

# LA ESTÁTICA EN NUESTRO HÁBITAT

## Prefacio

En los capítulos 1, 2 y 3 hemos desarrollado los conceptos fundamentales de la estática referidos, en general a problemáticas de los sólidos rígidos. En el capítulo 4 analizamos el comportamiento de la naturaleza visto desde los principios de la estática. En este capítulo trabajamos esos mismos conceptos, pero vinculados, específicamente, a cuerpos rígidos relacionados con las estructuras edilicias.

Esta especificidad, hace que debamos incorporar conceptos nuevos que tienen que ver con las diferentes formas de vinculación y con lo que le sucede al material internamente, cuando está sometido a fuerzas externas.

Los temas que desarrollamos en este capítulo son:

1. las estructuras: concepto y finalidad. El equilibrio, la resistencia y la estabilidad de las estructuras y de sus elementos constitutivos,
2. cargas actuantes sobre una estructura,
3. tipos de apoyos. Cargas activas y reactivas,
4. esfuerzos característicos: momento flexor, esfuerzo de corte y esfuerzo normal,
5. relaciones entre carga, momento flexor y esfuerzo de corte,
6. esfuerzos de tracción y de compresión. Estructuras de flexión. Análisis de casos.

Como en los demás capítulos, los contenidos teóricos siempre son acompañados por ejercicios y/o problemas de aplicación. Las actividades las presentamos con una dificultad gradual y creciente: de lo más simple a lo más complejo, de lo más fácil a lo más difícil.

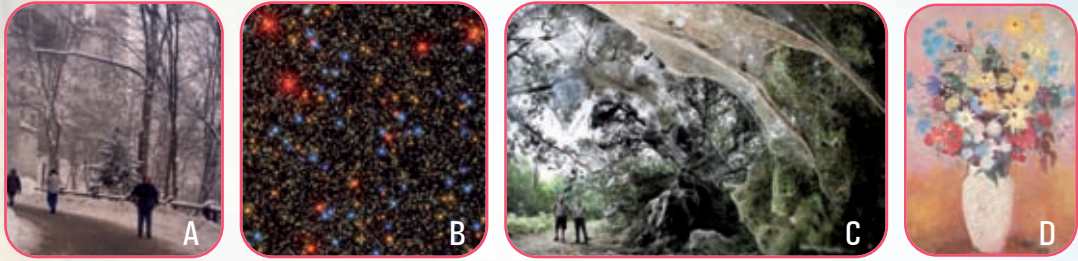
Al término del capítulo, tal como lo hicimos con los anteriores, planteamos problemas y ejercicios para pensar y resolver. Si bien el lector encontrará al final del libro el desarrollo de dichos problemas y ejercicios, creemos que cada uno hará el esfuerzo para intentar resolverlo solo. Por otra parte, si el lector necesita leer el procedimiento que conduce al resultado debe saber que dicho procedimiento es un modelo de resolución, que no es único, y que resulta valioso ensayar otro modelo para llegar al resultado solicitado.

*...los invito a recorrer  
los contenidos de este  
interesante capítulo*



## 5.1.- Las estructuras: concepto y finalidad

La totalidad de los elementos que conforman el Universo tienen una determinada organización y orden, cada uno en su contexto. El orden y la organización son los determinantes que hacen resistentes a dichos elementos frente a diferentes tipos de esfuerzos.



*Imagen 5.1. Diferentes estructuras: de árboles de un camino de Neuweinstein (A); de la Galaxia Omega Centauri (B); de la telaraña más grande del mundo (Parque del Lago Tawakoni - Texas) (C); de las flores del jarrón, obra pictórica de Odilón Redon*

Una lejana estrella, una partícula molecular, el reticulado de una telaraña, el conjunto de músculos y huesos del cuerpo humano y de los animales, las raíces, el tronco y las ramas de los árboles,..., todos disponen de una conformación que les permite soportar cargas sin romperse frente a cargas admisibles. Esa conformación es lo que se denomina **estructura**.

Llevando este concepto a los edificios, también en ellos la **estructura** constituye una parte, tal vez podríamos decir, la más importante. **La estructura se define como el conjunto de elementos que permite soportar y transmitir las cargas que actúan en el edificio.** Pero decimos que forma parte de él, pues la estructura no es lo único que un edificio posee. **Un edificio tiene otras partes, además de la antedicha, con finalidades específicas y diferentes. Claro está, que existen finalidades, algunas esenciales y otras accesorias.**

Una posible clasificación de las finalidades funcionales primarias de cualquier construcción edilicia es la siguiente:

1. soportar y transmitir al suelo cargas fijas y móviles;
2. soportar empujes horizontales: empujes de tierras, aguas, áridos, etc.;
3. aislar un determinado volumen del exterior; es decir defender ese volumen de agentes naturales exteriores: viento, lluvia, nieve, ruidos, temperaturas extremas, vistas de otras personas,... y separar ambientes.

Para cumplir con cada una de las finalidades, existen diferentes elementos constructivos:

1. entresijos; losas de locales de edificios, de viaductos, de pasarelas...; vigas; columnas; pórticos; bases, etc., constituyen elementos que permiten resolver la primera finalidad;
2. paredes de depósitos y silos; muros de contención son algunos de los ejemplos que conducen al segundo caso;
3. muros y cubiertas dan solución a la tercera finalidad.

Cualquier tipo de construcción edilicia debe, obligatoriamente, asegurar la inmovilidad total y parcial, esto significa el mantenimiento estático de las formas en el transcurso del tiempo. Si bien la función estática es esencial, no es la única. Además de esta función, al momento de proceder a pensar en el



diseño y ejecución de una obra constructiva, debemos considerar otras cuestiones, tales como: exigencia estética y económica. Entonces el problema de las finalidades lo podemos plantear desde estas cuatro premisas<sup>1</sup>:

1. finalidad utilitaria;
2. estructural o estática;
3. exigencia estética;
4. exigencia económica.

Lograr cada una de ellas implica determinar soluciones que dependen del material; del tipo estructural; forma y dimensiones, y del proceso de construcción. Esto implica pensar, de manera simplista que, la finalidad utilitaria está vinculada estrechamente a los materiales; la función estática al tipo de estructura; la estética a la forma y dimensiones, y el proceso de construcción y diseño a la exigencia económica. Decimos simplista porque en realidad, todas están estrechamente relacionadas, esto significa que las finalidades, como las soluciones no se dan en forma independiente, sino que, entre todas, existen interrelaciones, ya que el conjunto constituye un *sistema*.

Si asimilamos esto a una función matemática podemos expresar esta función en forma de tabla de la siguiente forma:

x (variable independiente)	f(x) (función) (variable dependiente)
Material	Utilitaria
Tipo estructural	Estática
Forma y dimensiones	Estética
Proceso de construcción	Económica

La **finalidad utilitaria** está vinculada al material que se use. En una estructura pueden usarse diferentes tipos de materiales. La elección depende de varios factores: existencia en la zona, económicos, estáticos, y, fundamentalmente, que responda al tipo de esfuerzo estructural.

La **función estática** está directamente relacionada con el tipo de estructura. El tipo de estructura tiene que ver con la función que debe cumplir cada elemento estructural del edificio. Así podemos decir que, una losa o bien una viga, son elementos estructurales que trabajan a la flexión; una columna puede trabajar a la compresión pura o a la flexo-compresión, un tensor a la tracción,...

La **función estética** también debe ser considerada estructural pues, está íntimamente vinculada a las formas y dimensiones de cada uno de los elementos que conforman la estructura.

La **función económica** tiene una íntima relación con el proceso de construcción.

Cada una de las funciones descritas implica el planteo de diferentes situaciones problemáticas a resolver. La búsqueda de solución a cada una y la elección de la solución óptima implica la interrelación entre todas las funciones, ya que cada una no se da en forma independiente, sino que se produce una interdependencia entre todas. Esto es así porque, cuando hablamos de una estructura debemos pensar, en realidad, en un sistema estructural, donde cada una de sus partes (elementos estructurales) cumple una función, íntimamente ligada a la función de las otras partes y del todo.

<sup>1</sup> Fuente: Eduardo Torroja. *Razón y ser de los tipos estructurales*. Instituto Eduardo Torroja - Madrid.

## 5.2.- Tres conceptos fundamentales

El equilibrio, la resistencia y la estabilidad constituyen tres conceptos que deben ser considerados cuando pensamos en el diseño de una estructura.

### 1. Equilibrio

El equilibrio debe asegurar la inmovilidad de la estructura en su conjunto y de cada uno de sus elementos, en forma independiente. Por supuesto, que esta exigencia no puede imponerse de manera estricta, y un cierto grado de movimiento, no sólo es inevitable, sino necesario; pero si comparamos los desplazamientos de los elementos estructurales con sus dimensiones, dichos desplazamientos son tan pequeños que no se percibe la movilidad ni la deformación.

Cuando mencionamos la cuestión del equilibrio conviene recordar que el equilibrio puede ser descrito como:

- estable;
- inestable;
- indiferente.

Para el caso de los cuerpos rígidos, como en este caso, el de los edificios, las categorías del equilibrio se pueden analizar de manera conveniente en función de la posición del centro de gravedad.

*El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el cual se puede considerar que todo el peso del mismo está concentrado en él.*

#### • Equilibrio estable

Si un cuerpo está en equilibrio estable, cualquier desplazamiento pequeño implica una fuerza de restauración que tiende a regresar al cuerpo a su posición original de equilibrio.

#### Ejemplo 1

El muñequito bailarín tiene unas pelotitas colgadas de su cuello. Cuando sacamos de la posición 1 a una de ellas y la llevamos a la posición 2, la pelotita pierde su equilibrio.

La fuerza  $\vec{P}$  es la fuerza peso de la pelota. En la posición 2 la descomponemos en la dirección perpendicular a la trayectoria y en la misma dirección; se obtienen las fuerzas  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$ .

$\vec{P}_1$  se equilibra con la fuerza de rozamiento del plano de deslizamiento con la pelota y la  $\vec{P}_2$  es la fuerza de restauración, o sea la fuerza que hace que el cuerpo vuelva a su posición inicial.

#### Ejemplo 2

Un pequeño desplazamiento puede hacer que el punto G de un edificio pase a G' y luego, vuelva a su posición original.

*Un cuerpo está en equilibrio estable si su centro de gravedad queda arriba y la dirección de la fuerza peso pasa por su base original de apoyo.*

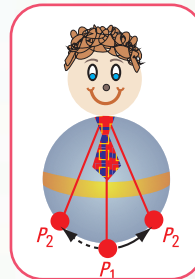


Figura 5.1. Muñequito bailarín con la cabeza hacia arriba

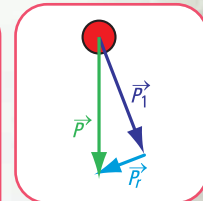


Figura 5.2. Esquema de fuerzas

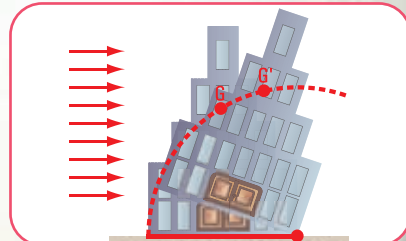


Figura 5.3. Esquema de un edificio en equilibrio estable



### • Equilibrio inestable

En este caso cualquier desplazamiento, aunque sea pequeño, de la posición de equilibrio, provoca una fuerza que tiende a alejar al objeto de esa posición.

### Ejemplo

Coloquemos el muñequito bailarín cabeza abajo. Si separamos una de las pelotitas de su posición de equilibrio, la pelotita no vuelve a su posición inicial.

Como observamos, el equilibrio está íntimamente relacionado con el centro de gravedad.

Los cuerpos rígidos con bases amplias y centros de gravedad bajos son más estables y menos propensos a voltearse. Es el caso de los automóviles de carrera de alta velocidad, que tienen neumáticos anchos y centros de gravedad cercanos al suelo. Son muy estables.

En cambio un acróbata que apoya la cabeza en una barra o en la cabeza de un animal o de otra persona tiene la base de apoyo muy angosta, o sea, una superficie pequeña de contacto de la cabeza.

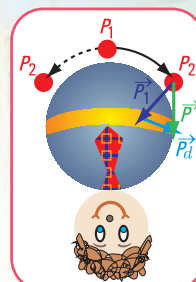


Figura 5.4. Muñequito bailarín con la cabeza hacia abajo y la pelotita en la parte exterior

Si el centro de gravedad está sobre la superficie de apoyo, se mantiene el equilibrio, pero el desplazamiento de unos pocos centímetros será suficiente para sacarlo del mismo.



Imagen 5.2. Acróbatas en un circo

### Coni pasea en su bici

Analicemos qué sucede cuando Coni toma una curva o bien cuando da una vuelta en una superficie plana.

¿Por qué en este caso Coni se inclina hacia el interior de la curva?

Podemos pensar que Coni se cae.

¡No! Aumenta su estabilidad.

Veamos las fuerzas actuantes:

1. Coni tiene un peso; la fuerza peso  $\vec{P}$  está aplicada en el centro de gravedad G;
2. la fuerza  $\vec{f}_s$ ; fuerza de fricción estática entre las ruedas y el suelo;
3. la fuerza normal  $\vec{N}$ ; reacción del suelo sobre la bicicleta.
4. cuando Coni quiere dar un giro requiere de una fuerza, ésta es la fuerza centrípeta (fuerza dirigida hacia el centro de la trayectoria circular)  $\vec{f}_c = \vec{f}_s$ ,
5. la fuerza reactiva  $\vec{R}$ , resultante de las fuerzas  $\vec{N}$  y  $\vec{f}_c$ .

Si Coni trata de tomar la curva mientras permanece vertical, la recta de acción de la fuerza normal  $\vec{N}$  coincide con la recta de acción de  $\vec{P}$ , y la recta de acción de la resultante  $\vec{R}$  no pasa por el centro de gravedad G. Suponemos que existe un eje de rotación en el punto G, entonces se produce un **momento estático** en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

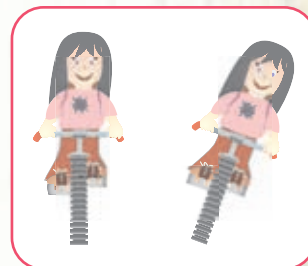


Figura 5.5. Coni tomando una curva

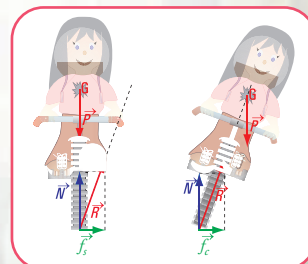


Figura 5.6. Coni. Esquema de fuerzas actuantes

Este **momento** provoca un giro en la bicicleta que hace que las ruedas se deslicen hacia adentro. Entonces si Coni se inclina hacia el interior, de tal modo que la recta de acción de la resultante pase por el centro de gravedad G, el momento es cero, ya que no existe distancia entre la recta de acción de la resultante y el punto G.

### ¿Por qué la bicicleta gira?

Cuando Coni se inclina hacia adentro de la curva, las fuerzas  $\vec{P}$  y  $\vec{N}$  forman una cupla<sup>2</sup>. El momento de la cupla es  $M = P \cdot e$ , siendo  $e$  la separación entre las rectas de acción de ambas fuerzas. El momento provoca un giro que, junto con el giro del manubrio y el movimiento de la bicicleta hace que ésta gire, y Coni y la bicicleta no se caigan.

En el caso que Coni se incline y mantenga la bicicleta quieta, ella y la bicicleta se caerán debido a la rotación alrededor del eje.

#### • Equilibrio indiferente

En este caso cualquier desplazamiento que se provoque, el cuerpo no retorna. Es el caso de la pelota cuando se desplaza en un plano.

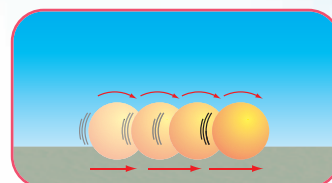


Figura 5.7. Desplazamiento de una pelota sobre un plano

## 2. Estabilidad

Pasemos ahora, a analizar el tema de la estabilidad a través de un ejemplo específico de un elemento estructural de un edificio.

Consideramos el caso de una columna compuesta, constituida por perfiles de acero, que está sometida a una carga centrada (dirección de la carga pasa por el centro de gravedad de la columna)

Los perfiles son doble T y el arrostramiento está constituido por perfiles L en forma de enrejado simple (los perfiles L se colocan en diagonal y en horizontal). La columna está sustentada con un apoyo empotrado y el otro libre (Figura 5.8).

El sistema constituye un sistema en equilibrio estático y estable. En el caso que se produzca un empuje lateral  $\vec{F}_v$ , por ejemplo la acción del viento, y no haya sido considerado en el momento del dimensionamiento de la columna, la estructura podría volcar. La estructura pierde el equilibrio estable.

Situación idéntica se produce en el caso de las fuerzas provocadas por la acción de un sismo. En estos casos la **fuerza peso** tiene la función de **fuerza estabilizadora**, mientras que las **fuerzas del viento** o de un **sismo** son **fuerzas desestabilizadoras**.

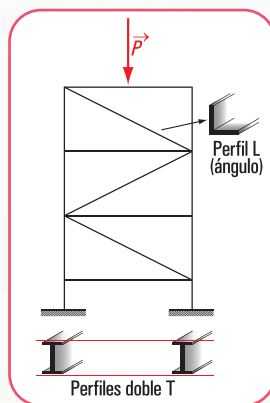


Figura 5.8. Esquema de una columna compuesta metálica

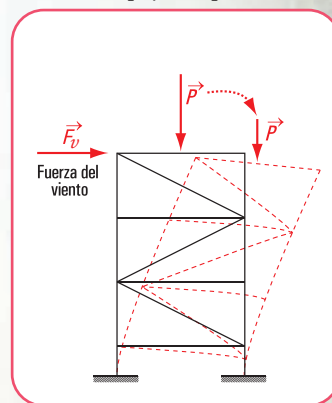


Figura 5.9. Esquema de una columna compuesta metálica sometida a la acción del viento

<sup>2</sup> Cupla: par de fuerzas de igual intensidad, direcciones paralelas y sentidos contrarios.



## ¿Por qué resulta importante exigir a una estructura la estabilidad ?

Esta exigencia está vinculada con el peligro que implican los movimientos inaceptables del edificio.

Un edificio, ubicado en una zona no protegida y que no está correctamente sustentado en el suelo o no está equilibrado, puede inclinarse si es sometido a la acción de un fuerte viento, por ejemplo de un huracán. En este caso, el centro de gravedad del edificio baja, y la recta de acción de la fuerza peso cae afuera de la base de sustentación. Se trata de un equilibrio inestable.

Este peligro también se da cuando el edificio no está equilibrado y apoya en terreno en declive. El edificio tiende a deslizarse hacia abajo por acción de su propio peso.

Otra situación de inestabilidad se produce cuando el edificio, que no está bien equilibrado, apoya en suelos con asentamientos desiguales. Es el caso de la Torre de Pisa.



Imagen 5.3. Campanario de la catedral de Pisa (1992)

*El profesor Michele Jamiolkowski, ex presidente de la Comisión Internacional que trabajó en la salvaguardia de la Torre de Pisa, manifestó a periodistas del periódico Corriere della Sera, que la Torre, después de los trabajos que se hicieron para enderezarla, ya no se “moverá, al menos, en los próximos 300 años”. Los trabajos consistieron en extraer toneladas de suelo bajo el campanario del lado opuesto al de la inclinación, de tal forma que el edificio cediera y al mismo tiempo se asentara sobre el suelo de ese lado.*

### 3. Resistencia

La **resistencia** está íntimamente relacionada con el material y con las cargas actuantes sobre la estructura. Depende del material porque la tensión o resistencia es la fuerza por unidad de superficie con la que internamente reacciona el material frente a las fuerzas o cargas externas.

## 5.3.- Las cargas actuantes sobre una estructura

### • Cargas externas

Sobre una estructura actúa una determinada variedad de fuerzas (cargas). Estas fuerzas deben ser conocidas por los proyectistas, fundamentalmente, por el diseñador de estructuras, ya sean fuerzas que cargan a una estructura simple (vivienda unifamiliar), como a una más compleja (puente carretero colgante).

La importancia que tiene el conocimiento de las cargas sobre una estructura se conoce desde siempre y, el hombre lo ve en la naturaleza, por ejemplo lo observa cuando las ramas de un árbol frutal se encorvan por efecto del peso de su fruto. Si la rama no tiene capacidad para soportar la carga, se rompe.



Imagen 5.5  
Vivienda unifamiliar - Villa La Angostura - Argentina



Imagen 5.4  
Puente que cruza uno de los valles de la ciudad de Luxemburgo (Gran Ducado de Luxemburgo)



La determinación de las cargas que actuarán en un edificio, constituye una de las primeras tareas del calculista de estructuras. Esto no es simple, sobre todo cuando se trata de fuerzas no gravitatorias, por ejemplo las fuerzas debidas al viento o a un sismo. El diseñador y calculista de estructuras no debe pasar por alto las posibles cargas que pueden actuar sobre la estructura durante toda su vida útil. Por ejemplo, en las viviendas de Villa La Angostura (Argentina) es imprescindible considerar la sobrecarga producida por la nieve, igual que en Covas (Galicia - España); la diferencia entre estos dos tipos de viviendas, en cuanto a la carga que soportan sus cubiertas, consiste en el tipo de material usado en ellas. Mientras que en el sur de nuestro país es común usar tejas, en Galicia la cubierta, como se ve en las imágenes, se construye con pizarra, muy abundante en la zona.

El hecho de no considerar la importancia que tienen las cargas ha provocado lamentables desastres estructurales, de manera especial cuando se desea cambiar el destino de un edificio existente y no se toman los recaudos correspondientes, como el caso del salón de fiestas de Israel, en donde colapsó el entrepiso cuando se estaba celebrando una boda.

Otro caso, muy común, lo constituye la transformación que muchas veces se hace de un edificio, por ejemplo destinado originalmente a un cine en un boliche bailable, donde el escenario o el entrepiso de la platea alta se utiliza como pista de baile, sin realizar los refuerzos estructurales que se requieren<sup>3</sup>.

*Entre las hipótesis que los ingenieros estructuralistas de Israel esbozaron como posibles causas del accidente podemos mencionar: la carga accidental considerada en el cálculo no se correspondió con el destino dado al local—alrededor de 650 personas se encontraban entre los invitados, muchos de los cuales al momento del accidente estaban bailando— o bien el cálculo o la construcción fueron mal realizados.*

Veamos otra situación similar.

A principios del año 2006 se derrumbó una pista de patinaje sobre hielo en Bad Reichenhall (Alemania) por el exceso de nieve acumulada en su techo. Evidentemente, la estructura no soportó la carga accidental. Aquí las causas pudieron ser por falta de mantenimiento o bien, porque al momento del diseño de la cubierta no se consideró el peso total de la sobrecarga debido a la gran cantidad de nieve acumulada.

Entonces debemos plantearnos las clases o tipos de cargas posibles que pueden actuar sobre una estructura.

♦ **Cargas permanentes** (también se las suele llamar cargas muertas)

<sup>3</sup> Lamentablemente esta situación se repitió en la madrugada del 10 de setiembre de 2010, en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. En el salón de fiestas "Beara" se usó una estructura destinada a un estar como pista de baile para más de 100 jóvenes. La estructura colapsó provocando dos muertes.



*Imagen 5.6. En la casa de mi madre; Covas - Galicia - España*



*Imagen 5.7. Caída del techo por efecto de la nieve en Bad Reichenhall - República Federal de Alemania (2 de enero de 2006)*



*Imagen 5.8. Caída del techo en Alemania. (2 de enero de 2006)*



Son cargas de magnitud constante y se mantienen en el mismo lugar.

Pertenecen a este tipo de cargas: peso propio de la estructura; peso propio de los muros, pisos, techos; etc. Estas son cargas que se las pueden determinar con bastante exactitud.

Se puede evaluar este tipo de cargas mediante cálculos y por consulta a tablas y folletos que proveen los fabricantes de materiales.

#### ♦ Cargas accidentales o sobrecargas

Los edificios son proyectados y calculados para un uso determinado. Una vez realizada la construcción, no se debe cambiar su destino.

*Ejemplo: un edificio diseñado para una vivienda o para un aula de una escuela no se puede, alegremente, destinarlo a otro fin, por ejemplo a un gimnasio o un salón de baile. En caso, de tener la necesidad de hacerlo, debe verificarse si los elementos de la estructura soportan la magnitud de las nuevas cargas producidas por el cambio de destino.*

Los valores de las cargas, según el destino, están tabulados. En toda la documentación siempre debe figurar el valor de la sobrecarga que consideró el calculista de estructura.



Imagen 5.9. Una nevada en Neuweinstein República Federal de Alemania

#### ♦ Cargas vivas o dinámicas

Son cargas que no permanecen en una sola ubicación y cuya magnitud puede variar. Existen **cargas móviles** (vehículos, personas, grúas)...; cargas por **impacto**, que se originan por la vibración de las cargas móviles.

Las fuerzas (cargas) antes mencionadas son **fuerzas externas**. Estas fuerzas representan la **acción**. Por eso se llaman fuerzas **externas activas**. Son responsables del comportamiento externo del elemento estructural. Existen otras fuerzas externas: son las **fuerzas reactivas**.

Las estructuras están integradas, por lo general, por varios elementos (piezas) que requieren tener vínculos entre sí para permitir la transmisión de las fuerzas que actúan sobre la construcción.

Veamos cómo entran en juego las fuerzas reactivas. Para ello, analizamos el concepto de vínculo: **toda condición geométrica que limita la posibilidad de movimiento de un cuerpo**.

Los vínculos responden a disposiciones constructivas regidas por las **propiedades tecnológicas y mecánicas** de los materiales. Son apoyos y nudos entre las piezas que unen.

Los **apoyos** se basan en la posibilidad de asentar una pieza sobre otra.

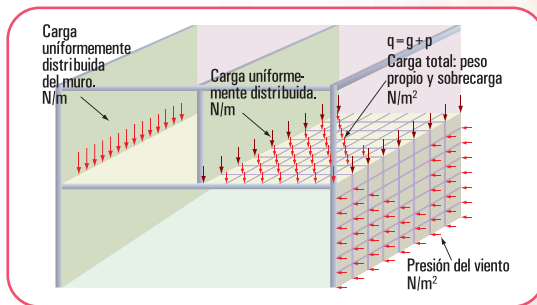


Figura 5.10. Tipos de cargas actuantes en un edificio



Imagen 5.11. Dos tribunas de fútbol (hinchas de River Plate y de Boca)

### Ejemplo

En una estructura constituida por losas, vigas, columnas y bases de hormigón armado, las losas apoyan sobre las vigas; las vigas sobre las columnas y las columnas sobre las bases. También se puede dar el caso de una viga sobre viga, o columna sobre viga. En estos casos se dice que la viga *apoa* en otra viga o bien que la columna *apoa* en la viga.

Los **nudos** son los que permiten vincular pieza con pieza.

En el caso de una estructura reticular: armadura constituida por perfiles de acero o bien elementos estructurales de madera que apoyan sobre muros: los puntos A, B, C, D, F, G, H representan a los nudos; I y E son apoyos.

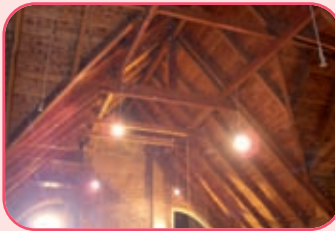


Imagen 5.11. Techo de madera de una vivienda en San Martín de los Andes - Neuquén - República Argentina

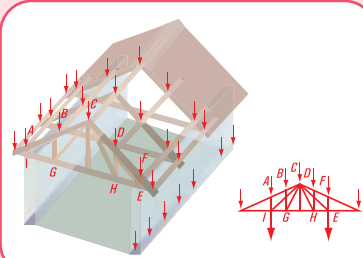


Figura 5.12

Existen distintos tipos de apoyos, según las restricciones que imponen. Para una mejor comprensión, tratamos este tema reduciendo el sistema a lo más simple: lo analizaremos como si fuera un punto material.

La ubicación de un punto material se realiza mediante la consideración de que el **centro de gravedad** es el punto donde se concentra la **totalidad de la carga**.

## 5.4.- Tipos de apoyos

### • Apoyo móvil o de primera especie

En el apoyo móvil, el elemento estructural descansa sobre otro a través de distintos tipos de medios, por ejemplo, mediante rodillos. Los rodillos permiten un movimiento de traslación en la dirección del eje del elemento estructural y de un giro alrededor de dicho eje e impiden la traslación en la dirección perpendicular al eje. Entonces el apoyo móvil restringe un grado de libertad.

*Un elemento estructural: viga, columna, losa, base,... tiene tres grados de libertad: traslación en la dirección de su eje; traslación en la dirección perpendicular a su eje y rotación alrededor de un punto.*

La materialización de este tipo de apoyo en la construcción de un edificio se hace mediante la intercalación de placas elásticas o de superficies lisas o de rodillos sin topes. En las mamposterías de ladrillos mampuestos<sup>4</sup> las piezas descansan unas sobre otras; el mantenimiento en posición se asegura por gravedad. Ejemplo: muros sobre pilares, arcos sobre pilares.

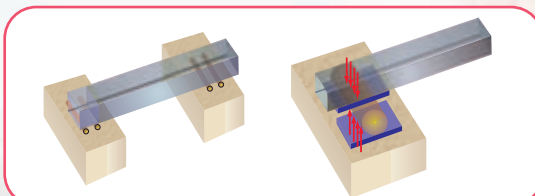


Figura 5.13. Apoyo de una viga sobre un muro o viga sobre columna

<sup>4</sup> Mampuesto: 1. *adj.* Se dice del material que se emplea en la obra de mampostería. 2. *m.* Piedra sin labrar que se puede colocar en obra con la mano. 3. *m.* Reparación, parapeto ([www.rae.es](http://www.rae.es)).



### • Apoyo articulado o apoyo fijo o de segunda especie

El apoyo articulado o apoyo fijo sólo permite la rotación alrededor de su eje. Este apoyo limita la traslación en la dirección del eje y en la dirección perpendicular o normal al mismo, es decir, restringe dos grados de libertad.

La materialización de este tipo de apoyo se hace de diferentes formas.

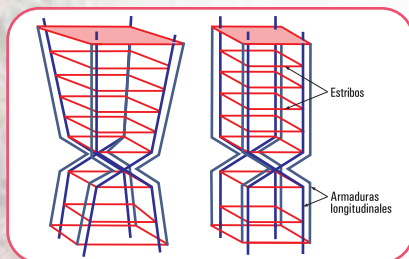


Figura 5.14. Articulaciones en columnas de hormigón armado

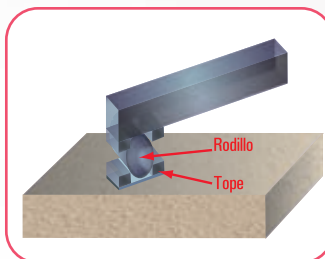


Figura 5.15. Un rodillo con dos topes: se impiden los movimientos de traslación

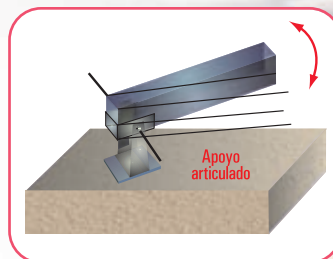


Figura 5.16. Apoyo fijo para apoyo de madera sobre estructura metálica o metal sobre metal

### • Apoyo rígido o empotramiento o de tercera especie

Este tipo de apoyo inmoviliza, totalmente, al elemento estructural. Este apoyo impide tanto el movimiento de rotación como los de traslación; en la dirección del eje y perpendicular al mismo. Esto significa que restringe tres grados de libertad.

