos están sometidos.

Esos conceptos son los siguientes: centros de gravedad; momentos de primer orden; momentos de segundo orden o momentos de inercia; módulos resistentes y radios de giro, todos ellos referidos a las superficies planas.

Como en todos los capítulos de este libro, el desarrollo conceptual se acompaña con un desarrollo matemático y con aplicaciones a situaciones reales.

Es posible que el lector no encuentre aplicaciones o desarrollos derivados del concepto central de la estática, el concepto de fuerza y su equilibrio. Pero si bien no están dados en forma explícita, la determinación de las magnitudes anteriormente mencionadas son fundamentales para el dimensionamiento o verificación de elementos estructurales sometidos a diferentes tipos de esfuerzos, temática ésta que no será tratada en este libro, y que forma parte de la resistencia de materiales, disciplina íntimamente vinculada a la estática.

*Los invito a recorrer
juntos este capítulo.*





Vamos a la playa, a un lugar donde casi no hay gente.

3.1.- Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

Nuestro entretenimiento preferido es el de remontar barriletes. Ayer fue un día de mucho viento. Nuestro barrilete quedó destrozado. Gran fastidio nos provocó, pero hoy ya estamos decididos a construir uno nuevo y distinto.

Pensamos en la forma. Tenemos dudas, puede ser romboidal, trapezoidal, circular, cuadrangular,... o bien sin una forma definida.

Según la Fundación Drachen, ubicada en Seattle, EE. UU., “Un barrilete es una aeronave más pesada que el aire que depende del viento para superar la gravedad y poder volar. Todos los barriletes cuentan con una o más superficies sobre las que actúa el viento, una brida para sujetar el barrilete a un buen ángulo con respecto del viento, una línea de vuelo para controlar que al barrilete no se lo lleve el viento”.

¡Cuántos conceptos de la física leemos en esta definición! Un simple y antiguo pasatiempo, como es construir y remontar un barrilete, nos hace pensar en cuestiones tales como: relación entre los pesos: peso del barrilete vs. peso del aire; gravedad, estabilidad, fuerzas de ascenso vs. fuerza de gravedad; fuerza de arrastre vs. tensión de la línea,...

Decidimos que nuestro nuevo barrilete tenga la forma de romboide, es una forma simple y rápida de hacer.

La construcción de nuestro barrilete

Los materiales que usamos:

1. dos varillas de palo blanco de sección circular. Podemos usar caña tacuara o cualquier otra madera porosa, liviana y resistente de 6 mm de sección,
2. hilo de algodón en bobinas o hilo choricero. Este hilo es un hilo de algodón más resistente que el común,
3. papel afiche o papel para envolver regalos o el denominado papel barrilete,
4. goma de pegar,
5. cinta adhesiva,
6. tela usada.

Procedimiento

Nuestro barrilete tendrá forma romboidal. Para dar esa forma debemos definir las dimensiones de sus diagonales. Si bien no son iguales guardan entre sí una proporción.

Nosotros decidimos que el largo del barrilete sea $h = 85$ cm (longitud de una diagonal), y el ancho (a longitud de la otra diagonal) sea tal que cumpla con la siguiente proporción: $a = h \cdot 0,90$. Por lo tanto, la otra diagonal tiene por longitud $a = 85 \text{ cm} \cdot 0,90 \Rightarrow a = 76,5$ cm. Adoptamos $a = 75$ cm (Figura 3.1).

1. Cortamos las varillas de acuerdo a las longitudes definidas. Con ambas varillas formamos una cruz. El punto en el cual se cruzan lo ubicamos según la siguiente relación:

a.- en la varilla de 85 cm de largo, el punto de cruce está del extremo superior, a una distancia:

$$x = 85 \text{ cm} \cdot 0,25$$

$$x = 21,25 \text{ cm}$$

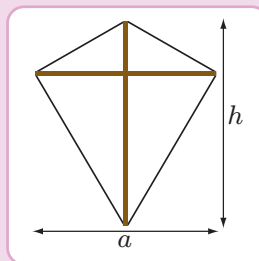


Figura 3.1

b.- en la varilla horizontal (75 cm de ancho), el punto de cruce está en la intersección con la otra diagonal, es decir en la mitad.

$$y = 0,5 \cdot 75 \text{ cm}$$

$$y = 37,5 \text{ cm}$$

2. Atamos las dos varillas por el punto de cruce, cuidando que los ángulos que forman las mismas sean rectos (Figura 3.2).
3. Unimos con hilo los cuatro vértices. Este hilo sirve para dar rigidez a la construcción y para ajustar los ángulos centrales, tratando de que sean aproximadamente de 90° . Caso contrario, obtendremos una superficie asimétrica respecto de la varilla vertical que no permitirá la distribución adecuada de la carga que ejerce el viento sobre el barrilete, por lo cual, éste no tendrá un vuelo adecuado.
4. Construido el armazón, colocamos el papel elegido sobre la mesa de trabajo y, sobre él, ubicamos el bastidor del barrilete. Fijamos éste al papel mediante cinta adhesiva en los puntos extremos. Siguiendo la línea del hilo del armazón, con un borde de aproximadamente 1 cm, cortamos el papel. En los vértices eliminamos los ángulos rectos del papel. Doblamos el papel por los hilos perimetrales, pegando el papel al marco (Figura 3.3).
5. Cortamos flecos que pegamos en todo el perímetro.
6. Cortamos un hilo de aproximadamente 80 cm de longitud.
7. Marcamos la mitad del segmento superior de la diagonal vertical: $0,5 \times 21,25 \text{ cm} = 10,625 \text{ cm}$ del extremo superior, y la mitad del segmento inferior: $0,5 \times 63,75 \text{ cm} = 31,875 \text{ cm}$ (Figura 3.4).
8. Perforamos el papel, pasamos el hilo y atamos fuertemente el hilo a la varilla en ambos puntos.
9. Levantamos el hilo y con nuestra imaginación formamos un triángulo rectángulo: la hipotenusa y un cateto son lados formados por el hilo, y el otro cateto es parte de la varilla. Formado este triángulo hacemos un nudo que permita, a su vez, hacer un lazo donde se atará la línea que sirve para remontar el barrilete (Figura 3.5).
10. El equilibrio del barrilete lo conseguimos con la cola, que la armamos con tiras de tela usada de un ancho aproximado de 3,5 cm. La longitud de la cola está en relación directa con la velocidad del viento. A mayor velocidad, mayor longitud. ¿Cómo sabemos el largo de la cola? Probamos con un determinado largo, si cuando lo remontamos el barrilete comienza a dar círculos, significa que debemos agregar cola, hasta que el vuelo sea estable. La cola la atamos en el vértice inferior de la diagonal vertical del barrilete.
11. Verificamos el tiro del barrilete (triángulo rectángulo) (Figura 3.6).

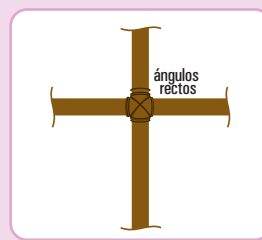


Figura 3.2

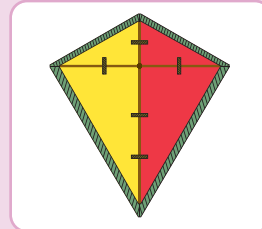


Figura 3.3

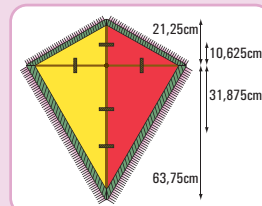


Figura 3.4

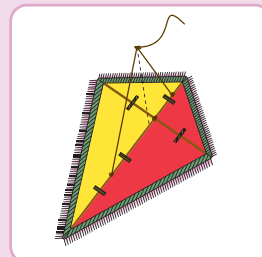


Figura 3.5

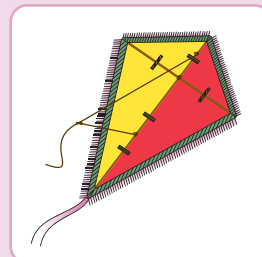


Figura 3.6

Y, ... ahora, ... a remontar.



Volvemos a la playa. Es una zona abierta, sin árboles, sin cables de teléfono, sin cables de TV, ni de electricidad, con edificios altos alejados; un lugar ideal, cuando no hay gente, y propicio para que nuestro barrilete en su vuelo no encuentre obstáculos que puedan ser peligrosos (Figura 3.7).

Gastón, nuestro amigo nos ayuda. Yo (Coni) sostengo el barrilete con la superficie visible enfrentada a la dirección del viento. Me alejo, aproximadamente 15 metros, una buena distancia para comenzar a remontarlo.

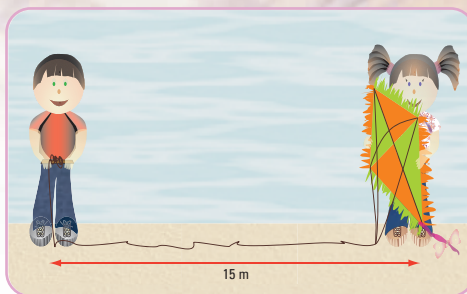


Figura 3.7. En la playa remontando un barrilete

Y, mientras disfrutamos de su majestuoso vuelo, pensamos... y, ¿por qué vuela?

En una forma simplificada lo explicamos.

Un barrilete vuela porque en su ascenso empuja el aire hacia abajo y hacia afuera, como lo hace un bote con el agua que empuja para avanzar. El aire pasa por la parte superior y se desliza hacia abajo. El barrilete recibe el empuje del aire. El viento al incidir sobre el barrilete hace que aparezca una componente perpendicular a la dirección del viento, es la denominada **fuerza de sustentación**. Debido a que el aire no es un fluido ideal, el efecto de la viscosidad provoca otra fuerza en la dirección del viento. Es una **componente de resistencia**. Ambas fuerzas, la de **sustentación** y la de **resistencia**, denominadas aerodinámicas, están aplicadas en el denominado **centro de presión** (Figura 3.8).

La fuerza de sustentación es la que tiende a elevar al barrilete, mientras que la de resistencia tiende a arrastrarlo. Otras fuerzas son: **el peso propio** del barrilete y **el peso del hilo**. El primero está aplicado en su centro de gravedad y el peso del hilo (peso propio más su rozamiento con el viento) en el punto de unión de la brida con el hilo.

Las fuerzas de gravedad son las que se oponen al vuelo, por eso debemos utilizar materiales livianos en la construcción.

Para que el barrilete vuele la fuerza de sustentación debe vencer a las fuerzas gravitacionales. La fuerza de sustentación puede ser superior a la gravitacional, por ello aparece otra fuerza que compensa esta diferencia; es la **fuerza de tensión** del hilo. La fuerza de tensión está aplicada en el punto de intersección de la brida con el hilo y es tangente, en ese punto, a la dirección que toma el hilo durante el vuelo. La componente vertical equilibra el exceso de la fuerza de sustentación y la componente horizontal anula la resistencia del aire (Figura 3.8).

Resulta importante que durante el vuelo todas las fuerzas estén en equilibrio estable.

La cola es el elemento que permite lograr la estabilidad deseada y mantener al barrilete apuntando al viento (Figura 3.9).

