LA MATEMÁTICA ASOCIADA A LA ESTÁTICA

Haydeé Noceti
Sol Avancini Noceti

El propósito de este apéndice es el de facilitar al lector la visualización, en forma de síntesis, de los contenidos de la matemática que sirven de apoyo al desarrollo de las problemáticas que plantea la estática de los cuerpos sólidos indeformables.

A1.- Las secciones cónicas y las funciones: la circunferencia; la parábola; la ecuación cuadrática o de segundo grado; intersectos (intersecciones)

A1.1- La circunferencia

La circunferencia, desde el punto de vista de la geometría analítica:

Desde esta óptica, la circunferencia la podemos expresar como una sección cónica que se obtiene como la intersección de una superficie cónica con un plano perpendicular a su eje.

Figura A.1 *Obtención de la circunferencia*

Los elementos que definen a una circunferencia estándar –el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas– los podemos visualizar en el siguiente cuadro:

Ecuación	Centro	Ejes	Intersección de la circunferencia con los ejes
$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ Siendo r el radio de la circunferencia	(0;0)	Horizontal – coincide con el eje x; Vertical – coincide con el eje y	$(\pm r\,;0)$; $(0\,;\pm r)$

Otro concepto que se usa es el de la longitud de una circunferencia.

El valor de la longitud de una circunferencia es = $\pi \cdot d$, o bien la longitud de una circunferencia es = $2\pi r$, siendo d el diámetro y r el radio.

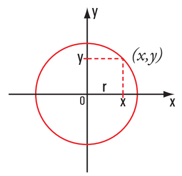


Figura A.2. *Circunferencia referida a un sistema de coordenadas cartesianas*

Expresión matemática de la función, cuya representación en el sistema (x,y) es una circunferencia estándar.

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{r^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

y es la variable dependiente; x la variable independiente y r el radio.

Desde el punto de vista del cálculo matemático, se pueden presentar las siguientes situaciones:

1 conocido el valor de su longitud (directriz), calcular el diámetro de la semicircunferencia, o sea el ancho del arco.

2 conocido el valor del diámetro o del radio de la semicircunferencia o sea la altura del arco, calcular su longitud (directriz).

A.2.- La parábola cuadrática

Desde la geometría analítica definimos a la parábola como "el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, denominada directriz".

La parábola es una curva que se puede obtener como la intersección de una superficie cónica con un plano

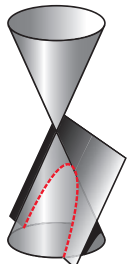


Figura A.3
Una forma de obtención de la parábola cuadrática

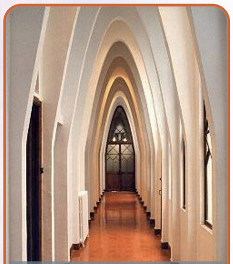


Imagen A.3
Arcos del Colegio Santa Teresa

Imagen A.2
La Sagrada Familia -
Antonio Gaudí (1852-1926)

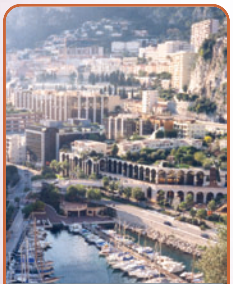


Imagen A.3
Puentes romanos y acueductos (Principado de Mónaco)

paralelo a una recta de dicha superficie (figura A.3)

◆ Elementos de la parábola cuadrática

Eje: es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
Vértice: es el punto de intersección de la parábola con el eje.

A2.1.-Ecuación de una parábola referida a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, con centro en el vértice de la parábola y eje *y* coincidente con el eje de la parábola y *x* trazado por el vértice de la parábola.

Consideramos una parábola de foco *f* con coordenadas (0,*f*) y directriz *f(x)* = –*f* (Figura A.4).

$f(x) = \frac{x^2}{4f}$ *f(x);* expresión matemática de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cuadrática estándar con foco (0,*f*) y directriz –*p*, siendo *p* > 0
Una función cuadrática tiene la siguiente expresión completa y general:

$f(x) = a\,x^2 + b\,.\,x + c$, con $a \neq 0$

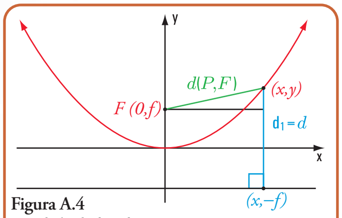


Figura A.4
Parábola de foco f con coordenadas (0; f) y directriz f(x) = –f

A2.2.-Una forma de representar gráficamente una parábola a partir de la expresión matemática de una función cuadrática

Partimos de la expresión anterior

$$f(x) = a\,x^2 + b\,.\,x + c$$

Damos nombre a cada uno de los términos de la función cuadrática:
$a\,x^2 \rightarrow$ término cuadrático o de segundo grado; *a* coeficiente del término cuadrático.
$b.x \rightarrow$ término lineal o de primer grado; *b* coeficiente del término de primer grado.
$c \rightarrow$ término independiente.
Esta expresión matemática la escribimos como:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Con el fin de visualizar mejor a la expresión anterior, hacemos $\frac{b}{2.a} = h$ y $c - \frac{b^2}{4a} = v$

Entonces $f(x) = a\left((x + h)^2\right) + v$

Si $h = 0$ y $v = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2$
Si $a = 1 \Rightarrow f(x) = x^2$ (Figura A.5).