Como ejemplos podemos mencionar:

- mástil de una bandera;
- poste o columna de líneas eléctricas aéreas;
- ménsula;
- vigas en voladizo.

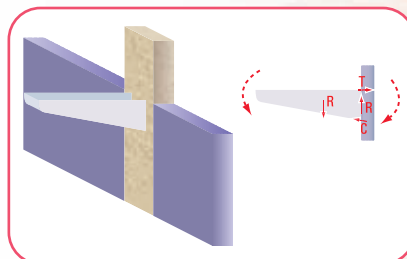


Figura 5.17. Esquema de una ménsula

De acuerdo con el número de grados de libertad que restringe cada tipo de apoyo para fijar un elemento estructural, será necesario sustentarlo a través de alguna de las siguientes formas:

1. con tres apoyos móviles;
2. mediante un apoyo móvil y uno fijo;
3. utilizando un empotramiento.

Un elemento estructural, por sí mismo, tiene tres grados de libertad: rotación y traslaciones. Por ello para fijarlo se debe restringir dichos grados de libertad.

### • Representación esquemática de los apoyos

Con el propósito de tener una visualización más clara del gráfico de cada uno de los distintos tipos de apoyo se presentan en forma esquemática. (Figura 5.18).



Imagen 5.12. Columna de alumbrado frente a la estación de trenes de Mittelwald (República Federal de Alemania)

Pero para que realmente se logre fijar el elemento estructural, se deben cumplir otras condiciones, ya que puede ocurrir que la vinculación sea aparente. Veamos en qué casos se presentan vínculos aparentes.

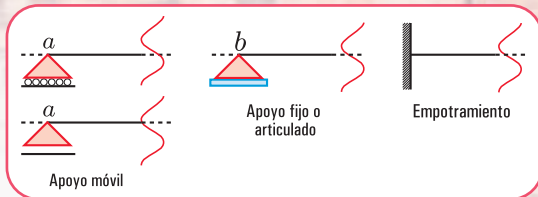


Figura 5.18

### Caso 1

La normal a la dirección del apoyo móvil pasa por un apoyo fijo (Figura 5.19). El vínculo aparente se da porque de existir sólo el apoyo fijo, cualquier punto  $a$  del elemento estructural estaría obligado a desplazarse según la dirección de la normal a la recta que pasa por el punto  $a$  y el punto  $b$  del apoyo fijo. Si colocamos en el punto  $a$  un apoyo móvil con dirección perpendicular a la recta  $ab$ , no estaríamos agregando ninguna restricción, por lo tanto, el elemento estructural no está fijo.

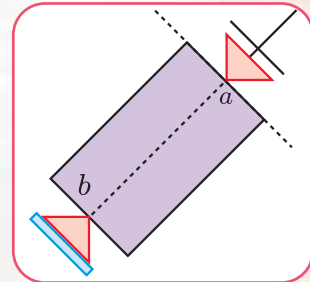


Figura 5.19

### Caso 2

La sustentación del elemento estructural se verifica mediante tres apoyos móviles, cuyas normales a las direcciones de los mismos concurren en un punto (Figura 5.20).

Veamos el porqué se da el vínculo aparente en este caso.

Supongamos que no existe uno de los apoyos, y que el elemento estructural se encuentra sustentado, solamente, por los dos apoyos móviles restantes. Llamemos a éstos  $s$  y  $t$ .

El apoyo móvil en  $s$  hace que este punto se desplace en la dirección de su eje,  $s-s$ ; o, lo que es lo mismo, que el desplazamiento de  $s$  surge de una rotación infinitamente pequeña alrededor de un punto de la perpendicular a la recta  $s-s$ . En forma similar, el punto  $t$ , debido al apoyo móvil ubicado en él, se desplaza en la dirección del eje del apoyo  $t-t$ ; o sea, este desplazamiento surge de una rotación también, infinitamente pequeña en torno a un punto ubicado en la normal a la recta  $t-t$ .

La simultaneidad de ambos desplazamientos, hace que exista un único punto de rotación, que es evidente; es el punto de intersección de ambas normales. Esto nos permite decir que, dos apoyos móviles constituyen un apoyo fijo o articulación ubicado en el punto de intersección de las normales a la dirección de ambos apoyos, por lo tanto, el elemento estructural gira. Este apoyo fijo o articulación recibe el nombre de apoyo ficticio.

Si ahora colocamos el tercer apoyo móvil de modo que la normal a su dirección pase por el punto de rotación mencionado, el vínculo es aparente, por cuanto permite al punto, en el cual está aplicado, rotar alrededor del mencionado punto de intersección.

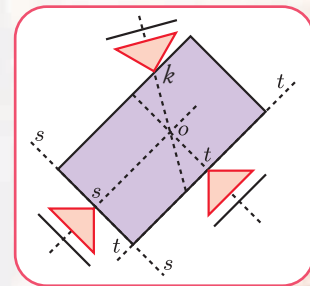


Figura 5.20

En este caso se pueden producir dos situaciones:

1. el elemento estructural rota, o
2. si las normales a las direcciones de cada uno son paralelas, éstas concurren en un punto, denominado punto impropio. Se produce, entonces una traslación (Figura 5.21).

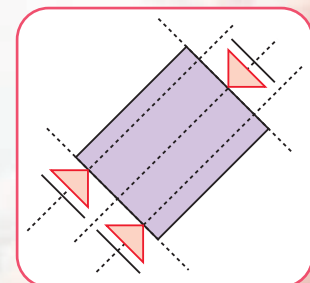


Figura 5.21



Si el elemento estructural se encuentra sustentado mediante condiciones de vínculo igual a sus grados de libertad; es decir si se restringe la misma cantidad de movimientos que los grados de libertad, entonces se dice que el elemento estructural está **isostáticamente sustentado** o bien que el **sistema es isostático**.

En el caso que el número de condiciones de vínculo sea mayor que el de los grados de libertad, se dice que el elemento estructural está **hiperestáticamente sustentado**, o bien que el **sistema es hiperestático**. Si el número de condiciones de vínculo de un sistema es inferior a la de los grados de libertad, entonces el **sistema es hipoestático**.

### Ejemplos

Dijimos que un elemento estructural, por ejemplo, es una **viga**. La **viga** es un elemento en el cual una dimensión predomina sobre las otras dos.

La forma de representación de una viga es a través de su eje y de los tipos de apoyos. Se pueden presentar las siguientes situaciones:

1. viga con un apoyo móvil y un apoyo fijo. Esta viga constituye un sistema isostático. Se dice que es simplemente apoyada (Figura 5.22);
2. viga con apoyos fijos. El sistema es hiperestático (Figura 5.23);
3. viga con un apoyo empotrado y el extremo libre. El sistema es isostático (Figura 5.24);
4. viga con dos apoyos móviles. El sistema es hipoestático (Figura 5.25).

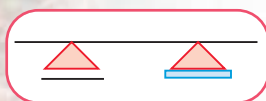


Figura 5.22. Esquema de viga simplemente apoyada

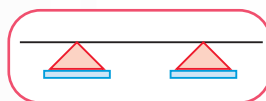


Figura 5.23. Esquema de viga hiperestática



Figura 5.24. Esquema de viga isostática

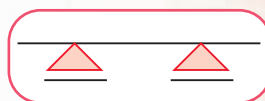


Figura 5.25. Esquema de viga hipoestática

Cuando el calculista de estructuras debe realizar el cálculo del dimensionamiento de un elemento estructural, tiene que considerar el efecto que provocan los apoyos en dicho elemento estructural.

Entonces podemos hacer la siguiente pregunta:

**¿qué sucede si se eliminan los apoyos?**

La respuesta es obvia. Se pierde el equilibrio. A los efectos del cálculo se plantea un artificio. Se reemplaza el apoyo por las fuerzas que cumplen el mismo efecto.

**Ejemplo** (se puede asociar con una estructura real de cualquier edificio en construcción).

Supongamos una viga simplemente apoyada (un apoyo fijo y uno móvil) con carga uniformemente repartida y una carga concentrada (Figura 5.26).

Reemplazamos a los apoyos por las fuerzas que cumplen el mismo efecto.

Las cargas externas activas son  $q$  y  $\vec{P}$ . A la carga  $\vec{P}$  la descomponemos en  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$ .

Como el apoyo fijo restringe el movimiento de traslación en la dirección del eje y en la dirección perpendicular al eje, entonces se puede reemplazar al apoyo con una fuerza  $\vec{R}_a$  de com-

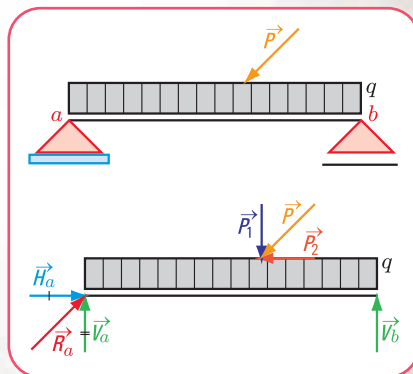


Figura 5.26. Esquema de carga de una viga con cargas externas:  $q$  y  $\vec{P}$  (activas) y  $\vec{R}_a$ ;  $\vec{R}_b$  (reactivas)

ponentes  $\vec{V}_a$  y  $\vec{H}_a$ .  
 $\vec{V}_a$  es perpendicular al eje y,  $\vec{H}_a$  tiene la dirección del eje.

Dado que el apoyo móvil restringe el movimiento de traslación en la dirección perpendicular al eje, entonces se lo puede reemplazar mediante una fuerza perpendicular al eje:  $\vec{V}_b$ , ya que cumple el mismo efecto.

Las fuerzas  $\vec{V}_a$ ,  $\vec{H}_a$  y  $\vec{V}_b$  reciben el nombre de **fuerzas reactivas**.

Entonces hasta ahora han entrado en juego las siguientes fuerzas o cargas: fuerzas externas

Veamos algunos casos en los cuales intervienen las **fuerzas activas y reactivas**.

### Caso 1

#### Comenzamos a dimensionar

Pensemos que debemos dimensionar la estructura para un salón de fiestas que se construirá sobre un primer piso (Figura 5.27). En primer término tenemos que pensar en las cargas que actúan sobre la estructura. La estructura de la construcción es de H° A° (hormigón armado).

¿Qué cargas actúan sobre la losa y cuáles son sus valores?

Las respuestas las visualizamos en el siguiente cuadro.

### Tipos de cargas y sus valores

Tipos de cargas	Valores Peso en kg/m <sup>2</sup> o daN/m <sup>2</sup>
Peso de la losa de H° A°	240
Peso del contrapiso	126
Peso del mortero	47,5
Peso del piso (ejemplo de parquet)	17,5
Peso del cielorraso (ejemplo yeso con metal desplegado)	18
Carga	449

Para un salón de fiestas  $p = 500 \text{ kg/m}^2$  o  $\text{daN/m}^2$

Entonces la carga total que actúa sobre la losa es  $q = g + p$ . Esta carga  $q$  es la que se denomina **carga específica** y, en este caso el valor de  $q$  es  $q = 949 \text{ kg/m}^2$  o  $\text{daN/m}^2$ .

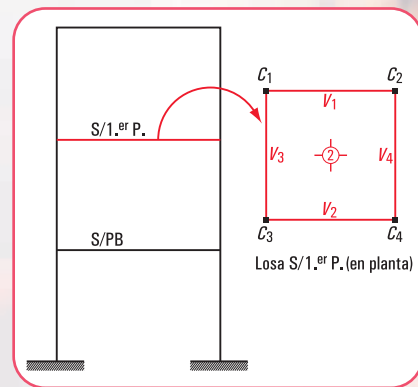


Figura 5.27. Esquema en corte del edificio de dos plantas y el de la planta de la losa sobre el primer piso

Estas cargas son las denominadas cargas permanentes. La carga por unidad de superficie se la designa con la letra  $g$ . Pero también existen otras cargas que actúan sobre la losa, por ejemplo: mobiliario, personas, equipamiento, etc. Esto nos está diciendo que este tipo de carga depende del destino del local. Esta carga se la denomina carga accidental o sobrecarga y está tabulada; se la designa con  $p$ .



Una losa puede apoyar sobre vigas o bien directamente sobre columnas, en este último caso a la losa se la llama **placa**.

En nuestro caso la losa apoya en vigas. Existe un vínculo entre la losa y cada una de las vigas.

La losa transmite a las vigas la carga a través de los apoyos, que representamos mediante los siguientes esquemas:



La carga de la losa sobre la viga es una carga **externa activa**. Por el principio de acción y reacción, la viga reacciona sobre la losa con una carga denominada **externa reactiva**.

Se puede ejemplificar tal como se muestra en las figuras 5.28. y 5.29.  $\vec{R}_a$ ,  $\vec{R}_b$  son cargas concentradas reactivas.

## Caso 2

*Subimos a una montaña rusa.*



¡Qué emoción! Es la primera vez.

Uy, Uy...Uy..Uy..Uy...!... ¡Quiero bajar...ar..ar..ar!...

Por fin, Ah...¡Por fin, ya está, bajamos!

¡Qué altura! ¿Soportarán las columnas el paso del carrito?

¿Cómo harán los calculistas de estructuras para hacer que la columna soporte todo el peso?

Veamos

En el momento en que el tren (carrito) pasa por una columna, el peso del tren y el de nosotros ejercen una fuerza sobre el eje de la columna (Figura 5.30).

$\vec{P}$  es la fuerza externa activa.

La columna reacciona sobre el tren con una fuerza  $\vec{R}$  (reactiva).

Las fuerzas activas y las reactivas deben estar en equilibrio.

*La diferencia entre el tipo de carga  $q$  del caso anterior con esta fuerza  $\vec{P}$  es que la primera es una carga uniformemente distribuida y la segunda es una carga concentrada o puntual.*

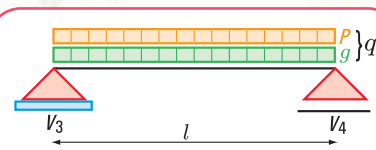


Figura 5.28. Esquema de carga de la losa

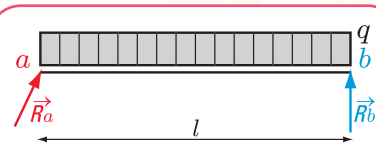


Figura 5.29. Esquema de carga donde se ponen en evidencia los vínculos



Imagen 5.13. Montaña rusa

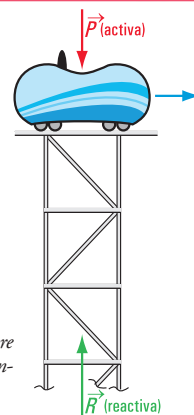


Figura 5.30  
Esquema de carga sobre una columna de la montaña rusa

## ¿Cómo se calculan las cargas o fuerzas reactivas?

Ya expresamos que la estructura y, cada uno de sus elementos, deben estar en equilibrio estable. Por lo tanto, se deben cumplir las condiciones necesarias y suficientes que hemos descrito en el capítulo 2 de este libro para fuerzas no concurrentes.

Las columnas se dimensionan con las fuerzas reactivas obtenidas de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas reactivas son fuerzas activas para las columnas.

### ¿Será difícil realizar este cálculo?

No, todo es fácil cuando se comprende. Más adelante, en este mismo capítulo resolveremos problemas similares a éste.

#### Caso 3



*Estamos en Villa La Angostura (Neuquén)*

En Villa la Angostura paramos en un hotel, una joyita de la arquitectura típica del sur de nuestro país.

La estructura es de madera, una característica de la zona y tiene el diseño que se puede ver en las imágenes 5.14 y 5.15.

Como podemos observar la estructura que soporta la cubierta es una **estructura reticular plana** formada por: la armadura de alma calada; la cumbrera y las correas.



Imagen 5.14. Interior de un hotel en Villa La Angostura



Imagen 5.15. Estructura del techo de madera

Consideramos la viga  $V_1$ . Si despreciamos el peso propio de la viga, el diagrama de carga es el que se muestra en la figura 5.32.

La carga  $\vec{P}$  es la reacción de la cumbrera sobre la viga  $V_1$ . Esta reacción se transforma en acción para la viga  $V_1$ .

$\vec{V}_a$ ;  $\vec{H}_a$  y  $\vec{V}_b$  son las fuerzas reactivas ejercidas sobre la viga  $V_1$ .

Para lograr una mejor comprensión, damos los siguientes valores:

- luz de la viga  $V_1$  es  $l = 7$  m;
- intensidad de la fuerza  $\vec{P}$ , es  $P = 10$  kN;
- la fuerza  $\vec{P}$  es una carga concentrada en el centro de la luz de la viga.

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.32).

En el diagrama de sólido libre se sacan los apoyos y se ponen en evidencia las reacciones.

Como podemos observar las reacciones son incógnitas. Veamos, cómo obtenemos sus valores.

Consideramos el grupo de ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \text{Proy}_x F = 0 \\ \sum M^a = 0 \\ \sum M^b = 0 \end{array} \right.$$

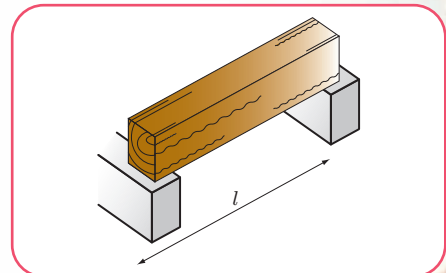


Figura 5.31. Esquema de la viga  $V_1$

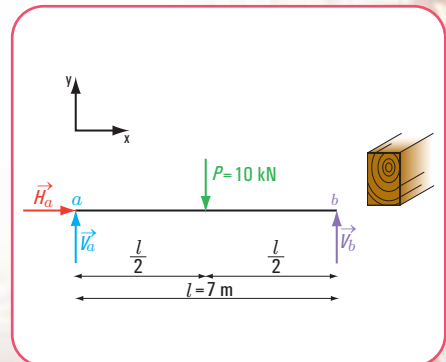


Figura 5.32. Diagrama de carga y sólido libre



- Cálculo de las reacciones en el apoyo  $b$

$$1. \sum \text{Proy}_x F = 0 \Rightarrow H_a = 0$$

$$2. \sum M^a = 0 \Rightarrow -V_b \cdot 7 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m} = 0$$

$$-V_b \cdot 7 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m}$$

$$V_b = \frac{-35 \text{ kN m}}{-7 \text{ m}}$$

$$V_b = 5 \text{ kN}$$

- Cálculo de las reacciones en el apoyo  $a$

$$3. \sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot 7 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m} = 0$$

$$V_a = \frac{10 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m}}{7 \text{ m}}$$

$$V_a = 5 \text{ kN}$$

- Verificación

Podemos verificar mediante la proyección sobre el eje  $y$

$$\sum \text{Proy}_y F = 0$$

$$P - V_a - V_b = 0$$

$$10 \text{ kN} - 5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = 0, \text{ verifica}$$

El caso anterior constituye un ejemplo de resolución de problemas referidos al cálculo de reacciones de vínculo.



Imagen 5.16a. *Reunión de Caciques*. Pintura de Léone Matthis

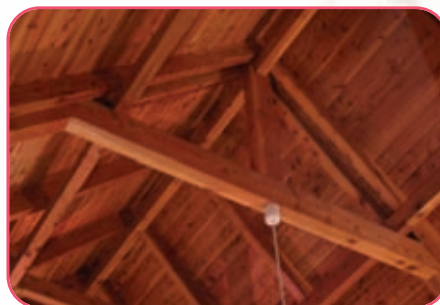


Imagen 5.16b. *Detalle de la estructura del techo*

## 5.5.- Resolvemos los siguientes problemas

- Reacciones de vínculos

### Problema N° 5.1

*Vamos a la casa de un amigo...*

#### Enunciado

Nuestro amigo con su familia vive en una casa del año 1930. El techo está construido con vigas de perfiles de acero y ladrillones cerámicos. Las paredes son de carga; esto quiere decir que forman parte de la estructura y son quienes reciben y transmiten a los cimientos la carga del entrepiso (Figura 5.33).

*La carga  $q$  (carga específica) de la viga se obtiene mediante su peso propio y la carga que recibe del entrepiso.*



La viga tiene el esquema estático de carga que se muestra en la figura 5.33.

¿Cuál será la carga que recibe la pared  $a$  y cuál la pared  $b$ ?

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre, en el que ponemos en evidencia los vínculos (Figura 5.35).

• Aplicamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas no concurrentes:

$$\begin{cases} \sum M^a = 0 \Rightarrow -V_b \cdot l + H_b \cdot 0 + q \cdot l \frac{l}{2} = 0 \\ \sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot l - q \cdot l \frac{l}{2} = 0 \\ \sum H = 0 \Rightarrow H_b = 0 \end{cases}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_b$

$$-V_b \cdot l = -\frac{q l^2}{2}$$

$$V_b = \frac{-q l^2}{-2 l}$$

$$V_b = \frac{q l}{2}$$

$$V_b = \frac{17,5 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{6 \text{ m}}{2} \Rightarrow V_b = 52,5 \text{ kN}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$V_a \cdot l - q \frac{l^2}{2} = 0$$

$$V_a = \frac{q l^2}{2 l}$$

$$V_a = \frac{17,5 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{6 \text{ m}}{2} \Rightarrow V_a = 52,5 \text{ kN}$$

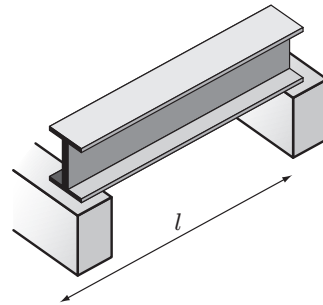


Figura 5.33. Perspectiva de la viga

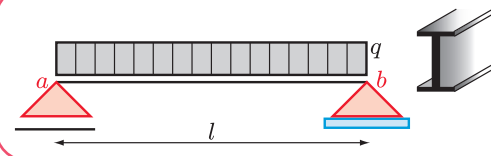


Figura 5.34. Esquema estático de la carga

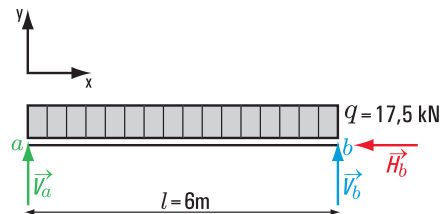


Figura 5.35. Diagrama de sólido libre (se ponen en evidencia los vínculos)



Imagen 5.17. Techo con viguetas de acero y ladrillos



Calculamos el valor de  $H_b$

$$H_b = 0$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\sum \text{Proy } F_y = V_a + V_b - 17,5 \text{ kN} \times 6,00 \text{ m} = ?$$

$$52,5 \text{ kN} + 52,5 \text{ kN} - 17,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times 6,00 \text{ m} = 0, \text{ verifica}$$

Como el apoyo fijo restringe la traslación en la dirección del eje  $y$  y en la dirección perpendicular al eje, entonces las reacciones en  $b$  son  $H_b$  y  $V_b$ .

### Respuesta

Las fuerzas reactivas en los apoyos son: en el apoyo móvil  $a$ ,  $V_a = 52,5 \text{ kN}$  y en el apoyo fijo  $b$ ,  $V_b = 52,5 \text{ kN}$  y  $H_b = 0 \text{ kN}$

### Problema N° 5.2

En una de las habitaciones de nuestro amigo el entrepiso es de madera

### Enunciado

Una viga de madera de la estructura del entrepiso tiene el esquema estático de carga que se indica en la figura 5.36.

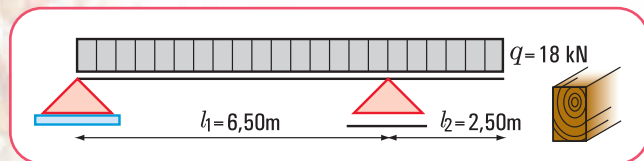


Figura 5.36. Esquema estático de carga de la viga

¿Cuáles serán los valores de las reacciones en los apoyos?

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

Dibujamos el diagrama de sólido libre, en el cual se ponen en evidencias los vínculos (Figura 5.37).

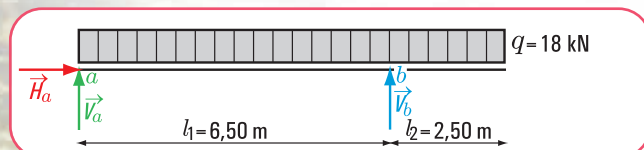


Figura 5.37. Diagrama de sólido libre (se ponen en evidencia los vínculos)



Imagen 5.17. *Primeros pasos*, 1937. Óleo sobre tela, 200 x 180,5. Antonio Berni. Colección Museo Nacional de Bellas Artes

Los datos son los indicados en el esquema estático de carga de la viga

- ♦ Calculamos el valor de  $V_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow q(l_1 + l_2) \frac{(l_1 + l_2)}{2} - V_b \cdot l_1 = 0$$

$$18 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(9 \text{ m})^2}{2} - V_b \cdot 6,50 \text{ m} = 0$$

$$V_b = - \frac{18 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{81 \text{ m}^2}{-2,6,50 \text{ m}}$$

$$V_b = 112,15 \text{ kN}$$

- ♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot l_1 - q \frac{l_1^2}{2} + \frac{q l_2^2}{2} = 0$$

$$V_a \cdot l_1 = \frac{q l_1^2}{2} - \frac{q l_2^2}{2}$$

$$V_a = \frac{18 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(6,50 \text{ m})^2}{2} - \frac{18 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(2,50 \text{ m})^2}{2}$$

$$V_a = 49,85 \text{ kN}$$

- ♦ Calculamos el valor de  $H_a$

$$H_a = 0 \text{ N}$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\sum \text{Proy}_y F = V_a + V_b - 18 \text{ kN/m} \times 9,00 \text{ m} = ?$$

verifica

$$49,85 \text{ kN} + 112,15 \text{ kN} - 18 \text{ kN/m} \cdot 9,00 \text{ m} = 0$$

### Respuesta

Las fuerzas reactivas en los apoyos son: en el apoyo fijo  $a$ ,  $V_a = 49,85 \text{ kN}$ , y  $H_a = 0 \text{ kN}$ . En el apoyo móvil  $b$ ,  $V_b = 112,15 \text{ kN}$

### Problema N° 5.3

*Calculamos las reacciones de una viga en voladizo*

#### Enunciado

Una viga construida con un perfil de acero doble T recibe las cargas de dos columnas que apean en ella. En el voladizo apoya un muro cuya carga específica es  $q = 20 \text{ kN/m}$ . Despreciamos la carga debido al peso propio de la viga (Figura 5.38).



Imagen 5.19. *Salón Porteño* - Leonie Matthis





¿Cuáles son los valores de las reacciones en los apoyos?

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre, en el cual se ponen en evidencias los vínculos (Figura 6.38).

♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\sum M^d = 0 \Rightarrow V_a \cdot 7 \text{ m} - P_1 \cdot 5,50 \text{ m} - P_2 \cdot 3 \text{ m} + \frac{q \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m}}{2} = 0$$

$$V_a \cdot 7 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 5,50 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + \frac{20 \text{ kN/m} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m}}{2} = 0$$

$$V_a \cdot 7 \text{ m} - 55 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} + 62,5 \text{ kNm} = 0$$

$$V_a \cdot 7 \text{ m} - 55 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} + 62,5 \text{ kNm} = 0$$

$$V_a \cdot 7 \text{ m} - 22,5 \text{ kNm} = 0$$

$$V_a \cdot 7 \text{ m} = 22,5 \text{ kNm}$$

$$V_a = 3,21 \text{ kN}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_d$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -V_d \cdot 7 \text{ m} + P_1 \cdot 1,50 \text{ m} + P_2 \cdot 4 \text{ m} + q \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 8,25 \text{ m} = 0$$

$$-V_d \cdot 7 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 1,50 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 20 \text{ kN/m} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot 8,25 \text{ m} = 0$$

$$-V_d \cdot 7 \text{ m} + 15 \text{ kNm} + 40 \text{ kNm} + 412,5 \text{ kNm} = 0$$

$$-V_d \cdot 7 \text{ m} + 55 \text{ kNm} + 412,5 \text{ kNm} = 0$$

$$-V_d \cdot 7 \text{ m} + 467,5 \text{ kNm} = 0$$

$$-V_d \cdot 7 \text{ m} = -467,5 \text{ kNm}$$

$$V_d = 66,79 \text{ kN}$$

♦ Calculamos el valor de  $H_d$

$$H_d = 0$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\sum \text{Proy}_y^F = V_a - P_1 - P_2 + V_d - q \cdot 2,50 \text{ m} = ?$$

$$3,21 \text{ kN} - 10 \text{ kN} - 10 \text{ kN} + 66,79 \text{ kN} - 20 \text{ kN/m} \cdot 2,50 \text{ m} = 0$$

verifica

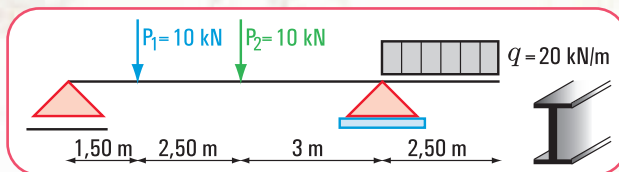


Figura 5.38. Esquema estático de carga

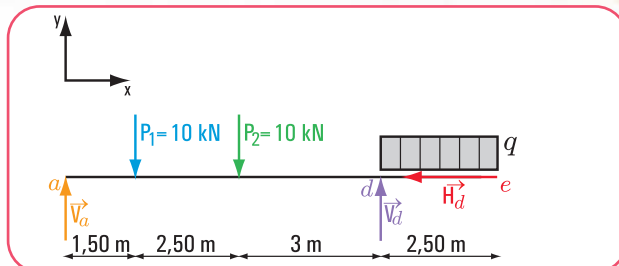


Figura 5.39. Diagrama de sólido libre

### Respuesta

Las fuerzas reactivas en los apoyos son: en el apoyo  $a$ ,  $V_a = 3,21\text{kN}$ ; en el apoyo  $d$ ,  $V_d = 66,79\text{kN}$  y  $H_d = 0$ .

### Problema N° 5.4

*Un problema diferente, tal vez no visto en la realidad, pero de gran valor didáctico*

#### Enunciado

Una viga simplemente apoyada está cargada con un momento de módulo  $M = 30\text{ kN m}$  aplicado en el centro de la viga (Figura 5.39).

¿Cuáles son las fuerzas reactivas en  $a$  y en  $b$ ?

#### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico)

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre, en el cual se ponen en evidencias los vínculos (Figura 5.41).

♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot 4\text{ m} + M = 0$$

$$V_a \cdot 4\text{ m} + 30\text{ kN m} = 0$$

$$V_a \cdot 4\text{ m} = -30\text{ kN m}$$

$$V_a = \frac{-30\text{ kN m}}{4\text{ m}}$$

$$V_a = -7,5\text{ kN}$$

El signo (-) significa que el sentido adoptado para  $V_a$  no es correcto.