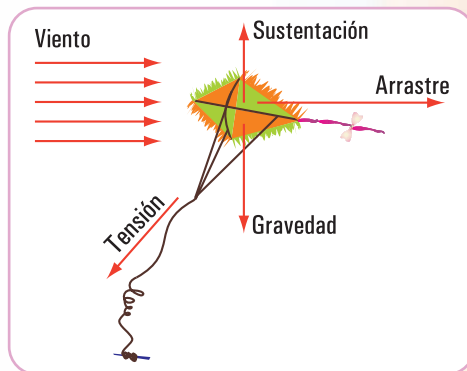


Figura 3.8

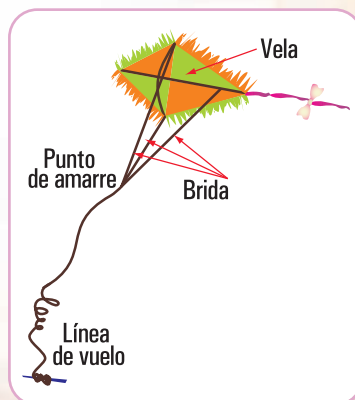


Figura 3.9



...otro de nuestros pasatiempos

Cerca de nuestra casa de veraneo existe un club de aeromodelismo. Es otro de nuestros pasatiempos, pero sólo nos gusta mirar las diferentes competencias.

Y, ... allá vamos con Gastón.



En la entrada del Club se encuentra una placa con el siguiente texto:

*“Un aeromodelo es un aparato más pesado que el aire, de dimensiones limitadas, con o sin motor, en tamaño reducido incapaz de llevar a un ser humano”.
“Aeromodelismo es la disciplina que, basada en la utilización de técnicas diversas, se ocupa del diseño, construcción y vuelo de aeromodelos”.*

(Definiciones de la Federación Aeronáutica Internacional).

En la pista podemos ver una gran cantidad de modelos preparados para volar, y en las conversaciones de los aeromodelistas oímos expresiones como éstas:

¿dónde está el centro de gravedad?, ¿va adelantado o retrasado?

La posición del centro de gravedad es importante, ya que condiciona las características del vuelo.

En forma similar a lo que sucede con el barrilete, cuando vuela un aeromodelo las fuerzas que actúan son las siguientes:

1. **la sustentación**, es la fuerza que impulsa al aeromodelo hacia arriba;
2. **la fuerza de la gravedad**, que se opone a la anterior y que debe vencer el aeromodelo;
3. **la tracción**, que está dada por el impulso de un motor o bien por la velocidad del modelo en el aire, fuerza que tiende a hacerlo avanzar y;
4. **la resistencia** al avance que está dada por el volumen del aeromodelo y tiende a frenarlo.

Tal vez una de las cuestiones más álgidas, al momento de la construcción de un aeromodelo, para que el vuelo sea estable, es la ubicación de su centro de gravedad. Este proceso se denomina **balanceo**.

Observamos en la pista cómo los pilotos realizan la operación de balanceo. Las formas son las siguientes:

1. se sostiene al modelo por los extremos del ala, por la parte inferior (intradós) buscando un equilibrio estable, sin que el modelo se incline hacia la trompa, ni hacia la cola. De ser necesario se coloca peso (plomo) en la trompa o en la cola hasta que el punto de sostén coincida con el centro de gravedad marcado en el plano. Este proceso se denomina **balanceo estático**;
2. se prueba la estabilidad estando el modelo en vuelo. Este balanceo se llama **dinámico**.

En los planos, el centro de gravedad se indica con los símbolos que se muestran en la **figura 3.10**.

¿Cómo calcula un diseñador de aeromodelos el centro de gravedad? ¹

El centro de gravedad se encuentra en el ala y depende de la forma de la misma, más precisamente de su perfil, que recibe el nombre de **perfil alar**.



Imagen 3.1.
Juanito Laguna y la aeronave, 1978.
Materiales varios sobre madera,
210 x 160 cm, Antonio Berni



Figura 3.10

¹ Fuente: Federación Aeronáutica Internacional.

En la **figura 3.11** podemos observar la posición del centro de gravedad según el tipo de perfil del ala.



Figura 3.11

El ala puede ser rectangular, trapezoidal, en flecha, en doble trapecio, etc. Un caso sencillo es el caso de un ala trapezoidal.

Para determinar, en este caso, el centro de gravedad realizamos el siguiente procedimiento:

1. dibujamos a escala la planta del ala (planta alar). Trazamos un segmento con extremos en los puntos medios de las bases del trapecio (\overline{mn}). Continuamos el trazado según lo indicado en la **figura 3.12**;
2. trazamos la recta que pasa por los extremos de las prolongaciones. Obtenemos el punto de intersección de ésta con el segmento \overline{mn} . Por dicho punto y en forma perpendicular a \overline{mn} se traza el segmento \overline{hi} , que recibe el nombre de **cuerda media**;
3. sobre la cuerda media se determina el 30 % de la misma y por allí trazamos una perpendicular al eje longitudinal del modelo, encontrando así la posición exacta de su centro de gravedad.

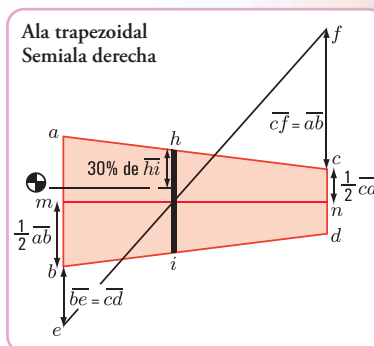


Figura 3.12

A través de nuestros dos pasatiempos concluimos que resulta valioso conocer la ubicación del centro de gravedad, ya sea del barrilete como del aeromodelo, sabiendo que dicho punto es aquél donde se concentra el peso de cada cuerpo y por lo tanto, por donde pasa la recta de acción de la fuerza de gravedad, fuerza que debe vencer, tanto el barrilete como el aeromodelo.



Imagen 3.2. Sin título, 1981, acrílico sobre tela, 160,2 x 200 cm, Antonio Berni

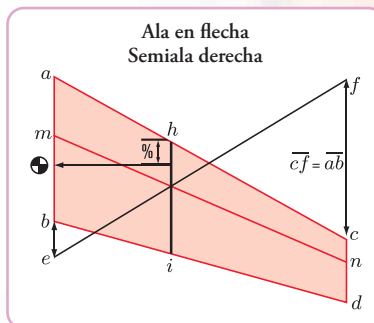


Figura 3.13

En el cuadro que se muestra en la **figura 3.14** podemos observar la ubicación de los centros de gravedad de figuras simples:

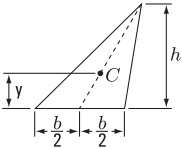
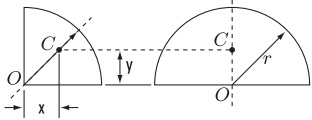
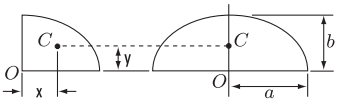
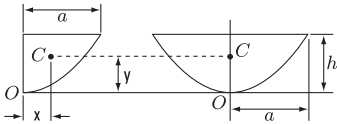
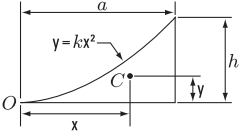
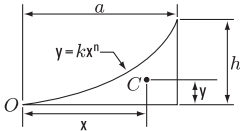
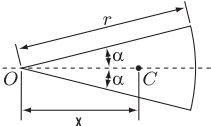
FORMA		x	y	ÁREA
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Extradós parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Extradós de forma general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 3.14. Centros de gravedad de figuras simples

En todas estas figuras es fácil determinar su centro de gravedad. Pero si se presenta la necesidad de hallar el centro de gravedad de cualquier tipo de figura,

¿cómo se determina la posición del mismo?

Para dar respuesta a esta pregunta, realizamos un procedimiento matemático.

Referimos la figura a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (Figura 3.15). Dividimos a

la figura en n elementos pequeños. Las coordenadas de cada uno de esos elementos son $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); \dots; (x_n, y_n)$, y las fuerzas que la Tierra ejerce sobre los elementos de la figura los denominamos $\Delta P_1; \Delta P_2; \Delta P_3; \dots; \Delta P_n$

Sabemos que todas estas fuerzas tienen una dirección y sentido hacia el centro terrestre, pero a los efectos de este razonamiento, utilizamos un artificio y las podemos considerar paralelas, cuya resultante tiene la misma dirección y con módulo P :

$$P = \sum_{n=1}^n \Delta P_n \Rightarrow P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \dots + \Delta P_n$$

Por otra parte, el punto G (centro de gravedad) en el plano queda determinado por sus dos coordenadas: (x_G, y_G) .

Para hallar dichas coordenadas tomamos momentos de \vec{P} respecto de los ejes x y y .

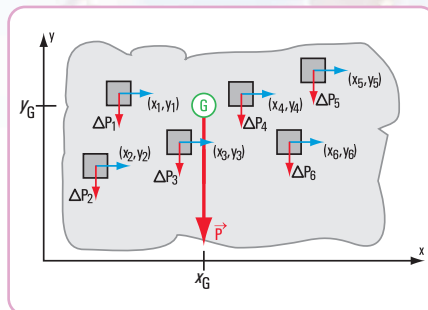


Figura 3.15

$$\sum_1^n M_{\vec{P}}^y \Rightarrow P \cdot x_G = \Delta P_1 \cdot x_1 + \Delta P_2 \cdot x_2 + \Delta P_3 \cdot x_3 + \dots + \Delta P_n \cdot x_n \quad (1)$$

$$\sum_1^n M_{\vec{P}}^x \Rightarrow P \cdot y_G = \Delta P_1 \cdot y_1 + \Delta P_2 \cdot y_2 + \Delta P_3 \cdot y_3 + \dots + \Delta P_n \cdot y_n \quad (2)$$

Si estamos considerando una placa homogénea con un espesor uniforme, el módulo de ΔP podemos expresarlo mediante la siguiente expresión matemática:

$\Delta P = g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F$, donde g : aceleración de la gravedad,
 ρ : densidad de la materia (masa por unidad de volumen),
 s : espesor de la placa,
 ΔF : superficie del elemento considerado.

$P = g \cdot \rho \cdot s \cdot F$, donde F es la superficie total de la placa.