La representación gráfica de esta función es una parábola que denominamos *parábola madre* porque de su gráfica podemos obtener todas las demás que conforman, en su conjunto, la *familia de parábolas.*

A2.3.-La familia de las parábolas cuadráticas

En la figura A.6 representamos también las parábolas para:
$a = 2{,}5$ y $a = 6$

Representamos las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = ½\,x^2$; $f(x) = ¼\,.\,x^2$ (Figura A.7).

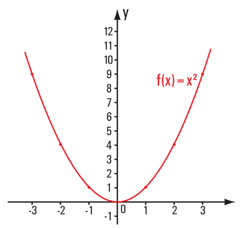


Figura A.5
Gráfica de la parábola: f(x)=x² con a=1

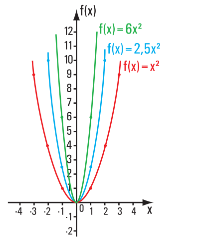
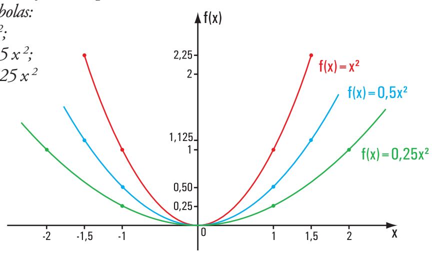


Figura A.6
Gráficas comparativas de las parábolas: f(x) = x²; f(x) = 2,5x²; f(x) = 6x²

Figura A.7. *Gráficas comparativas de las parábolas:*
f(x) = x²;
f(x) = 0,5 x²;
f(x) = 0,25 x²



Conclusión 1

En las gráficas A.6 y A.7 observamos que:

Si $a<1$ y $a>0$, entonces la parábola madre se abre y tiende para valores de $a<<<1$ y $a>0$ a transformarse en el eje x. Esto implica que la parábola se degeneró y se transformó en una recta, cuya expresión matemática es $f(x) = 0$

Si $a>1$, entonces la parábola madre se cierra y tiende para valores $a>>>>>1$ a transformarse en el eje y. Esto implica que la parábola se degeneró y se transformó en una recta, cuya expresión matemática es $x = 0$

Seguimos aumentando la familia de las parábolas.

Conclusión 2

Representamos las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = x^2 + 1$; $f(x) = x^2 + 2$; $f(x) = x^2 - 2$; $f(x) = x^2 - 1$ (Figura A.8).

Si a la gráfica de la parábola $f(x) = x^2$ se le suma un número positivo o negativo, entonces la gráfica se traslada según el eje y tantas unidades como indica el número sumado.

Es decir, en la expresión matemática $f(x) = (x+h)^2 + v$, el valor de v traslada a la parábola según el eje y.

Conclusión 3

Ahora, consideramos la expresión $f(x) = (x+h)^2$

Representamos las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = (x + 1)^2$; $f(x) = (x - 1)^2$ (Figura A.9).

El número h en la expresión $f(x) = (x+h)^2$ traslada a la parábola según el eje x, tantas unidades como indica el valor de h, hacia la derecha si h es negativo y a la izquierda si h es positivo.

Conclusión 4

Completamos la familia de las parábolas haciendo $a < 0$

Representamos las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = -x^2$; $f(x) = -2x^2$; $f(x) = -0{,}5x^2$ (**Figura A.10**).

Las gráficas de las parábolas $f(x) = +a.x^2$ y $f(x) = -a.x^2$ son simétricas respecto del eje x.

Conclusión general

Podemos expresar que cada uno de los coeficientes de los términos de una función cuadrática completa y general cumple una función.

Entonces, dada $f(x) = (x+h)^2 + v$, cada uno de los coeficientes tiene un rol:

1 v permite trasladar a la parábola madre, según el eje y tantas unidades como indica el número v;
2 h permite trasladar a la parábola madre, según el eje x tantas unidades como indica el número h. Si h es positivo la traslación se produce en sentido del semieje x negativo y si h es negativo la traslación se hace en el sentido del semieje x positivo;
3 $a > 0$ y $a \geqq 1$ abre o cierra a la parábola, acercándola al eje x o bien al eje y;
4 las parábolas, una con el coeficiente del término cuadrático positivo y la otra con el término cuadrático negativo son simétricas respecto del eje x.

Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba

Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo

◆Aplicaciones de las parábolas cuadráticas

Existen aplicaciones de las parábolas, tales como:

- en un partido de fútbol se realizan numerosas jugadas, entre ellas se destaca aquélla que hace el jugador cuando lanza al aire la pelota en forma oblicua; la misma describe un movimiento parabólico bajo la acción de la fuerza de gravedad;
- también, bonitos arcos parabólicos se obtienen bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra, por ejemplo los chorros y las gotas de agua que salen de los caños de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades;

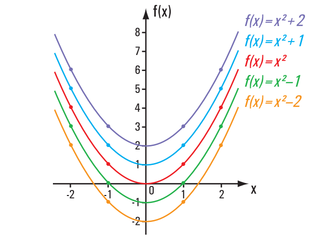


Figura A.8
Gráficas comparativas de las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = x^2 + 1$; $f(x) = x^2 + 2$; $f(x) = x^2 - 2$; $f(x) = x^2 - 1$

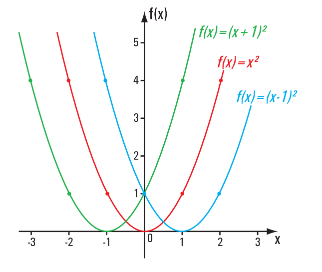


Figura A.9
Gráficas comparativas de las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = (x + 1)^2$; $f(x) = (x - 1)^2$

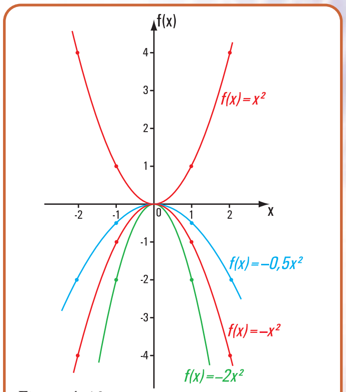


Figura A.10
Gráficas comparativas de las parábolas $f(x) = x^2$; $f(x) = -x^2$; $f(x) = -2.x^2$; $f(x) = -0{,}5.x^2$

Imagen A.4. *Puente con arco parabólico*

- la cocina solar, o las radiaciones electromagnéticas, en general y las antenas parabólicas utilizan la propiedad de la parábola mediante la cual cualquier rayo que incida de forma paralela al eje de la parábola rebota en su superficie pasando por el foco;
- otro caso es el que nos permite diseñar el faro de un coche, de manera que el corte transversal a través de su eje sea una parábola y que la fuente de luz esté colocada en el foco de la misma;
- las parábolas son también importantes en el diseño de los puentes colgantes. Los cables principales de los mismos toman, en muchos de los casos formas parabólicas.

Imagen A.5
Fuentes frente al Casino de Montecarlo - Principado de Mónaco

A2.4.- La ecuación cuadrática o de segundo grado

Hasta aquí hemos desarrollado la temática referida a dos tipos de relaciones: la que da como gráfica una circunferencia y las funciones cuadráticas, cuyas gráficas son parábolas de segundo grado.

En todos los casos, cuando trabajamos con funciones, siempre nos referimos a dos variables: la variable independiente y la variable dependiente. La variable dependiente es el valor de la función para determinado valor de la variable independiente. Por definición de función, para cada valor de la variable independiente, es decir, para cada elemento del conjunto dominio le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto codominio.

Y, llegado a este punto, nos podemos preguntar si la expresión matemática $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ que define a una circunferencia corresponde a una función.

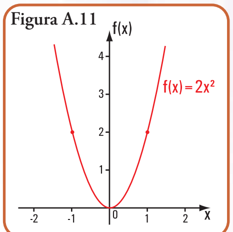
Si el conjunto dominio es $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -r \leq x \leq +r\}$, para un valor de x, le corresponden dos valores de y. Por ejemplo, si x=2 y r=3, entonces $y = \pm\sqrt{5}$. Esto significa que la expresión matemática $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ no representa a una función.

La definición de función nos está diciendo que para que una función quede bien definida es necesario saber cuál es el conjunto dominio.
No es lo mismo que el conjunto dominio sea el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, que sea el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros o bien $\mathbb{R}$, el de los reales.
Por otra parte, toda función puede representarse, mediante diagramas de coordenadas cartesianas ortogonales, como lo hemos realizado en el ítem A.3, pero también mediante diagramas de Venn y por medio de tablas.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2.x^2$, con Dominio = $\mathbb{R}$ (conjunto de los reales), podemos representarla del siguiente modo:

1 mediante coordenadas cartesianas ortogonales (Figura A.11);
2 por medio de diagrama de Venn[1] (Figura A.12);
3 mediante tabla (Tabla A.1).