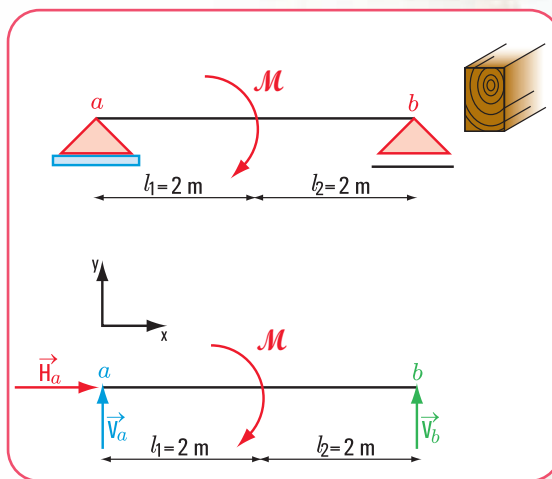
Calculamos el valor de  $V_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow V_b \cdot 4\text{ m} + M = 0$$

$$V_b \cdot 4\text{ m} = -30\text{ kN m}$$

$$V_b = \frac{-30\text{ kN m}}{-4\text{ m}}$$

$$V_b = 7,5\text{ kN}$$



Figuras 5.40 y 5.41. Esquema estático de carga y diagrama de sólido libre

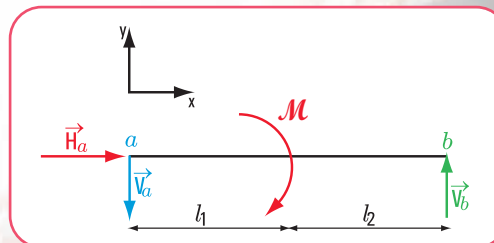


Figura 5.42. Diagrama de sólido libre correcto con la fuerza  $V_a$  ubicada correctamente



- ♦ Calculamos el valor de  $H_a$

$$H_a = 0$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje y

$$\sum \text{Pr oy}_y^F = 0 \Rightarrow V_a + V_b = ? \quad \text{verifica}$$

$$-7,5 \text{ kN} + 7,5 \text{ kN} = 0$$

### Respuesta

Las fuerzas reactivas en los apoyos son: en el apoyo  $a$ ,  $V_a = -7,5 \text{ kN}$ ; en el apoyo  $b$ ,  $V_b = 7,5 \text{ kN}$ .

### Problema N° 5.5

¡Otro problema interesante!

#### Enunciado

Una viga simplemente apoyada está sometida a cargas concentradas en el tramo y a momentos en sus apoyos (Figura 5.42).

$$P_1 = 20 \text{ kN}$$

$$P_2 = 15 \text{ kN}$$

$$P_3 = 20 \text{ kN}$$

$$M_1 = 10 \text{ kN m}$$

$$M_2 = 15 \text{ kN m}$$

¿Cuáles son las fuerzas reactivas en los apoyos  $a$  y  $b$ ?

#### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

- ♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre, en el cual se ponen en evidencia los vínculos (Figura 5.44).

- ♦ Calculamos el valor de  $V_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -M_2 - V_b \cdot 6 \text{ m} + P_3 \cdot 4,5 \text{ m} + P_2 \cdot 3 \text{ m} + P_1 \cdot 1,5 \text{ m} + M_1 = 0$$

$$-15 \text{ kN m} - V_b \cdot 6 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} + 15 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + 10 \text{ kN m} = 0$$

$$-15 \text{ kN m} - V_b \cdot 6 \text{ m} + 90 \text{ kN m} + 45 \text{ kN m} + 30 \text{ kN m} + 10 \text{ kN m} = 0$$

$$-V_b \cdot 6 \text{ m} + 160 \text{ kN m} = 0$$

$$V_b = \frac{-160 \text{ kN m}}{-6 \text{ m}}$$

$$V_b = 26,67 \text{ kN}$$

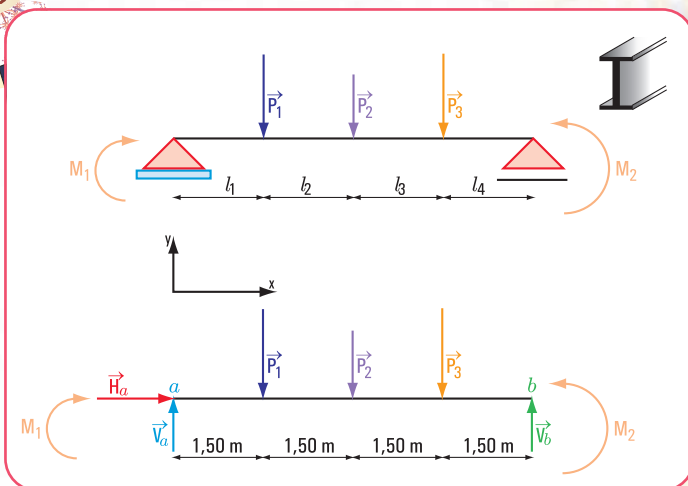


Figura 5.43 y 5.44. Esquema estático de carga y diagrama de sólido libre (se ponen en evidencia los vínculos)

- ♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\begin{aligned}\sum M^b = 0 &\Rightarrow V_a \cdot 6 \text{ m} - P_1 \cdot 4,5 \text{ m} - P_2 \cdot 3 \text{ m} - P_3 \cdot 1,5 \text{ m} + M_1 - M_2 = 0 \\ V_a \cdot 6 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} - 15 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot \text{m} - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \\ V_a \cdot 6 \text{ m} - 90 \text{ kN} \cdot \text{m} - 45 \text{ kN} \cdot \text{m} - 30 \text{ kN} \cdot \text{m} + 10 \text{ kN} \cdot \text{m} - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \\ V_a \cdot 6 \text{ m} - 170 \text{ kN} \cdot \text{m} &= 0 \\ V_a &= \frac{170 \text{ kN} \cdot \text{m}}{6 \text{ m}} \\ V_a &= 28,33 \text{ kN}\end{aligned}$$

- ♦ Calculamos el valor de  $H_a$

$$H_a = 0$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\begin{aligned}\sum \text{Proy}_y F = 0 &\Rightarrow V_a - P_1 - P_2 - P_3 + V_b = ? \quad \text{verifica} \\ 28,33 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + 26,67 \text{ kN} &= 0\end{aligned}$$

### Respuesta

Las fuerzas reactivas en los apoyos son: en el apoyo  $a$ ,  $V_a = 28,33 \text{ kN}$ ;  $H_a = 0$ ; en el apoyo  $b$ ,  $V_b = 26,67 \text{ kN}$ .

### Problema N° 5.6

¿Qué hace un calculista de estructuras?



*Un calculista de estructuras se dedica a dimensionar la totalidad de los elementos estructurales que tiene un edificio: losas, vigas, columnas, bases, tensores, puntales, etc. Esto significa que tiene que buscar dimensiones: sección de un perfil de acero; escuadría de una viga de madera; diámetro del acero en una losa de hormigón armado, etc.*

*El dimensionamiento siempre comienza por el cálculo estático.*

### Enunciado

En el Estudio de Arquitectura “SOLCONI”, un calculista de estructuras tiene que dimensionar una viga de hormigón armado. Comienza por el cálculo estático.

El esquema estático de carga de una viga de hormigón armado es el de la **figura 5.45** (no consideramos la carga  $q$  que le transmite la losa ni su peso propio).

¿Cuáles son las fuerzas reactivas en los apoyos  $a$  y  $b$ ?

### Desarrollo

El cálculo estático implica el cálculo de las reacciones de vínculo.

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).



- ◆ Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.45)

- ◆ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\begin{aligned}\sum M^b = 0 &\Rightarrow V_a \times 6 \text{ m} - P \times 3 \text{ m} = 0 \\ V_a \times 6 \text{ m} &= 30 \text{ kN} \times 3 \text{ m} \\ V_a &= \frac{90 \text{ kN m}}{6 \text{ m}} \\ V_a &= 15 \text{ kN}\end{aligned}$$

- ◆ Calculamos el valor de  $R_b$

$$\begin{aligned}\sum M^a = 0 &\Rightarrow P \times 3 \text{ m} - R_b \times \cos 60^\circ \times 6 \text{ m} = 0 \\ 30 \text{ kN} \times 3 \text{ m} - R_b \times 3 \text{ m} &= 0 \\ - R_b \times 3 \text{ m} &= -90 \text{ kN m} \\ R_b &= \frac{90 \text{ kN m}}{3 \text{ m}} \\ R_b &= 30 \text{ kN}\end{aligned}$$

$R_b$  la expresamos en función de sus componentes  $V_b$  y  $H_b$ .

- ◆ Calculamos el valor de  $V_b$

$$\begin{aligned}V_b &= R_b \times \cos 60^\circ \\ V_b &= 30 \text{ kN} \times 0,5 \\ V_b &= 15 \text{ kN}\end{aligned}$$

- ◆ Calculamos el valor de  $H_b$

$$\begin{aligned}H_b &= R_b \times \sin 60^\circ \\ H_b &= 30 \text{ kN} \times 0,87 \\ H_b &= 26 \text{ kN}\end{aligned}$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje y

$$\begin{aligned}\sum \text{Proy}_y F = 0 &\Rightarrow V_a - P + V_b = ? \quad \text{verifica} \\ 15 \text{ kN} - 30 \text{ kN} + 15 \text{ kN} &= 0\end{aligned}$$

### Respuesta

Las reacciones de vínculo en los apoyos son:

$$\begin{aligned}R_b = 30 \text{ kN} &\rightarrow V_b = 15 \text{ kN} \\ &\rightarrow H_b = 26 \text{ kN} \\ R_a = 30 \text{ kN} &\rightarrow V_a = 15 \text{ kN} \\ &\rightarrow H_a = 26 \text{ kN}\end{aligned}$$

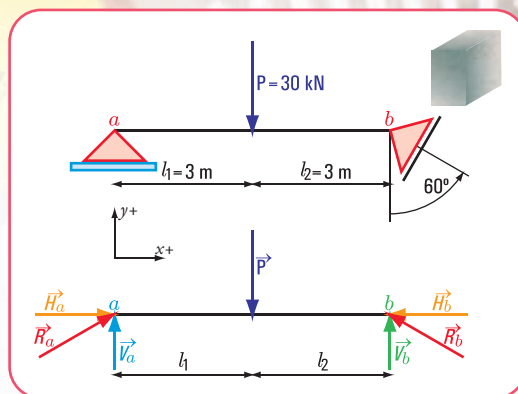


Figura 5.45. Diagramas de carga y de sólido libre

- ◆ Calculamos el valor de  $H_a$

$$\begin{aligned}\sum \text{Proy}_x F = 0 &\Rightarrow H_a - H_b = 0 \\ H_a &= H_b \\ H_a &= 26 \text{ kN}\end{aligned}$$

- ◆ Calculamos el valor de  $R_a$

$$R_a = \sqrt{H_a^2 + V_a^2} \Rightarrow R_a = 30 \text{ kN}$$



Figura 5.20. Alumnos de la E.T.Nº 34 de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires resolviendo este ejercicio

### Problema N° 5.7

Un edificio con columnas inclinadas.

#### Enunciado

Salimos de la casa de nuestro amigo.

Caminamos una cuadra y nos encontramos con un edificio que tiene amplios jardines en la planta baja y un gran hall central. Una particularidad nos llama la atención: las columnas son inclinadas.

Una de las vigas de la estructura de hormigón armado apoya sobre dos de esas columnas inclinadas, según el esquema de carga que se ve en la figura 5.46.

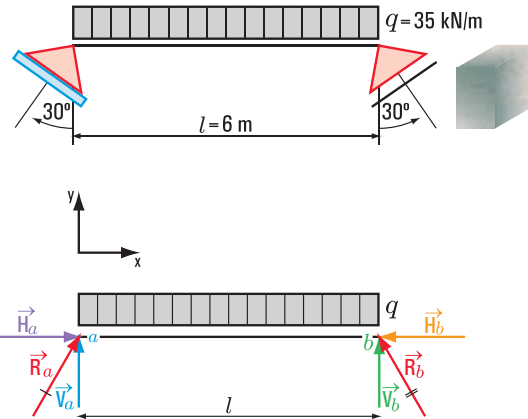


Figura 5.46 y 5.47. Diagramas de carga y de sólido libre

¿Cuáles serán las fuerzas provenientes de la viga que soportan las columnas?

#### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.47).

Calculamos el valor de  $R_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow R_a \cos 30^\circ \cdot 6 \text{ m} - \frac{35 \text{ kN} (6 \text{ m} \cdot 6 \text{ m})}{2} = 0 \quad (\text{consideramos } \cos 30^\circ = 0,87)$$

$$R_a = \frac{1.260 \text{ kN m}}{10,44 \text{ m}}$$

$$R_a = 120,7 \text{ kN}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_a$  y  $H_a$

$$V_a = R_a \cos 30^\circ \Rightarrow V_a = 120,7 \text{ kN} \cdot 0,87$$

$$V_a = 105 \text{ kN}$$

$$H_a = R_a \sin 30^\circ \Rightarrow H_a = 120,7 \text{ kN} \cdot 0,5$$

$$H_a = 60,35 \text{ kN}$$



Imagen 5.21. Un edificio ubicado en un barrio de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires



- ♦ Calculamos el valor de  $R_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -R_b \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 \text{ m} + \frac{35 \text{ kN} (6 \text{ m} \cdot 6 \text{ m})}{2} = 0$$

$$R_b = \frac{-1.260 \text{ kN m}}{-10,44 \text{ m}}$$

$$R_b = 120,7 \text{ kN}$$

- ♦ Calculamos el valor de  $V_b$  y  $H_b$

$$V_b = R_b \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow V_b = 120,7 \text{ kN} \cdot 0,87$$

$$V_b = 105 \text{ kN}$$

$$H_b = R_b \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow H_b = 120,7 \text{ kN} \cdot 0,5$$

$$H_b = 60,35 \text{ kN} \text{ el signo de } H_b \text{ es negativo}$$

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\sum \text{Proy}_y F = 0 \Rightarrow V_a - q l + V_b = ? \quad \text{verifica}$$

$$V_a = 105 \text{ kN} - 35 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6 \text{ m} + 105 \text{ kN} = 0$$



Imagen 5.22. Detalle columna en P. B.

### Respuesta

Las fuerzas  $R_b = 120,7 \text{ kN}$ ;  $V_b = 105 \text{ kN}$ ;  $H_b = 60,35 \text{ kN}$  y  $H_a = 60,35 \text{ kN}$ , son fuerzas reactivas de las columnas sobre las vigas. Las fuerzas activas de la viga sobre las columnas son de igual dirección, de igual módulo, pero de sentido contrario.

## 5.6.- Representación en dos dimensiones de la estructura de un edificio y sus elementos

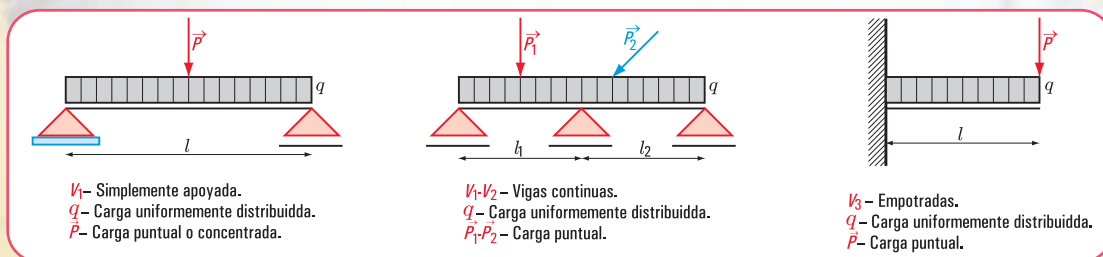


Figura 5.48. Esquema estático de diferentes tipos de vigas según su estado de carga y de acuerdo a sus apoyos

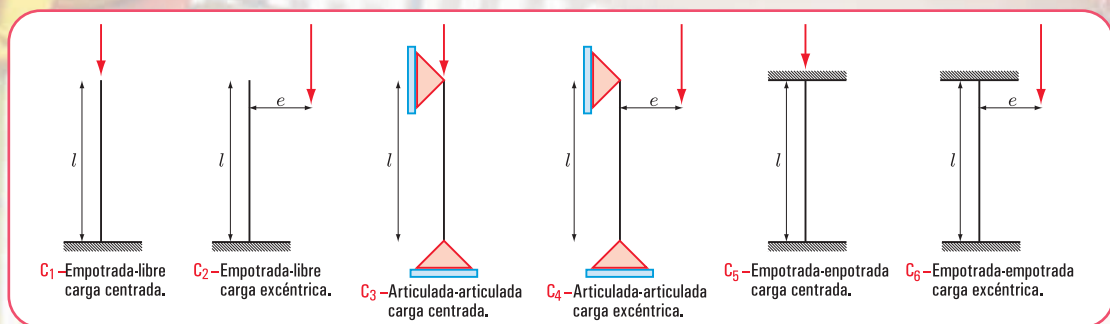


Figura 5.49. Esquema estático de distintos tipos de columnas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  y  $C_5$

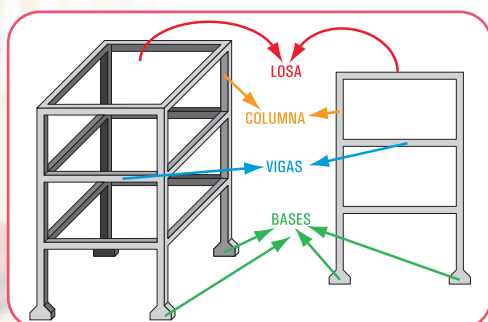


Figura 5.50. Esquema en tres dimensiones de la estructura de un edificio y de sus elementos

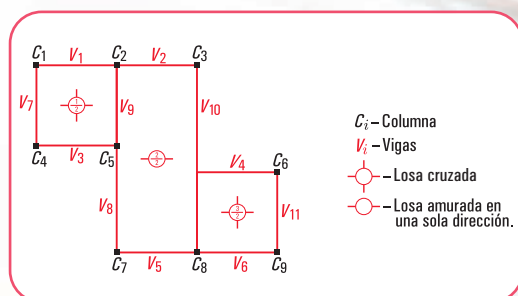


Figura 5.51. Esquema en planta de la estructura de un edificio

## 5.7.- Esfuerzos característicos

Hasta aquí trabajamos en una forma muy simple con la acción de las cargas externas: activas y reactivas, sobre los diferentes elementos estructurales.

Consideramos ahora una viga en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas externas. Imaginamos una sección cualesquiera de la viga perpendicular a su eje. El conjunto de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección tiene una resultante que denominamos  $R_l$  y el de la derecha una resultante que llamamos  $R_d$ . Como la viga está en equilibrio ambas resultantes son fuerzas de igual dirección, sentido contrario e igual intensidad. La recta de acción de las fuerzas resultantes intersecan al plano de la sección en un punto (Figura 5.52-2).

Como siempre toda fuerza la debemos reducir al baricentro de la sección, al hacerlo aparecen momentos y fuerzas que actúan en el plano de dicha sección y en forma perpendicular a ella, tanto del sector izquierdo como del derecho (Figura 5.52-3). Es decir, surgen pares de momentos y pares de fuerzas: el par que yace en el plano de la sección y el par perpendicular a ese plano (Figura 5.52-4 y Figura 5.52-5).

Esto da lugar a que aparezcan tres conceptos importantes y que denominamos esfuerzos de características.



Ellos son: momento flexor, esfuerzo de corte y esfuerzo normal o axil.

### • Momento flexor

EL momento flexor  $M$  en una sección es el par de pares de las fuerzas que actúan, a uno y a otro lado de dicha sección, cuyos momentos son los momentos con respecto al baricentro de la sección de la resultante de las fuerzas que están a la izquierda y/o derecha de dicha sección. El signo está dado por el momento de la resultante izquierda, o el de la derecha cambiado de signo (Figura 5.52-4).

### • Esfuerzo de corte o tangencial

Definimos como esfuerzo de corte o tangencial en una sección, al conjunto de las dos fuerzas  $Q$ , cuyas rectas de acción yacen en el plano de aquella, y cuyos módulos corresponden a las proyecciones de las resultantes izquierda y/o derecha sobre el plano de la sección (Figura 5.52-5).

El signo está dado de acuerdo con los esquemas que se observan en la figura 5.53.

### • Esfuerzo normal o esfuerzo axil

Definimos como esfuerzo normal o esfuerzo axil en una sección al conjunto de las proyecciones sobre un eje perpendicular al plano de la sección de las fuerzas que están a la izquierda de la sección y/o a la derecha. El signo del esfuerzo normal depende de si la sección está sometida a esfuerzo por tracción o compresión. En el caso de la tracción es positivo, y en el caso de la compresión es negativo (Figura 5.52-5).

El momento flexor, el esfuerzo de corte y el esfuerzo normal constituyen los tres esfuerzos característicos, o simplemente características de la sección considerada.

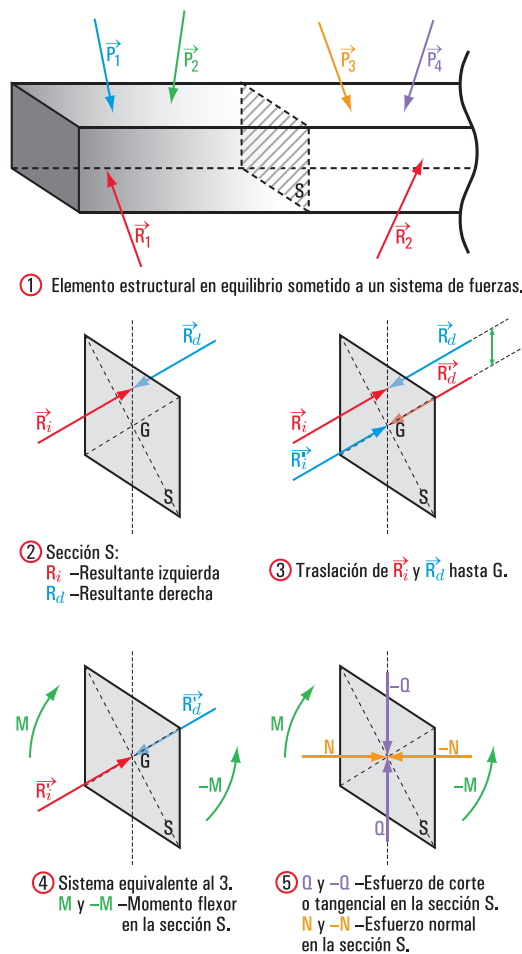


Figura 5.52. Momento flexor, esfuerzo de corte y esfuerzo normal

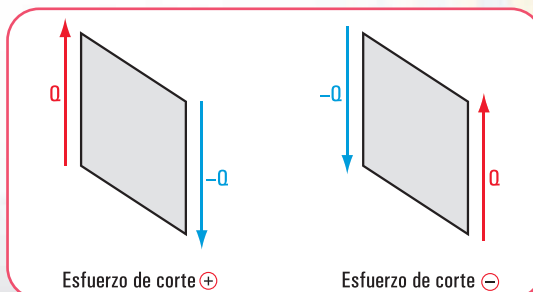


Figura 5.53. Esquemas de esfuerzo de corte. Signos

Pero

**¿qué pasa internamente con el material estructural?**

Los materiales más utilizados en la construcción, como materiales estructurales, son: bloques de hormigón, acero estructural, madera, hormigón armado... Como ya vimos, los materiales al constituir elementos estructurales son sometidos a cargas de distintos orígenes y formas de actuar. Estas cargas provocan en el elemento estructural y, por lo tanto, en el material, básicamente efectos de tracción (separación de sus partículas), de compresión (empujes de partículas entre sí), y de corte (desplazamiento de las partículas entre sí).

Estos efectos pueden producirse separados o bien combinados, como es el caso de la flexión (tracción y compresión).

Podemos decir, entonces que los elementos estructurales pueden estar sometidos a esfuerzos de tracción, de compresión y/o corte, de corte o bien de flexión.

Estas expresiones nos están anunciando que el material, internamente, genera reacciones de diferente tipo. Estas reacciones internas tienen por objeto mantener la cohesión molecular, impidiendo los desplazamientos entre moléculas y que, finalmente, el cuerpo se rompa.

Por ello, en el material se desarrollan fuerzas internas, también denominadas sollicitaciones internas o tensiones internas, que son reacciones internas con el objeto de contrarrestar y equilibrar los efectos provocados por las fuerzas externas en relación con la sección considerada. Este equilibrio se denomina resistente o elástico.

Las fuerzas internas pueden agruparse en simples y compuestas. Entre las primeras se encuentran las de tracción, compresión (compresión simple) y corte. Entre las segundas la combinación de las primeras: flexión simple (tracción-compresión y corte).

## 5.8.- Relaciones entre la carga, el esfuerzo de corte y el momento flexor

La construcción de los diagramas de esfuerzo de corte y de momento flexor puede realizarse en una forma fácil si se tiene en cuenta que, entre la carga, el esfuerzo cortante y el momento flexor existen determinadas relaciones.

Para encontrar dichas relaciones, consideramos una viga simplemente apoyada sometida a una carga distribuida, y dos secciones  $a$  y  $b$  cuya separación es  $\Delta x$  (Figura 5.54).

El esfuerzo de corte en  $a$  lo denominamos  $Q_a$  y en  $b$ ,  $Q + \Delta Q$ .

El momento flexor en  $a$  lo llamamos  $M_a$  y en  $b$ ,  $M + \Delta M$ .

Aislando la parte de la viga comprendida entre  $a$  y  $b$ , entonces las fuerzas que se ejercen sobre ese trozo del sólido son:

Fuerza externa activa  $\rightarrow q_c \cdot \Delta x$

Fuerza cortante  $\rightarrow Q$  y  $Q + \Delta Q$

Momento flexor  $\rightarrow M$  y  $M + \Delta M$



1. Aplicamos la ecuación de equilibrio.

$$\begin{aligned}\sum \text{Proy}_y F = 0 &\Rightarrow Q - (Q + \Delta Q) - q_x \cdot \Delta x = 0 \\ Q - Q - \Delta Q &= q_x \cdot \Delta x \\ -\Delta Q &= q_x \cdot \Delta x \\ \Delta Q &= -q_x \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Dividimos a ambos miembros por  $\Delta x$ .

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q_x$$

Aplicamos a ambos momentos límite  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = -q_x ; \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (5)$$

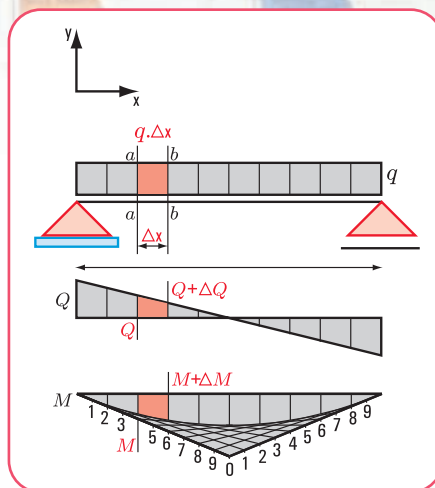


Figura 5.54. Diagramas de sólido libre, esfuerzo de corte y momento flexor

### Conclusión 1

La derivada del esfuerzo de corte  $Q$  respecto de  $x$  es igual a la carga específica cambiada de signo.

En forma geométrica, podemos expresar:

la pendiente de la recta tangente en un punto a la curva del esfuerzo de corte es negativa y el valor de la misma en dicho punto es igual a la carga específica.

2. Integramos a ambos miembros de la expresión (5).

$$\int_{x_a}^{x_e} \frac{dQ}{dx} = \int_{x_a}^{x_e} -q \cdot dx \rightarrow \text{da el valor del área de la gráfica de } q \text{ entre los puntos } x_e \text{ y } x_a.$$

La expresión matemática  $\frac{dQ}{dx} = -q$  no tiene validez en la sección de aplicación de una carga concentrada.

2. Aplicamos la ecuación de equilibrio de momentos

$$\begin{aligned}\sum M = 0 &\Rightarrow M - (M + \Delta M) + Q \cdot \Delta x - q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} = 0 \\ M - M - \Delta M + Q \cdot \Delta x - q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} &= 0 \\ -\Delta M + Q \cdot \Delta x - q \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} &= 0 \\ -\Delta M &= -Q \cdot \Delta x + q \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2}\end{aligned}$$

Dividimos a ambos miembros por  $\Delta x$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta M}{\Delta x} &= +Q - \frac{q \cdot (\Delta x)^2}{2 \Delta x} \\ \frac{\Delta M}{\Delta x} &= +Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2}\end{aligned}$$

Aplicamos  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( +Q - \frac{q \cdot \Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = +Q - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q \cdot \Delta x}{2}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q - 0$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

### Conclusión 2

La derivada del momento flexor respecto de  $x$  es igual al esfuerzo de corte.

En forma geométrica, decimos que:

la pendiente de la recta tangente a la gráfica del momento flexor en un punto es igual al esfuerzo de corte.

Integramos a la expresión matemática  $\frac{dM}{dx} = Q$ , entre los puntos  $a$  y  $e$ .

$$\int_a^e \frac{dM}{dx} = \int_a^e Q dx$$

$$M_e - M_a = \int_a^e Q dx \rightarrow \text{nos da el área bajo la curva del esfuerzo de corte entre } a \text{ y } e.$$

La expresión matemática  $\frac{dM}{dx} = Q$  no tiene validez en las secciones donde haya fuerzas concentradas.

## 5.9.- Resolvemos los siguientes ejercicios de aplicación

### Ejercicio N° 5.1

Dada la siguiente viga simplemente apoyada, cuya luz es  $l$  y, con una carga uniformemente repartida  $q$ , determinar:

1. las reacciones en los apoyos;
2. realizar los diagramas de esfuerzo de corte y de momento flexor.

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.55b).

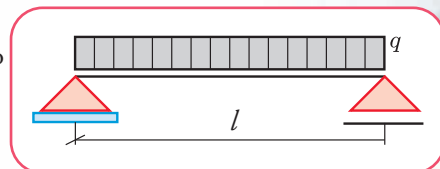


Figura 5.55a. Diagrama estático de carga



$$\sum M^b = 0 \Rightarrow V_a l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$V_a = \frac{ql^2}{2l}$$

$$V_a = \frac{ql}{2}$$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -V_b \times l + \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$-V_b \times l = -\frac{ql^2}{2}$$

$$V_b \times l = \frac{ql^2}{2}$$

$$V_b = \frac{ql^2}{2l}$$

$$V_b = \frac{ql}{2}$$

2. Diagrama de esfuerzos de corte (Figura 5.56).

En el apoyo  $a$ , el esfuerzo de corte es:

$$V_a = +\frac{ql}{2}$$

A una distancia  $x$  del apoyo  $a$ , el esfuerzo de corte es:

$$Q - Q_a = -qx$$

$$Q = Q_a - qx$$

$$Q = \frac{ql}{2} - qx$$

$$Q = q \left( \frac{l}{2} - x \right)$$

expresión matemática ↑ que corresponde a una función lineal, cuya representación gráfica es una recta.

$$\text{En } x = \frac{l}{2}, Q = 0$$

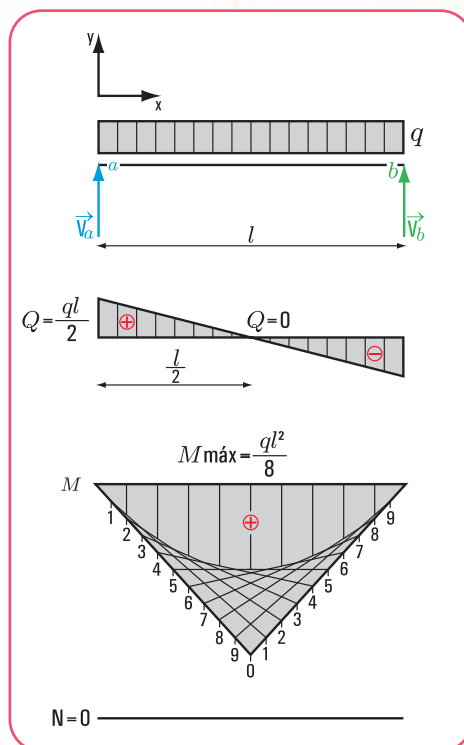


Figura 5.55b, 56, 57 y 58

Diagrama de sólido libre, de esfuerzo de corte, de momento flexor y de esfuerzo normal

### Convención de signos

Sobre la recta (eje) se representa el esfuerzo de corte (+) y debajo de la línea el negativo (-).