Las unidades son: $[P] = [g] \cdot [\rho] \cdot [s] \cdot [F]$

$$[P] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2$$

$$[P] = \text{N (newton)}$$

Reemplazamos a P y ΔP en las ecuaciones (1) y (2)

$$\sum_1^n M_{\vec{P}}^y \Rightarrow g \cdot \rho \cdot s \cdot F \cdot x_G = g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_1 \cdot x_1 + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_2 \cdot x_2 + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_3 \cdot x_3 + \dots + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_n \cdot x_n$$

$$\sum_1^n M_{\vec{P}}^x \Rightarrow g \cdot \rho \cdot s \cdot F \cdot y_G = g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_1 \cdot y_1 + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_2 \cdot y_2 + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_3 \cdot y_3 + \dots + g \cdot \rho \cdot s \cdot \Delta F_n \cdot y_n$$

Dividiendo a ambos miembros por " $g \cdot \rho \cdot s$ "

$$F \cdot x_G = \Delta F_1 \cdot x_1 + \Delta F_2 \cdot x_2 + \Delta F_3 \cdot x_3 + \dots + \Delta F_n \cdot x_n \Rightarrow F \cdot x_G = \sum_1^n \Delta F_n \cdot x_n$$

$$F \cdot y_G = \Delta F_1 \cdot y_1 + \Delta F_2 \cdot y_2 + \Delta F_3 \cdot y_3 + \dots + \Delta F_n \cdot y_n \Rightarrow F \cdot y_G = \sum_1^n \Delta F_n \cdot y_n$$

Si la cantidad de elementos tiende a infinito, entonces podemos expresar:

$$F \cdot x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta F_n \cdot x_n \Rightarrow F \cdot x_G = \int x \cdot dF \Rightarrow x_G = \frac{\int x \cdot dF}{F} \quad (3)$$

$$F \cdot y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta F_n \cdot y_n \Rightarrow F \cdot y_G = \int y \cdot dF \Rightarrow y_G = \frac{\int y \cdot dF}{F} \quad (4)$$

$$x_G = \frac{\int x \cdot dF}{F} \text{ abscisa del centro de gravedad G de una placa plana}$$

$$y_G = \frac{\int y \cdot dF}{F} \text{ ordenada del centro de gravedad G de una placa plana}$$

Utilizando las dos expresiones matemáticas anteriores podemos encontrar las coordenadas del bari-centro o centro de gravedad de una figura plana, cualquiera sea su forma.

3.2.- Momento estático de superficie o de primer orden

Las integrales:

$\int x \cdot dF$ se la denomina momento de primer orden de la superficie F o momento estático de la superficie F respecto del eje y. Lo indicaremos con la siguiente notación: S_y

$\int y \cdot dF$ se la denomina momento de primer orden de la superficie F o momento estático de la superficie F respecto del eje x. Lo indicaremos con la siguiente notación: S_x

Entonces podemos expresar las coordenadas del centro de gravedad o coordenadas baricéntricas de una placa homogénea mediante la siguiente expresión matemática:

$$x_G = \frac{S_y}{F} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{S_x}{F}$$

La abscisa del centro de gravedad de una placa homogénea es igual al momento estático de superficie respecto del eje y dividido por la superficie total de la placa.

La ordenada del centro de gravedad de una placa homogénea es igual al momento estático de superficie respecto del eje x dividido por la superficie total de la placa.

Existen numerosas situaciones en las cuales se hace necesario conocer el centro de gravedad de una placa plana cuya superficie no es una figura simple, se trata de una placa compuesta.

Si la placa que estamos considerando es homogénea y de espesor uniforme su centro de gravedad coincide con el centro de gravedad o centroide de su superficie.

El momento de primer orden o momento estático de superficie S respecto de cada uno de los ejes

x y y lo podemos hallar del siguiente modo:

1. podemos encontrar el valor de S como el producto de la superficie F por la distancia a cada uno de los ejes. Para buscar el valor de S_x multiplicamos la superficie total por la distancia del centroide de la superficie al eje x .

Y, para hallar S_y , multiplicamos la superficie total por la distancia desde el centroide de la superficie total al eje y .

En símbolos:

$$S_x = F \cdot y_G$$

$$S_y = F \cdot x_G$$

2. otra forma de encontrar el valor de S es dividir a la superficie total en superficies de figuras simples, y hallar la sumatoria de los momentos de primer orden de cada figura simple respecto de cada uno de los ejes.

En símbolos:

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{x_i} \Rightarrow S_x = S_{1_x} + S_{2_x} + \dots + S_{n_x}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{y_i} \Rightarrow S_y = S_{1_y} + S_{2_y} + \dots + S_{n_y}$$

El sistema de coordenadas (x, y) lo ubicamos en forma arbitraria. De acuerdo a la posición de los ejes, el momento de primer orden será positivo o negativo.

Ejemplos

Caso 1 - Figura irregular compuesta por un rectángulo y un triángulo

Signos	x_G	y_G	F	S_y	S_x
				$x_G \cdot F$	$y_G \cdot F$
Rectángulo	+	+	+	+	+
Triángulo	-	+	+	-	+

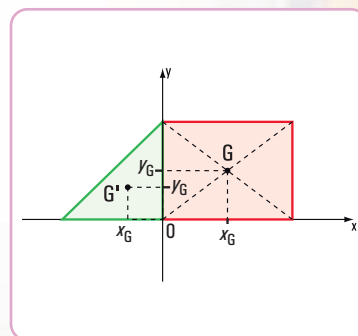


Figura 3.16

Cambiamos la posición del sistema de coordenadas (x, y) , por ejemplo como se ve en la figura 3.17:

				S_y	S_x
Signos	x_G	y_G	F	$x_G \cdot F$	$y_G \cdot F$
Rectángulo	-	+	+	-	-
Triángulo	-	+	+	-	-

Como podemos observar en los cuadros anteriores, al variar la posición de los ejes coordenados, cambian los signos de las coordenadas y de los momentos de primer orden.

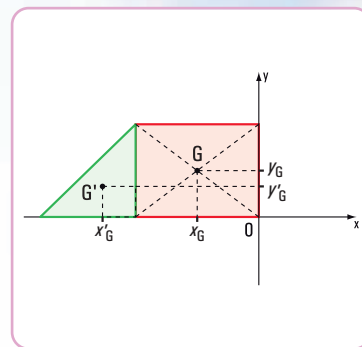


Figura 3.17

Caso 2 - Figura irregular

Se puede presentar una placa compuesta constituida por varias figuras simples (Figura 3.18). Para hallar la superficie y el momento de primer orden o momento estático debemos restar las superficies y los momentos estáticos.

				S_y	S_x
Signos	x_{G_i}	y_{G_i}	F_i	$F_i x_{G_i}$	$F_i y_{G_i}$
Rectángulo F_1	+	0	+	+	0
Triángulo 2 F_2	+	+	+	+	+
Triángulo 3 F_3	+	-	+	+	-

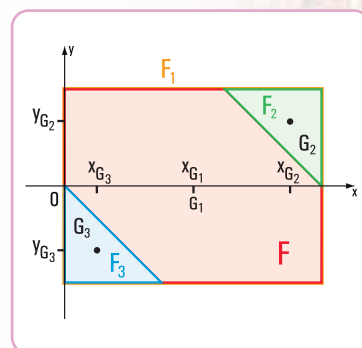


Figura 3.18

Para hallar la superficie total y los momentos de primer orden de la figura F , debemos restar a la superficie de F_1 las superficies: F_3 y F_2 . Del mismo modo con los momentos de primer orden.

$$F = F_1 - F_2 - F_3$$

$$S_y = S_{1y} - S_{2y} - S_{3y}$$

$$S_x = S_{1x} - S_{2x} - S_{3x}$$

Resolvemos el siguiente problema

Realizamos un viaje de estudio. Vamos a Salta



Después de mucho discutir, entre Bariloche, Trelew,... y otros lugares de la Argentina, y aconsejados por nuestra profe de Historia, decidimos ir a Salta (Argentina).

En la planificación que hicieron nuestros profesores para este viaje, figura la visita a varias empresas.

HOJA DE RUTA: Buenos Aires - San Nicolás	
km 0 0:00 h RN 9	● Buenos Aires 22 km de autopista
km 22 0:13 h RN 9	○ Cruce RN 9 y Ramal Tigre 13 km de autopista
km 35 0:20 h RN 9	○ Cruce RN 9 y RN 8 13 km de autopista Peaje en el km 0. Nombre del peaje: Campana Concesionario: Autopista del Sol S.A.
km 53 0:30 h RN 9	○ Escobar 17 km de autopista
km 70 0:40 h RN 9	○ Campana 17 km de autopista
km 215 2:06 h RN 9	○ Desvío a Ramallo 30 km de autopista
km 245 2:24 h RN 9	○ San Nicolás 19 km de autopista

Figura 3.19. Hoja de ruta hasta San Nicolás

Los calculistas de la Oficina Técnica tienen que hallar:

- el momento de primer orden respecto de los ejes x e y ;
- la ubicación del centro de gravedad de cada una de las figuras.

En cada uno de los casos, ¿cuáles serán esos valores?

Desarrollo

Caso 1 (Figura 3.20)

1. Fijamos el sistema de coordenadas (x, y)

En este caso, al eje x lo hacemos coincidir con el lado a y el eje y con el lado b de la figura (Figura 3.24).

En todas ellas tenemos que relacionar el trabajo que se realizan en las mismas con nuestro aprendizaje.

Problema N° 3.1

Enunciado

En el camino a Salta, nos detuvimos en San Nicolás –Provincia de Buenos Aires– para visitar una empresa familiar que construye pequeños objetos con latón. Los objetos tienen diferentes formas.

En la Oficina Técnica se encuentran los planos de cada uno de los objetos.

Una de las tareas para lograr dichos objetos es la de cortar la plancha de latón según la forma requerida.

Algunas de las formas planas las podemos ver en las figuras 3.20; 3.21; 3.22 y 3.23.

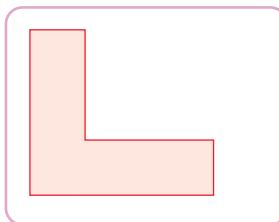


Figura 3.20

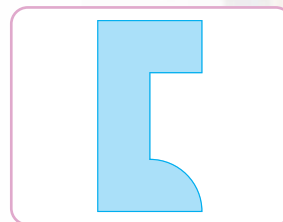


Figura 3.21

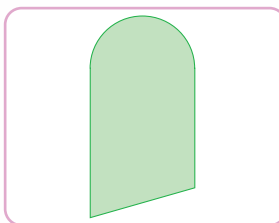


Figura 3.22

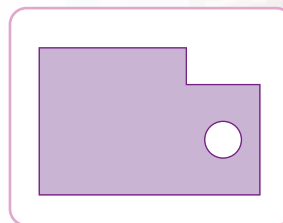


Figura 3.23

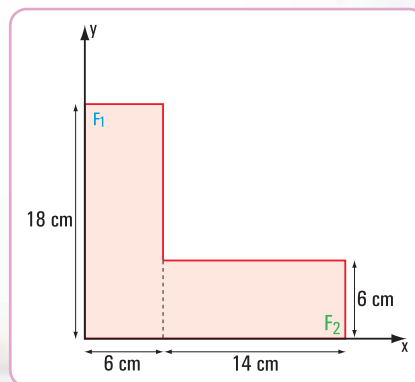


Figura 3.24

Se trata de una figura compuesta por dos figuras simples: dos rectángulos (Figura 3.25).