Figura A.11



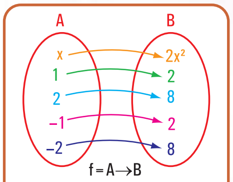


Figura A.12

La flecha indica que para cada valor de x le corresponde un solo valor de $f(x)$.
Si conocemos el valor de $f(x)$ obtenemos el/los valor/es de x. Así por ejemplo, podemos observar que para $f(x) = 2$, los valores de x son dos: 1 y –1.
La expresión matemática, en este caso es: $2.x^2 = 2$, que recibe el nombre de ecuación y, como proviene de una función cuadrática, la ecuación se llama ecuación cuadrática.
Entonces de la función cuadrática $f(x) = a.x^2+b.x+c$, podemos obtener $a.x^2+b.x+c = 0$: ecuación cuadrática completa y general.
Los valores de x se llaman raíces de la ecuación.

x	$f(x) = 2.x^2$
0,0	0
1,0	2
2,0	8
0,5	0,5
1,5	4,5
2,1	8,82
–1,0	2
–2,0	8
–0,5	0,5
–1,5	4,5

Tabla A.1

[1] John Venn (1834 - 1923), fue un lógico británico que se hizo famoso por sus diagramas lógicos.

A2.5.- Cálculo de las raíces de una ecuación cuadrática

Partimos de la expresión matemática

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c+\frac{b^2}{4a}\right)$$

Haciendo $f(x) = 0$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c+\frac{b^2}{4a}\right)=0$$

sumamos a ambos miembros la expresión $-\left(c+\frac{b^2}{4a}\right)$ y dividimos por a.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\cancel{\frac{b^2}{4a}}\right)-\left(c-\cancel{\frac{b^2}{4a}}\right)=\frac{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las raíces de la ecuación son dos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\[2ex] x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$

El valor de x_1 y el de x_2 representan las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Esos puntos se llaman intersecciones en x.

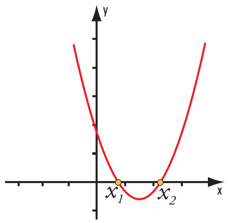


Figura A.13
Gráfica de la parábola en la que se indican las raíces x_1 y x_2

A2.6.- Intersecciones

La gráfica tiene intersecciones en x si la ecuación $a.x^2+ b.x + c = 0$ tiene soluciones reales.
Las soluciones pueden ser: una, dos o ninguna.
¿De quién depende la existencia de las soluciones reales de la ecuación $a.x^2+ b.x + c = 0$?
El signo del radicando $b^2– 4.a.c$, que recibe el nombre de discriminante determina la cantidad de intersecciones en x.
El intersecto en y para la gráfica $f(x)= a.x^2+ b.x + c$, es el valor de $f(0)$

$b^2– 4.a.c>0$	La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales y distintas. Dos intersecciones. La gráfica **tiene con el eje *x*** dos puntos de intersección
$b^2– 4.a.c<0$	La ecuación de segundo grado no tiene solución real. No hay intersecciones en *x*. La gráfica está totalmente sobre el eje *x*. La gráfica está totalmente debajo del eje *x*.
$b^2– 4.a.c=0$	La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales iguales. Existe un solo intersecto.

A3.- Otras funciones no lineales

A3.1- Las funciones logarítmicas y exponenciales

Las expresiones matemáticas de las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan como modelos matemáticos, en biología, física, química, geología,... y, en el caso específico de los logaritmos, constituyen la base de la famosa **regla de cálculo** que, durante tantos años los calculistas de edificios utilizaron para realizar los cálculos.
Si buscamos **modelos matemáticos en la biología** podemos recordar la tan conocida teoría poblacional de Thomas Malthus (1776-1834) que establece que las personas se reproducen más rápidamente que los alimentos.
Esta teoría se basa en dos hipótesis:
1 la población, cuando no está limitada, aumenta en progresión geométrica (1, 2, 4, 8, 16, 32,...) en períodos anuales. De este modo la población se duplica cada 25 años;
2 los alimentos crecen en progresión aritmética (1, 2, 3, 4, 5,...) por año.
Malthus llegó a una conclusión muy dramática: las hambrunas mundiales llegarían, excepto que se tomaran medidas.
Malthus expresó esta predicción mediante la siguiente función:
$p(t) = p_o.e^{kt}$, con k>o que utilizó como modelo matemático para pronosticar la población mundial.
Con:
$p(t)$ población mundial en un tiempo t
p_o población mundial en un tiempo t determinado
k la tasa anual de crecimiento
La expresión $p(t)$ representa una función exponencial.

También en la **química** encontramos diferentes modelos matemáticos que apoyan la resolución de sus problemas. Recordemos que en el año 1950 el químico Willard Libby creó el método conocido como *carbono 14*, que se fundamenta en el hecho de que los seres vivos absorben carbono 14 radiactivo a través de los procesos de alimentación y respiración. El carbono 14 se deja de absorber al morir.
El método permite realizar dataciones, por ejemplo establecer la edad de restos fósiles.
Se basa en un fenómeno natural que consiste en que algunos elementos químicos, como el carbono, que son inestables, tienden a desintegrarse, transformándose en otros isótopos o elementos diferentes.