3. Diagrama de momento flexor (Figura 5.57).

En el apoyo  $a$ , el momento flexor es cero.

A una distancia  $x$ , el momento flexor es:

$$M_x = V_a x - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_x = \frac{ql}{2} x - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_x = \frac{q}{2} (-x^2 + lx)$$

↑

expresión matemática que corresponde a una parábola cuadrática.

#### 4. Diagrama de esfuerzo axil o normal (Figura 5.58).

Como no existe carga externa activa en la dirección del eje de la viga, el esfuerzo normal  $N$  es cero.

#### 5. Trazado de la parábola cuadrática

Dado que  $\frac{dM}{dx} = Q$ , para  $x = \frac{l}{2}$  donde  $Q = 0$ ,  $\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow$  que en  $x = \frac{l}{2}$  existe un máximo o un mínimo y la recta tangente es horizontal.

El momento en  $x = \frac{l}{2}$  es máximo con signo (+).

El trazado de la curva es igual que el de una parábola cuadrática que tenga la expresión matemática

$$f(x) = \frac{q}{2} (lx - x^2).$$

- Procedimiento para el trazado de la parábola cuadrática

1. En  $x = \frac{l}{2}$  se traza la perpendicular al eje y en la escala correspondiente dos veces el valor del momento máximo, se obtiene el punto 0.

$$M_{\text{máx}} = \frac{q}{2} \left[ -\left(\frac{l}{2}\right)^2 + l \cdot \frac{l}{2} \right]$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{q}{2} \left[ -\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{2} \right]$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{q}{2} \left( -\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{2} \right)$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{q}{2} \left( \frac{-l^2 + 2l^2}{4} \right)$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{ql^2}{8}$$

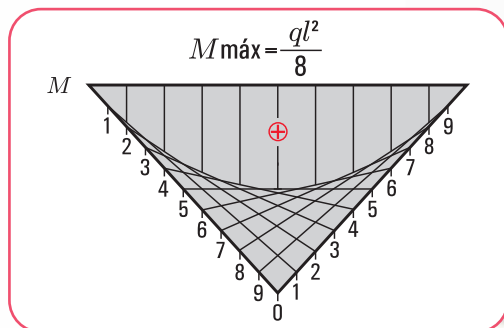


Figura 5.59. Parábola cuadrática: procedimiento

2. Se trazan las rectas determinadas por los puntos de apoyo y el punto 0.
3. Se dividen en partes iguales cada una de esas rectas y se numeran en sentido contrario.



Se traza la recta que pasa por los números de igual denominación. Dado que dichas rectas son tangentes a la parábola, ésta queda envuelta por las mismas.

4. Cada segmento comprendido entre la parábola y el eje, en la escala correspondiente, representa al momento flexor en su sección.
5. El momento flexor (+) lo representamos debajo del eje y el negativo sobre el eje.

### Ejercicio N° 5.2

Dada una viga empotrada-libre sometida a una carga uniformemente distribuida  $q$  (Figura 5.59), determinar:

1. reacciones en el apoyo;
2. diagrama de esfuerzos de corte;
3. diagrama de momento flexor;
4. diagrama de esfuerzo normal.

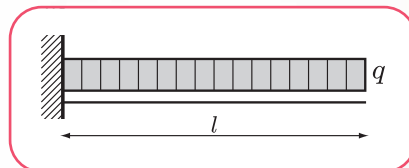


Figura 5.59. Esquema estático de carga

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.60).

♦ Aplicamos las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow q l - M_a = 0$$

$$M_a = q l$$

$$\sum \text{Proy}_y F = 0 \Rightarrow V_a - q l = 0$$

$$V_a = q l$$

2. Determinación de los valores del esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal en secciones críticas y realización de los respectivos diagramas.

### Esfuerzo de corte

En el apoyo  $a$ , el esfuerzo de corte es  $V_a$ .

$$Q_a = V_a$$

$$Q_a = q l$$

El esfuerzo de corte a una distancia  $x$  es:

$$Q_x = V_a - qx$$

$$Q_x = q l - qx$$

$$Q_x = q (l - x)$$



Expresión matemática de una función lineal cuya representación gráfica es una recta (Figura 5.61).

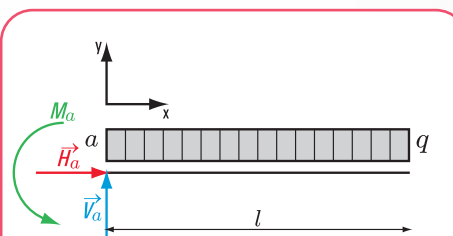


Figura 5.60. Diagrama de sólido libre

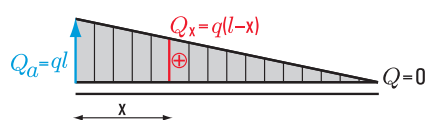


Figura 5.61. Diagrama de esfuerzo de corte

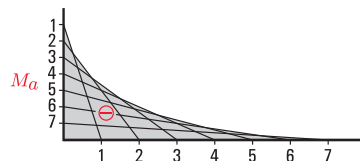


Figura 5.62. Diagrama de momento flexor



Figura 5.63. Diagrama de esfuerzo normal

Si  $x = 0$  (un infinitésimo a la izquierda del apoyo), entonces

$$Q_{x=0} = -q_l$$

### Momento flexor

El momento flexor a una distancia  $x$  del apoyo  $a$  es:

$$M_x = V_a x - \frac{q x^2}{2} - M_a$$

$$M_x = q l x - \frac{q x^2}{2} - M_a$$

↑

Expresión matemática de una función de segundo grado.

El momento máximo se produce en  $x = 0$

$$M_x = q l x - \frac{q x^2}{2} - M_a$$

$$M_{m\acute{a}x} = -M_a$$

### Esfuerzo normal

$$N = 0$$

- Procedimiento para el trazado del diagrama de momento flexor (Figura 5.62).

El trazado es similar al de una parábola correspondiente a la función:

$$f(x) = q l x - \frac{q x^2}{2} + C$$

- En la escala de momentos adoptada se traza sobre eje el valor de  $M_a$  en la sección del apoyo.
- El eje horizontal y la perpendicular en el apoyo son las rectas tangentes en los extremos de la parábola.
- Se dividen en partes cada una de esas rectas y se las enumera siguiendo un sentido contrario.
- Se trazan las rectas determinadas por pares de puntos de igual denominación. Dichas rectas son rectas tangentes que envuelven a la parábola cuadrática.



Figura 5.24. "La pulpería de Salomón" de Leonie Matthis



Figura 5.25. "Rumbo a la estancia" de Leonie Matthis (mediados del siglo XIX)

## 5.10.- Esfuerzos de tracción y de compresión

La acción de fuerzas colineales (igual recta de acción), igual magnitud y sentido opuesto sobre una barra, pone de manifiesto alargamientos o acortamientos transversales variables en una determinada sección.

Si partimos del supuesto que, sobre una pieza actúan únicamente fuerzas perpendiculares a la sección, de igual magnitud y sentido contrario que tratan de separar las partículas, la pieza está traccionada; recibe el nombre de tensor. El trabajo interno de éste es el mismo a lo largo de la barra. En cambio, si dichas fuerzas tratan de juntar las partículas, se trata de una pieza compri-



mida, entonces estamos en presencia de un puntal.

Realicemos el análisis de algunos casos de cada uno de los esfuerzos a los que puede estar sometida una estructura. Comenzamos por el de **tracción**.

## Caso 1

### Estructuras de tracción

#### 5.10.1. El tensor como elemento estructural de tracción

Pensemos en una cubierta de dos aguas de un edificio (vivienda unifamiliar, templo-iglesia, etc.). La solución estructural diseñada para soportar y transmitir la carga de la cubierta está conformada por una armadura triangular de madera, plana y simétrica. Presentamos una estructura muy simple, constituida por una armadura triangular con los siguientes elementos: una cumbrera, dos pares y un tensor (Figura 5.61).

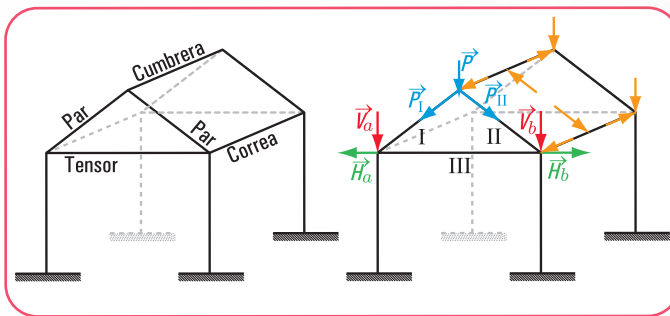


Figura 5.61. Armadura triangular: distribución de las cargas

#### ♦ Análisis de las cargas (Figura 5.61).

La cubierta descarga en las correas (la cumbrera es la correa superior); esto significa que las reacciones de la cubierta son acciones para las correas. A su vez las reacciones de éstas son acciones para los pares.

La carga  $P$  se descompone en las direcciones de los pares (I y II):  $P_I$  y  $P_{II}$ , que actúan sobre los apoyos (pilares).

Sobre los apoyos, dichas fuerzas se pueden descomponer en las componentes verticales  $V_a$  y  $V_b$  y en las horizontales  $H_a$  y  $H_b$ .

$H_a$  y  $H_b$  son fuerzas exteriores, colineales (pertenecen a la misma recta de acción), de igual intensidad y sentido contrario.

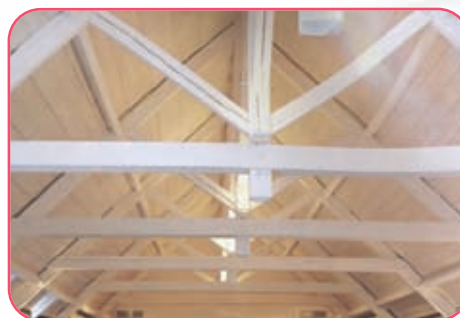


Imagen 5.26. Un edificio con estructura de techo de madera

#### ¿Cuál es el efecto que producen?

Las fuerzas  $H_a$  y  $H_b$  tienden a separar las barras de los pares. Como este efecto no puede darse, entonces se debe equilibrar colocando una barra (barra III). Esta barra, se denomina **tensor**.

Tiene que existir un equilibrio entre las fuerzas externas actuantes y los esfuerzos internos de reacción generados por el material del tensor.

$$H(\text{externa})(\text{acción}) = H(\text{interna})(\text{reacción del material})$$

La  $H$  (interna) será igual a la sumatoria de todas las tensiones normales  $\sigma$  por la superficie total de la

sección del tensor.

Las componentes de cada una de las fuerzas ( $V$  y  $H$ ) son absorbidas; por el pilar, la componente  $V$ , y por el tensor la componente  $H$ .

### ¿Qué efectos provocan $V$ y $H$ ?

$V$  provoca sobre el pilar el efecto de compresión.

$H$  provoca sobre el tensor el efecto de tracción.

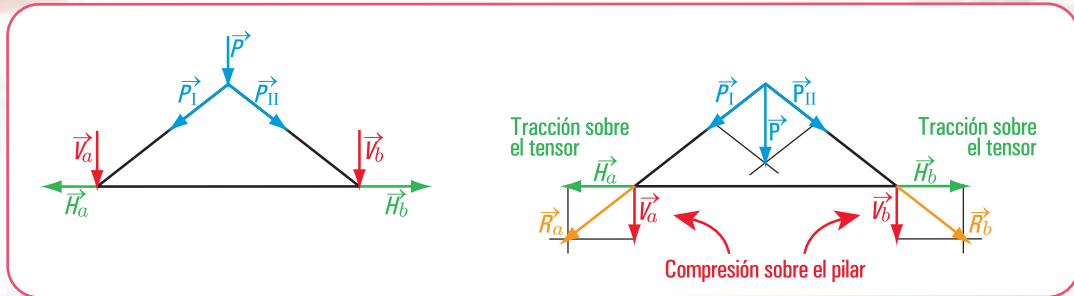


Figura 5.62. Esquemas de distribución de cargas

Si  $N$  es la fuerza externa (causa del fenómeno de tracción de la barra),  $\sigma$  es la tensión admisible del material; el equilibrio se puede expresar desde el punto de vista de la matemática mediante la siguiente expresión:

$$N = A \cdot \sigma_{ad}$$

$N$ : fuerza externa  
 $A$ : superficie de la sección  
 $\sigma_{ad}$ : tensión normal admitida del material

Si se desea dimensionar la pieza, es decir, buscar el valor de la sección, se utiliza la expresión matemática que surge de la anterior:

$$A = \frac{N}{\sigma_{ad}}$$

La sección puede tener varias formas: rectangular, cuadrangular; circular, maciza o hueca.

Por otra parte, si ya existe la estructura y se cambia la carga actuante (puede ser por modificación del destino), se tiene que realizar el proceso de verificación, que consiste en hallar  $\sigma$  actuante y verificar con  $\sigma_{ad}$ .

Para ello la expresión matemática es:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{ad}$$

El diseñador de estructuras debe considerar, al momento de diseñar un tensor:

- los equilibrios estáticos;
- la resistencia;
- los aspectos constructivos;
- el problema de las deformaciones (alargamiento) que experimenta el tensor,



$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$\Delta l$  = alargamiento del tensor

$N$  = fuerza a la que está sometido

$l$  = longitud del sensor

$E$  = módulo de elasticidad del material

$A$  = sección del tensor

Entonces podemos saber cuál será el alargamiento de un tensor en su momento de trabajo. Esto nos permite tomar decisiones con respecto al tipo de material; a la sección para un determinado estado de carga y a su longitud o bien determinar el alargamiento para un determinado material, sección, carga y longitud.

### • Veamos el siguiente caso

Por razones constructivas, el tensor que forma parte de una estructura de madera dura, arrayán, tiene una longitud de 6 m y soporta una carga de masa = 600 kg. Se desea que el alargamiento no supere el 1 % de la longitud inicial. Entonces la decisión que debemos tomar es la siguiente:

¿con qué sección lo construimos?

1°. Expresamos la fuerza  $N$  en newton (N) y el módulo de elasticidad  $E$  en  $\frac{N}{cm^2}$

$$N = 600 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}$$

$$N = 5.880 \text{ N}$$

$$E = 200.000 \frac{kg}{cm^2} \cdot 9,80 \frac{m}{s^2}$$

$$E = 1.960.000 \frac{N}{cm^2}$$

2°. Cálculo del área

$$\Delta l = \frac{5.880 \text{ N} \cdot 600 \text{ cm}}{1.960.000 \frac{N}{cm^2} \times A \text{ cm}} \Rightarrow \frac{5.880 \text{ N} \cdot 600 \text{ cm}}{1.960.000 \frac{N}{cm^2} \times A \text{ cm}^2} = 0,001 \text{ (1 \%)}$$

$$A = \frac{5.880 \text{ N} \cdot 600 \text{ cm}}{1.960.000 \frac{N}{cm^2} \times 0,001 \text{ cm}}$$

$$A = 1.800 \text{ cm}^2$$

3°. Cálculo de los lados de la sección del tirante

Si se desea construir un tirante con sección cuadrada de lados  $a$  y  $b$



Imagen 5.27. Vivienda unifamiliar con estructura de madera



Imagen 5.28. Vivienda en el bosque  
- República Federal de Alemania

$$a = b \Rightarrow a \cdot b = 1.800 \text{ cm}^2$$

$$a = \sqrt{1.800 \text{ cm}^2}$$

$$a = 42,43 \text{ cm}$$

$$b = 42,43 \text{ cm}$$

Adoptamos una sección de 45 x 45 cm.

Si la sección es rectangular, se fija un lado, por ejemplo  $a = 30 \text{ cm}$  y se calcula el otro  $b$ :

$$a \cdot b = 1.800 \text{ cm}^2 \Rightarrow b = \frac{1.800 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow b = 60 \text{ cm}$$

### ¿Cómo conviene colocar al tensor?

Si recordamos el concepto del momento de inercia  $J$ , que hemos visto en el capítulo 3, sabemos que el momento de inercia da rigidez al elemento estructural, y que la expresión matemática del momento de inercia de una sección rectangular es:

$$J = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

Para nuestro caso, el momento de inercia se calcula del siguiente modo:

$$J = \frac{a \cdot b^3}{12} \Rightarrow J = \frac{30 \text{ cm} \cdot (60 \text{ cm})^3}{12}, \text{ siendo } a = 30 \text{ cm, la base y } b = 60 \text{ cm, la altura (Figura 5.63).}$$

$$J = 540.000 \text{ cm}^4$$

Si  $a = 30 \text{ cm}$  es la altura y  $b = 60 \text{ cm}$ , la base (Figura 5.64).

$$J = \frac{b \cdot a^3}{12} \Rightarrow J = \frac{60 \text{ cm} \cdot (30 \text{ cm})^3}{12}$$

$$J = 135.000 \text{ cm}^4$$

Evidentemente, el tensor se colocará con el lado menor de la sección como base y el lado mayor como altura, ya que esta forma da mayor rigidez al elemento estructural.

La sección del perfil es de 45 x 45 en cm (aproximamos siempre en un número mayor) si la sección es cuadrangular y, de 30 x 60 en cm si la sección es rectangular.



Imagen 5.29. Estructura de madera de un techo a dos aguas



Figura 5.63. Tensor colocado de canto



Figura 5.64. Tensor colocado con el lado mayor como base del rectángulo de la sección



### 5.10.2. Estructuras colgantes. El cable como otro elemento de tracción

Existen estructuras denominadas colgantes o colgadas. Estas estructuras permiten salvar grandes luces. El elemento estructural principal es el **cable**. El material, casi excluyente, con el que se construyen los cables es el **acero**.

El acero tiene la gran capacidad de resistencia a la tracción, por lo tanto es óptimo para ser utilizado en estructuras de tracción.

Los cables se emplean en muchas obras de ingeniería: puentes colgantes, líneas eléctricas; teleféricos; vientos para torres de gran altura (ya lo hemos visto en varios problemas en los capítulos 1 de este libro).

De acuerdo con la carga que soportan se clasifica a los cables en:

1. cables que soportan cargas concentradas;
2. cables que soportan cargas distribuidas.

#### 1.- Cables con cargas concentradas

Consideramos un cable sujeto a dos puntos fijos  $a$  y  $b$ .

El cable está sometido a cargas verticales concentradas  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  (Figura 5.65).

Partimos de la hipótesis que el cable es flexible, o sea su resistencia a la flexión es pequeña y, por lo tanto, puede despreciarse. Por otra parte, también consideramos que el peso propio del cable es pequeño frente a las cargas que soporta, por lo tanto no se toma en cuenta. Esto significa que, solamente, actúan cargas concentradas externas. Las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una fuerza de tracción dirigida en la misma dirección del cable (Figura 5.66).

Un caso de esta situación puede ser el de los oleoductos suspendidos.

#### Ejemplo

Un oleoducto suspendido está sustentado mediante colgadores verticales sujetos a un cable. Cada sustentador soporta una determinada tracción, que es conocida.

Conocer la tensión máxima del cable ya construido y la ordenada de uno de los puntos del mismo, de donde se sostiene un sustentador, puede ser una necesidad, por ejemplo para cambiar el estado de carga y saber si el cable soporta la nueva carga (Figura 5.67).



Imagen 5.30. Teleférico que conduce al Monasterio de Montserrat. Barcelona - España

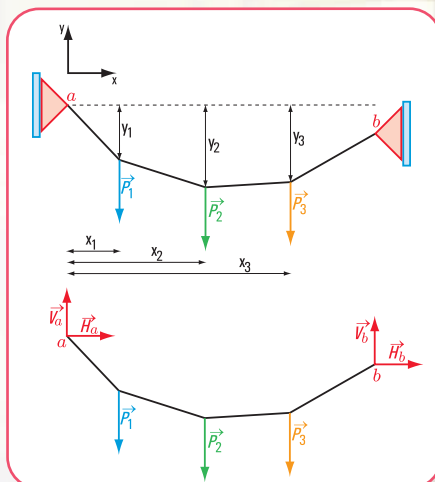


Figura 5.65. Esquema de un cable sometido a fuerzas concentradas

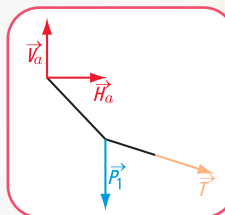


Figura 5.66  
Esquema de fuerzas  
internas en el cable

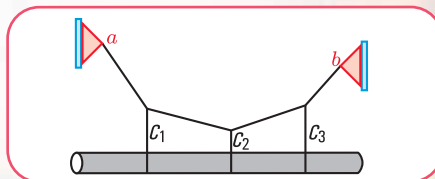


Figura 5.67. Esquema de carga de un cable que sostiene a un oleoducto

## Resolvamos el siguiente ejercicio

### Ejercicio N° 5.3

El cable de la **figura 5.68** soporta tres cargas concentradas verticales:  $\vec{F}_1$ ;  $\vec{F}_2$ ;  $\vec{F}_3$  en  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ . Sabemos que el punto  $c_3$  está 3 m por debajo del soporte izquierdo  $a$ ;  $y_3 = 3$  m, y el punto de apoyo  $b$  está por debajo de la horizontal que pasa por  $a$ ;  $y_b = 1$  m.

La intensidad de cada carga es:

$$F_1 = 25 \text{ kN}$$

$$F_2 = 50 \text{ kN}$$

$$F_3 = 15 \text{ kN}$$

Resulta importante conocer la altura del cable respecto de la horizontal que pasa por el apoyo  $a$ , en los puntos  $c_1$ ,  $c_2$ , la pendiente y la tensión máxima en el cable.

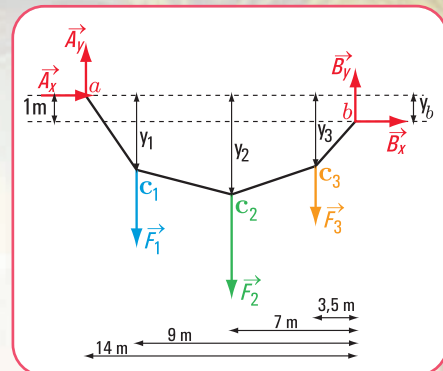


Figura 5.68. Esquema de carga del cable

### Busquemos la solución

1. Planteamos las ecuaciones de equilibrio

$$1. \begin{cases} \sum M^b = 0 \\ \sum M^{c_2} = 0 \\ \sum M^{c_3} = 0 \\ \sum M^a = 0 \end{cases}$$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow A_y \cdot 14 \text{ m} - 25 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} - 50 \text{ kN} \cdot 7 \text{ m} - 15 \text{ kN} \cdot 3,5 \text{ m} + A_x \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$14 \cdot A_y + A_x = 225 + 350 + 52,5 \quad (\text{Para no complicar la escritura con las unidades de medida no las colocamos en las expresiones matemáticas})$$

$$14 \cdot A_y + A_x = 627,5 \quad (6)$$

$$\sum M^{c_3} = 0 \Rightarrow A_y \cdot 10,5 \text{ m} - 25 \text{ kN} \cdot 5,5 \text{ m} - 50 \text{ kN} \cdot 3,5 \text{ m} + A_x \cdot 3 \text{ m} = 0 \quad \text{de la parte izquierda del cable}$$

$$10,5 \cdot A_y + 3 \cdot A_x - 137,5 - 175 = 0$$

$$10,5 \cdot A_y + 3 \cdot A_x = 312,5 \quad (7)$$

Las expresiones matemáticas (6) y (7) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 14 \cdot A_y + A_x = 627,5 \\ 10,5 \cdot A_y + 3 \cdot A_x = 312,5 \end{cases}$$



Imagen 5.31. Puente colgante. Budapest - Hungría



2. Cálculo de  $A_y$ . Usamos para encontrar la solución el método de determinantes.

$$A_y = \frac{\begin{vmatrix} 627,5 & 1 \\ 312,5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 10,5 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$A_y = \frac{1882,5 - 312,5}{42 - 10,5}$$

$$A_y = 49,84 \text{ kN, sentido de } A_y \uparrow$$

3. Cálculo de  $A_x$

$$A_x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 627,5 \\ 10,5 & 312,5 \end{vmatrix}}{31,5}$$

$$A_x = \frac{4.375 - 6.588,75}{31,5}$$

$$A_x = -70,28 \text{ N (el signo negativo significa que el sentido de la fuerza es el siguiente: } \leftarrow)$$

4. Cálculo de la componentes de la reacción en  $b$ :  $B_y$ ;  $B_x$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -B_y \cdot 14 \text{ m} - B_x \cdot 1 \text{ m} + 15 \text{ kN} \cdot 10,5 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot 7 \text{ m} + 25 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$-B_y \cdot 14 \text{ m} - B_x \cdot 1 \text{ m} = -15 \text{ kN} \cdot 10,5 \text{ m} - 50 \text{ kN} \cdot 7 \text{ m} - 25 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}$$

$$-B_y \cdot 14 \text{ m} - B_x \cdot 1 \text{ m} = -157,5 \text{ kN m} - 350 \text{ kN m} - 125 \text{ kN m}$$

$$B_y \cdot 14 + B_x \cdot 1 = 632,5 \text{ (8)}$$

$$\sum M^{c_1} = 0 \Rightarrow -B_y \cdot 9 \text{ m} + 15 \text{ kN} \cdot 5,5 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + B_x(y_1 - 1) = 0 \text{ (de la parte derecha del cable)}$$

$$-B_y \cdot 9 + B_x(y_1 - 1) = -182,5 \text{ kN (9)}$$

5. Determinamos la altura de los puntos  $c_1$  y  $c_2$

a. Consideramos la porción  $ac_1$  del cable como un sólido libre.

$$\sum M^{c_1} = 0 \Rightarrow A_y \cdot 5 \text{ m} - A_x \cdot y_1 = 0 \text{ (de la parte izquierda del cable)}$$

$$49,84 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - A_x \cdot y_1 = 0$$

$$249,2 \text{ kN m} - 70,28 \text{ kN} \cdot y_1 = 0$$

$$y_1 = \frac{-249,2 \text{ kN m}}{-70,28 \text{ kN}}$$

$$y_1 = 3,55 \text{ m (por debajo del punto a)}$$



Imagen 5.32

Vista del Puente de las Torres sobre el río Támesis - Londres

b.

$$\begin{aligned}\sum M^{c_2} = 0 &\Rightarrow A_y \cdot 7 - A_x \cdot y_2 - F_1 \cdot 2 = 0 \quad (\text{de la parte izquierda del cable}) \\ 49,84 \text{ kN} \cdot 7 \text{ m} - 70,28 \text{ kN} \cdot y_2 \text{ m} - 25 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} &= 0 \\ 348,88 \text{ kN m} - 70,28 \text{ kN} \cdot y_2 \text{ m} - 50 \text{ kN m} &= 0 \\ -70,28 \text{ kN} \cdot y_2 \text{ m} &= -298,88 \text{ kN m} \\ y_2 &= \frac{-298,88 \text{ kN m}}{-70,28 \text{ kN m}} \\ y_2 &= 4,25 \text{ m} \quad (\text{por debajo del punto } a)\end{aligned}$$

c. Reemplazando en (9) a  $y_1$  por el valor hallado, resulta:

$$\begin{aligned}-B_y \cdot 9 \text{ m} + B_x(3,55 - 1) \text{ m} &= -182,5 \text{ kN} \\ B_y \cdot 9 \text{ m} - B_x(3,55 - 1) &= 182,5 \text{ kN} \\ B_y \cdot 9 \text{ m} - B_x \cdot 2,55 \text{ m} &= 182,5 \text{ kN} \quad (10)\end{aligned}$$

d.

$$\sum M^{c_3} = 0 \Rightarrow -B_y \cdot 3,5 \text{ m} + B_x \cdot 2 \text{ m} = 0 \text{ kN} \quad (11) \quad (\text{de la parte derecha})$$

Las expresiones matemáticas (10) y (11) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} B_y \cdot 9 \text{ m} - B_x \cdot 2,55 \text{ m} = 182,5 \text{ kN} \\ -B_y \cdot 3,5 \text{ m} + B_x \cdot 2 \text{ m} = 0 \text{ kN} \end{cases}$$

$$B_y = \frac{\begin{vmatrix} 182,5 & -2,55 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -2,55 \\ -3,5 & 2 \end{vmatrix}} \Rightarrow B_y = \frac{365 - 0}{18 - 8,93}$$

$$\Rightarrow B_y = 40,24 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 182,5 \\ -3,5 & 0 \end{vmatrix}}{9,07} \Rightarrow B_x = \frac{638,75}{9,07}$$

$$\Rightarrow B_x = 70,42 \text{ kN} \rightarrow$$

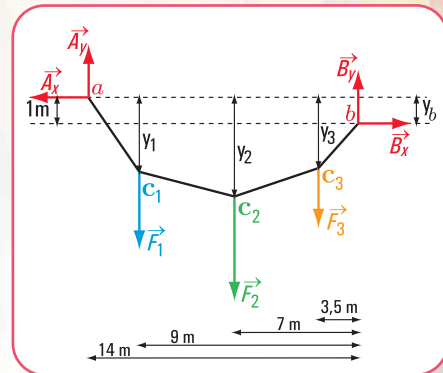


Figura 5.69. Esquema de carga del cable con las reacciones con sentido correcto

## 6. Cálculo de la pendiente y la tensión máxima (Figura 5.70)

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{3,55 \text{ m}}{5 \text{ m}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,71 \\ \alpha &= \arctg 0,71\end{aligned}$$



$$\alpha = 35,37^\circ \text{ (valor que se obtiene usando la calculadora)}$$

$$\alpha_1 = 360^\circ - 35,37^\circ$$

$$\alpha_1 = 324,63^\circ \text{ (valor real)}$$

$$T_1 = \frac{A_x}{\cos 324,63^\circ} \Rightarrow T_1 = \frac{70,28 \text{ kN}}{0,82}$$

$$T_1 = 85,70 \text{ kN}$$

### Respuesta

La pendiente máxima es  $\alpha_1 = 324,63^\circ$

La tensión máxima es  $T_1 = 85,70 \text{ kN}$

La altura del cable  $y_1 = 3,55 \text{ m}$  (por debajo del punto  $a$ )

La altura del cable  $y_2 = 4,25 \text{ m}$  (por debajo del punto  $a$ )

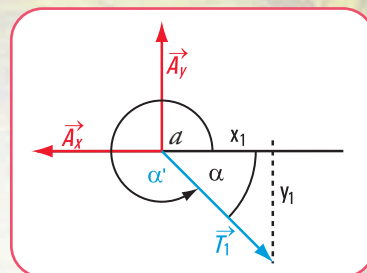


Figura 5.70. Esquema de las fuerzas en  $a$

## 2. Cables con cargas distribuidas

Consideramos un cable con dos puntos fijos que soportan una carga distribuida.