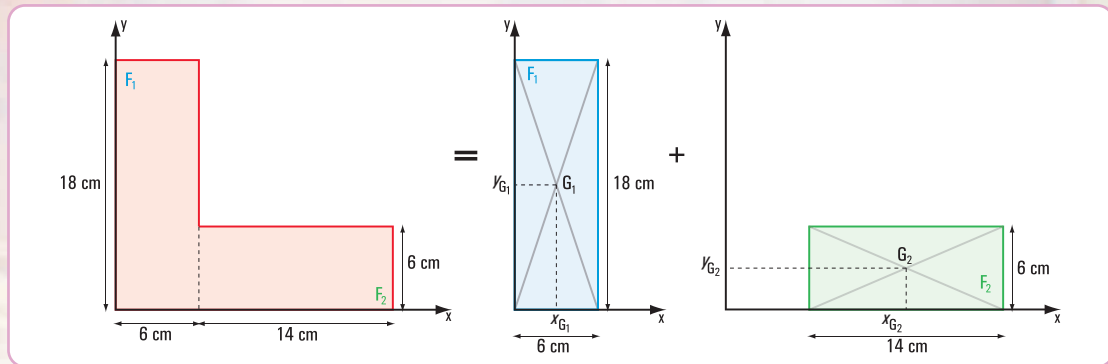


Figura 3.25

- Calculamos las superficies: F_1 y F_2

$$F_1 = b \times t \Rightarrow F_1 = 18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$$

$$F_1 = 108 \text{ cm}^2$$

$$F_2 = 14 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \Rightarrow F_2 = 84 \text{ cm}^2$$

$$F_T = F_1 + F_2$$

$$F_T = 108 \text{ cm}^2 + 84 \text{ cm}^2$$

$$F_T = 192 \text{ cm}^2$$

- Calculamos las coordenadas del baricentro de cada figura

$$x_{G_1} = 3 \text{ cm} \quad x_{G_2} = 13 \text{ cm}$$

$$y_{G_1} = 9 \text{ cm} \quad y_{G_2} = 3 \text{ cm}$$

- Hallamos el momento de primer orden

a. Respecto del eje y

$$S_{1y} = x_{G_1} \cdot F_1 \Rightarrow S_{1y} = 3 \text{ cm} \times 108 \text{ cm}^2$$

$$S_{1y} = 324 \text{ cm}^3$$

$$S_{2y} = x_{G_2} \cdot F_2 \Rightarrow S_{2y} = 13 \text{ cm} \times 84 \text{ cm}^2$$

$$S_{2y} = 1.092 \text{ cm}^3$$

$$S_{Ty} = S_{1y} + S_{2y}$$

$$S_{Ty} = 324 \text{ cm}^3 + 1.092 \text{ cm}^3$$

$$S_{Ty} = 1.416 \text{ cm}^3$$



Imagen 3.3

Alumnos de 1.º año, ciclo superior Construcciones
(E.T. N°34 "Ing. Enrique M. Hermitte")



Imagen 3.4

Alumnos de 2.º año, ciclo superior Construcciones
(E.T. N°34 "Ing. Enrique M. Hermitte")

b. Respecto del eje x

$$S_{Ix} = y_{G_1} \cdot F_1 \Rightarrow S_{1x} = 9 \text{ cm} \times 108 \text{ cm}^2$$

$$S_{1x} = 972 \text{ cm}^3$$

$$S_{2x} = y_{G_2} \cdot F_2 \Rightarrow S_{2x} = 3 \text{ cm} \times 84 \text{ cm}^2$$

$$S_{2x} = 252 \text{ cm}^3$$

$$S_{Tx} = 972 \text{ cm}^3 + 252 \text{ cm}^3$$

$$S_{Tx} = 1.224 \text{ cm}^3$$

Hallamos las coordenadas del baricentro

$$S_{Ty} = x_G \times F_T \Rightarrow x_G = \frac{S_{Ty}}{F_T}$$

$$x_G = \frac{1.416 \text{ cm}^3}{192 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 7,375 \text{ cm}$$

$$S_{Tx} = y_G \times F_T \Rightarrow y_G = \frac{S_{Tx}}{F_T}$$

$$y_G = \frac{1.224 \text{ cm}^3}{192 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 6,375 \text{ cm}$$

Respuesta

Las coordenadas del baricentro son $(x_G, y_G) \equiv (7,375; 6,375)$ (Figura 3.26).

El momento de primer orden respecto del eje x es $S_{Tx} = 1.224 \text{ cm}^3$ y con respecto al eje y es $S_{Ty} = 1.416 \text{ cm}^3$

Caso 2 (Figura 3.21)

Fijamos los ejes de coordenadas (x, y) (Figura 3.27)

La figura está formada por dos rectángulos y un cuarto de círculo (Figura 3.28).



Imagen 3.5

Alumnos y alumnas de 3.º año, ciclo superior Construcciones (E.T. N°34 "Ing. Enrique M. Hermitte")

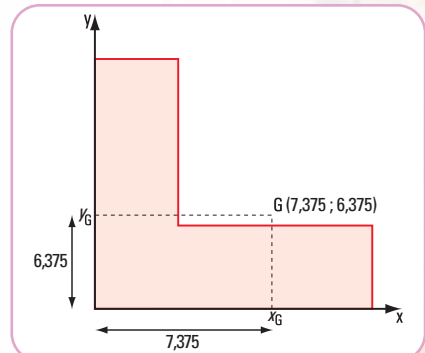


Figura 3.26. Coordenadas baricéntricas de la sección

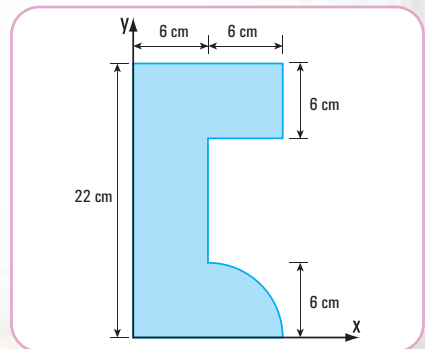


Figura 3.27

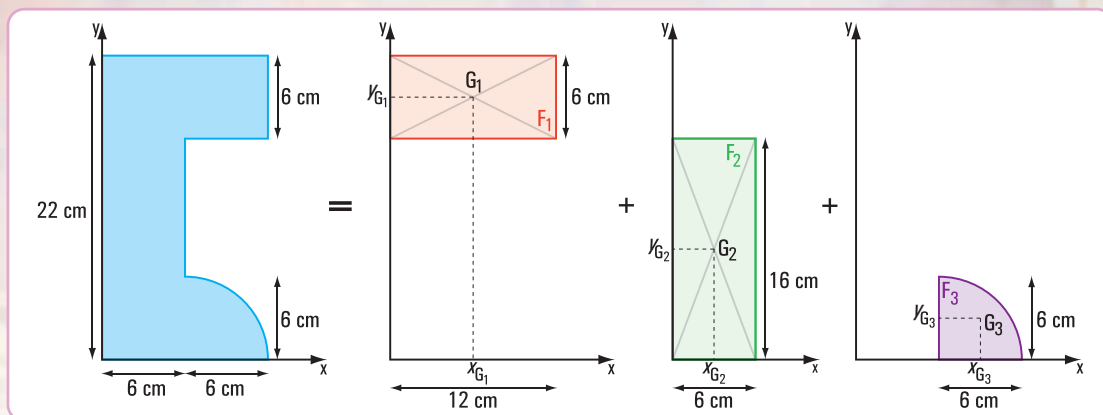


Figura 3.28

Con los valores parciales obtenidos completamos el siguiente cuadro:

Figuras simples	Superficies cm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} cm	y_{G_i} cm	$x_{G_i} \cdot F_i$ cm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ cm ³
Rectángulo F ₁	$12 \times 6 = 72$	6	19	432	1.368
Rectángulo F ₂	$16 \times 6 = 96$	3	8	288	768
$\frac{1}{4}$ Círculo F ₃	$\frac{\pi \times 6^2}{4} = 28,26$	$\frac{4 \times 6}{3 \times \pi} + 6 = 8,55$	$\frac{4 \times 6}{3 \times \pi} = 2,55$	241,62	72,06
Total	196,26	-----	-----	$S_y = 961,62$	$S_x = 2.208,06$

Los momentos de primer orden son:

$$S_x = 2.208,06 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 961,62 \text{ cm}^3$$

El centro de gravedad de la figura tiene por coordenadas

$$x_G = \frac{S_y}{F_T}$$

$$x_G = \frac{961,62 \text{ cm}^3}{196,26 \text{ cm}^2}$$

$$\underline{\underline{x_G = 4,90 \text{ cm}}}$$

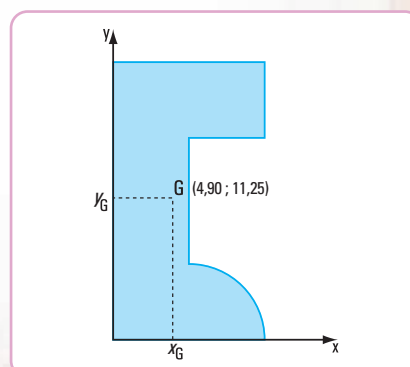


Figura 3.29. Coordenadas baricéntricas de la sección

$$y_G = \frac{S_x}{F_T}$$
$$y_G = \frac{2.208,06 \text{ cm}^3}{196,26 \text{ cm}^2}$$
$$y_G = 11,25 \text{ cm}$$

Respuesta

Las coordenadas del baricentro son: $(x_G, y_G) \equiv (4,90 ; 11,25)$
Los momentos de primer orden respecto del eje x y de y son:

$$S_x = 2.208,06 \text{ cm}^3$$
$$S_y = 961,62 \text{ cm}^3$$

Caso 3 (Figura 3.22)

La figura dada está constituida por tres figuras simples: un semicírculo; un rectángulo y un triángulo rectángulo. Para una mejor comprensión hacemos el despiece de la figura (Figura 3.30).

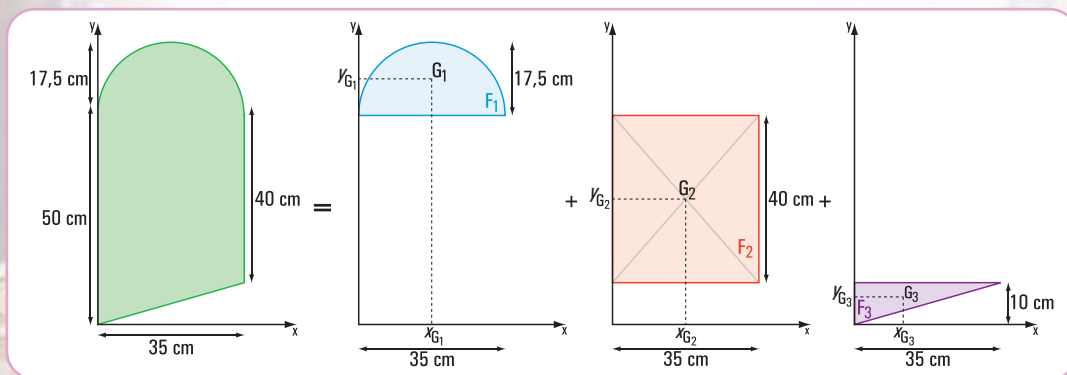


Figura 3.30

Completamos el siguiente cuadro con los resultados parciales:

Figuras simples	Superficies cm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} cm	y_{G_i} cm	$x_{G_i} \cdot F_i$ cm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ cm ³
Semicírculo	$F_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ $F_1 = 480,8$	17,5	$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} + 50 = 57,43$	8.414	27.612,34
Rectángulo	$F_2 = 1.400$	17,5	30	24.500	42.000
Triángulo	$F_3 = 175$	11,67	6,67	2.042,25	1.167,25
Total	$F_t = 2.055,8$	-----	-----	$S_y = 34.956,25$	$S_x = 70.779,59$

El centro de gravedad de la figura tiene por coordenadas:

$$x_G = \frac{S_y}{F_T} \Rightarrow x_G = \frac{34.956,25 \text{ cm}^3}{2.055,8 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 16,99 \text{ cm} \Rightarrow x_G = 17 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{F_T} \Rightarrow y_G = \frac{70.779,59 \text{ cm}^3}{2.055,8 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 34,43 \text{ cm}$$

Respuesta

Las coordenadas del baricentro son:

$$x_G = 17 \text{ cm}$$

$$y_G = 34,43 \text{ cm}$$

Los momentos de primer orden respecto de los ejes x e y son:

$$S_x = 70.779,59 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 34.956,25 \text{ cm}^3$$

Caso 4 (Figura 3.23)

La figura está compuesta por dos rectángulos, uno lleno y otro hueco con una forma circular.