Willard Frank Libby (1908 - 1980), introdujo la técnica de datación mediante el carbono radiactivo C-14. Trabajó como investigador y como docente en diferentes universidades de los EE. UU. Después de la Segunda Guerra Mundial se desempeñó en el Instituto de Estudios Nucleares de la Universidad de Chicago, y desde 1955 hasta 1959 formó parte de la Atomic Energy Comission del gobierno de Estados Unidos. Posteriormente al año 1959 pasó a la Universidad de California como profesor de Química.
En 1960, el desarrollo del método de datación radiactiva mediante carbono 14, conocido popularmente como "reloj registrador atómico"; método que favoreció a la antropología física, a la arqueología y a la geología, le permitió obtener a Libby el Premio Nobel que entrega anualmente el Rey de Suecia.

En el proceso de desintegración se trabaja con el parámetro denominado vida media.

Se define como vida media de un elemento radioactivo al tiempo que tarda la mitad de ese elemento en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento.
Así, por ejemplo el estroncio 90 (Sr-90) que es altamente radioactivo tiene una vida media de 29 días; el isótopo de uranio (U-238) es de 4.560 millones de años; la de polonio (Po - 213) de 10-6 segundos y la del carbono 14 (C-14) de 5.730 ± 30 años.
El uranio 235 (U-235) es el combustible de algunos reactores nucleares. Su vida media es de 710 millones de años. Otro elemento es el plutonio 239 (Pu - 239) que también se utiliza como combustible de algunos reactores nucleares. Su vida media es de 24.400 años.

El modelo matemático utilizado en el método del *carbono 14* es el siguiente:

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-k.t}$$

Esta expresión matemática es la expresión de una función exponencial.
E_0 es la cantidad inicial de elemento en el cuerpo, E la cantidad final, t el tiempo transcurrido y k (constante).
El número e es un número irracional. Su valor aproximado es de 2,7182818284590452354... Nosotros lo utilizaremos con una aproximación por exceso:

$$e = 2{,}72$$

En general, definimos a una función exponencial mediante la siguiente expresión matemática:

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

A3.2- Gráficas de las funciones exponenciales

Con el fin de visualizar la forma gráfica de una función exponencial en coordenadas cartesianas ortogonales consideramos la función $f(x) = 2^x$
La representación gráfica la realizamos determinando las coordenadas de los puntos (Figura A.14).

x	$f(x) = 2^x$
0,0	1,0
1,0	2,0
−1,0	0,5
0,5	$\sqrt{2}$
−0,5	$1/\sqrt{2}$
2,0	4,0
−2,0	0,25

Tabla A.2

Por lo dicho en párrafos anteriores para que la función quede definida se hace necesario definir el conjunto dominio.

En este caso el conjunto dominio es el siguiente:
Dom. = $\mathbb{R}$
Definimos algunas de las coordenadas de los puntos (pares ordenados) mediante la tabla A.2.
Si observamos la gráfica (figura A.14) podemos definir algunas propiedades de la función $f(x) = 2^x$

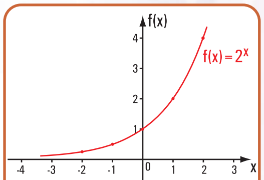


Figura A.14
Gráfica de función $f(x) = 2^x$

1. La función $f(x) = 2^x$ es una función creciente en el intervalo $(-\infty; +\infty)$.
2. El intersecto en y es el par (0;1).
3. La gráfica no tiene intersecto en x. La recta $x = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x) = 2^x$.
4. El conjunto dominio es el conjunto de los reales $\mathbb{R}$.
5. El conjunto imagen es el conjunto $\{y \in \mathbb{R} \,/\, y > 0\}$.

En general estas propiedades son válidas para $f(x) = a^x$ con $a > 1$.

Graficamos la función $f(x) = (½)^x$ con dominio = $\mathbb{R}$ (Figura A.15).

Definimos los pares de coordenadas de sus puntos mediante la tabla A.3.

x	$f(x) = (½)^x$
0,0	1,0
1,0	0,5
−1,0	2,0
0,5	$\sqrt{1/2}$
−0,5	$\sqrt{2}$
2,0	0,25
−2,0	4,0

Tabla A.3

Si observamos la gráfica podemos definir algunas propiedades de la función $(½)^x$.

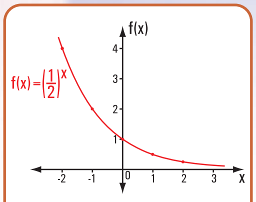


Figura A.15
Gráfica de función $f(x)= (½)^x$

1 La función $f(x) = (½)^x$ es una función decreciente en el intervalo $(-\infty; +\infty)$.
2 El intersecto en y es el par (0;1).
3 La gráfica no tiene intersecto en x. La recta $x = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $f(x)= (½)^x$
4 El conjunto dominio es el conjunto de los reales $\mathbb{R}$.
5 El conjunto imagen es el conjunto $\{y \in \mathbb{R} / y>0\}$.

Estas propiedades son válidas para la función $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$.

Las gráficas de las funciones $f(x)= 2^x$ y $f(x) = (½)^x$ son simétricas respecto del eje y.