*Como ya vimos en el caso de un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tracción dirigida según la dirección del cable.*

Ahora bien, en el caso que la carga sea distribuida, el cable cuelga en forma de curva y la fuerza interna en cada punto tiene la dirección de la tangente a la curva.

El cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del mismo cable, es el caso de los cables que cuelgan bajo su propio peso.

La traza que toma el cable, en este caso, se asimila a la curva geométrica denominada **catenaria** (Figura 5.71).

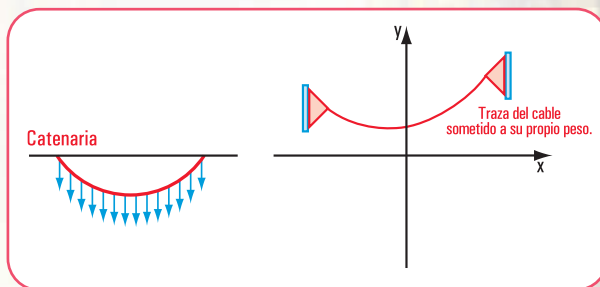


Figura 5.71. Esquema de un cable con forma de la catenaria

La expresión matemática de la **catenaria** de eje vertical es:

$$f(x) = c \cdot \text{ch} \frac{x}{c} \text{ o bien } y = c \cdot \text{ch} \frac{x}{c}$$

Otra manera de escribir la ecuación de la catenaria es:

$$y^2 - s^2 = c^2$$

En el caso que el cable esté bien tensado, puede suponerse que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, la catenaria puede sustituirse por una parábola y el error que se introduce es pequeño. Esta simplificación facilita el cálculo, ya que evita el uso de funciones hiperbólicas ( $\text{ch} \frac{x}{c}$ , coseno hiperbólico) (Figura 5.72).

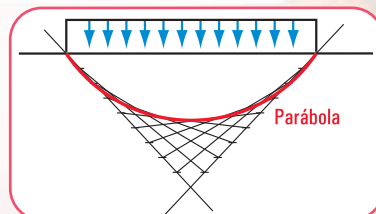


Figura 5.72. Esquema de un cable con forma parabólica

<sup>5</sup>  $f(x) = c \cdot \text{ch}(x/c)$  se lee "efe de x igual a c por coseno hiperbólico de x sobre c".

El ejemplo típico del cable como elemento estructural lo podemos ver en las estructuras colgantes en puentes que deben salvar grandes luces.

También podemos pensar en este tipo de estructura para una cubierta que está constituida por cables de sostén.

Son estructuras muy livianas dado que no cuentan con un peso propio estimable. Esta liviandad hace que queden expuestas a deformaciones llamadas de flameo, similares a acciones de fuerzas como las del viento.

Para evitar esta situación que conduciría a la destrucción de la obra, se podrían utilizar las siguientes soluciones:

1. aumentar el peso de la estructura. Esta solución atenta contra la característica fundamental de ésta, vale decir de ser livianas, ligeras;
2. envainar el cable con un material, como el hormigón, que absorbe compresiones. En determinadas formas, así se procede; colocar cables con una curvatura inversa del tensionado previo que amarran la estructura, tomando ésta la forma de superficies alabeadas como “sillas de montar” o paraboloides hiperbólicos (Figura 5.73). Estos cables también toman el nombre de tensores;
3. ambos cables: el de sostén y el tensor están unidos por las denominadas péndolas que trabajan a la tracción y a la compresión (Figura 5.74);
4. emplear losetas de hormigón apoyadas sobre los cables de sostén, las que, en virtud de su peso propio eliminan el peligro de flameo.



Imagen 5.33. Puente Portugalete (vista de frente)

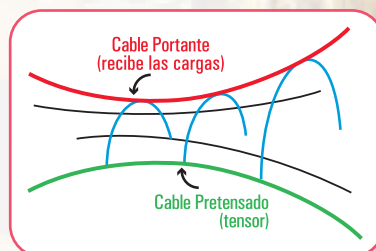


Figura 5.73. Esquema de cables con la forma de la silla de montar

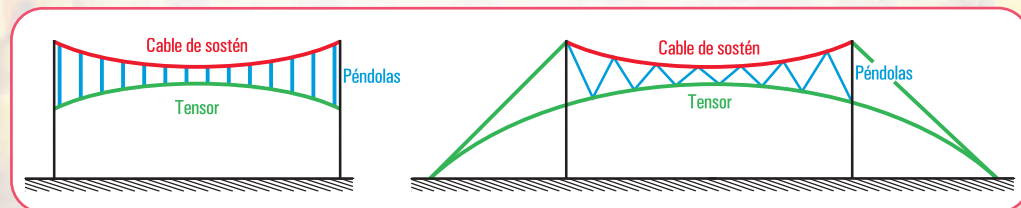


Figura 5.74. Esquemas de cables unidos por péndolas

### ¿Cómo se determinan los esfuerzos?

Consideramos un cable como elemento principal de la estructura colgante de una cubierta. Suponemos que el cable está muy tendido, entonces la carga puede considerarse que actúa uniformemente distribuida sobre su proyección horizontal. En este caso, la catenaria puede reemplazarse por una parábola cuadrática. La parábola (traza geométrica del cable) tiene su flecha máxima en el centro (Figura 5.75).

Las reacciones en los apoyos son  $\vec{V}_a$ ,  $\vec{H}_a$  en el apoyo  $a$  y  $\vec{V}_b$ ,  $\vec{H}_b$  en el apoyo  $b$ .

$$\begin{aligned} V_a &= V_b \\ H_a &= H_b \end{aligned}$$

Pensemos por un momento en una situación hipotética.



Si cortamos el cable en el centro para mantener el equilibrio será necesario aplicar en ese punto una fuerza horizontal ( $\vec{H}_c$ ). El valor de  $H$  debe ser igual al que cumplía la parte del cable eliminada. Entonces en el apoyo  $a$ , las intensidades de las reacciones serán  $V_a$  y  $H_a$  y en el centro  $H_c$ . La carga actuante en la mitad del tramo es:  $P = \frac{ql}{2}$  (Figura 5.75).

En cada sección del cable se debe satisfacer las condiciones de equilibrio.

$$\begin{cases} \Sigma H = 0 \\ \Sigma V = 0 \\ \Sigma M^a = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma H = H_a + H_c; H_a + H_c = 0 \Rightarrow H_a = -H_c$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_a = P \Rightarrow V_a = \frac{ql}{2}$$

El cable no trabaja a la flexión, esto significa que a lo largo de todo el cable no se registran momentos flexores, o sea que  $\Sigma M^c = 0$  en cualquier sección del cable.

$$\Sigma M^c = 0 \Rightarrow -H_a \cdot f + V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$\Sigma M^c = 0 \Rightarrow -H_a \cdot f + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = 0$$

$$\Sigma M^c = 0 \Rightarrow -H_a \cdot f + \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = 0$$

$$H_a \cdot f = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} \quad (f \text{ es la flecha})$$

$$H_a \cdot f = \frac{ql^2}{8}$$

$$H_a = \frac{ql^2}{8f}$$

Como  $H_a = -H_c$ ,  $H_c = -\frac{ql^2}{8f}$  (el signo  $-$  significa que el sentido de  $\vec{H}_c$  es opuesto al de  $\vec{H}_a$ ).  $H_c$  es la intensidad de la fuerza horizontal que soporta el cable en su centro.  $\vec{H}_a$  es la componente horizontal de la reacción en  $a$  que compuesta con la componente vertical  $\vec{V}_a$  da la reacción en el apoyo  $a$ , que es igual a la reacción en  $b$ .

La expresión matemática de  $V_a$  nos dice que la componente vertical de la reacción depende de la carga y de la luz, en cambio la reacción horizontal  $H_a$  depende de la carga, de la luz, y de la flecha.

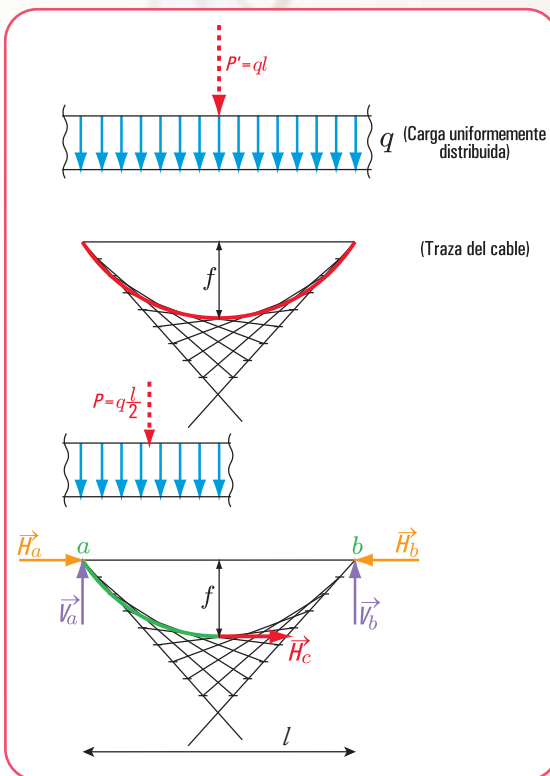


Figura 5.75. Diagrama de carga uniformemente distribuida y traza parabólica del cable

### 5.10.3. La membrana o cáscara como elemento estructural de tracción

Una membrana es un elemento estructural tan delgado que no puede resistir ni la compresión, ni la flexión, ni el corte, sólo tiene la capacidad de resistir la tracción. Un trozo de caucho es un ejemplo de este tipo de estructura. Otro ejemplo lo constituyen las pompas de jabón, con las que tantas veces hemos jugado.

A pesar de ser tan limitada su capacidad de resistencia frente a los diferentes esfuerzos característicos (compresión, corte y/o flexión), las membranas conforman un modelo de elemento estructural, con todas sus ventajas y sus desventajas. Su utilización tiene un motivo fundamental: la carga debido a su propio peso es baja.

*Basta con observar las carpas, por ejemplo la carpa que usamos para acampar, la carpa de un circo, las carpitas que, muchas veces, nos cubren de los rayos del sol en la playa,...*

*Analicemos cualesquiera de dichas carpas, por ejemplo la de acampar.*

*La carpa es una membrana que cumple, perfectamente, la función para la cual está destinada: cubrir un espacio. La condición es que la tela esté adecuadamente sostenida; para ello se usan los parantes de compresión, estabilizados por cuerdas o cables que trabajan a la tracción.*

*En la carpa, ante un viento variable o un viento permanente, a pesar de que está preparada para que resista la fuerza del viento, se produce lo que se denomina el flameo y, esto, se debe a su poco peso. Si bien la liviandad estructural es una ventaja, en este caso, al tener poco peso, la fuerza estabilizadora que podría ayudar a evitar el flameo, es casi nula.*

*Existen algunos procedimientos que atenúan esta situación.*

*Si previo a aplicar la carga se tensa la tela, la acción estructural mejora notablemente.*

*Hemos observado en muchas películas, o en algunos casos en la realidad cuando vamos al circo, que, a veces, no siempre, por ejemplo debajo de un equilibrista, se utiliza una tela de forma circular tensada (traccionada) sobre un aro perimetral, para recoger, en caso que el equilibrista pierda el equilibrio y se caiga desde una altura considerable.*

*Cuando la persona cae, la membrana absorbe el impacto que produce la fuerza con la que cae, flexiona, y, debido a su flexibilidad y resistencia cumple su función.*

*Cuando se ajusta la membrana al aro se la está traccionando, es decir, aplicando fuerzas perpendiculares al plano de la sección, de igual intensidad y sentido contrario, y que hacen que las partículas internas de la membrana se separen. Por eso hay que tener el cuidado de no llegar a que ese esfuerzo de tracción provoque la rotura de la membrana.*

*Este proceso es lo que se denomina pretensado: se produce tracción en la membrana y compresión en el aro.*



**Imagen 5.34.** Preparativos para la entrega de premios del Gran Prix Fórmula 2 (2001), frente al Palacio del Principado de Mónaco



Otro ejemplo, lo constituye el paraguas. El paraguas está formado por nervaduras de acero que sostienen la tela, y elementos que están conectados a las nervaduras, también de acero. Cuando se hace funcionar el mecanismo para abrir el paraguas, los elementos de compresión hacen que las nervaduras se impulsen hacia afuera y, de este modo, someten a la tela a tracción y, le dan la forma para soportar las cargas. Estas cargas son la fuerza de la lluvia y del viento, fuerzas que se producen desde arriba. Pero muchas veces nos ha sucedido que la fuerza del viento cambia, y el sentido es desde abajo (Figura 5.76). La membrana del paraguas está preparada para soportar, tanto las presiones desde arriba, como desde abajo. El armazón de acero invierte sus tensiones frente a la acción del viento, pero en ambos casos la tela está traccionada.

Otro caso de cubierta de tracción se puede apreciar en el Gran Arco de la Defensa construido al oeste de París en conmemoración de los 200 años de la Revolución Francesa y de los Derechos Humanos. La mencionada cubierta sirve de protección a los peatones que pasan por el majestuoso edificio que alberga al Ministerio de Equipamiento, Vivienda y Transporte, así como a la Fundación de los Derechos Humanos y el Desarrollo. El edificio construido por el arquitecto danés Johan von Spreckelsen, está concebido como un gran cubo de 105 m de lado, hueco en el medio.

Simbólicamente esto significa la posibilidad de crecimiento futuro hacia el oeste. La estructura del edificio es de hormigón armado, con 4 grandes pórticos, separados entre sí 21 m.

Si bien el Gran Arco de la Defensa con su cubierta de tracción está ubicado en una zona de grandes vientos, la cubierta tiene puntales y cables que impiden su flameo.

Otra estructura de tracción corresponde a una cubierta provista de tensores y puntales, como así de arcos reticulados que evitan el flameo.



Imagen 5.35 a. Un domingo por la tarde en la Isla de la Grande Jatte (1884 - 1886), Jorge Seurat. Instituto de Arte de Chicago



Imagen 5.35 b. Maja leyendo una carta, Goya. Museo Bellas Artes. Lila

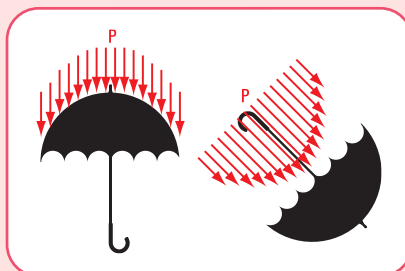


Figura 5.76. Fuerzas posibles a las que puede estar sometido un paraguas abierto



Imagen 5.36. Cubierta del Gran Arco de la Defensa. París - Francia



Imagen 5.37. Cubierta de tracción

## Caso 2

### Estructuras de compresión

#### 5.10.4. El pilar como elemento estructural de compresión

En la estructura representada en la **figura 5.62** (página 209) se tienen piezas que están sometidas a la acción de fuerzas externas que las solicitan al trabajo de compresión. La fuerza  $\vec{P}$  se descompone en fuerzas que actúan sobre los pares ( $\vec{P}_I$ ;  $\vec{P}_{II}$ ). Cada una de estas fuerzas es una fuerza externa que actúa sobre el pilar donde el par apoya.

Consideramos una de ellas, por ejemplo  $\vec{P}_I$ .

$\vec{P}_I$  la podemos expresar mediante sus componentes ( $\vec{H}_{Ia}$  y  $\vec{V}_{Ia}$ ), que son cargas externas activas del par. La componente  $\vec{V}_{Ia}$ , actúa sobre el pilar. Por el principio de acción y reacción, el pilar reacciona sobre el par con fuerzas colineales de igual intensidad y sentido contrario.

El pilar, constituye una pieza corta que trabaja, exclusivamente, a compresión simple. El fenómeno de compresión simple es similar al de tracción, con la diferencia que la pieza experimenta acortamiento en vez de alargamiento, como sucede en el caso de la tracción.

Por esta característica, los materiales óptimos para la construcción de pilares son, por lo general: materiales pétreos o mamposterías.

Además de la fuerza concentrada  $\vec{V}_{Ia}$ , el pilar también recibe la fuerza de su peso propio representada por la fuerza  $\vec{P}_p$  y con punto de aplicación en su centro de gravedad. Para que el pilar satisfaga la condición de equilibrio estático será necesario que en su base de apoyo se generen fuerzas que equilibren a las fuerzas externas activas.

Este equilibrio resistente se expresa mediante la siguiente expresión matemática:

fuerzas externas activas = fuerzas internas reactivas

$$V_{Ia} + P_p = \sigma_{ad} (-) \cdot A$$

$\sigma_{ad} (-)$  corresponde a la tensión admisible del material sometido a esfuerzo de compresión.

Para dimensionar el pilar se busca el valor del área

$$A = \frac{V_{Ia} + P_p}{\sigma_{ad}(-)}$$

Esta expresión nos da el valor de la sección, pero nada nos dice sobre la forma. Al elegir la tensión, ya se sabe el tipo de material, pues la tensión depende del mismo. La forma (cuadrangular, rectangular, circular) depende del diseño.

Si se desea verificar el máximo de carga permitida, la expresión matemática es la siguiente:

$$\sigma(-) = \frac{V_{Ia} + P_p}{A} \leq \sigma_{ad}$$

Si el pilar además de su peso propio y de la carga céntrica, recibe un empuje lateral  $\vec{E}$ , podrían darse



**Imagen 5.36.** *Día del mantel largo.*  
Obra pictórica de Leonie Matthis



las siguientes situaciones, según la ubicación de la resultante  $\vec{R}$ .

### Situación 1

La recta de acción de la resultante  $\vec{R}$  pasa por dentro de los límites de la base de apoyo (Figura 5.77). En este caso el pilar está en equilibrio estable.

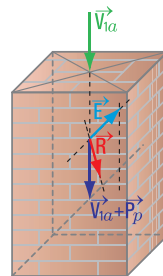


Figura 5.77. Esquema de un pilar: la recta de acción de la resultante de las fuerzas pasa por la base de apoyo

### Situación 2

La recta de acción de la resultante  $\vec{R}$  pasa por la arista de la base (Figura 5.78). Aquí estamos en presencia de un equilibrio indiferente.

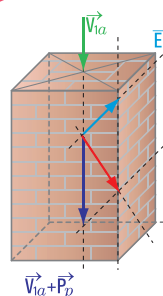


Figura 5.78. Esquema de un pilar: la recta de acción de la resultante de las fuerzas pasa por una de las aristas de la base de apoyo

### Situación 3

La recta de acción de la resultante  $\vec{R}$  cae fuera de los límites de la base (Figura 6.79). En esta situación estamos en presencia de un caso de equilibrio inestable.

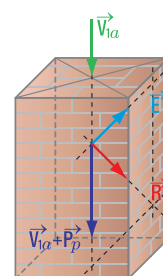


Figura 5.79. Esquema de un pilar: la recta de acción de la resultante de las fuerzas pasa por fuera de la base de apoyo

Recordamos que este tema lo desarrollamos en el ítem 5.2.

Veamos qué sucede en cada uno de los casos, si el pilar está sometido a un pequeño empuje lateral.

En la segunda situación un incremento del empuje, por pequeño que sea, lleva a que pase a la situación de equilibrio inestable, porque el pilar girará alrededor de la arista más próxima a la recta de acción de la resultante y perderá el equilibrio.

Analizamos ahora el efecto de las cargas en el caso del pilar en equilibrio estable. Para ello descomponemos la resultante en dos componentes: la fuerza  $\vec{V}$ , perpendicular al plano paralelo al plano de la base y,  $\vec{H}$  que yace en un plano paralelo al plano de la base.

**¿Qué efecto provocan ambas fuerzas?**

La fuerza  $\vec{V}$  provoca un esfuerzo de compresión, mientras que la fuerza  $\vec{H}$  tiende a provocar el traslado lateral de la parte superior de cualquier sección del pilar respecto de la parte inferior. Evidentemente, estos esfuerzos no son posibles en una construcción edilicia. Deben ser contrarrestados.

Entonces

**¿quién cumple esta función?**

La carga  $\vec{V}$  viaja por el pilar hasta la base, ésta distribuye la carga al suelo, mientras que  $\vec{H}$  es absorbida por el material. Este esfuerzo es un esfuerzo de corte normal.

Si el pilar está construido de mampostería en seco, la fuerza de rozamiento entre los materiales con-

trarresta la fuerza  $\vec{H}$ .

Analicemos ahora un caso de pilar sometido a una fuerza excéntrica.

### 5.10.5. Una viga que apoya sobre un pilar

La viga apoya sobre un pilar, la recta de acción de la carga  $\vec{N}$  que transmite la viga sobre el pilar no es colineal con la recta de acción de la fuerza peso ( $\vec{P}$ ). Entre ambas rectas de acción existe una distancia, que denominamos excentricidad ( $e$ ). Como en el caso de las fuerzas, siempre se las referencia al centro de gravedad de la pieza, se traslada la fuerza  $\vec{P}$  al baricentro  $G$ . Para ello se aplican en  $G$  dos fuerzas colineales de igual intensidad y sentido contrario. En realidad se está agregando un sistema nulo:  $\vec{N}$  ;  $-\vec{N}$  que no altera el sistema primitivo. El valor de la cupla está dado por el momento  $M = N.e$  (Figura 5.80). De este modo el sistema de fuerzas está constituido por  $\vec{N} + \vec{P}$  (fuerza de compresión) y  $M$  (momento). Por lo tanto, el pilar está sometido a un esfuerzo de flexo-compresión.

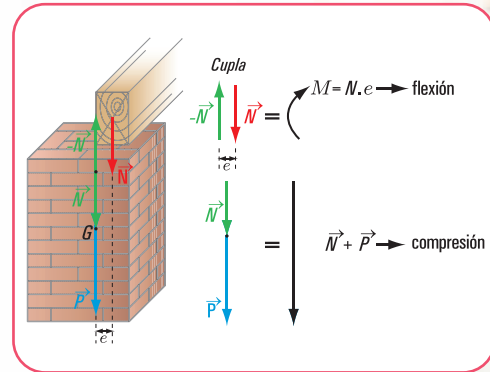


Figura 5.80. Esquema de un pilar sometido a un esfuerzo de flexo-compresión

### 5.10.6. La columna como elemento estructural de compresión

La columna es el elemento estructural de soporte más antiguo que la naturaleza tiene, ya sea en el mundo vegetal, como en el animal y en el mundo de los seres humanos.

Observando la naturaleza, podemos encontrar desarrollos de este tipo de estructura en los vegetales, en los animales y en los humanos.

A los tallos, elementos de sostén de los primeros vegetales, les siguieron los troncos, para transformarse posteriormente en enormes árboles. El tema del pandeo fue resuelto por la naturaleza de una manera maravillosa y, tal vez, el hombre cuando tuvo que resolverlo tomó ejemplo de ella.

*Como ejemplo podemos considerar el bambú:*

*¿Cómo se resolvió en el bambú el tema del pandeo o abollamiento de sus paredes?*

*Los nudos equidistantes resuelven este problema y también las tensiones tangenciales a lo largo de toda la pieza.*

*Otro tema que aparece en la naturaleza, similar a la construcción realizada por el hombre, es la forma de sustentación. En el caso de la naturaleza por lo general, se plantea la forma empotrado – libre,*



Imagen 5.36. *Migración*, 1954, pigmento sobre tela, 202 x 300 cm de Antonio Berni. Colección particular



*como si fuera una columna de aluminado. Así lo podemos observar, por ejemplo en los árboles: empotrado en la tierra, libre en el extremo superior.*

*En cambio, si pensamos en las columnas de los seres humanos, la columna vertebral está articulada- articulada, en forma similar a la sustentación de columnas continuas una sobre otra. Pensando en términos de esfuerzos, podemos decir que los huesos trabajan a la tracción, mientras que los músculos que los envuelven lo hacen a la compresión.*

*En los animales las patas son los verdaderos soportes. En algunos casos, las patas son robustas, como las del elefante (patas cortas, robustas), o bien esbeltas como son las de la cigüeña (finas y altas).*

Podemos decir que la misión de la columna en la construcción es la síntesis de toda la finalidad constructiva: **soportar**, pero **soportar**, aquí no tiene la acepción que, a veces, le damos como sinónimo de humillación; de aguante con hastío, sino que tiene la connotación de **resistir** y, por eso, la columna es sinónimo de fortaleza.

Y, la columna es el elemento estructural que siempre cobró fuerza en las diferentes épocas de la historia.

*La columna constituye, seguramente, el elemento estructural que, a lo largo de la historia de la arquitectura ha dado una impronta a cada época, ya que cuando se habla de estilo arquitectónico, no falta el análisis de la columna. Y, seguramente todos recordamos de nuestra secundaria a la columna dórica, o a la jónica o a la corintia.*

Y, aquí hacemos un paréntesis y nos detenemos en el análisis de la columna a través de las diferentes épocas.

Los persas construyeron sus palacios de enormes dimensiones como el de Persópolis. Los muros se construían con bloques de piedra, estos colocados en seco y unidos con grapas de hierro. Las columnas alcanzaban los 20 metros de altura. Los capiteles fueron contruidos de hasta cinco metros desde la base hasta la punta y muy sobrecargados rematados por volutas jónicas sobre las que descansaban esculturas que representaban a bueyes, o bien, a unicornios arrodillados y adosados. Las columnas servían para sostener la carga de una techumbre plana y transmitirla a la base.

Una columna contruida en el Antiguo Egipto está formada por un ábaco escuadrado, un capitel y el fuste. No es claro el rol del capitel; pero, seguramente, tenía la función de aprovechar mejor la resistencia del material, y de ser un elemento de transición entre el fuste y la viga del dintel.

En la Grecia Clásica se construían los templos considerando las formas y proporciones que se creían del agrado de los dioses.

El templo griego está, perimetralmente, rodeado por una columnata. La columna tiene tres partes: la base, el fuste y el capitel. El fuste no es monolítico, sino que está contruido por secciones denominadas tambores. La columna de forma circular y estriada descansa sobre un pavimento llamado esteóbato; de éste el tercer peldaño recibe el nombre de estilobato.

Existe una distancia entre cada una de las columnas, llamada intercolumnio. En alguno de los templos se ha logrado una sensación de igualdad de distancia y verticalidad en columnas angulares (no verticales), aunque, en realidad, no existe ni una separación ni una verticalidad en las mismas.

El artista griego perseguía en forma permanente la armonía, de allí que las columnas dóricas tenían, por lo general, 20 estrias. Entre 4 y 6  $\frac{1}{2}$  veces el diámetro de la base es la altura. En la parte alta el fuste disminuye de  $\frac{3}{4}$  a  $\frac{2}{3}$  del diámetro de la base.

Tres son los órdenes o estilos que marcan la **arquitectura griega clásica**: el dórico, el corintio (el más antiguo, inventado en Atenas) y el jónico (proveniente de las islas del mar Egeo). Los tres se diferencian

por la decoración y las proporciones de las columnas, los capiteles y los entablamentos.<sup>6</sup>

*“El orden dórico se desarrolla en la parte continental de Grecia y en las colonias occidentales; Sicilia y en la Italia meridional, en el siglo VII a. de C. Los templos dóricos se caracterizan por estar rodeados de una sola hilera de columnas y por no tener tejados. El capitel, elemento fundamental para distinguir un orden de otro, está constituido por el ábaco –remate del capitel– una moldura saliente –equino–, el listel y el cuello –traquellio–”.*

*“Un siglo después, el orden jónico se impone en las islas del mar Egeo. Este estilo, más trabajado que el anterior, se distingue por la aparición de las volutas en los capiteles –que tienen forma de espiral– y las acróteras –adornos en los frontones–”.*

*Las estructuras que distinguen a los templos romanos construidos en el período de la república son: el pórtico anterior, con columnas que forman la fachada, y la cella, maciza y completamente cerrada por intercolumnios ciegos. Esto implica otorgar mucha importancia a la frontalidad, por cuanto a partir de ella se definen los espacios y se señala la única vía de acceso. Esta frontalidad se acentúa colocando el edificio sobre un elevado basamento”.*

Construcciones en hormigón armado: tecnología, diseño estructural y dimensionamiento.  
Haydée Noceti | Raúl Montoto



Imagen 5.37 a. Templo de Poseidón



Imagen 5.37 b. Templo de la Fortuna viril de Roma; Foro Boario. Cella cerrada con muros de piedra toba<sup>7</sup>

No cabe duda que la primera columna fue construida de madera; la segunda de piedra, material muy apropiado, ya que la piedra constituye un buen material para trabajar a la compresión. Y, cuando observamos las primitivas columnas de forma circular tronco-cónica, con ensanche hacia abajo, encontramos una lógica, pues la carga se incrementa de arriba hacia abajo; es decir hacia la base.

En la época románica, cuando aparece el arco, el capitel es un elemento que sirve para ensanchar el fuste de la columna hasta dejar el ancho que permite que los dos arcos apoyen sobre ella.

El hombre desde la época primitiva utiliza la columna en la construcción de su hábitat, imitando lo que ve en la naturaleza. Además, usa los materiales característicos del lugar que va cambiando a medida que pasa el tiempo.

Su vivienda la construye con una estructura de madera formada por puntales y travesaños. Nuestros ranchos tienen una estructura similar.

La columna de piedra se construía uniendo las piedras con argamasa constituida por arcilla y espartillo; posteriormente, la unión se obtenía mediante la mezcla de arena y cal. Esta mezcla daba mayor resistencia a la columna. Este tipo de columnas (de piedras o ladrillos) sólo resiste el esfuerzo de compresión.

A fines del siglo XVI cuando aparece el hierro como elemento constructivo, entonces aparecen las columnas compuestas. Simultáneamente, el hierro fundido se utiliza para construir columnas en serie. Son las farolas de alumbrado y las columnas de galería.

Con la revolución industrial, las columnas se construyen con perfiles laminados y, a fines del siglo XIX, con el descubrimiento del cemento se comienza a construir las columnas de hormigón simple. Con la llegada de los ferrocarriles a nuestro país, en la construcción de las estaciones, las columnas eran de hierro; los pilares de los puentes se hacían de hormigón simple de cascotes o de piedra partida.

A medida que fue mejorando la calidad del cemento, el hormigón fue adquiriendo mayor resistencia

<sup>6</sup> Estructuras que se apoyan en las columnas.

<sup>7</sup> Piedra porosa y ligera, usada especialmente para evitar empujes y cargas excesivas.



y las columnas fueron tomando formas más esbeltas.