Hacemos el despiece de la figura compuesta en figuras simples (Figura 3.32).

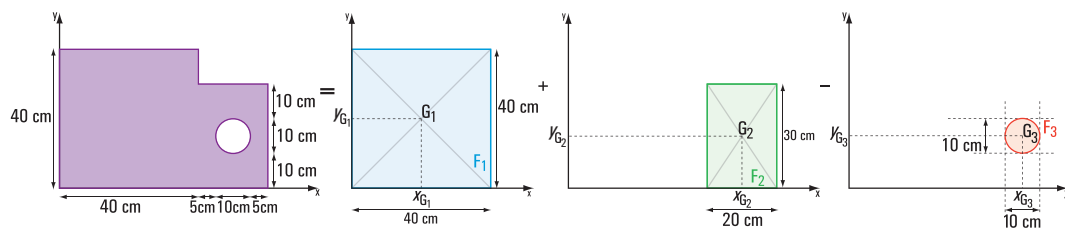


Figura 3.32

Con los resultados parciales completamos el siguiente cuadro:

Figuras simples	Superficies cm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} cm	y_{G_i} cm	$x_{G_i} \cdot F_i$ cm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ cm ³
Rectángulo 1	$F_1 = 1.600$	20	20	32.000	32.000
Rectángulo 2	$F_2 = 600$	50	15	30.000	9.000
Círculo	$F_3 = 78,5$	50	15	3.925	1.177,5
Total	$F_T = F_1 + F_2 - F_3$ $F_T = 2.121,5$	-----	-----	$S_y = S_{1y} + S_{2y} - S_{3y}$ $S_y = 58.075$	$S_x = S_{1x} + S_{2x} - S_{3x}$ $S_x = 39.822,5$

El centro de gravedad de la figura compuesta tiene por coordenadas:

$$x_G = \frac{S_y}{F_T} \Rightarrow x_G = \frac{58.075 \text{ cm}^3}{2.121,5 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 27,37 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{F_T} \Rightarrow y_G = \frac{39.822,5 \text{ cm}^3}{2.121,5 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 18,77 \text{ cm}$$

Respuesta

Las coordenadas del baricentro son:

$$x_G = 27,37 \text{ cm}$$

$$y_G = 18,77 \text{ cm}$$

Los momentos de primer orden respecto de los ejes x e y son:

$$S_x = 39.822,5 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 58.075 \text{ cm}^3$$

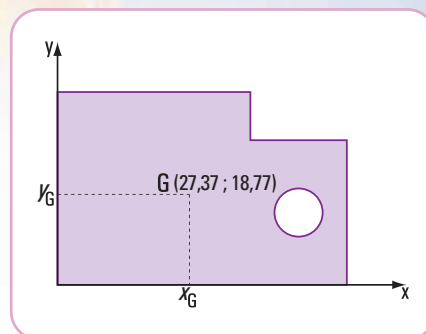


Figura 3.33

3.3.- Momentos de inercia de superficie



Llegamos a la ciudad de Salta (Argentina)

¡Cuánta historia hay en sus calles! Cuando empezamos a recorrerla nos encontramos con una arquitectura colonial que nos fascinó, sobre todo sus hermosos balcones de madera. En ese recorrido nos detuvimos frente a una casa que estaban restaurando: se veía uno de sus balcones. El arquitecto a cargo de la obra nos explicó que, con los años, todo este tipo de construcción, como cualquier otra, requiere de un mantenimiento, de manera especial la madera. Ese balcón tenía una viga que había flexionado más de lo previsible y temían por su vida útil.



Imagen 3.6. Ciudad de Salta.



Imagen 3.7. Una calle de Salta con sus balcones

Para que ustedes comprendan bien el proceso, tienen que entender cómo funciona esa viga de madera, comentó nuestra profe, que es ingeniera y nos acompañó durante todo ese viaje.

De regreso a Buenos Aires, la profe nos dio una clase sobre el tema. Nos explicó que la viga de un balcón tiene un extremo, totalmente, inmovilizado (empotrado) y otro libre.

Se dice que la viga está en voladizo.

Para hacer la explicación bien simple, nos dijo: supongamos que la viga está cargada en el extremo libre con el peso de su baranda (despreciamos el peso propio de la viga): \vec{P} (Figura 3.34). Por acción

de esta carga el eje de la viga se deforma, pasa de ser un eje recto a uno curvo. Esta deformación se llama **elástica** y, la ordenada máxima de la elástica, es lo que se denomina **flecha**.

Consideramos una sección de la viga a una distancia x del extremo libre (Figura 3.35). El efecto de giro provocado por la carga respecto de esta sección o, de cualquier otra, está dado por un momento: $M = P \cdot x$. Frente a este efecto, internamente, el material también reacciona, con un giro de igual magnitud y sentido contrario. Las secciones se deforman, si son rectangulares pasan a ser trapezoidales; sólo conservan su espesor en el plano medio. Se producen alargamientos crecientes sobre este plano y decrecientes debajo del mismo. Estos alargamientos y acortamientos nos están diciendo que, internamente, la viga sufre esfuerzos internos de tracción y compresión (desarrollamos este tema en el capítulo 5).

Estas fuerzas internas, en cualquier sección, son fuerzas distribuidas.

La resultante de todas las fuerzas elementales que actúan sobre el eje neutro (\vec{T}) y la resultante de todas las fuerzas elementales que actúan debajo del eje neutro (\vec{C}) forman un par de fuerzas, cuyo valor es el momento M interno = $T \cdot z$ o M interno = $C \cdot z$. El módulo de la resultante de las fuerzas elementales que actúan en toda la sección completa se obtiene mediante la siguiente expresión matemática:

$$\Delta P = K \cdot y \cdot dF$$

que corresponde a una fuerza interna distribuida en un pequeño elemento ΔF , donde K es una constante de proporcionalidad, dF es una superficie elemental e y es la distancia al eje x que pasa por el centro de gravedad de la sección considerada. Este eje recibe el nombre de **eje neutro** o **fibra neutra** de la sección, ya que no sufre ninguna deformación.

Haciendo el $\lim \sum_1^n K \cdot y \cdot dF$ obtenemos el módulo de la resultante de las fuerzas elementales que actúan en toda la sección.

$$\lim \sum_1^n K \cdot y \cdot dF = \int K \cdot y \cdot dF$$

$$R = K \int y \cdot dF$$

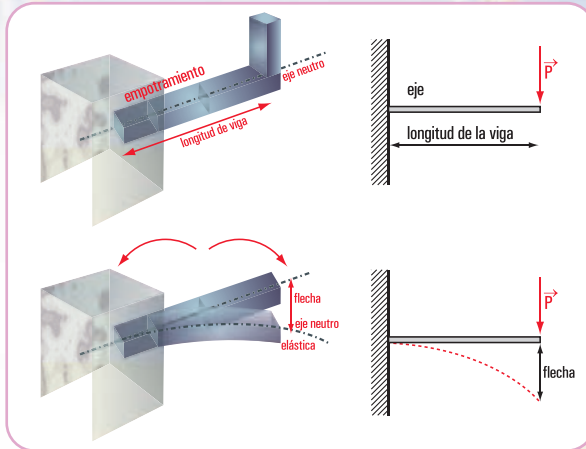


Figura 3.34

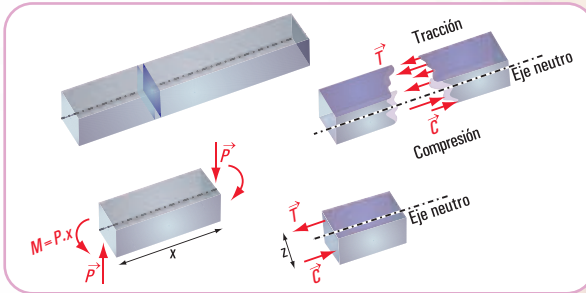


Figura 3.35



Imagen 3.8. La casa del Alcalde. Salta (principio del siglo XIX Léonie Matthis)

La integral $\int y \cdot dF$ es el momento estático o momento de primer orden de la sección respecto del eje x . Recordamos la expresión matemática indicada en (pág. 109), $\int y \cdot dF = y_G \cdot F$.

El valor de $y_G \cdot F = 0$, ya que el centro de gravedad de la sección está ubicado sobre el eje x .

Entonces $R = K \int y \cdot dF \wedge \int y \cdot dF = 0 \Rightarrow R = 0$. Si la resultante del sistema de fuerzas es cero, el sistema se reduce a un par de fuerzas (como lo hemos expresado en el capítulo 1).

El módulo del momento de este par (en el capítulo 5 veremos que se trata de un momento flexor) es igual a la suma de los momentos de las fuerzas elementales.

$$\Delta M_x = y \cdot \Delta F \Rightarrow \Delta M_x = K \cdot y^2 \cdot \Delta F$$

$$M = \lim \sum_1^n K \cdot y^2 \Delta F \Rightarrow \int K \cdot y^2 dF$$

$$M = K \int y^2 dF$$

La integral $\int y^2 dF$ recibe el nombre de **momento de inercia de segundo orden o momento de inercia** de la sección de la viga con respecto al eje x .

3.4.- Módulo resistente

En el capítulo 5 explicaremos en detalle el trabajo de la viga de un balcón. Por ahora podemos decir que el pasaje del eje recto al eje curvo, cuando la viga está cargada, se denomina **flexión**.

Es lógico pensar que esa **flexión** tiene que tener un límite para evitar que la viga se rompa por flexión. También debe ocurrir que la máxima ordenada de la deformada, a la que llamamos **flecha**, tenga un límite.

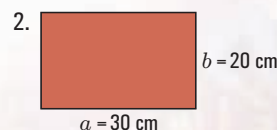
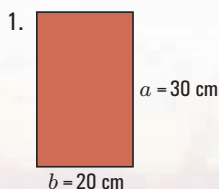
Aquí, aparece una propiedad importante de la forma de la sección en función del trabajo a la flexión: **el módulo resistente (W)**.

Si la sección es rectangular el módulo resistente es: $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$, donde b es la base de la sección, h es su altura.

Ejemplo

Se desea colocar una viga de madera de sección rectangular que tiene una sección $F = 600 \text{ cm}^2$ ($20 \times 30 \text{ cm}$), ¿cómo conviene ubicarla?