Un ejemplo característico de las funciones exponenciales son aquellas funciones que tienen como base al número e.
Por ejemplo: $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$

Muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla que permite calcular, directamente, e^x para valores dados de x. En algunas calculadoras científicas se calcula e^x usando las teclas SCHIF (o INV) y ln (explicaremos más adelante el porqué de este modo de cálculo).

Algunas de las aplicaciones de las funciones exponenciales, más precisamente de las funciones de base el número e, son las que corresponden a las estructuras de puentes, denominadas colgantes. Estas estructuras permiten salvar grandes luces. El elemento estructural principal es el cable. El material, casi excluyente, con el que se construyen los cables es el acero.

El cable que soporta una carga, uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del mismo cable, es el caso de los cables que cuelgan bajo su propio peso.
La traza que toma el cable, en este caso se asimila a la curva geométrica denominada *catenaria*.

La expresión matemática de la catenaria de eje vertical es:

$$f(x) = \frac{c\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{\frac{-x}{c}}\right)}{2}$$

c es una constante que depende de las características físicas del cable.
Si $c = 1$, entonces la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ forma parte de las denominadas funciones hiperbólicas; en esta caso la función se llama coseno hiperbólico y se abrevia $ch\,(x)$.

Entonces la función de la catenaria la podemos definir así:

$$f(x) = ch(x)$$

Si $c^1 \neq 1 \Rightarrow f(x) = c.ch(x/c)$ (Figura A.16)

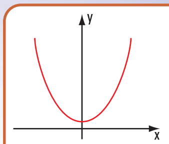


Figura A.16
Gráfica de la catenaria: $f(x) = c.ch(x/c)$

Otro edificio muy conocido es el Arco de Saint Louis construido en el Jefferson Memorial Nacional de Expansión, 11 Norte Fourth Street, St. Louis, Missouri, a orillas del río Mississippi, en EE. UU. Su estructura tiene la particularidad de conformar un arco con la forma de una catenaria invertida.

Imagen A.3
Arco de Saint Louis en forma de catenaria invertida

A3.3.- La función logarítmica

En párrafos anteriores hemos dado el modelo matemático que permite, mediante la desintegración del carbono 14, encontrar la edad de los fósiles o de otros elementos.

Presentamos ahora la expresión matemática que nos da la cantidad de radio existente en una muestra después de ***t*** años.

$C(t) = C_0 \cdot e^{-0{,}00041\,t}$, siendo C_0 la cantidad inicial

Si tenemos una muestra de 50 g de radio, podemos preguntarnos la cantidad que se tendrá al cabo de t = 2.000 años y, cuál es la vida media del radio, expresada en años.
La primera parte la respondemos reemplazando en la fórmula anterior a t por 2.000

$C(2.000) = 50 \text{ g.}\ e^{-0{,}00041 .\ 2.000}$
$C(2.000) = 50 \text{ g.}\ e^{-0{,}82}$
$C(2.000) = 50 \text{ g.}\ 0{,}44$
$C(2.000) = 22 \text{ g.}$

La cantidad que quedará es de 22 g, esto significa que se desintegraron 28 g.
Para dar solución a la segunda pregunta, recordamos que la **vida media** de un elemento hace referencia al tiempo que debe transcurrir para que quede la mitad de la muestra inicial.
Entonces de los 50 g deben quedar 25 g.

La expresión matemática es:

$$25 \text{ g} = 50 \text{ g} . e^{-0,00041 . t}$$

$$e^{-0,00041 . t} = ½$$

Aquí se nos presenta la necesidad de encontrar el valor de t que figura en el exponente de la expresión matemática. Para resolver esta ecuación debemos utilizar los denominados logaritmos.

Dejemos para más adelante la respuesta a la segunda pregunta.

Logaritmos

Definición

El logaritmo de un número se define de la siguiente forma:

$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$, con $a > 0 \wedge a \neq 1$

Se lee logaritmo en base a de x es igual a b sí y sólo sí a elevado a b es igual a x.

Así:

1 $\log_2 8 = 3$, pues $2^3 = 8$

2 $\log_3 9 = 2$, pues $3^2 = 9$

3 $\log_{10} 1 = 0$, pues $10^0 = 1$

4 $\log_e 5 = x$, pues $e^x = 5$

5 $\log_{10} (3.x + 30) = 3 \Rightarrow 3.x + 30 = 10^3$

$$3.x = 10^3 - 30$$

$$3.x = 1000 - 30$$

$$x = \frac{970}{3}$$

$$x = 323,3$$

Los logaritmos que se usan con frecuencia son: $\log_{10}$ y $\log_e$ que se llaman, respectivamente, logaritmos decimales y logaritmos naturales o neperianos.

Cuando trabajamos con logaritmos decimales no colocamos la base; entonces log 2, significa logaritmo decimal de 2 y cuando lo hacemos con logaritmos naturales escribimos así: ln 2, significa logaritmo en base e de 2.