En la actualidad, las columnas se construyen de hormigón armado (hormigón + acero), madera y de perfiles de acero. La columna toma diferentes formas: circulares, rectangulares... con patas verticales o inclinadas.

Veamos ahora, **cómo se comportan las columnas frente a diferentes tipos de cargas.**

Pensemos en una columna de alumbrado. La columna es de caño y soporta la carga del artefacto lumínico.

La primera pregunta que le surge a un calculista ante esta situación es la siguiente:

**¿a qué tipo de sollicitación está sometida la columna?**

Para dar respuesta a esta pregunta analicemos dos casos.

### Caso I

Analicemos el esquema de carga (Figura 5.81).

$\vec{P}_f$  simboliza al peso propio del artefacto lumínico y  $\vec{P}_p$ , el peso propio de la columna.

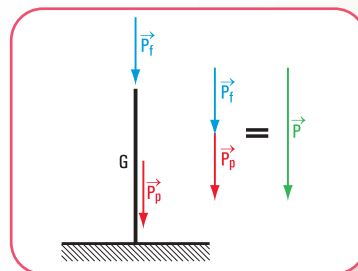


Figura 5.81. Diagrama de carga de una columna con carga centrada



Imagen 5.38 a  
Columna de alumbrado.  
Ópera de París



Imagen 5.38 b  
Columna de alumbrado  
en una calle Garmich.  
Rep. Federal de Alemania



Imagen 5.38 c  
Columna de alumbrado en la  
puerta del Palacio de Aguas.  
Valencia - España

Como las fuerzas aplicadas a la columna son colineales, estamos en presencia de un esfuerzo de compresión simple. La resultante de las fuerzas  $\vec{P}_f$  y  $\vec{P}_p$  es  $\vec{P}$ .

### Caso II

Analicemos el esquema de carga (Figura 5.82).

$\vec{P}_a$  simboliza el peso propio del artefacto lumínico,  $\vec{P}_p$ , el peso propio de la columna,  $e$  es la separación entre el punto de aplicación de  $\vec{P}_p$  y el baricentro de la columna.  $\vec{P}$  es la resultante de las fuerzas  $\vec{P}_p$  y  $\vec{P}_a$ .



Imagen 5.39. Una calle de Londres

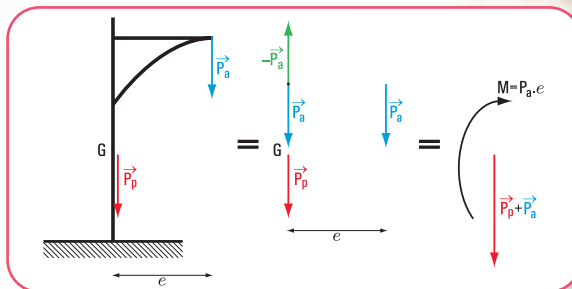


Figura 5.82. Diagrama de carga de una columna con carga excéntrica

Entonces podemos observar que la sollicitación a la que está sometida esta columna es la flexo-compresión. La fuerza  $\vec{P}$  produce la **compresión** y la fuerza  $\vec{P}_a$  debido a la **excentricidad**  $e$  produce un **momento** que provoca la **flexión**.

Por otra parte, ante un determinado valor de la fuerza  $\vec{P}$ , la columna sufre una deformación lateral con el corrimiento del eje baricéntrico. Este efecto se denomina **efecto de pandeo**.



¿Vieron alguna película de Carlitos Chaplin?

Imagen 5.40.  
Carlitos  
Chaplin con  
su caracterís-  
tico bastón



Frecuentemente, se lo ve apoyado en su famoso bastón, una muy delgada varilla de bambú. Cuando Chaplin se apoya con su peso la vara se dobla hacia un costado y hacia afuera. Este comportamiento es característico de todos los elementos largos, delgados, sometidos a esfuerzos de compresión. Cuando la carga de compresión aumenta lentamente, llega a un valor en el cual el elemento comprimido, en lugar de limitarse a acortar solamente su longitud, **pandea** y, por lo común, se rompe. El valor de esta carga se denomina **carga de pandeo**.

♦ Otra forma de apreciar este fenómeno

Una columna delgada se acorta cuando se la comprime mediante un peso aplicado en la parte superior; la posición de la fuerza peso se desplaza hacia abajo, esto es una ley típica de la naturaleza. La naturaleza, cuando tiene la posibilidad de elegir un camino, lo hace por el más fácil o el más corto. Llevado al caso de las columnas, frente a la posibilidad de curvarse o de acortarse, resulta más fácil a la columna acortarse ante cargas relativamente pequeñas, y curvarse ante cargas relativamente grandes. Es decir, cuando la carga alcanza su valor de **pandeo**, le resulta a la columna más fácil bajar el punto de aplicación de la carga curvándose, y no acortándose.

Teóricamente, la columna se curvará cuando sea perfectamente homogénea y aunque la carga se halle perfectamente centrada. En la



Imagen 5.41. Avisador de negocios del medioevo en Mittelhwalde - República Federal de Alemania



práctica, toda pequeña imperfección en el centrado de la carga o toda falla de material, facilitan el pandeo. Fue el matemático Leonard Euler (1707-1783) quien logró, a través de un modelo matemático, dar una interpretación del complejo fenómeno físico denominado **pandeo**.

Basó su teoría en las siguientes hipótesis:

1. las secciones planas se mantienen planas hasta la rotura;
2. el eje de la pieza es recto y de sección constante;
3. la carga aplicada es centrada. La recta de acción de la carga coincide con el eje longitudinal de la barra;
4. el material tiene un comportamiento elástico durante todo el proceso de carga;
5. el material es homogéneo;
6. las deformaciones longitudinales que sufre la barra debido a la carga se desprecian frente a sus dimensiones geométricas.

Un concepto importante que entra en juego en el dimensionamiento de las columnas es el de la luz de pandeo ( $sk$ ).

En la **tabla 5.1** se muestran las cuatro configuraciones clásicas de Euler

Las hipótesis de la teoría de Euler son válidas para materiales homogéneos (acero, madera) en el período elástico; la corrección de Engesser es necesaria para los mencionados materiales en el período plástico.

El valor de la esbeltez  $\lambda$  marca el campo de validez de la teoría de Euler.

La esbeltez depende de la luz de pandeo y del radio de giro, en una relación que se expresa mediante la siguiente expresión matemática:

$$\lambda = \frac{sk}{i}$$

Donde:

- $sk$  es la luz de pandeo.
- $i$  es el radio de giro.

La teoría de Euler se cumple en el período elástico. Si graficamos el valor  $\lambda$  en función de la tensión para un determinado material, por ejemplo, acero St 37 (F 24), observamos que el período elástico corresponde a valores de  $\lambda > 100$  (**Figura 5.83**).

$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot \beta^2} \quad \text{Tensión crítica de Euler}$$

Donde:

- $\beta$  depende de la condición de vínculo en los extremos de la columna.
- $E$  es el módulo de elasticidad que depende del material.

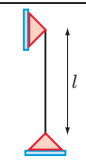
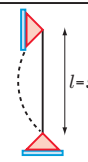
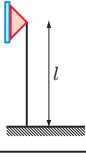

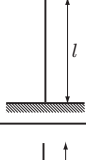
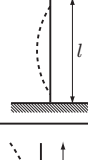
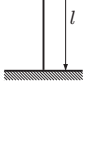
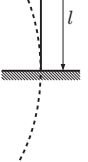
Condiciones de borde	Deformación lateral por pandeo	Luz de pandeo $sk = \beta \cdot l$
		$sk = 1 \cdot l$
		$sk = 0,75 \cdot l$
		$sk = 0,5 \cdot l$
		$sk = 2 \cdot l$

Tabla 5.1

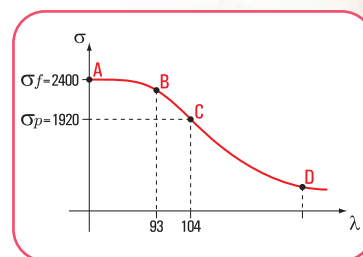


Figura 5.83.  $\lambda$  en función de la tensión  $\sigma$

La carga de pandeo de una columna depende de su material, de su longitud, de la forma de su sección transversal, y de las condiciones de vínculo.

La carga es directamente proporcional al módulo de elasticidad del material  $E$ , inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna. Esto significa que una columna de acero tiene una resistencia igual a tres veces la de una columna idéntica, pero de aluminio (el módulo de elasticidad del acero es  $2.100.000 \text{ kg/cm}^2$  y el del aluminio  $700.000 \text{ kg/cm}^2$ ). Dada dos columnas del mismo material y con idéntica sección, una de 2 m de longitud y otra de 4 m, la carga de pandeo de la primera es igual a la cuarta parte de la segunda.

En 1889, el matemático Engesser sustituye el módulo de elasticidad  $E$  por el módulo tangencial de deformación ( $T$ ) o módulo instantáneo de elasticidad.

La expresión matemática de Euler queda así:

$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot T}{\lambda^2 \cdot \beta^2} \quad \text{Tensión crítica}$$

$T$  depende de  $\begin{cases} \text{forma de la sección} \\ \text{comportamiento plástico del material} \end{cases}$

En el período elástico  $\rightarrow T = E$

En el período plástico  $\rightarrow E > T$

Las hipótesis de la teoría de Euler son válidas para materiales homogéneos (acero, madera) en el período elástico; la corrección de Engesser es necesaria para los mencionados materiales en el período plástico.

La tensión de pandeo de Engesser es menor que la de Euler.

*El hormigón armado, material heterogéneo, no cumple con las hipótesis de la teoría euleriana, ni con la de Engesser.*

En la **tabla 5.1** expresamos los valores de la longitud de pandeo para materiales homogéneos. Ahora, veamos cómo determinamos la longitud de pandeo para columnas de  $H^\circ A^\circ$ .

Para la determinación de la longitud de pandeo de materiales heterogéneos, como el hormigón armado, se considera la longitud de una barra sustituta con una longitud dada por la expresión matemática:

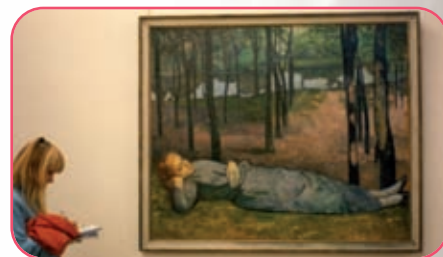
$$sk = \beta \cdot l$$

Donde:

- $l$  es la longitud original.
- $\beta$  es un coeficiente que depende del grado de empotramiento en los extremos de la columna.<sup>8</sup>

**Recapitulemos.** La teoría de Euler es válida para columnas de materiales idealmente elásticos, homogéneos, con ejes rectos y cargas centradas (acero-madera). Como el hormigón es un material heterogéneo y no cumple con ninguno de los requisitos anteriores, Engesser trata de encontrar una solución y propone una modificación a la teoría euleriana. Para esto, desarrolla el denominado **método del módulo de elasticidad doble**. Sin embargo, este método no constituye una solución para el hormigón. Recién en la década del 60, al considerar al hormigón como un material no homogéneo y no elástico, se aceptan inexactitudes en la construcción de las columnas, aparece la teoría del **momento de segundo orden** y se descubre el efecto de la **fluencia lenta**.

<sup>8</sup> Este tema se lo puede consultar en el libro: *Construcciones de hormigón armado: tecnología, diseño estructural y dimensionamiento*. Haydeé Noceti - Raúl Montoto.



**Figura 5.83.** La esbeltez de los troncos.  
*Magdalena en el bosque de amor.* Obra pictórica  
de Émile Bernard - Museo de Orsay - París



### ♦ El fenómeno del pandeo. Método $\omega$

Presentamos una columna simple sometida a una carga de compresión simple centrada.

La columna tiende, primero a acortarse; luego, si la carga pasa de un cierto límite, se produce una deformación lateral; el eje, que originalmente era recto, se curva lateralmente, entonces se dice que la columna pandea. Este efecto se debe evitar. Para ello, el calculista de estructuras tiene que considerar todas las variables de las cuales depende el pandeo.

El pandeo depende de la denominada *carga de pandeo*, que es la carga que lo provoca. Esta carga, a su vez, depende del material, de la longitud de pandeo, de la forma de la sección, de las restricciones impuestas a los extremos y, de la esbeltez.

La carga de pandeo al depender del material, está relacionada con el módulo de elasticidad del mismo. Matemáticamente, esta relación la expresamos así:

$P_p \approx E$ , siendo  $E$  el módulo de elasticidad del material.

A su vez, la carga de pandeo también depende de la longitud de pandeo  $sk$ .

$$P_p \approx \frac{1}{sk^2}$$

Y, de la esbeltez  $\lambda$

Recordemos que, la esbeltez geométrica  $\lambda$  para secciones geométricas rectangulares, está dada por la relación entre la luz de la pieza y el lado menor de la sección.

$$\lambda = \frac{l}{d}$$

Para piezas con otras secciones, por ejemplo doble T, ele L, circular, elíptica, etc, la esbeltez depende del radio de giro  $i$ .

$$= \frac{l}{i}, \text{ siendo } i^2 = \frac{J}{F} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

La tensión de pandeo es  $\sigma_p = \frac{P_p}{F}$ ,  $\sigma_p \leq \sigma_{ad}$

La relación entre la tensión admisible y la de pandeo es  $\frac{\sigma_{ad}}{\sigma_p} = \omega$  (coeficiente de pandeo).

$$\frac{\sigma_{ad}}{\sigma_p} = \omega \Rightarrow \text{si } \sigma_{ad} \geq \sigma_p \Rightarrow \omega \geq 1$$

$$\text{si } \sigma_{ad} \leq \sigma_p \Rightarrow \omega \leq 1$$

$$\text{si } \sigma_{ad} = \sigma_p \Rightarrow \omega = 1$$

Para  $\omega = 1$  el peligro de pandeo no existe, se trata de piezas cortas.

$$\sigma_{ad} = \sigma_p \quad (12)$$

$$\sigma_p = \frac{P_p}{F}$$



Imagen 5.43. La naturaleza pandea  
*Tarde en Pardigon* - Obra pictórica  
de Henri-Edmond Cross. Museo  
de Orsay - París

Reemplazando en la expresión matemática (12) a  $\sigma_p$

$$\sigma_{ad} = \omega \frac{P_p}{F}$$

¿Cómo hallamos  $\omega$ ?

El coeficiente  $\omega$  depende de la esbeltez y del tipo de material. Está tabulado según el material que se emplee: acero y/o madera.

Resolvamos el siguiente ejercicio

### Pandeo

#### Ejercicio N° 5.5

Una columna de acero tiene una luz  $l = 9 \text{ m}$  y está empotrada en ambos extremos. El acero es ST37 (notación según las Normas DIN, F22 de acuerdo al CIRSOC) (Figura 5.84).

$$\sigma_{ad} = 14.000 \frac{N}{cm^2}$$

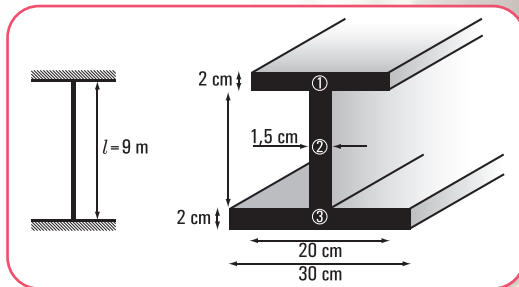


Figura 5.84. Esquema de la columna

¿Cuál es la carga máxima que permite a la pieza no romperse por pandeo?

### Desarrollo

Como se trata de un perfil armado (no normalizado), entonces debemos hallar sus coordenadas baricéntricas, los momentos de inercia y el radio de giro mínimo. Si se tratara de un perfil con sección normalizada, todos estos valores están tabulados.

#### a. Cálculo de $x_G$ e $y_G$ (coordenadas baricéntricas)

En el capítulo 3 hemos establecido que:

$$S_T = F_T \cdot x_G \Rightarrow F_T \cdot x_G = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_{xi} \quad (\text{momento estático o de primer orden})$$

$$F_T \cdot x_G = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_{xi} \Rightarrow x_G = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot d_{xi}}{F_T} \quad (\text{coordenada baricéntrica respecto de un eje } y)$$

$$F_T \cdot y_G = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_{yi} \Rightarrow y_G = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot d_{yi}}{F_T} \quad (\text{coordenada baricéntrica respecto de un eje } x)$$

Aplicamos estas expresiones matemáticas a nuestro caso específico, para ello fijamos un sistema de coordenadas (Figura 5.85).



$$y_G = \frac{F_1 d_{1y} + F_2 d_{2y} + F_3 d_{3y}}{F_T}$$

$$y_G = \frac{40 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} + 18 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} + 60 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm}}{118 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = \frac{600 \text{ cm}^3 + 144 \text{ cm}^3 + 60 \text{ cm}^3}{118 \text{ cm}^2}$$

$$y_G = 6,81 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{F_1 d_{1x} + F_2 d_{2x} + F_3 d_{3x}}{F_T}$$

$$x_G = \frac{40 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} + 18 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} + 60 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm}}{118 \text{ cm}^2}$$

$$x_G = 15 \text{ cm}$$

Las coordenadas baricéntricas son  $(x_G, y_G)$ ; (6,81;15)

b. Cálculo del momento de inercia o de segundo orden  $J_{x_T}$  (momento de inercia respecto al eje  $x_G$ )

$$J_{x_T} = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3}$$

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + F_1 y_1^2 \Rightarrow J_{x_1} = \frac{20 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}^3}{12} + 40 \text{ cm} \cdot 8,19^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{x_1} = 2.696,37 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + F_2 y_2^2 \Rightarrow J_{x_2} = \frac{1,5 \text{ cm} \cdot (12)^3 \text{ cm}^3}{12} + 18 \text{ cm}^2 \cdot 1,19^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{x_2} = 241,49 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_3} = \frac{bh^3}{12} + F_3 y_3^2 \Rightarrow J_{x_3} = \frac{30 \text{ cm} \cdot 2^3 \text{ cm}^3}{12} + 60 \text{ cm}^2 \cdot 5,81^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{x_3} = 2.045,37 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_T} = 2.696,37 \text{ cm}^4 + 241,49 \text{ cm}^4 + 2.045,37 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_T} = 4.983,23 \text{ cm}^4$$

c. Cálculo del radio de giro

$$i_{x_G} = \sqrt{\frac{J_{x_T}}{F_T}} \Rightarrow i_{x_G} = \sqrt{\frac{4.983,23 \text{ cm}^4}{118 \text{ cm}^2}}$$

$$i_{x_G} = 6,50 \text{ cm}$$

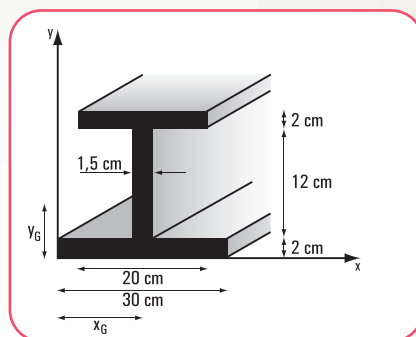


Figura 5.85. Sección de la columna (perfil doble T)



Imagen 5.44. La esbeltez de los árboles. *Alamos*, 1922, Antonio Berni, óleo sobre tela, 58,8 x 47 cm. Colección particular

#### d. Cálculo de la luz de pandeo

Como se trata de una columna empotrada-empotrada

$$sk = \frac{l}{2} \Rightarrow sk = \frac{9 \text{ m}}{2}$$

$$sk = 4,50 \text{ m}$$

#### e. Cálculo de la esbeltez $\lambda$

$$\lambda = \frac{sk}{i} \Rightarrow \lambda = \frac{450 \text{ cm}}{6,50 \text{ cm}}$$

$$\lambda = 69,23 \Rightarrow \omega = 1,39 \quad (\omega \text{ se obtiene de la tabla para acero ST37 se considera } \lambda = 70)$$

#### f. Cálculo de la carga admisible

$$P_X = \frac{\sigma_{ad} \cdot F_T}{\omega} \Rightarrow P_X = \frac{14.000 \frac{N}{\text{cm}^2} 118 \text{ cm}^2}{1,39}$$

$$P_X = 1.188.489 \text{ N}$$

#### g. Cálculo del momento de inercia o de segundo orden $J_{y_T}$ (momento de inercia respecto al eje $y_G$ )

$$J_{y_T} = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3}$$

$$J_{y_1} = \frac{bh^3}{12} + F_1 x_1^2 \Rightarrow J_{y_1} = \frac{20^3 \text{ cm}^3 \cdot 2 \text{ cm}}{12} + 40 \text{ cm} \cdot 0^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{y_1} = 1.333,33 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_2} = \frac{bh^3}{12} + F_2 x_2^2 \Rightarrow J_{y_2} = \frac{1,5^3 \text{ cm}^3 \cdot 12 \text{ cm}}{12} + 18 \text{ cm}^2 \cdot 0^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{y_2} = 3,375 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_3} = \frac{bh^3}{12} + F_3 x_3^2 \Rightarrow J_{y_3} = \frac{30^3 \text{ cm}^3 \cdot 2 \text{ cm}}{12} + 60 \text{ cm}^2 \cdot 0^2 \text{ cm}^2$$

$$J_{y_3} = 4.500 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_T} = 1.333,33 \text{ cm}^4 + 3,375 \text{ cm}^4 + 4.500 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_T} = 5.836,71 \text{ cm}^4$$

#### h. Cálculo del radio de giro

$$i_{y_G} = \sqrt{\frac{J_{y_T}}{F_T}} \Rightarrow i_{y_G} = \sqrt{\frac{5.836,71 \text{ cm}^4}{118 \text{ cm}^2}}$$

$$i_{y_G} = 7,03 \text{ cm}$$

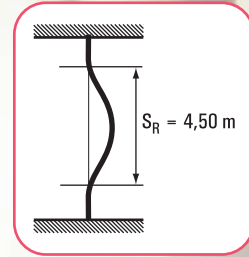


Imagen 5.45. La esbeltez de las damas. *Paseo a orillas del mar*, 1909, Joaquín Sorolla, óleo 1,18 x 1,85 m. Casón del Buen Retiro - Madrid



## i. Cálculo de la esbeltez

$$\lambda = \frac{sk}{i} \Rightarrow \lambda = \frac{450 \text{ cm}}{7,03 \text{ cm}} = 64,01 \Rightarrow \omega = 1,35 \text{ consideramos } \lambda = 65$$

## j. Cálculo de la carga admisible

$$P_y = \frac{\sigma_{ad} F_T}{\omega} \Rightarrow P_y = \frac{14.000 \frac{N}{cm^2} 118 \text{ cm}^2}{1,35}$$

$$P_y = 1.223.704 \text{ N}$$

¿Cuál de los dos cargas adoptamos  $P_x = 1.188.489 \text{ N}$  o  $P_y = 1.223.704 \text{ N}$ ?

Evidentemente, la columna se la debe cargar con la carga menor  $P_x = 1.188.489 \text{ N}$ , porque de lo contrario en esa dirección la pieza colapsaría por pandeo.

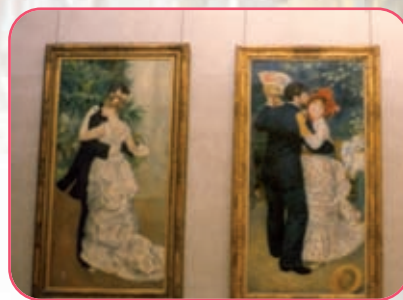


Imagen 5.46. No todas las damas son esbeltas. *Baile en el campo. Baile en la ciudad.* Obras pictóricas - Renoir - Museo de Orsay, París

## 5.10.7. Columnas compuestas

Las columnas compuestas son aquéllas constituidas por dos o más perfiles arriostrados.

Las figuras 5.86; 5.87 y 5.88 son ejemplos de columnas compuestas. Como podemos observar en cada uno de los ejemplos anteriores existen dos ejes,

¿en qué se diferencian?

En el primero y tercer caso, el eje  $x$  corta a la sección, y el eje  $y$  no la corta. En el segundo caso, tanto el eje  $x$ , como el eje  $y$  no cortan a la sección.

Estas situaciones permiten diferenciar a los ejes en:

1. eje material, cuando el eje corta a la sección;
2. eje libre, cuando el eje no corta a la sección.

En el caso de las columnas compuestas debemos verificar el pandeo respecto de ambos ejes: el eje material y el eje libre.

Por otra parte, las columnas compuestas necesitan de un arriostramiento, que puede ser mediante presillas, o bien a través de enrejado simple o doble, ya que si estuvieran sueltas el pandeo se produciría como si fueran columnas independientes (Figuras 5.89; 5.90 y 5.91).

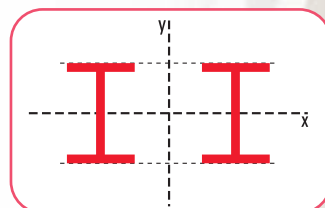


Figura 5.86. Columna formada por dos perfiles T

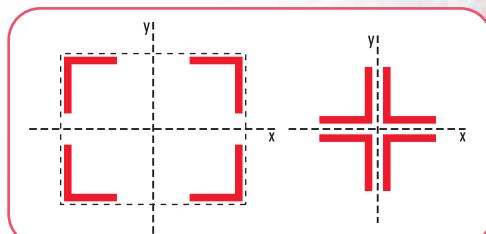


Figura 5.87. Columnas constituidas por 4 perfiles L

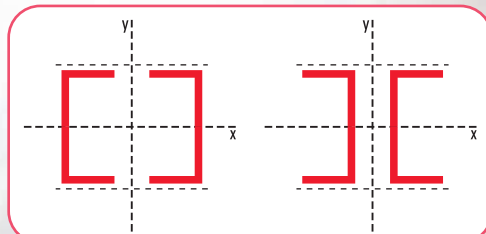


Figura 5.88. Columnas formadas por 2 perfiles L

Para el dimensionamiento de una columna compuesta, que tiene un eje material, el pandeo respecto de dicho eje se calcula con el método  $\omega$  de igual modo que lo hicimos para una columna simple.

*Dado que, no es propósito de este libro desarrollar el tema de dimensionamiento de piezas estructurales, sino el de mostrar sólo la parte estática de ese desarrollo, planteamos y resolvemos, a modo ilustrativo un ejercicio de dimensionamiento de una columna compuesta considerando el pandeo respecto de su eje material. No desarrollamos, por lo tanto el pandeo respecto al eje libre.*

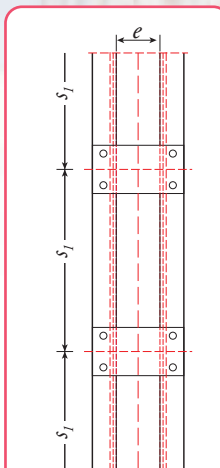


Figura 5.89

Arriostramiento mediante presillas

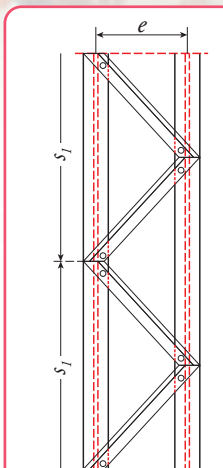


Figura 5.90

Arriostramiento mediante enrejado simple o diagonales

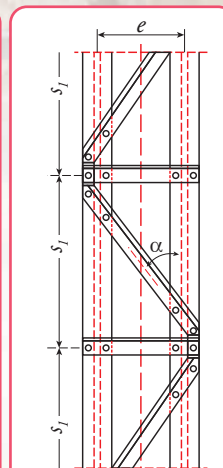


Figura 5.91

Arriostramiento mediante enrejado o diagonales y presillas

Resolvamos el siguiente ejercicio

### Ejercicio N° 5.6

Una columna formada por dos perfiles L de lados desiguales está sometida a una carga centrada, cuyo módulo es  $T = 200 \text{ kN}$  (Figura 5.92).

Conocemos los siguientes datos:

- la columna está articulada en ambos extremos
- $l = 3 \text{ m}$
- St37
- $\sigma_{ad} = 14.000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$

Se nos plantea elegir los perfiles que soporten la carga  $\vec{T}$ .

### Desarrollo

Sabemos que  $F_T = \frac{T}{\sigma_{ad}} \Rightarrow F_T = \frac{200 \text{ kN}}{14.000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}$

$F_T$ : es la sección total.

Para operar debemos transformar las unidades. Podemos expresar tanto el dividendo como el divisor en  $\text{kN}$  o bien en  $\text{N}$ . Nosotros decidimos expresar en  $\text{N}$  (newton).

$$F_T = \frac{200 \text{ kN}}{14.000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}} \Rightarrow F_T = \frac{200.000 \text{ N}}{14.000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}$$

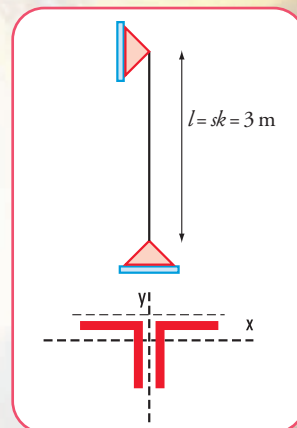


Figura 5.92. Esquema de carga de la columna



$$F_T = 14,29 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = \frac{14,29 \text{ cm}^2}{2} \Rightarrow F_1 = 7,15 \text{ cm}^2 \quad (\text{Sección de un perfil})$$

$$F_2 = 7,15 \text{ cm}^2$$

Para cubrir esta sección se necesitan los siguientes perfiles: PNL 65 × 50 × 7 mm con

$$F_{\text{real}} = 7,60 \text{ cm}^2$$

$$F_{\text{real}} = 15,20 \text{ cm}^2$$

Para estos perfiles el valor del radio de giro es  $i_x = 2,02 \text{ cm}$

Cálculo de la esbeltez (procedimiento de Domke)

$$\lambda = \frac{sk}{i} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{300 \text{ cm}}{2,02 \text{ cm}}$$

$$\lambda_0 = 148,5 \Rightarrow \lambda = 106 \Rightarrow \omega = 2,02 \quad (\text{el valor de } \lambda \text{ está tabulado en función de } \lambda_0)$$

$$F_{\text{necesaria}} = \frac{200.000 \text{ N} \times 2,02}{14.000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}} \Rightarrow F_{\text{necesaria}} = 29 \text{ cm}^2$$

$$F_{\text{necesaria por perfil}} = \frac{29 \text{ cm}^2}{2} \Rightarrow F_{\text{necesaria por perfil}} = 14,5 \text{ cm}^2 \text{ corresponde PNL } 130 \times 65 \times 8 \text{ mm}$$

$$\text{Sección real: } F_{\text{real}} = 30,2 \text{ cm}^2; i_x = 4,17 \text{ cm}; \lambda_x = \frac{300 \text{ cm}}{4,17 \text{ cm}} \Rightarrow \lambda_x = 72 \Rightarrow \omega = 1,44$$

$$\sigma = \frac{1,44 \cdot 200 \text{ kN}}{30,2 \text{ cm}^2}$$

$$\sigma = 9,54 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma = 9,540 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} < \sigma_{ad}$$

### Respuesta

La columna está compuesta por dos perfiles L 130 × 65 × 8 mm.

### 5.10.8. El arco como elemento estructural de compresión

El arco constituye el mayor elemento tensional del arte clásico. El arco nos sigue impresionando y la humanidad ha tardado mucho en darse cuenta de su fenómeno resistente.