La misma sección puede ser:



El módulo resistente de cada una toma los siguientes valores:

Para la sección 1

$$W_1 = \frac{b \cdot a^2}{6} \Rightarrow W_1 = \frac{20 \text{ cm} \cdot (30 \text{ cm})^2}{6}$$

$$W_1 = 3.000 \text{ cm}^3$$

Para la sección 2

$$W_2 = \frac{a \cdot b^2}{6} \Rightarrow W_2 = \frac{30 \text{ cm} \cdot (20 \text{ cm})^2}{6}$$

$$W_2 = \frac{12.000 \text{ cm}^3}{6} \Rightarrow W_2 = 2.000 \text{ cm}^3$$

La sección de mayor módulo resistente es la que soporta mejor el trabajo de flexión, porque es la que más resiste dicho esfuerzo.

Conclusión (Figura 3.36)

1. En piezas flexionadas, el módulo resistente nos está diciendo la importancia que tiene la altura frente al ancho de la sección,
2. La forma de colocación conveniente es la denominada **de canto**.

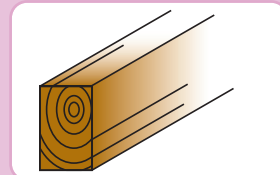


Figura 3.36 a. Viga de madera de canto

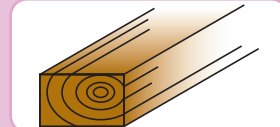


Figura 3.36 b. Viga de madera apoyada sobre el lado mayor de la sección

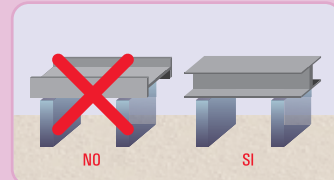


Figura 3.36. Dos vigas metálicas doble T (una colocada de canto)

3.5.- Relación entre el momento de inercia y el módulo resistente

Como hemos visto en los ítems anteriores, tanto el momento de inercia como el módulo resistente forman parte del problema de la flexión. Entonces debe existir una relación entre los mismos. Consideramos el momento de inercia de una sección rectangular y para la misma sección el módulo resistente.

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Para establecer la relación entre ambos, dividimos miembro a miembro las expresiones anteriores.

$$\frac{J}{W} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} \Rightarrow \frac{J}{W} = \frac{h}{2}$$

Esta expresión matemática nos dice que:

La relación entre el momento de inercia y el módulo resistente de una sección rectangular con respecto al mismo plano de flexión es igual a la mitad de la altura de la sección, o bien es igual a la distancia desde el eje neutro a la fibra más alejada.

En el cuadro que se muestra en la **figura 3.37** expresamos las fórmulas de los momentos de inercia, ubicación del centro de gravedad y el momento resistente de las secciones más comunes.

SECCIONES VARIAS			
Sección	Distancia del eje de gravedad "e"	Momento de inercia J	Modulo resistente $W = J/e$
	1) $e = \frac{h}{2}$ 2) $e = \frac{H}{2}$	1) $J = \frac{b \times h^3}{12}$ 2) $J = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	1) $W = \frac{b \times h^2}{6}$ 2) $W = \frac{b}{6+H} (H^2 - h^2)$
	3) $e = \frac{a}{2}$ 4) $e = \frac{a}{2} \sqrt{2}$	3) $J = \frac{a^4}{12}$ 4) $J = \frac{a^4}{12}$	3) $W = \frac{a^3}{6}$ 4) $W = 0,1179 \times a^3$
	5) $e = 0,866 \times r$ 6) $e = r$	5) $J = 0,5413 \times r^4$ 6) $J = 0,5413 \times r^4$	5) $W = \frac{5}{6} r^3 = 0,825 \times r^3$ 6) $W = 0,5413 \times r^3$
	7) $e = 0,924 \times r$	7) $J = 0,6381 \times r^4$	7) $W = 0,6906 \times r^3$
	8) $e = \frac{2}{3} h$ 9) $e = 0,5778 \times b$	$J_x = \frac{b \times h^3}{36}$ $J_y = \frac{h \times b^3}{48}$ 9) $J = 0,018 \times b^4$	$W_x = \frac{b \times h^2}{24}$ $W_y = \frac{h \times b^2}{24}$ 9) $W = 0,0313 \times b^3$
	10) $e = \frac{d}{2}$ 11) $e = \frac{D}{2}$	10) $J = \frac{\pi \times r^4}{4}$ 11) $J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	10) $W = \frac{\pi \times d^3}{32}$ 11) $W = \frac{\pi \times (D^4 - d^4)}{32 \times D}$
	$e_1 = 0,2234 \times r$ $e_2 = 0,7766 \times r$	$J_s = 0,0075 \times r^4$ $J_x = J_y = 0,137 \times r$	$W_{s_2} = \frac{0,0075 \times r^4}{e_2}$ $= 0,00966 \times r^3$
	$e_1 = 0,4244 \times r$ $e_2 = 0,5756 \times r$	$J_s = 0,055 \times r^4$ $J_x = J_y = 0,19625 \times r^4$ Momento centrífugo $J_{xy} = \frac{r^4}{8}$ $J_{ss} = 0,0165 \times r^4$	$W_s = 0,1296 \times r^3$ $W_s = 0,0956 \times r^3$

Figura 3.37. Momentos de inercia y módulos resistentes

Llegado a este punto ya podemos esbozar algunas hipótesis del porqué estaba vencida la viga del balcón de Salta.

¿Cuáles pueden ser dichas hipótesis?

Hipótesis posibles

1. Por una deficiencia en el diseño, la viga se colocó con la menor dimensión de la sección en forma perpendicular a su eje. De este modo, la resistencia a la flexión es menor que si se la hubiese colocado con el lado mayor de la sección en forma perpendicular a su eje. Es decir, tiene menor momento de inercia y menor módulo resistente, y ante cualquier incremento de la carga se produce una considerable flexión que puede llegar al colapso.
2. Se sobrecargó la viga con una carga mayor a la que se usó para el cálculo. Es una situación frecuente, de manera especial cuando se trata de construcciones viejas, cuyos planos no son conocidos y, por lo tanto, no se sabe nada de la carga máxima con la cual se la calculó. La viga se puede romper por flexión.
3. La viga soporta la flexión, pero la máxima ordenada de la deformada (elástica) supera a la admisible. Es decir el valor de la flecha es mayor que la máxima permitida. Entonces la viga puede colapsar por flecha.

3.6.- Teorema de Steiner

En el ítem 3.5 desarrollamos el momento de inercia de una sección referido a sus ejes baricéntricos. En algunos casos se hace necesario conocer el valor del momento de inercia con respecto a ejes no baricéntricos.

El denominado Teorema de Steiner, nos resuelve esta problemática.

Consideramos una sección cualquiera (dF) referida a un sistema de coordenadas (x, y) (Figura 3.38).

El momento de inercia de dicha sección con respecto a un eje baricéntrico, por ejemplo x_G , como vimos en el ítem 3.5, es:

$$J_G = \int y_G^2 dF$$

El momento de inercia respecto de un eje x paralelo al eje x_G está dado por:

$$J_x = \int y^2 dF \Rightarrow J_x = \int (y_G + d)^2 dF$$

$$J_x = \int (y_G^2 + 2 \cdot y_G \cdot d + d^2) dF \Rightarrow J_x = \int y_G^2 dF + \int (2 \cdot y_G \cdot d) dF + \int d^2 dF$$

$$J_x = J_G + 2 \cdot d \int y_G dF + d^2 \int dF$$

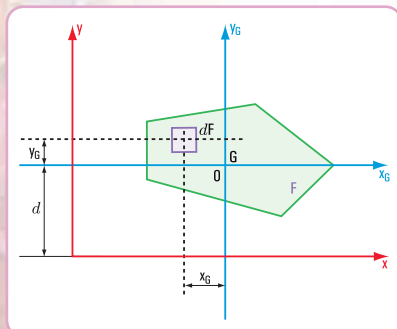


Figura 3.38

La segunda integral es el momento de primer orden de la sección con respecto del eje baricéntrico. Es igual a cero. Por lo tanto, el momento de inercia con respecto a un eje x no baricéntrico es igual a: $J_x = J_G + F \cdot d^2$

Esta expresión matemática nos dice que:

“El momento de inercia con respecto a un eje paralelo a uno baricéntrico es igual al momento de inercia de la sección con respecto a ese eje baricéntrico más el producto de la superficie de la sección por la distancia al cuadrado entre los dos ejes”.

3.7.- Radio de giro de una superficie

Consideramos una sección plana (SP) de superficie F (Figura 3.39). Su momento de inercia respecto de un eje x es J_x .

Por un momento nos imaginamos que toda esta superficie se concentra en una faja delgada paralela al eje x ; el momento de inercia de esta faja es igual al momento de inercia de la sección total.

Por lo tanto, tendrá que estar ubicada a una distancia tal que,

$$J_x = y_1^2 F \Rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$$

La distancia y_1 , se denomina radio de giro de la sección respecto al eje x .

En forma similar, consideramos que la superficie F se concentra en una faja paralela al eje y , entonces expresamos el radio de giro de una sección respecto del eje y

$$J_y = x_1^2 F \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

También, para el caso del radio de giro de una sección circular (Figura 3.40), tomando una franja circular a una distancia d_o del centro de gravedad, es:

$$d_o = \sqrt{\frac{J_o}{F}}$$

En general al radio de giro lo designamos con la letra i . La expresión matemática del radio de giro se escribe así:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \text{ radio de giro respecto del eje } x$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}, \text{ radio de giro respecto del eje } y$$

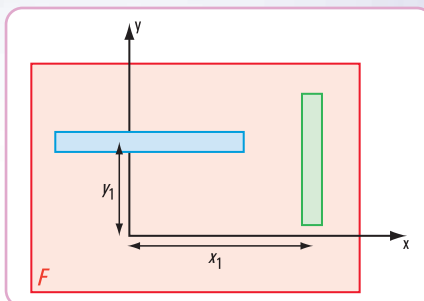


Figura 3.39

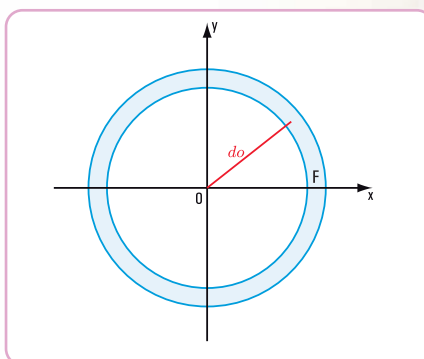


Figura 3.40

El radio de giro de una sección plana (SP) de superficie F respecto de un eje lo expresamos como la distancia i al eje desde el punto donde supuestamente se concentra la superficie F .

¡ATENCIÓN!

En el cálculo del momento de inercia J respecto del eje x , la distancia que se debe considerar a dicho eje es la ordenada y .

En el cálculo del momento de inercia J respecto del eje y , la distancia que se debe considerar a dicho eje es la abscisa x .

3.8.- Resolvemos el siguiente problema

Problema N° 3.2

...y en Salta, ¿qué hicimos?

Como entre los alumnos que participamos del viaje de estudios a Salta existen varios compañeros que



siguen la carrera de Construcciones, los profe organizaron una visita a una obra.