Propiedades de los logaritmos

Para todo número perteneciente a $\mathbb{R}^+$: a y b, se cumplen:

1 $\log_c (a.b) = \log_c a + \log_c b$

2 $\log_c (a/b) = \log_c a - \log_c b$

3 $\log_c a^d = d.\log_c a$

Volvemos al problema anterior. Para dar respuesta a la pregunta, ¿cuál es la vida media del radio, expresada en años?, recurrimos a la expresión matemática

$e^{-0,00041 . t} = ½$

Aplicamos a ambos miembros ln, entonces

$\ln e^{-0,00041 . t} = \ln (½)$, aplicamos la tercera propiedad de los logaritmos

$$-0,00041 . t . \ln e = -0,69$$

$$t . 1 = \frac{-0,69}{-0,00041}$$

$$t = 1.683 \text{ años}$$

La vida media del radio, es decir la cantidad de años en que se desintegrará la mitad de la muestra, es de 1.683 años

Gráficas de las funciones logarítmicas

Con el fin de visualizar la forma gráfica de una función logarítmica, en coordenadas cartesianas ortogonales, consideramos la función $f(x) = \log_2(x)$ (Figura A.17)

La representación gráfica la realizamos determinando las coordenadas de los puntos.

En este caso el conjunto dominio es el siguiente:

Dom. = $\mathbb{R}^+$

Definimos algunas de las coordenadas de los puntos (pares ordenados) mediante la tabla A.4.

x	$f(x) = \log_2(x)$
1,0	0,0
2,0	1,0
4,0	2,0
0,5	−1,0
0,25	−2,0
8,0	3,0

Tabla A.4

Si observamos la gráfica podemos definir algunas propiedades de la función $f(x) = \log_2(x)$.

1 La función $f(x) = \log_2(x)$ es una función creciente en el intervalo $(0; +\infty)$

2 El intersecto en x es el par (1;0)

3 La gráfica no tiene intersecto en y. La recta $y = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = \log_2(x)$

4 El conjunto dominio es el conjunto de los reales $\mathbb{R}^+$

5 El conjunto imagen es el conjunto $\{y \; \varepsilon \; \mathbb{R}\}$

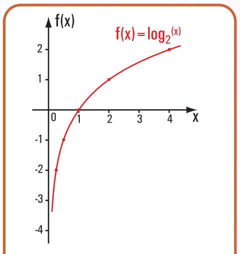


Figura A.17. *Gráfica de función $f(x) = \log_2(x)$*

En general estas propiedades son válidas para $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 1$

Graficamos la función:

$$f(x) = \log_{½} (x)$$

con dominio = $\mathbb{R}^+$ (Figura A.18)

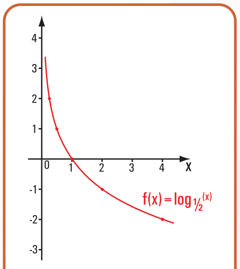


Figura A.18. *Gráfica de función $f(x) = \log_{½}(x)$*

x	$f(x) = \log_{1/2}(x)$
1,0	0,0
0,5	1,0
0,25	2,0
2,0	−1,0
4,0	−2,0

Tabla A.5

Definimos los pares de coordenadas de sus puntos mediante la tabla A.5.

Si observamos la gráfica podemos definir algunas propiedades de la función $f(x) = \log_{1/2}(x)$.

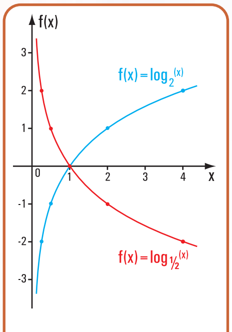


Figura A.19. *Gráfica de las funciones: $f(x)= \log_{1/2}(x)$ y de $f(x)= \log_2(x)$*

1 La función $f(x) = \log_{1/2}(x)$ es una función decreciente en el intervalo $(0; +\infty)$.
2 El intersecto en x es el par (1;0)
3 La gráfica no tiene intersecto en y. La recta $y = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = \log_{1/2}(x)$
4 El conjunto dominio es el conjunto de los reales $\mathbb{R}^+$
5 El conjunto imagen es el conjunto $\{y \in \mathbb{R}\}$

Estas propiedades son válidas para la función $f(x) = \log_a(x)$ con $0 < a < 1$

*Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2(x)$ y $f(x) = \log_{1/2}(x)$ son simétricas respecto del eje y **(Figura A.19).***

Comparación entre las gráficas de la función logarítmica y la exponencial

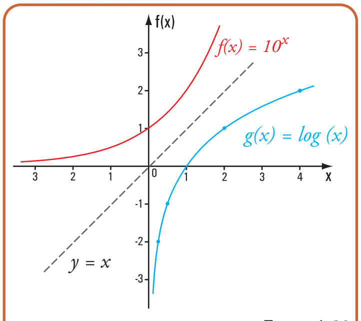


Figura A.20
Gráfica de las funciones $f(x)=10^x$ y $g(x)=\log(x)$

Representamos con ayuda de la calculadora las funciones $f(x)=10^x$ y $g(x)=\log(x)$ en un mismo diagrama de coordenadas cartesianas ortogonales (Figura A.20).