El arco es un sistema estructural que salva una determinada luz produciendo empujes o reacciones horizontales en sus apoyos. Este tipo de estructura tiende a *abrirse* o desdoblarse cuando actúa bajo estas cargas. De allí que debe ser fijada en sus apoyos para evitar los desplazamientos horizontales en sus extremos (Figura 5.93).

Existen diversas clasificaciones de los arcos que iremos describiendo a lo largo del texto. Pero antes de entrar a explicar, daremos algunas definiciones que hacen al buen entendimiento del tema.

El arco, como cualquier elemento estructural está cargado. Geométricamente las fuerzas actuantes forman el denominado polígono funicular, cuyo nombre proviene del estudio de los cables. Si se traza una poligonal simétrica se obtiene una poligonal denominada antifunicular o directriz (Figura 5.96). Entonces se denomina directriz de un arco a la curva que pasa por los centros de gravedad de las secciones normales sucesivas. Y aquí, podemos dar una primera clasificación.

### • Clasificación de los arcos según su directriz

Los arcos se clasifican en:

- parabólicos;
- circulares: de medio punto, de medio punto rebajado;
- elípticos: rebajado y peraltado;
- rectilíneo simple,...

según que la directriz sea una circunferencia o una semi-circunferencia, o bien una parábola o una elipse o bien polígono, etc.

En el caso de cargas uniformemente repartidas en la luz, la curva más conveniente es la parabólica, pues se generan sólo tensiones de compresión.

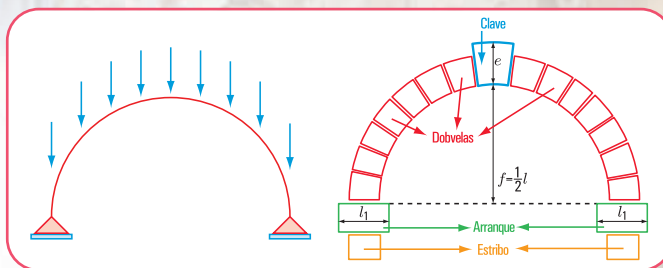


Figura 5.94. Esquema de un arco

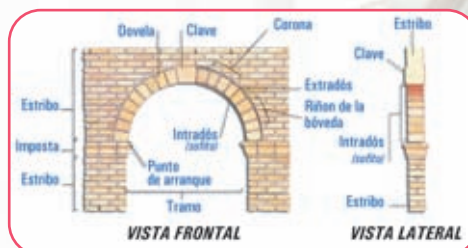


Figura 5.95. Las partes de un arco

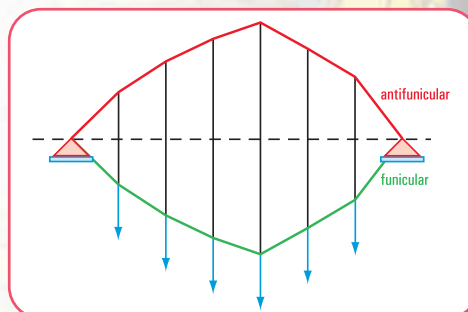


Figura 5.96. Polígono funicular y antifunicular

### • Otra clasificación

También se distinguen otras dos clases de arcos: arco enjutado o de tímpanos macizos y arco exento. En el primero un muro lo acompaña, de allí que la flexión del propio arco está impedida por dicho muro. De esta forma no sólo es el arco el que trabaja, sino también entra en juego el muro o tímpano. Entre los arcos de este tipo se encuentran los del arte clásico y medieval.

El arco exento, debe considerarse como puro arco, desde el punto de vista tensional. Si la carga sobre el arco es fija la directriz puede amoldarse al funicular de dichas cargas, entonces se logra que trabaje sólo a compresión. Pero si la sobrecarga es variable y hace que una zona del arco esté más cargada, entonces esta zona tiende a hundirse, el arco se levanta por el otro lado y aparecen flexiones de distintos signos.

En el caso de los puentes, donde las cargas móviles (vehículos) varían de posición, el funicular de fuerzas se altera por esa situación, por lo tanto se debe considerar una resistencia importante a la flexión.

El arco exento puede pandear, como cualquier pieza comprimida. No obstante, en este caso, al estar fijos los arranques, el arco tiende a tomar una forma más resistente al pandeo que una columna. Esto hace que la esbeltez del arco sea mayor que la de la columna.

En el caso que el arco sea estrecho, también existe la posibilidad de pandeo, se produce torsión al salirse de





**Imagen 5.47 a.** Arcos de piedra, donde se pueden visualizar perfectamente las dovelas<sup>9</sup>. Madrid – España



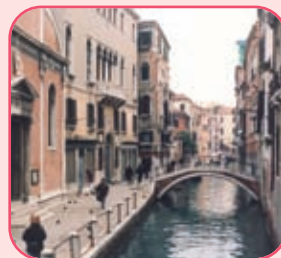
**Imagen 5.47 b**  
Otro puente con arcos de piedra. Puente sobre el Río Sena – París – Francia



**Imagen 5.47 c**  
Puente sobre el Rialto. Venezia – Italia



**Imagen 5.47 d**  
El Coliseo romano (Roma – Italia) con sus famosos arcos de medio punto en distintos niveles



**Imagen 5.47 e**  
Un pequeño arco sosteniendo un puente que cruza un canal. Venezia – Italia

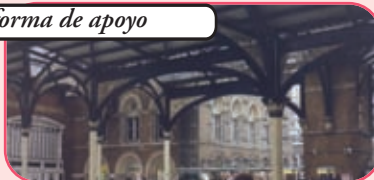
En este sentido el arco puede ser empotrado o articulado con una, dos o tres articulaciones. El arco triarticulado es estáticamente determinado. Esto hace que no presenten variaciones térmicas o higroscópicas, ni deformación lenta. En las proximidades de las articulaciones disminuye la flexión.



**Imagen 5.47 f.** Arcos que soportan la cubierta vidriada de la Galería Médici. Milán – Italia



**Imagen 5.47 g**  
Estructura metálica en forma de arco que soporta una cubierta vidriada. Confitería desde donde se visualiza la Catedral de Milán



**Imagen 5.47 h.** Arcos que soportan la cubierta de la vieja estación de trenes, hoy Museo de Orsay. París – Francia



**Imagen 5.47 i**  
Estructura metálica de alma calada en forma de arco. Estación de ferrocarril de Atocha – Madrid



**Imagen 5.47 j**  
Arcos que sostienen la cubierta de la estación de trenes ‘Liverpool’. Londres

Con sus juntas concurrentes a un centro el arco de medio punto es el único tipo de arco que se construye en el Renacimiento, pues tiene una forma geométrica simple y racional

<sup>9</sup> Dovelas: piedra labrada en forma de cuña, para formar arcos o bóvedas. Cada una de las superficies de intradós o de trasdós de las piedras de un arco de bóveda ([www.rae.es](http://www.rae.es)).

<sup>10</sup> Estereotomía: arte de cortar piedras y maderas ([www.rae.es](http://www.rae.es)).

*Dice Leonardo da Vinci “Un arco no es otra cosa que una fuerza engendrada por dos lados débiles, puesto que los arcos de los edificios están formados por dos segmentos de un círculo, cada uno de los cuales, al ser muy débil, tiende a caer; pero si uno de esos segmentos del círculo pesa más que el otro, se rompe la estabilidad, ya que el más pesado dominará al que menos pesa” (Cuaderno de Notas).*

Dado que los arcos trabajan a la compresión, los materiales pétreos son aptos para la construcción de los mismos. Para que esto suceda, el peso propio debe ser considerado como la carga fundamental frente a la cual otras cargas carecen de relevancia, como por ejemplo el viento.

Para la construcción de un arco es necesario conocer los espesores del arranque y de la clave.<sup>10</sup> Estos espesores se calculan en función de la flecha ( $f$ ) (máxima ordenada de deformación producida por las cargas), de la carga total  $P$  del arco, de la luz y de la tensión a la compresión del material ( $\rho$ ).

En este sentido el espesor se obtiene mediante la siguiente expresión matemática:

$$e = \sqrt{f^2 + 0,015 \frac{P \cdot l}{\rho}} - 1,03 \cdot f \quad \text{espesor de la clave para arcos de medio punto, góticos o peraltados.}$$

Unidades de las magnitudes:  $e$  en cm;  $f$  en cm;  $l$  en cm; “ $\rho$ ” en N/cm<sup>2</sup>

Espesor del arranque:  $e_1 = 1,8 e$  en cm



Figura 5.97. Distintos tipos de arcos

### Un edificio emblemático

*El Mercado de Abasto de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, es un excelente ejemplo de construcción con arcos de hormigón armado. Consiste en una serie de estructuras trabadas entre sí, de aproximadamente 24,384 m de luz, dispuestas en cruz con bloques de vidrio translúcido entre sí. Los ingenieros Delpini, Sulcic y Bes fueron los artífices de esta obra arquitectónica elegante y majestuosa.*



Imagen 5.47. Viejo Mercado de Abasto, hoy transformado en el Paseo de Compras del Abasto. Buenos Aires - Argentina

### 5.10.9 Las bóvedas y cúpulas

La bóveda constituye un elemento estructural utilizado desde hace siglos, fundamentalmente en los edificios religiosos.

Existen diferentes tipos de bóvedas: de medio cañón o cañón seguido; de arco con punta; de rincón

<sup>10</sup> Clave: piedra con la que cierra el arco o bóveda ([www.rae.es](http://www.rae.es)).

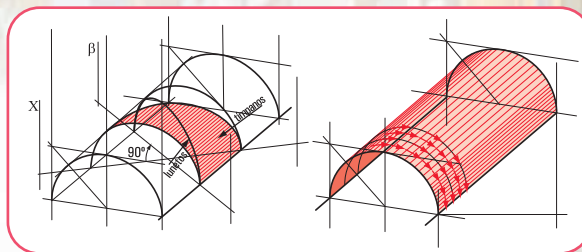


de claustro; por arista,...

Veamos cómo se obtiene, desde los principios de la geometría, una bóveda de medio cañón. Consideramos un cilindro, lo dividimos por la mitad mediante el corte a lo largo de una de sus generatrices y por el diámetro de sus bases. La parte obtenida la colocamos en forma horizontal. Obtenemos así una bóveda de cañón. Se dice que los griegos concedían a Demócrito los honores del invento, pero tal vez fuera sólo un atributo ficticio, porque también se sabe que los egipcios ya la utilizaban. Otra forma de concebirla es como la superficie generada por una recta (generatriz) que se desplaza en forma paralela sobre una curva. Estructuralmente es considerada una estructura de *arco*.

La bóveda de medio cañón corrido produce fuerzas sobre todo su apoyo (muros de mampostería). Los muros reciben las cargas y la transmiten a los cimientos (**Figura 5.98**). Por este motivo, los muros no pueden tener aberturas; deben ser continuos. (Caso Iglesia de Cachi en Salta).

La nave central de la iglesia de Cachi está constituida por arcos próximos entre sí. Sobre estos arcos se apoya un entablonado de cardón recubierto por barro. A partir de este tipo de bóveda se generan otros tipos: la bóveda de rincón de claustro y la de arista.



**Figura 5.98.** Distribución de fuerzas en una bóveda cañón

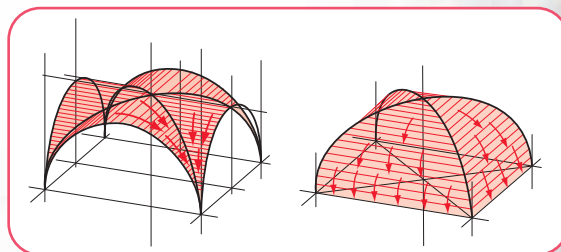


**Imagen 5.48.** Iglesia de Cachi.  
Salta - República Argentina

Veamos cómo se obtienen.

1. Si cruzamos en forma perpendicular dos bóvedas de cañón medio corrido obtenemos la denominada bóveda de arista, muy común en la arquitectura románica. Las aristas forman una X que divide a la superficie en cuatro zonas que convergen en un punto (el más alto), denominado clave de la bóveda.

Esta solución permite concentrar los empujes en los vértices. Entonces no son necesarios los muros de apoyo. Gran ventaja, porque de este modo se pudieron hacer aberturas. Es lo que ocurre con las catedrales góticas. Asimismo, esta concentración de empujes permite ser recibidos mediante pilares de contrafuerte o tensores perimetrales o diagonales;



**Figura 5.99.** Tipo de bóvedas: por aristas y rincón del claustro

2. Si a las aristas de este tipo de bóveda se le agregan dos nervios diagonales, como refuerzo y como estética, estamos en presencia de la llamada bóveda de crucería.

Los arquitectos góticos, con su visión puesta en la elevación de todos los elementos arquitectónicos, no estaban satisfechos con esta forma de bóveda. Entonces con el fin de lograr dicha elevación acercaron los cuatro pilares que sostienen la bóveda y, con ello transformaron el arco de medio punto en un arco con punta ojival. Ejemplo: Catedral de Chartres y Notre Dame de París. Se introduce la denominada *bóveda nervada*.

La estructura de la bóveda de forma ojival tiene grandes ventajas: es sólida, liviana y elástica. Si bien

su peso es absorbido por los nervios o nervaduras que, a su vez, lo transmiten a los pilares y/o columnas, el empuje no sólo es vertical, sino que también se producen esfuerzos laterales. Para absorber estos esfuerzos, los arquitectos de entonces idearon estructuras laterales, denominadas *arbotantes*, que son arcos abiertos de un cuarto de circunferencia. Por lo general, los arbotantes están contruados sobre las naves laterales, por cuanto, como ya lo expresamos, son los que soportan los esfuerzos laterales de la nave central. El empuje recibido por los arbotantes es transmitido a los contrafuertes, estructuras macizas externas que, a su vez, lo transmiten al suelo.

En la arquitectura gótica el peso de las bóvedas descarga directamente sobre los pilares y las fuerzas laterales sobre los arbotantes y contrafuertes. Los muros no cumplen una función estructural, por esto fue posible calar el muro y colocar vitreaux para dar iluminación natural.

La rotación de un arco alrededor de un eje permite generar otra forma estructural, utilizada de manera especial en la arquitectura religiosa del Renacimiento: la cúpula, superficie de doble curvatura.

La iglesia de San Carlos (Salta) está contruuida con una planta en crucero cubierta con una cúpula sobre pechinas del tipo bizantino<sup>11</sup>. Las naves laterales son arcos de mampostería con tirantería de madera.

La cúpula de la Santa María del Fiore, contruuida entre los años 1420 y 1436 por el maestro Filippo Brunelleschi, en Florencia, constituye un ejemplo de una determinada forma de construcción e inspirada en el arte romano. La cúpula tiene la forma de un ovoide con una base octogonal. Posee dos casquetes, uno interno y otro externo. La idea de construir uno externo, tiene que ver con la necesidad de preservarla de la humedad. Hasta entonces, la construcción de las cúpulas se hacía por medio de cimbras completas de madera, verdaderos encofrados, pero en este caso esta técnica resultaba difícil por lo costoso y por problemas técnicos derivados de la crisis de las empresas de construcción en el siglo XIV, al no contar con maestros especializados en actividades de la construcción.

Entonces Brunelleschi ideó un sistema basado en recursos fundamentales.

1. Concebir la cúpula como cuatro anillos concéntricos que se sostenían por sí mismos, mientras eran contruuidos.
2. Proyectar una estructura interna que sostenga los nervios y una membrana externa, compuesta por ocho nervios de mármol.
3. Utilizar el ladrillo como material resistente, más liviano que la piedra para las nervaduras internas. Con el propósito de lograr una mayor cohesión, los dispuso según el sistema espina-pez sobre superficies cónicas convergentes.
4. Implementar una serie de mecanismos para facilitar la tarea de acarrear y subir los materiales.



Imagen 5.49. Vista de los arbotantes de Notre Dame de París, Francia



Imagen 5.50 a. Iglesia de Santa María del Fiore. Firenze - Italia



Imagen 5.32. Esquema del diseño de la Cúpula de Santa María del Fiore. Firenze - Italia

<sup>11</sup> Cúpula bizantina: es una cúpula hemisférica, seccionada con cuatro planos verticales y un plano horizontal, lo que de ella queda son triángulos esféricos denominados pechinas, sobre los cuales se apoya un tambor cilíndrico y finalmente una cúpula.



La acción estructural de una cúpula de revolución o circular, sometida a la acción de cargas verticales simétricas respecto a su eje, por ejemplo su peso propio, es una consecuencia de sus propiedades geométricas. Las secciones meridianas y las perpendiculares a ellas (los paralelos) constituyen las secciones principales de curvatura y de tensión. En ellas las tensiones son de tracción o de compresión simple y se distribuyen uniformemente en su pequeño espesor.

La figura 5.100 permite apreciar las tensiones desarrolladas en un paralelo: son tensiones de compresión en la dirección de los meridianos y de valor constante a lo largo del paralelo, pues tanto la cúpula por su geometría y las cargas son simétricas respecto del eje.

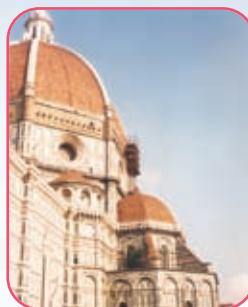


Imagen 5.50 b. Cúpula polidrica de la Iglesia Santa María del Fiore. Firenze - Italia



Imagen 5.51. Ex edificio de Gath & Chaves. Bs. As. Argentina



Imagen 5.52. Cúpula de la Basílica de San Antonio - Bs. As. - Argentina

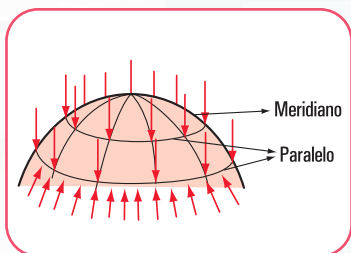


Figura 5.100. Esquema de tensiones desarrolladas en una cúpula



Imagen 5.53 a. Cúpula sobre la Avda. Belgrano con la corona de los emperadores de Austria. Bs. As. Argentina



Imagen 5.53 b. Cúpula en la Avda. de Mayo. Bs. As. - Argentina



Imagen 5.53 c. Cúpulas de la Catedral Rusa. Nice - Francia



Imagen 5.53 d. Cúpulas de la Catedral de Berlín - ex Berlín Este - Rep. Fed. de Alemania



Imagen 5.53 e. Cúpula con forma de cebolla - Salburg - Austria



Imagen 5.53 f. Cúpulas de la Catedral de San Marcos - Venezia - Italia



Imagen 5.53 g. Tres cúpulas superpuestas. La última en forma acebollada - A orillas del Rhin - Rep. Fed. de Alemania



Imagen 5.53 h. Cúpulas de la Catedral de Santiago de Compostela - Galicia - España



Imagen 5.53 i. Estructura esférica vidriada ubicada en el exterior de L'Villete - París - Francia



Imagen 5.53 j. Cúpula vidriada del Palacio de Cristal - Parque del Retiro - Madrid - España



Imagen 5.53 k. Interior de la cúpula de la Catedral de Santiago de Compostela con la estructura de donde se sostiene el botafumeiro

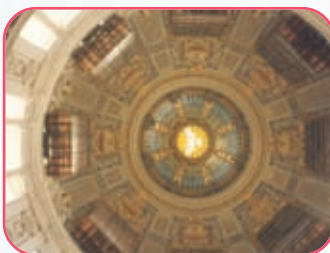


Imagen 5.53 l. Interior de la cúpula de la Catedral de Berlín - ex Berlín Este



Imagen 5.53 m. Un deleite para nuestra vista. Arcos que soportan la cúpula policromada de la Saint Chapelle - París - Francia

### Caso 3 - Estructuras que trabajan a la tracción y a la compresión

#### 5.10.10. Estructuras de reticulado

Las estructuras de reticulado son estructuras livianas que permiten salvar grandes luces con economía de material. Estas estructuras comenzaron a utilizarse en el siglo XIX con el inicio de la era industrial. Están compuestas por barras y, por ello, también se las denomina estructuras de alma calada.

El dimensionamiento de dicha estructura y su construcción se asientan en las siguientes hipótesis:

1. dado que el triángulo es la única figura geométrica indeformable, las barras forman retículos triangulares;
2. todas las fuerzas generadas en las barras y las fuerzas exteriores concurren en puntos denominados **nudos**;
3. los ejes baricéntricos de las barras deben concurrir en un punto de cada nudo, con el fin de evitar que se originen momentos por excentricidad;
4. los nudos constituyen articulaciones, evitando de esta forma los momentos (es así desde la teoría, pues es difícil lograrlo en la práctica),
5. la totalidad de las fuerzas que concurren a un nudo deben estar en equilibrio, o sea su resultante es nula;
6. las barras son elementos perfectamente rectilíneos (si no lo fueran, las fuerzas axiales causarían sobre ellas momentos flexionantes).



El desarrollo de la triangulación comenzó a dominar el ámbito de las estructuras cuando el acero laminado tomó su auge.

### 5.10.11. Armaduras de cubiertas

Las estructuras que soportan las cubiertas tienen como propósito fundamental soportar las cargas que pueden estar aplicadas en la parte inferior (ductos, tuberías,...), el propio peso y las cargas accidentales.

Las armaduras pueden ser de cordón superior horizontal o bien terminar en punta. Existen varios tipos de armadura (Figura 5.101).

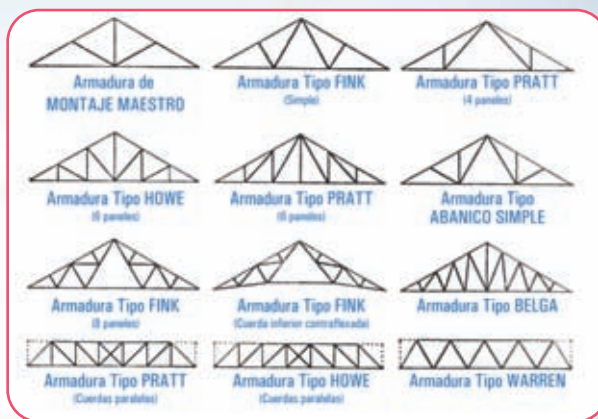


Figura 5.101. Distintos tipos de armaduras

1. Las armaduras de tipo Warren y Pratt cuadrangulares son, sin duda, las que más se usan en techos planos.
2. Las armaduras de los tipos Pratt triangular y Howe son las más comunes de medio peralte. Las pendientes usuales en estas armaduras de dos vertientes o de dos aguas varían entre 10 cm/m a 40 cm/m. Las luces máximas económicas oscilan entre 27 y 30 m.
3. Para cubiertas con pendientes de 40 a 50 cm/m, es muy usada la armadura de tipo Fink. Esta armadura se utiliza para luces de hasta 36 m. Una característica que la hace económica es que la mayor parte de las barras trabajan a tracción y las que lo hacen a compresión son más cortas.
4. También existen las armaduras de cordón superior circular, para cubiertas de supermercados, garajes, pequeños cobertizos industriales.
5. La armadura tipo tijera (el perfil tiene forma de tijeras) se puede utilizar en techos para pequeñas iglesias o templos;
6. Las armaduras en diente de sierra se usan en cubiertas donde se requiere mayor iluminación natural y cenital. Son usadas en construcciones industriales.

### 5.10.12. Armaduras para puentes

Seguramente, todos hemos visto al pasar por un puente, al mirar hacia los laterales, que existen armaduras, en algunos casos sobre la calzada (lugar por donde pasa el tránsito), en otros debajo de la misma y, en el tercer caso, la vía del tránsito pasa entre el cordón superior y el inferior.

En el primer caso el sistema estructural de la vía de paso está sostenido por vigas transversales que van debajo de la calzada y se apoyan en los cordones inferiores de las armaduras.

En el segundo caso, presenta la ventaja de que las armaduras, al estar colocadas por debajo pueden acercarse, de manera que es posible reducir los momentos laterales en el sistema de la calzada. Otra ventaja es que permite una ampliación, tanto en dirección horizontal, como en vertical. La desventaja radica en la reducción



Imagen 5.54. Puente colgante en Neuwaistein - República Federal de Alemania

del espacio libre en la parte inferior.

En cuanto al puente con una calzada intermedia tiene la dificultad de utilizar un refuerzo lateral adecuado para las cuerdas superiores sujetas a compresión.

En la actualidad se trata de evitar la sensación de encierro de los usuarios, por lo tanto, la tendencia es la de usar la armadura de calzada superior.

Los tipos comunes de armadura son: Pratt trapecial; Warren trapecial, Warren trapecial invertida y Parker o lomo de camello.

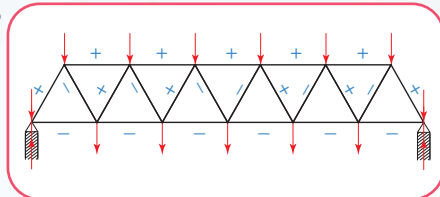


Figura 5.102. Ejemplo de armadura. (Tipo Warren)



Imagen 5.55. Puente en la ciudad de Fribourg - República Federal de Alemania

## 5.11.- Estructuras de flexión

Consideramos el caso de una viga de balcón. Es una viga en voladizo. La misma puede estar bajo la acción de cargas que somete a cada una de las secciones a esfuerzos de corte ( $Q$ ) y momento flexor ( $M$ ), o bien a esfuerzos de corte ( $Q$ ), a momento flexor ( $M$ ) y a esfuerzo normal o axil.



Imagen 5.56  
Viviendas con sus balcones.  
Madrid - España

En el primer caso, se dice que la pieza está sometida a **flexión simple** y, en el segundo, a **flexión compuesta**.

Veamos cómo materializamos esta situación. Suponemos un balcón de madera. De él tomamos una viga. Despreciamos su peso propio y sólo consideramos el peso de la baranda perimetral (Figura 5.103).

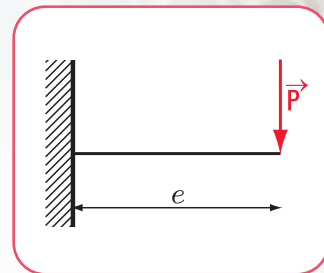


Figura 5.103. Diagrama de carga de una viga empotrada y con carga concentrada

Si analizamos la elástica de deformación observamos que se generan esfuerzos de tracción por sobre el eje neutro (eje donde la deformación es nula) y esfuerzos de compresión por debajo del eje neutro (Figura 5.104).

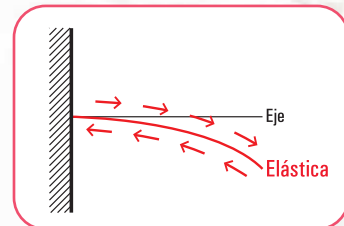


Figura 5.104. Elástica de una viga empotrada y con carga concentrada

### 5.11.1. La viga como elemento estructural de flexión

Describamos la estructura de una de las típicas viviendas de Mittelwald, pueblo de montaña del sur de la República Federal de Alemania. Los techos son a dos aguas: una forma constructiva común en las zonas de nieve.

Los elementos que constituyen la estructura del techo son: la viga superior (cumbreira); las vigas que



apoyan en el muro perimetral y en la cumbrera (cabios); las alfájas o tirantillos, permiten la fijación del material de la cubierta.



Imagen 5.57. Vivienda unifamiliar en Mittelwald - República Federal de Alemania



Imagen 5.58. Restaurant en Mittelwald - República Federal de Alemania



Imagen 5.59. Conjunto de viviendas en Gstaad - Suiza; que repiten el modelo de las estructuras alemanas

### ♦ Análisis de carga

1. El techo recibe la carga (peso propio incluidos los tirantillos) y la sobrecarga o carga accidental que depende del uso y de los factores climatológicos (nieve, viento, sismo).
2. Esta carga se considera como unidad de fuerza por unidad de superficie. Ejemplo  $N/m^2$  o  $N/cm^2$  (newton por metro cuadrado o newton por centímetro cuadrado).
3. La carga actuante viaja hacia los cabios donde apoya la estructura del techo.

Las reacciones del techo sobre los cabios se transforman en acciones para los cabios y las reacciones de estos son acciones para la cumbrera y para el muro perimetral.

El esquema de carga los podemos visualizar en la **figura 5.105**.

Las reacciones sobre los apoyos de los cabios son acciones para la viga principal.

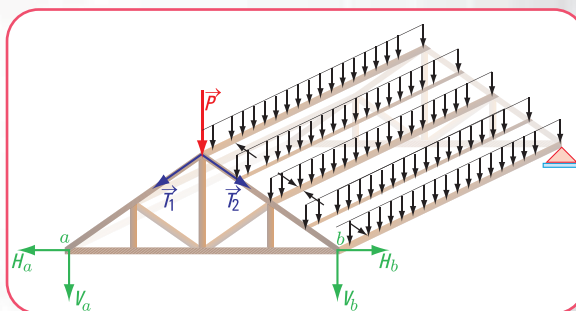


Figura 5.105. Diagrama de carga

## 5.12.-Resolvemos estos problemas

### Problema N° 5.8

Una obra en nuestro edificio está por comenzar...

#### Enunciado

En un local comercial ubicado en la planta baja del edificio donde vivimos se desea construir un entrepiso para almacenar mercadería. Los arquitectos encargados de la obra deciden construirlo con perfiles de acero.

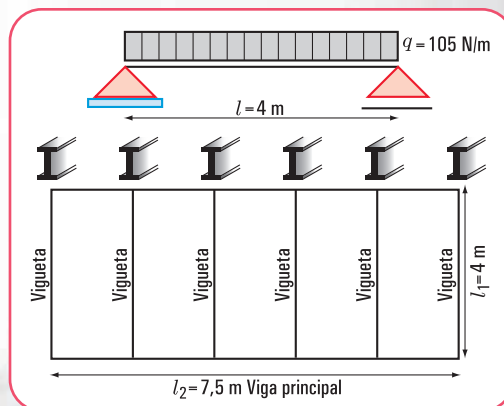


Figura 5.106

Diagrama de carga y diseño en planta del entrepiso

Las viguetas centrales de la estructura tienen el esquema estático que podemos visualizar en la **Figura 5.107**.

El primer paso del calculista es la realización del cálculo estático. Veamos cómo procede para calcular una vigueta central.

Las preguntas que se hacen, entre otras son:

1. ¿cuál es el valor del momento flexor máximo, cuáles son los valores del esfuerzo de corte en los apoyos, y cuáles los del esfuerzo normal o axil de una vigueta central?;
2. ¿cómo son los diagramas de momento flexor, esfuerzo de corte y axil correspondiente a esa vigueta central?

### Desarrollo

Para determinar los valores del momento flexor máximo, esfuerzo de corte en los apoyos y esfuerzo axil debemos calcular las reacciones de vínculo en los apoyos.

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre (**Figura 6.108**).

♦ Calculamos el valor de  $V_a$

Como la estructura está en equilibrio aplicamos las ecuaciones de equilibrio que hemos desarrollado en el capítulo 2.