Enunciado

En la Oficina Técnica, un ingeniero revisa la memoria descriptiva del dimensionamiento de las vigas y columnas del entrepiso de un galpón.

Las vigas y las columnas son perfiles de acero.

Observamos en los planos que los perfiles son de sección **doble T**, **L** y **U** (Figura 3.41).

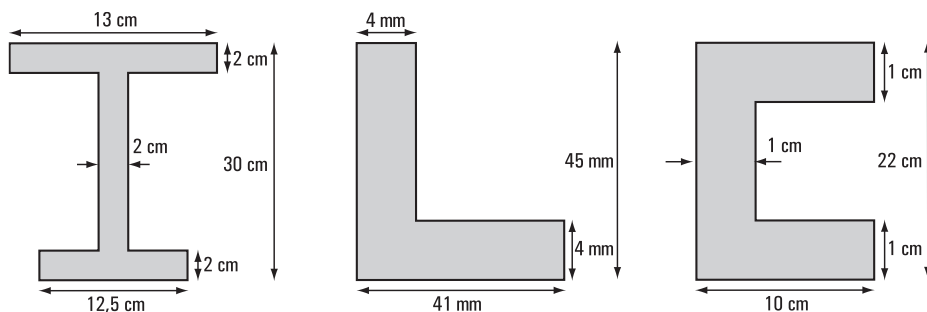


Figura 3.41

El calculista de estructuras revisa los siguientes cálculos:

1. coordenadas del baricentro de cada sección de los perfiles;
2. momentos de inercia baricéntricos: J_{x_G} ; J_{y_G} ;
3. radios de giro: i_{x_G} ; i_{y_G} .

Nosotros estamos en condiciones de ayudar al calculista. Veamos cómo.

Desarrollo

Caso 1

La sección del perfil doble T la consideramos constituida por tres figuras rectangulares: dos rectángulos, que son las alas y otro rectángulo, que es el alma.

Presentamos el despiece de la sección (Figura 3.42).

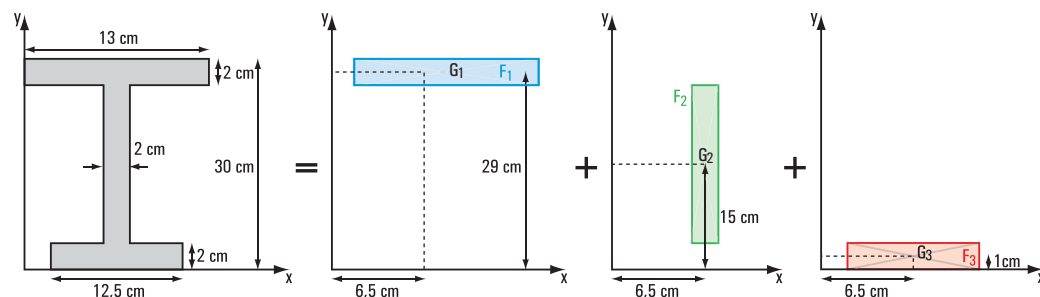


Figura 3.42

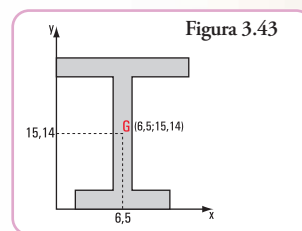
Completamos el cuadro con los valores parciales obtenidos

Figuras simples	Superficies cm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} cm	y_{G_i} cm	$x_{G_i} \cdot F_i$ cm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ cm ³
Rectángulo 1 (ala)	$F_1 = 26$	6,5	29	169	754
Rectángulo 3 (ala)	$F_3 = 25$	6,5	1	162,5	25
Rectángulo 2 (alma)	$F_2 = 52$	6,5	15	338	780
Total	$F_T = F_1 + F_2 + F_3$ $F_T = 103$	----	----	$S_y = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y}$ $S_y = 669,5$	$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x}$ $S_x = 1.559$

a. Cálculo de las coordenadas del baricentro de la sección doble T

$$x_G = \frac{S_y}{F_T} \Rightarrow x_G = \frac{669,5 \text{ cm}^3}{103 \text{ cm}^2} \Rightarrow x_G = 6,5 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{F_T} \Rightarrow y_G = \frac{1.559 \text{ cm}^3}{103 \text{ cm}^2} \Rightarrow y_G = 15,14 \text{ cm}$$



b. Cálculo de los momentos de inercia J_{x_G} ; J_{y_G}

Momento de inercia	Momento de inercia baricéntrico cm ⁴	Superficie por distancia al cuadrado cm ⁴	Momento de inercia respecto del eje baricéntrico de toda la sección
J_{x_1}	8,66	4.994,59	5.003,25
J_{x_3}	8,33	4.998,49	5.006,82
J_{x_2}	2.929,33	1,019	2.930,35
$J_{x_G} = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3}$	2.946,32	9.994,10	12.940,42
J_{y_1}	366,17	0	366,17
J_{y_3}	325,52	0	325,52
J_{y_2}	17,33	0	17,33
$J_{y_G} = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3}$	709,02	0	709,02

c. Cálculo del radio de giro i_x e i_y

$$i_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{x_G} = \sqrt{\frac{12.940,42 \text{ cm}^4}{103 \text{ cm}^2}} \Rightarrow i_x = 11,21 \text{ cm}$$

$$i_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{y_G} = \sqrt{\frac{709,02 \text{ cm}^4}{103 \text{ cm}^2}} \Rightarrow i_y = 2,62 \text{ cm}$$

Respuesta

Los cálculos que está revisando el calculista correspondientes al perfil **doble T**, tienen que dar los siguientes resultados:

- **coordenadas del baricentro:** $x_G = 6,5 \text{ cm}$; $y_G = 15,14 \text{ cm}$
- **momentos de inercia:** $J_{x_G} = 12.940,42 \text{ cm}^4$; $J_{y_G} = 709,02 \text{ cm}^4$
- **radios de giro:** $i_{x_G} = 11,21 \text{ cm}$; $i_{y_G} = 2,62 \text{ cm}$

Caso 2

La sección del perfil L la consideramos constituida por dos figuras rectangulares.

Presentamos el despiece de la sección (**Figura 3.44**).

Completamos el cuadro con los valores parciales obtenidos

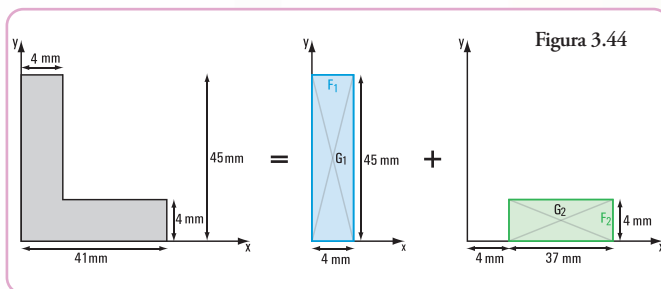
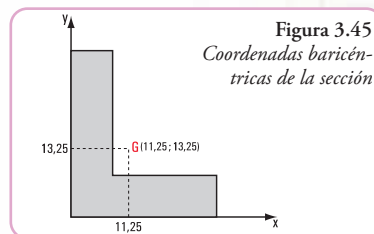


Figura simple	Superficies mm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} mm	y_{G_i} mm	$x_{G_i} \cdot F_i$ mm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ mm ³
Rectángulo 1 (ala)	$F_1 = 180$	2	22,5	360	4.050
Rectángulo 2 (ala)	$F_2 = 148$	22,5	2	3.330	296
Total	$F_T = 328$	----	----	$S_y = S_{1y} + S_{2y}$ $S_y = 3.690$	$S_x = S_{1x} + S_{2x}$ $S_x = 4.346$

a. Cálculo de las coordenadas del baricentro de la sección L

$$x_G = \frac{S_y}{F_T} \Rightarrow x_G = \frac{3.690 \text{ mm}^3}{328 \text{ mm}^2} \Rightarrow x_G = 11,25 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{F_T} \Rightarrow y_G = \frac{4.346 \text{ mm}^3}{328 \text{ mm}^2} \Rightarrow y_G = 13,25 \text{ mm}$$



b. Cálculo de los momentos de inercia J_{x_G} ; J_{y_G}

Momento de inercia	Momento de inercia baricéntrico de cada figura simple mm ⁴	Superficie por distancia al cuadrado mm ⁴	Momento de inercia respecto del eje baricéntrico de toda la sección mm ⁴
J_{x_1}	30.375	15.401,25	45.776,25
J_{x_2}	197,33	18.731,25	18.928,58
$J_{x_G} = J_{x_1} + J_{x_2}$	30.572,33	34.132,5	64.704,83
J_{y_1}	240	15.401,25	15.641,25
J_{y_2}	16.884,33	18.731,25	35.615,58
$J_{y_G} = J_{y_1} + J_{y_2}$	17.124,33	34.132,5	51.256,83

c. Cálculo del radio de giro i_x e i_y

$$i_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{x_G} = \sqrt{\frac{64.704,83 \text{ mm}^4}{328 \text{ mm}^2}} \Rightarrow i_{x_G} = 14,05 \text{ mm}$$

$$i_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{y_G} = \sqrt{\frac{51.256,83 \text{ mm}^4}{328 \text{ mm}^2}} \Rightarrow i_{y_G} = 12,50 \text{ mm}$$

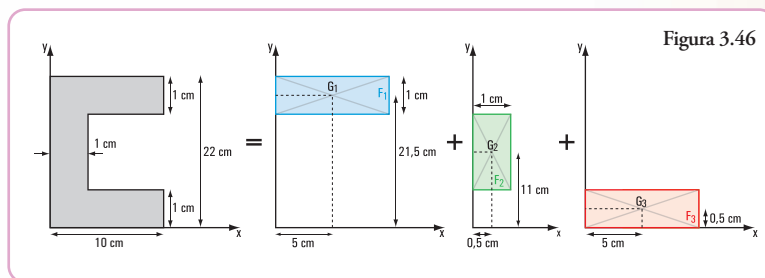
Respuesta

Los cálculos que está revisando el calculista correspondientes al perfil L tienen que dar los siguientes resultados:

- **coordenadas del baricentro:** $x_G = 11,25 \text{ mm}$; $y_G = 13,25 \text{ mm}$
- **momentos de inercia:** $J_{x_G} = 64.704,83 \text{ mm}^4$; $J_{y_G} = 51.256,83 \text{ mm}^4$
- **radios de giro:** $i_{x_G} = 14,05 \text{ mm}$; $i_{y_G} = 12,50 \text{ mm}$

Caso 3

La sección del perfil U la consideramos constituida por tres figuras rectangulares. Presentamos el despiece de la sección (Figura 3.46):



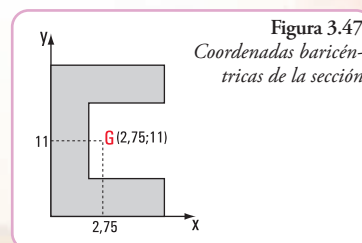
Completamos el cuadro con los valores parciales obtenidos

Figura simples	Superficies cm ²	Coordenadas baricéntricas		Momentos estáticos	
		x_{G_i} cm	y_{G_i} cm	$x_{G_i} \cdot F_i$ mm ³	$y_{G_i} \cdot F_i$ mm ³
Rectángulo 1 (ala)	$F_1 = 10$	5	21,5	50	215
Rectángulo 2 (alma)	$F_2 = 20$	0,5	11	10	220
Rectángulo 3 (ala)	$F_3 = 10$	5	0,5	50	5
Total	$F_T = 40$	----	----	$S_y = 110$	$S_x = 440$

a. Cálculo de las coordenadas del baricentro de la sección U

$$x_G = \frac{S_y}{F_T} \Rightarrow x_G = \frac{110 \text{ cm}^3}{40 \text{ cm}^2} \Rightarrow x_G = 2,75 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_x}{F_T} \Rightarrow y_G = \frac{440 \text{ cm}^3}{40 \text{ cm}^2} \Rightarrow y_G = 11 \text{ cm}$$



b. Cálculo de los momentos de inercia J_{x_G} ; J_{y_G}

Momento de inercia	Momento de inercia baricéntrico de cada figura simple cm^4	Superficie por distancia al cuadrado cm^4	Momento de inercia respecto del eje baricéntrico de toda la sección cm^4
J_{x_1}	0,83	1.102,5	1.103,33
J_{x_2}	666,67	0	666,67
J_{x_3}	0,83	1.102,5	1.103,33
$J_{x_G} = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3}$	668,33	2.205	2.873,33
J_{y_1}	83,33	50,63	133,96
J_{y_2}	1,67	101,25	102,92
J_{y_3}	83,33	50,63	133,96
$J_{y_G} = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3}$	168,33	202,51	370,84

c. Cálculo del radio de giro i_x e i_y

$$i_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{x_G} = \sqrt{\frac{2.873,33 \text{ cm}^4}{40 \text{ cm}^2}} \Rightarrow i_{x_G} = 8,48 \text{ cm}$$

$$i_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_G}}{F_T}} \Rightarrow i_{y_G} = \sqrt{\frac{370,84 \text{ cm}^4}{40 \text{ cm}^2}} \Rightarrow i_{y_G} = 3,04 \text{ cm}$$

Respuesta

Los cálculos que está revisando el calculista correspondientes al perfil \subset tienen que dar los siguientes resultados:

- **coordenadas del baricentro:** $x_G = 2,75 \text{ cm}$; $y_G = 11 \text{ cm}$
- **momentos de inercia:** $J_{x_G} = 2.873,33 \text{ cm}^4$; $J_{y_G} = 370,84 \text{ cm}^4$
- **radios de giro:** $i_{x_G} = 8,48 \text{ cm}$; $i_{y_G} = 3,04 \text{ cm}$

Para pensar y resolver

Proponemos los siguientes problemas para pensar y resolver, aplicando todos los conocimientos dados en el presente capítulo.

Al final del libro, encontrarán el desarrollo y la solución a cada actividad planteada.

Intenten resolver cada uno, sin mirar su desarrollo y su resultado.

En nuestro viaje a Salta nos llamó la atención una serie de torres de transmisión.

Uno de nuestros profes, frente a nuestro asombro, nos explicó el tipo de estructura que tienen todas estas torres. Nos dijo que, a diferencia de una viga de alma llena, las torres tienen una estructura que se denomina de **alma calada**,



Imagen 3.9
Torres de
transmisión



Imagen 3.10. Torre Eiffel

Figura 3.48

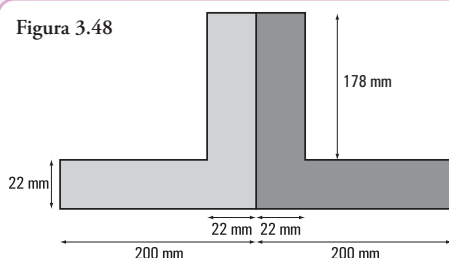


Imagen 3.11
Convento de
San Bernardo



Imagen 3.12. Procesión en Salta - Saliendo del convento
de San Bernardo. Pintura de Léonie Matthijs

similar a la de otra majestuosa torre, que cumple una función diferente a las torres de transmisión, estamos nombrando a la emblemática **Torre Eiffel** (París - Francia).

Problema 3.3

Enunciado

La estructura de alma calada de una de las torres de alta tensión está formada por una serie de reticulados, cuyos elementos son perfiles de acero. Una de sus barras está constituida por dos perfiles L.

Suponiendo que las dimensiones de la sección de cada perfil son las indicadas en la **figura 3.48**, ¿cuáles serán los valores de: $x_G, y_G, J_{x_G}, J_{y_G}, i_{x_G}, i_{y_G}$ de la barra en su conjunto?

Problema 3.4

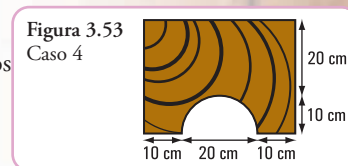
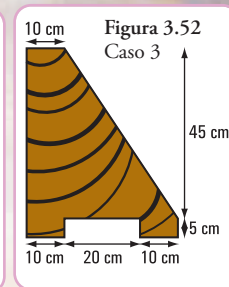
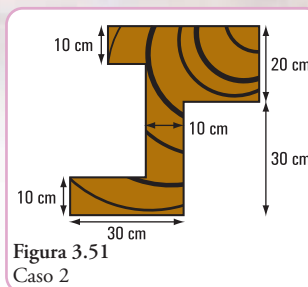
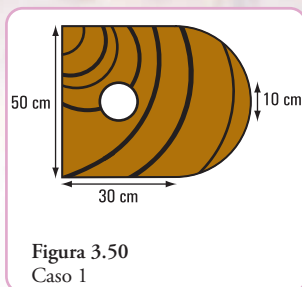
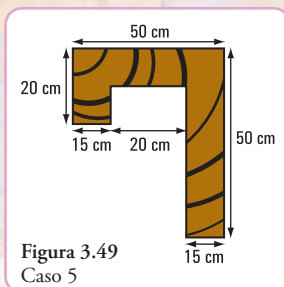
Antes de partir para Buenos Aires, visitamos el sector del Convento de San Bernardo, en la misma ciudad de Salta, donde venden productos artesanales realizados con madera. Queríamos comprar algunos recuerdos para nuestras familias: portarretratos tallados; paragüeros, portalápices, maceteros pequeños, tapas para archivo de revistas, tapas para álbumes, etc. Como era de esperar, cada uno compró un souvenir para los suyos. Pero nuestros profes, que siempre aprovechan toda ocasión para buscar alternativas de aprendizaje, al ver tanto trabajo interesante, solicitaron una visita guiada al lugar de fabricación.

Y... hacia allí fuimos.

Enunciado

Visitamos la Oficina Técnica; llena de planos, croquis, libros y, también recortes de madera. Los profesionales calculaban, en ese momento, los siguientes valores: $x_G, y_G, J_{x_G}, J_{y_G}$ de esos recortes.

Los trozos de madera tenían las formas indicadas en las figuras:



¡Qué alegría!

Nosotros también podemos realizar esos cálculos, o sea sabemos hallar los valores de:

Caso 1

$x_G, y_G, J_{x_G}, J_{y_G}$

Caso 2

x_G, y_G

Caso 3

x_G, y_G

Caso 4

x_G, y_G

Caso 5

$x_G, y_G, J_{x_G}, J_{y_G}$

Entonces ¡a calcular!

Vigas compuestas

Para determinadas construcciones metálicas se utilizan perfiles de acero contruidos con perfiles normales (cuyas dimensiones están tabuladas), y chapas agregadas. Esta situación, por lo general, se da cuando el perfil normal no es suficiente para resistir determinada carga y, el que le sigue en tamaño es demasiado grande, por lo que no resulta económico.

Los siguientes son algunos modelos de vigas contruidas con perfiles normales y chapas. Se utilizan distintos medios de unión: soldadura, bulones, etc. para unir el perfil y la chapa.

Cada una de las chapas que se agregan recibe el nombre de **platabandas**.

Ejercicio N° 3.1

Un perfil normal doble T tiene agregadas dos **platabandas**. Las dimensiones son las que se indican en la **figura 3.57**.

¿Cuáles son las coordenadas del baricentro?

¿Cuál es el valor de J_{x_G} ?

MODELO 1

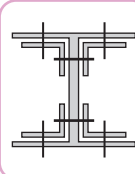


Figura 3.53

MODELO 2

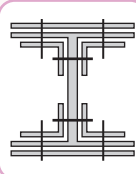


Figura 3.55

MODELO 3

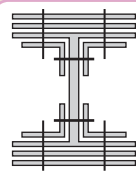


Figura 3.56

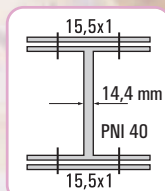


Figura 3.57

Epílogo

Hemos recorrido juntos este capítulo que, como el lector pudo apreciar, es totalmente distinto a los capítulos 1 y 2, en cuanto al tipo de conceptos que hemos incorporado.

Conocer la ubicación del baricentro de la sección de un elemento estructural es fundamental, porque en él se concentra el peso del cuerpo y, por lo tanto, constituye el punto por donde pasa la recta de acción de la fuerza de gravedad. Resulta muy importante saber las coordenadas de este punto, porque una mala distribución de las cargas puede provocar excentricidades que, si no se las consideran, ni en el diseño, ni en el cálculo, llevarán seguramente al desequilibrio del elemento estructural.

Por una incorrecta distribución de las cargas, un barco carguero puede, frente a fuerzas externas como, por ejemplo un fuerte oleaje, dar una vuelta campana y desaparecer en el mar.

La ubicación del centro de gravedad se hace mediante la determinación de sus coordenadas. Nosotros trabajamos con superficies, es decir con objetos bidimensionales, por lo tanto las coordenadas son (x_G, y_G) .

El valor de las coordenadas del baricentro se halla mediante la expresión matemática que vincula a dichas coordenadas con el denominado momento de primer grado o momento estático de superficie.

Por otra parte, el momento de segundo orden y el módulo resistente de una sección, contenidos que también desarrollamos en este capítulo, son magnitudes que dependen de la geometría de la sección. Estos valores referidos a figuras simples son conocidos y, por lo general aparecen en la literatura específica. No sucede lo mismo cuando se tienen que hallar esos valores, pero correspondientes a secciones compuestas. En este caso, cobra importancia el denominado Teorema de Steiner ya que nos permite determinar el valor del momento de inercia de una sección con respecto a un eje no baricéntrico.

Además de los conceptos mencionados: centros de gravedad, momento de segundo orden, módulos resistentes, aparece el famoso *radio de giro* que, para muchos constituye una simple operación matemática. Sin embargo, el *radio de giro* es una *distancia virtual*. Es la distancia desde un eje al punto donde habría que ubicar la totalidad de la superficie para obtener el mismo momento de inercia con respecto a dicho eje: $J = Fi$

Los problemas planteados, cuya acción transcurre en escenarios reales, favorecen la realización de un óptimo aprendizaje de temáticas que, si bien son simples, en algunos casos, no son fáciles de comprender.

Al término del capítulo, y siempre de la mano de nuestros amigos Coni y Gastón, dejamos **problemas para pensar y resolver**, cuyos desarrollos y soluciones se encuentran al final del libro.

Los invito a continuar...
El próximo capítulo nos espera.