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0$$

$$V_a \cdot l = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$V_a = \frac{q \cdot l^2}{2 \times l}$$

$$V_a = \frac{105 \text{ N/m} \times 4 \text{ m}}{2}$$

$$V_a = 210 \text{ N}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_b$

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow V_b \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0$$

$$V_b \cdot l = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$V_b = \frac{q \cdot l^2}{2 \times l}$$

$$V_b = \frac{105 \text{ N/m} \times 4 \text{ m}}{2}$$

$$V_b = 210 \text{ N}$$

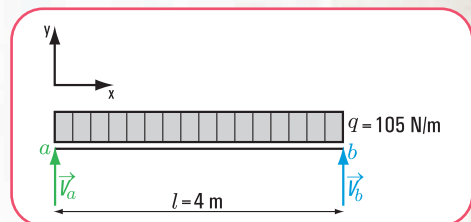


Figura 5.107. Diagrama de sólido libre



Imagen 5.60 a. Lateral local comercial



Imagen 5.60 b. Frente local comercial



## 2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje $y$

$$\begin{aligned}
 \sum \text{Proy}_y = 0 &\Rightarrow V_a - ql + V_b = 0 \\
 &= 210 \text{ N} - 105 \text{ N/m} \times 4 \text{ m} + 210 \text{ N} \\
 &= 210 \text{ N} - 420 \text{ N} + 210 \text{ N} \\
 &= 0 \Rightarrow \text{Verifica}
 \end{aligned}$$

### ♦ Calculamos la fuerza axil en el apoyo fijo

$$\sum H_i = 0 \Rightarrow H_a = 0 \quad \text{no existe carga externa activa en la dirección del eje } x$$

Determinados los valores de las reacciones de vínculo procedemos a hallar, los esfuerzos de características en forma analítica y los diagramas correspondientes.

Comenzamos por el esfuerzo de corte ( $Q$ ) ya que en la sección donde  $Q = 0$  o bien donde  $Q$  cambia de signo, el momento flexor es máximo.

## 3. Determinación de los esfuerzos de características

### ♦ Calculamos el esfuerzo de corte ( $Q$ ) en las secciones más críticas

En la sección 1 - 1

$$Q_{1-1} = V_a \Rightarrow Q_{1-1} = 210 \text{ N}$$

En la sección  $x - x$

$$\begin{aligned}
 Q_{x-x} = V_a - qx &\rightarrow x = 1 \text{ m} \Rightarrow Q_{x-x} = 210 \text{ N} - 105 \text{ N/m} \cdot 1 \text{ m} \\
 &Q_{x-x} = 105 \text{ N} \\
 &\rightarrow x = 2 \text{ m} \Rightarrow Q_{2-2} = 210 \text{ N} - 105 \text{ N/m} \cdot 2 \text{ m} \\
 &Q_{2-2} = 0 \\
 &\rightarrow x_{\text{izq.}} = 4 \text{ m} \Rightarrow Q_{3-3} = -210 \text{ N} - 105 \text{ N/m} \cdot 4 \text{ m} \\
 &Q_{3-3} = 210 \text{ N} - 420 \text{ N} \\
 &Q_{3-3} = -210 \text{ N} \\
 &\rightarrow x_{\text{der.}} = 4 \text{ m} \Rightarrow Q_{4-4} = -210 \text{ N} + 210 \text{ N} \\
 &Q_{4-4} = 0
 \end{aligned}$$

Cálculo del momento flexor ( $M$ ) en las secciones más críticas

En la sección 1 - 1

$$M_{1-1} = 0$$

En la sección  $x - x$

$$\begin{aligned}
 M_{x-x} = V_a x - \frac{qx^2}{2} &\rightarrow x = 1 \text{ m} \Rightarrow M_{x=1 \text{ m}} = 210 \text{ N m} - \frac{105 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m}^2}{2} \\
 M_{x=1 \text{ m}} &= 157,5 \text{ N m}
 \end{aligned}$$

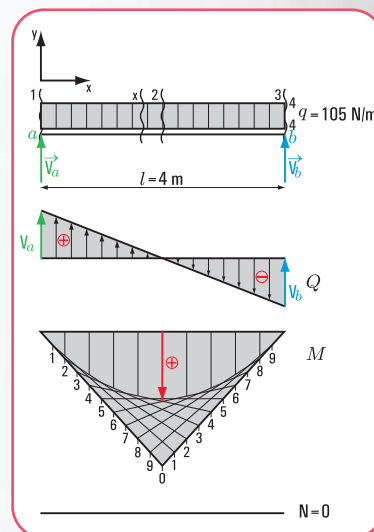


Figura 5.108. Diagramas de: sólido libre, esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo axial o normal

$$\rightarrow x = 2m \Rightarrow M_{x=2m} = 210 \text{ N m} \cdot 2m - \frac{105 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2^2 \text{ m}^2}{2}$$

$$M_{x=2m} = 210 \text{ N m}$$

$$\rightarrow x = 4m \Rightarrow M_{x=4m} = 210 \text{ N m} \cdot 4m - 105 \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{4^2}{2} \text{ m}^2$$

$$M_{x=4m} = 840 \text{ N m} - 840 \text{ N m}$$

$$M_{x=4m} = 0$$

Cálculo del esfuerzo axil (N)

$$N = 0$$

La función  $V_a x - \frac{qx^2}{2}$  es una función cuadrática, la gráfica es una parábola de segundo grado.

$$M_{\text{máximo}} = 210 \text{ N m}$$

### Respuesta

El momento flexor máximo es  $M_{\text{max}} = 210 \text{ N m}$  y se produce a una distancia del apoyo izquierdo  $x = 2 \text{ m}$ .

Los esfuerzos de corte en los apoyos son: en el apoyo  $a$ ,  $Q_a = 210 \text{ N} \uparrow$  y en el apoyo  $b$ ,  $Q_{b_{\text{izq}}} = 210 \text{ N} \downarrow$ ,  $Q_{b_{\text{der}}} = 0 \text{ N}$

### Problema N° 5.9

Un diseño estructural...



#### Enunciado

Se está construyendo un edificio de oficinas en el centro de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. La planta sobre primer piso de la estructura del edificio tiene el diseño que se muestra en la **figura 5.109**.

Según el plano municipal la viga  $V_3$  recibe las siguientes cargas:

1. carga que transmite la losa  $L_2 \rightarrow q_{L2} = 105 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
2. carga que transmite la  $V_5$  a la viga  $V_3$ ,  $P = 105 \text{ N}$
3. peso propio de la viga  $V_3 \rightarrow q_v = 7,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

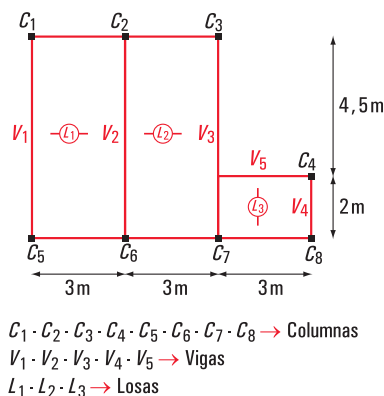


Figura 5.109. Planta sobre primer piso



El calculista de estructuras tiene que realizar el cálculo estático de la viga  $V_3$ .

1. ¿Cuáles son las reacciones de vínculo en los apoyos  $a$  y  $b$ ?
2. ¿Cuál es el valor del momento flexor máximo, y a qué distancia del apoyo  $a$  se produce?
3. ¿Cuál es el valor del esfuerzo de corte en las secciones de los apoyos y en la sección donde el momento flexor es máximo?
4. ¿Cuál es el valor del esfuerzo axil en las distintas secciones de la viga?
5. ¿Cómo son los diagramas de esfuerzo de corte ( $Q$ ); momento flexor ( $M$ ) y esfuerzo axil ( $N$ )?

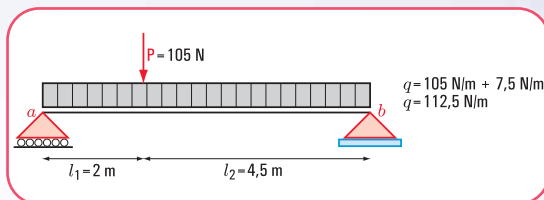


Figura 5.110. Esquema estático de carga de la viga  $V_3$

### Desarrollo

1. Determinación del valor de cada una de las reacciones en los apoyos (método analítico).

♦ Dibujamos el diagrama de sólido libre (Figura 5.111).

♦ Calculamos el valor de  $V_b$

Aplicamos las ecuaciones de equilibrio

$$\sum M^a = 0 \Rightarrow -V_b \cdot 6,50 \text{ m} + q \frac{(6,50 \text{ m})^2}{2} + 105 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$-V_b \cdot 6,50 \text{ m} + 105 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = - \frac{112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} (6,50 \text{ m})^2}{2}$$

$$V_b = \frac{-2376,6 \text{ Nm} - 210 \text{ Nm}}{-6,50 \text{ m}}$$

$$V_b = 397,93 \text{ N}$$

♦ Calculamos el valor de  $V_a$

$$\sum M^b = 0 \Rightarrow V_a \cdot 6,50 \text{ m} - q \frac{(6,50 \text{ m})^2}{2} - 105 \text{ N} \cdot 4,50 \text{ m} = 0$$

$$V_a \cdot 6,50 \text{ m} = \frac{112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} (6,50 \text{ m})^2}{2} + 105 \text{ N} \cdot 4,50 \text{ m}$$

$$V_a \cdot 6,50 \text{ m} = 2376,6 \text{ Nm} + 472,5 \text{ Nm}$$

$$V_a = \frac{2849,1 \text{ Nm}}{6,50 \text{ m}}$$

$$V_a = 438,32 \text{ N}$$

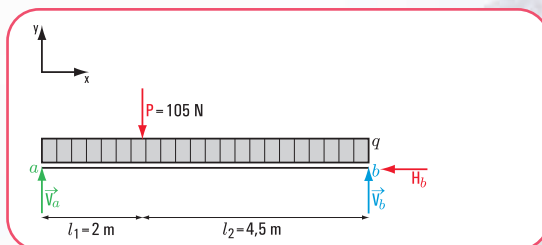


Figura 5.111. Diagrama de sólido libre

2. Verificamos con la ecuación de proyección sobre el eje  $y$

$$\begin{aligned} \sum \text{Proy}_y = 0 &\Rightarrow V_b - q \cdot 6,50 \text{ m} - 105 + V_a = 397,93 \text{ N} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 6,50 \text{ m} - 105 \text{ N} + 438,32 \text{ N} \\ &= 397,93 \text{ N} - 731,25 \text{ N} - 105 \text{ N} + 438,32 \text{ N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ♦ Calculamos el valor de  $H_a$

$$\sum \text{Proy}_x F = 0 \Rightarrow H_a = 0$$

### 3. Determinación de los esfuerzos de características

- ♦ Calculamos el esfuerzo de corte ( $Q$ ) en las secciones más críticas: 1-1; 2-2; 3-3; 4-4 a 5-5

$$Q_{1-1} = V_a \Rightarrow Q_{1-1} = 438,32 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = V_a - q \cdot 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = 438,32 \text{ N} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m}$$

$$Q_{2-2} = 438,32 \text{ N} - 225 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = 213,32 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = V_a - q \cdot 2 \text{ m} - P$$

$$Q_{3-3} = 438,32 \text{ N} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} - 105 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = 438,32 \text{ N} - 225 \text{ N} - 105 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = 108,32 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = V_a - q \cdot 6,50 \text{ m} - P$$

$$Q_{4-4} = 438,32 \text{ N} - 112,50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 6,50 \text{ m} - 105 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = 438,32 \text{ N} - 731,25 \text{ N} - 105 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = -397,93 \text{ N}$$

$$Q_{5-5} = -397,93 \text{ N} + 397,93 \Rightarrow Q_{5-5} = 0$$

- ♦ Calculamos el valor de  $x$  para  $Q = 0$

$$V_a - q \cdot x - P = 0 \Rightarrow 438,32 \text{ N} - 112,5 \text{ N/m} \cdot x - 105 \text{ N} = 0$$

$$x = \frac{105 \text{ N} - 438,32 \text{ N}}{-112,5 \text{ N/m}}$$

$$x = 2,96 \text{ m}$$

- ♦ Calculamos el momento flexor en las secciones: 1-1; 2-2; 4-4 y en  $x = 2,96 \text{ m}$ .

$$M_{1-1} = 0$$

$$M_{2-2} = V_a \cdot 2 \text{ m} - q \frac{(2 \text{ m})^2}{2}$$

$$M_{2-2} = 438,32 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{4 \text{ m}^2}{2}$$

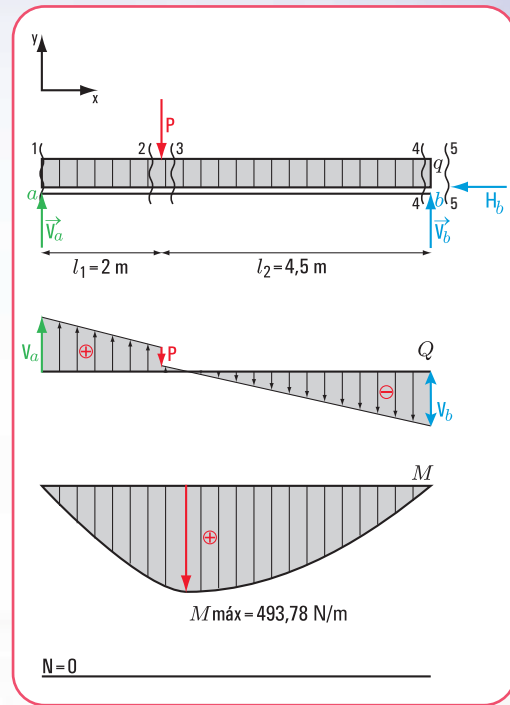


Figura 5.112. Diagrama de sólido libre, esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal



$$M_{2-2} = 876,64 \text{ Nm} - 225 \text{ Nm}$$

$$M_{2-2} = 651,64 \text{ Nm}$$

Momento flexor en  $x = 2,96 \text{ m}$

$$M_{x=2,96 \text{ m}} = V_a \cdot 2,96 \text{ m} - q \frac{(2,96 \text{ m})^2}{2} - P \cdot 2,96 \text{ m}$$

$$M_{x=2,96 \text{ m}} = 438,32 \text{ N} \cdot 2,96 \text{ m} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{(2,96 \text{ m})^2}{2} - 105 \text{ N} \cdot 2,96 \text{ m}$$

$$M_{x=2,96 \text{ m}} = 1297,42 \text{ Nm} - 492,84 \text{ Nm} - 310,8 \text{ Nm}$$

$$M_{x=2,96 \text{ m}} = 493,78 \text{ Nm}$$

$$M_{4-4} = V_a \cdot 6,50 \text{ m} - q \frac{(6,50 \text{ m})^2}{2} - P \cdot 4,50 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = 438,32 \text{ N} \cdot 6,50 \text{ m} - 112,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times \frac{(6,50 \text{ m})^2}{2} - 105 \text{ N} \cdot 4,50 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = 2.849,08 - 2.376,56 - 472,5$$

$$M_{4-4} = 0,02 \rightarrow \text{Esta diferencia corresponde a la aproximación de los decimales.}$$

$$M_{4-4} \cong 0$$

• **Determinación del esfuerzo normal o axil.**

$$N = 0$$

**Respuesta**

Las reacciones en los apoyos  $a$  y  $b$  son:  $V_a = 438,32 \text{ N} \uparrow$  ;  $V_b = 397,93 \text{ N} \uparrow$

El momento flexor máximo es  $M_{\text{máx}} = 493,78 \text{ Nm}$  y se produce a una distancia  $x = 2,96 \text{ m}$

El esfuerzo de corte en los apoyos son:  $Q_a = 493,78 \text{ N} \uparrow$  ,  $Q_{b_{\text{izq}}} = 397,93 \text{ N} \downarrow$  ,  $Q_{b_{\text{der}}} = 0 \text{ N}$

El corte es igual a cero en la sección donde el momento flexor es máximo.  
El esfuerzo axil es cero.

**Ejercicio N° 5.7**

Sobre una viga de acero apea una columna inclinada. El peso propio de la viga se desprecia.

El esquema estático de carga es el que se muestra en la figura 5.113.

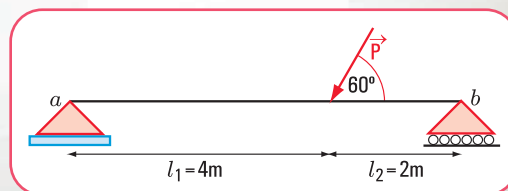


Figura 5.113. Diagrama de carga

1. ¿Cuál es el valor de la reacción de vínculo en cada uno de los apoyos?
2. ¿Cuál es el valor del esfuerzo de corte en las secciones 1-1; 2-2; 3-3; 4-4 y 5-5?
3. ¿Cuál es el valor del momento flexor en 1-1; 2-2 y 4-4? ¿Cuál es el valor del momento flexor máximo?
4. ¿Cuáles son los valores de los esfuerzos normales?
5. Realizar los diagramas de esfuerzo de corte, momento flexor y esfuerzo normal.

## Desarrollo

1. Cálculo de las reacciones de vínculo en los apoyos  $a$  y  $b$ .

Cuando en el diagrama de carga existe una fuerza concentrada inclinada, debemos trabajar con las componentes según los ejes  $x$  e  $y$ :  $P_x$ ,  $P_y$ .

1. Cálculo de las componentes de la fuerza  $\vec{P}$

$$P_x = P \cos 240^\circ$$

$$P_x = 75 \text{ N} \cdot \cos 240^\circ$$

$$P_x = 75 \text{ N} (-0,5)$$

$$P_x = -37,5 \text{ N}$$

$$P_y = 75 \text{ N} \cdot \sin 240^\circ$$

$$P_y = 75 \text{ N} (-0,866)$$

$$P_y = -64,95 \text{ N}$$

2. Cálculo de las reacciones de vínculo

Aplicamos las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \sum M^a = 0 &\Rightarrow -V_b \cdot 6\text{ m} + P_y \cdot 4\text{ m} = 0 \\ -V_b \cdot 6\text{ m} + 64,95 \text{ N} \cdot 4\text{ m} &= 0 \\ -V_b \cdot 6\text{ m} &= -64,95 \text{ N} \cdot 4\text{ m} \\ V_b &= \frac{-259,8 \text{ N} \cdot \text{m}}{-6\text{ m}} \\ V_b &= 43,3 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M^b = 0 &\Rightarrow V_a \cdot 6\text{ m} - P_y \cdot 2\text{ m} = 0 \\ V_a \cdot 6\text{ m} - 64,95 \text{ N} \cdot 2\text{ m} &= 0 \\ V_a \cdot 6\text{ m} &= \frac{129,9 \text{ N} \cdot \text{m}}{6\text{ m}} \\ V_a &= 21,65 \text{ N} \end{aligned}$$

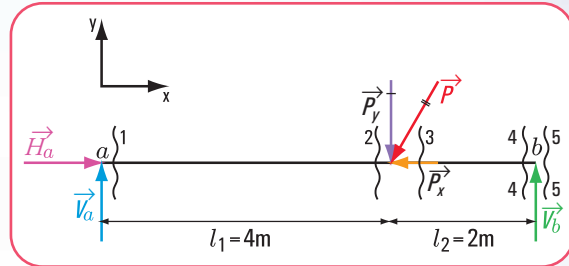


Figura 5.114. Diagrama de sólido libre

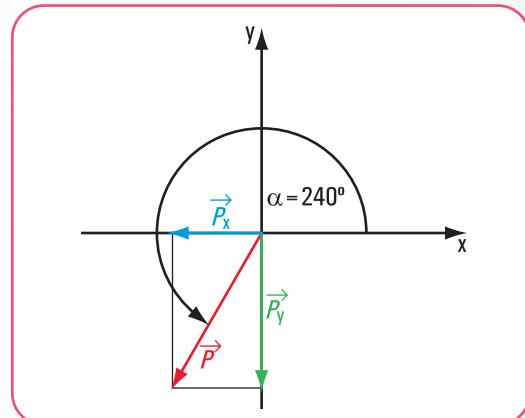


Figura 5.115. Descomposición de la fuerza  $\vec{P}$  en  $\vec{P}_x$  y  $\vec{P}_y$



## Verificación

$$\sum \text{Proy}_y F = 0 \Rightarrow 43,3 \text{ N} - 64,95 \text{ N} + 21,65 \text{ N} = 0 \text{ verifica}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_a - P_x = 0$$

$$H_a = P_x$$

$$H_a = +37,5 \text{ N}$$

*El signo de  $P_y$  y el de  $P_x$  indican el sentido. Cuando calculamos el momento consideramos el signo del momento tomando a la fuerza  $P_y$  con su sentido real. No debemos utilizar el signo de  $P_y$ .*

## 2. Cálculo de los esfuerzos de características

2.1. Determinación del esfuerzo de corte en las secciones 1-1; 2-2; 3-3; 4-4 y 5-5.

$$Q_{1-1} = V_a \Rightarrow Q_{1-1} = 21,65 \text{ N}$$

$$Q_{2-2} = V_a \Rightarrow Q_{2-2} = 21,65 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = V_a - P_y \Rightarrow Q_{3-3} = 21,65 \text{ N} - 64,95 \text{ N}$$

$$Q_{3-3} = -43,3 \text{ N}$$

$$Q_{4-4} = V_a - P_y \Rightarrow Q_{4-4} = -43,3 \text{ N}$$

2.2. Determinación del momento flexor en las secciones 1-1; 2-2; 4-4 y en  $x-x$ .

$$M_{1-1} = 0$$

$$M_{2-2} = V_a \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_{2-2} = 21,65 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_{2-2} = 86,6 \text{ N m}$$

$$M_{4-4} = V_a \cdot 6 \text{ m} - P_y \cdot 2 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = 21,65 \text{ N} \cdot 6 \text{ m} - 64,95 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}$$

$$M_{4-4} = 129,9 \text{ N m} - 129,9 \text{ N m}$$

$$M_{4-4} = 0 \text{ N m}$$

En una sección  $x-x$

Para  $x < 4 \text{ m}$

$$M_{x-x} = V_a \quad (13)$$

$$M_{x-x} = 21,65 \text{ N} \cdot x$$

Para  $x > 4 \text{ m}$

$$M_{x-x} = 21,65 \text{ N} \cdot x - P_y (x - 4 \text{ m}) \quad (14)$$

Las expresiones matemáticas (13) y (14) son funciones lineales, cuya representación gráfica de cada una es una recta.

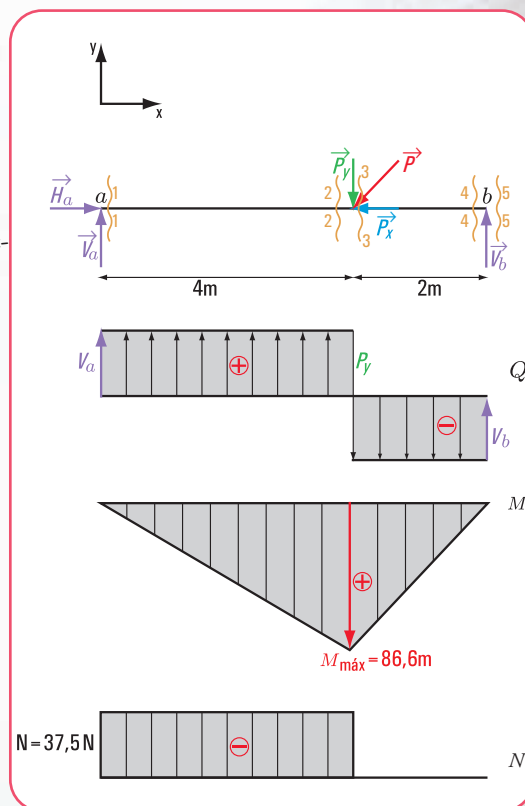


Figura 5.116. Diagrama de sólido libre; de esfuerzo de corte, de momento de flexor y de esfuerzo normal

### 2.3. Determinación del esfuerzo normal

$$\text{En } 1-1 \rightarrow N_{1-1} = H_a$$

$$N_{1-1} = 37,5 \text{ N}$$

$$\text{En } 2-2 \rightarrow N_{2-2} = 37,5 \text{ N}$$

$$\text{En } 3-3 \rightarrow N_{3-3} = H_a - P_x$$

$$N_{3-3} = 37,5 \text{ N} - 37,5 \text{ N}$$

$$N_{3-3} = 0$$

*El signo del esfuerzo normal resulta de la siguiente convención:*

*si la componente normal de la resultante comprime, el signo del esfuerzo normal es negativo.  
si la componente normal de la resultante tracciona a la sección, entonces el signo es positivo.*

#### Respuesta

Las reacciones de vínculo tienen los siguientes valores:

$$V_a = 21,65 \text{ N} \uparrow; V_b = 43,3 \text{ N} \uparrow; H_a = 37,5 \text{ N} \rightarrow$$

El esfuerzo de corte en cada una de las secciones toma los valores siguientes:

$$Q_{1-1} = 21,65 \text{ N}; Q_{2-2} = -21,65 \text{ N}; Q_{3-3} = -43,3 \text{ N}; Q_{4-4} = -43,3 \text{ N}; Q_{5-5} = 0 \text{ N}$$

El momento flexor máximo es  $M_{\max} = 86,6 \text{ N m}$

El momento flexor en cada una de las secciones es:

$$M_{1-1} = 0 \text{ N m}; M_{2-2} = 86,6 \text{ N m}; M_{4-4} = 0 \text{ N m}$$

El esfuerzo normal o axil es :  $N_{1-1} = 37,5 \text{ N}; N_{2-2} = 37,5 \text{ N}$  y  $N_{3-3} = 0 \text{ N}$

#### Para pensar y resolver

Los siguientes ejercicios y problemas son para pensar y resolver. Al final del libro encontramos las soluciones desarrolladas.

#### Problema 5.10

##### *Un edificio con las patas torcidas*

##### Enunciado

Un edificio tiene, en planta baja, un gran espacio de recepción. Se ven cuatro columnas inclinadas.

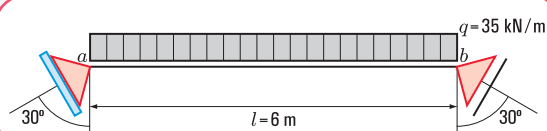


Figura 5.117 a. Esquema de carga de la viga

Las columnas reciben las cargas de vigas.

¿Cuáles son las fuerzas provenientes de la viga que soportan las columnas?

Supongamos que los datos son los que están en la **figura 5.117 a**.

### Problema N° 5.11

¿Cómo diseñamos la estructura de un balcón?

#### Enunciado

En un edificio de planta baja y cuatro pisos, una viga de uno de los balcones tiene el siguiente esquema estático.

¿Cuáles son las reacciones de vínculo en el empotramiento?

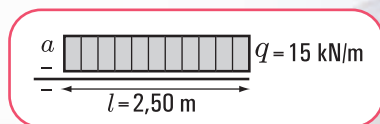


Figura 5.117 b. Esquema estático de carga de una viga empotrada

### Ejercicio N° 5.8

El esquema estático de carga (**Figura 5.118**) representa una viga con dos voladizos y con una viga y una columna apeadas.

$$P_1 = 90 \text{ N}$$

$$P_2 = 70 \text{ N}$$

$$q = 100 \text{ N/m}$$

$$\hat{\alpha} = 45^\circ$$

1. ¿Cuáles son las reacciones en los apoyos *a* y *b*?
2. Esfuerzo de corte. Diagrama.
3. Esfuerzos normales. Diagrama.
4. Momento flexor. Diagrama.

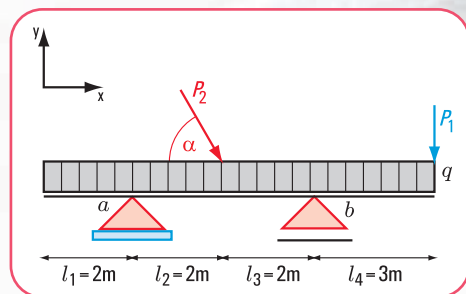


Figura 5.118. Esquema estático de carga

### Ejercicio N° 5.9

El esquema estático de carga (**Figura 5.119**) corresponde a una viga empotrada-libre sometida a una carga *q* y a un momento.

Los datos son:  $q = 130 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$$M_1 = 78 \text{ N m}$$

1. ¿Cuáles son los valores de las reacciones en el empotramiento?
2. Realizar el diagrama de esfuerzo de corte
3. Realizar el diagrama de momento flexor
4. Realizar el diagrama de esfuerzo normal

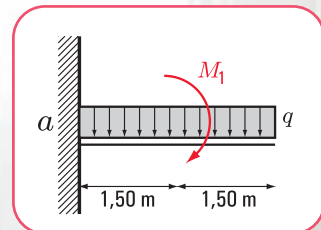


Figura 5.119  
Esquema estático de carga



### Ejercicio N°5.10

El esquema estático de carga (Figura 5.120) corresponde a una viga simplemente apoyada.

Los datos son:  $q = 90 \frac{N}{m}$

$$P = 5 N$$

1. ¿Cuáles son los valores de las reacciones en los apoyos?
2. Realizar el diagrama de esfuerzo de corte
3. Realizar el diagrama de momento flexor
4. Realizar el diagrama de esfuerzo normal

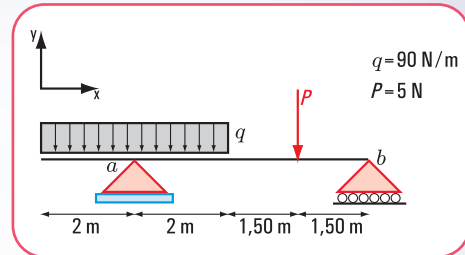


Figura 5.120. Esquema estático de carga

## Epílogo

Hemos recorrido juntos este último capítulo, a través del cual pudimos analizar, discutir, y reflexionar acerca de los principios y conceptos fundamentales de la estática aplicados en nuestro hábitat. En este capítulo nuestro énfasis estuvo puesto en las estructuras de los objetos artificiales, considerada la estructura como el corazón de cada objeto creado por el hombre y, sin la cual sería imposible la existencia de los mismos.

Y, cuando hablamos de estructura, implícitamente aparecen los principios y conceptos de la estática incorporados a ella. Por ello, dejamos para el final el abordaje de esta temática, tan fundamental en nuestra vida cotidiana.

El funcionamiento de los distintos elementos estructurales, de acuerdo con diferentes variables: tipos de apoyo; tipos y formas de aplicación de las cargas; reacciones de vínculo; esfuerzos de características: momento flexor, esfuerzo de corte, esfuerzo normal;... constituyen las temáticas asociadas a la estática que hemos considerado importante presentar y desarrollar en el último capítulo del libro.

Recordamos que, previo al comienzo del capítulo 1, propusimos una situación problemática que denominamos: “Mantener el barrio en condiciones de higiene y seguridad y estéticamente agradable”. Dicha propuesta es integradora de los contenidos desarrollados en los capítulos 1 a 5.

Seguramente, habrá lectores que, a medida que incorporaban los saberes necesarios, resolvían la situación y, en cambio, otros lo harán ahora, al término del libro.

No interesa el momento, ni la forma; importa que el aprendizaje haya sido significativo.

Todavía quedan por resolver los ejercicios y problemas que dejamos para “Pensar y resolver” correspondientes a este capítulo, cuyas soluciones el lector las encontrará al final del libro.

*¡...y ahora,  
a pensar y resolver!*