Con los valores obtenidos completamos la tabla A.6.

x	$f(x) = 10^x$	$g(x) = \log(x)$
−1,0	0,1	no tiene solución
1,0	10,0	0
2,0	100,0	−0,30103
0,5	3,16	−0,30103
−2,0	0,01	no tiene solución
0,0	1,0	no tiene solución

Tabla A.6

Observamos que las gráficas de:
$f(x)=10^x$ y
$g(x)=\log(x)$
son simétricas de la recta $y=x$.

Ambas funciones son, entre sí, funciones inversas.

Para definir a las funciones inversas, recordemos la definición de función biyectiva.

Una función f: A → B es inyectiva si se cumplen:

1. *si x_1, x_2 son elementos pertenecientes a A / $f(x_1) = f(x_2)$, necesariamente, se cumple $x_1 = x_2$*
2. *si x_1, x_2 son dos elementos diferentes pertenecientes a A, necesariamente, se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$*

Una función f: A → B es sobreyectiva si el conjunto imagen coincide con el conjunto codominio

En símbolos

$$\forall y \in B : \exists x \in A,\ f(x) = y$$

Una función f: A → B es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

Dos funciones f y g son funciones inversas entre sí ⇔ el conjunto dominio de "g" es el conjunto codominio de f y si el conjunto dominio de f es el conjunto codominio de g.
Las funciones inversas son biyectivas y sus gráficas son simétricas de la recta y=x

A4.- Las funciones goniométricas vs. circulares vs trigonométricas

Por lo general, los términos **goniométricas, trigonométricas y circulares,** cuando se aplican a las funciones, se consideran como sinónimos y se usan en forma indistinta, sin embargo son diferentes.

Si bien todas estas funciones tienen un denominador común: el conjunto dominio está referido a los ángulos cuando nos referimos a:

- **funciones trigonométricas** estamos significando funciones aplicadas a ángulos de un triángulo, sea este rectángulo u oblicuángulo;
- si se las aplica a ángulos en general las denominamos **funciones goniométricas** y,
- cuando nos referimos a **funciones circulares** estamos reconociendo que, a cada número real ***x***, le corresponde un ángulo de ***x*** radianes.

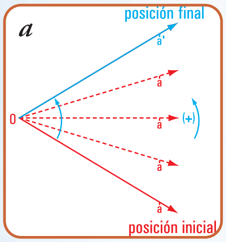
Dado que los ángulos ocupan un lugar importante en estas funciones, comenzamos el estudio de todas ellas definiendo a los ángulos y a los sistemas de medición de los mismos.

A.4.1.- Una forma de definir a un ángulo plano

Pensemos por un momento en la rotación en un plano de una semirrecta alrededor de un punto.

En la rotación existe una posición inicial y una posición final de la semirrecta. Durante la rotación la semirrecta barre una parte del plano (Figura A.21 a). A esa parte del plano la denominamos **ángulo plano.**

Un ángulo se lo caracteriza por los siguientes elementos: vértice, lados y sentido de rotación: dado por el signo ±.
Sentido: si la rotación se hace en el sentido contrario a las agujas del reloj lo consideramos con signo (+) (Figura A.21 a).
Si la rotación se hace en igual sentido que el movimiento de las agujas del reloj, el sentido es (–) (Figura A.21 b).



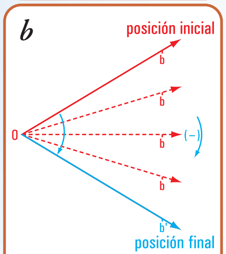


Figura A.21 a y A.21 b. *Generación de un ángulo plano*

En el caso de la figura A.21 a:

o es el vértice

$\vec{oa}$ es el lado de origen

$\vec{oa'}$ es el lado final

Sentido: opuesto al de las agujas del reloj, lo consideramos con signo (+)

En el caso de la figura A.21 b:

o es el vértice

$\vec{ob}$ es el lado origen

$\vec{ob'}$ es el lado final

Sentido: igual que el de las agujas del reloj, lo consideramos con signo (–)

Conviene referenciar a los ángulos mediante un sistema de coordenadas. Nosotros consideramos el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. El lado del origen del ángulo coincide con el semieje de *x* positivo, el vértice con el origen de las coordenadas 0.

Figura A.22 a

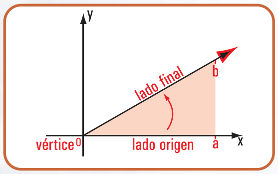
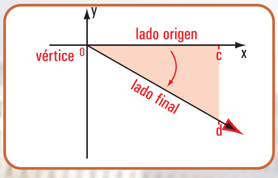


Figura A.22 b



En la figura A.22 a el ángulo $a\hat{o}b$ tiene signo +; en cambio en la figura A.22 b el ángulo $c\hat{o}d$ tiene signo –

A.4.2.- Los sistemas de medición de los ángulos planos

Existen diferentes sistemas de medidas de ángulos: sistema sexagesimal; sistema radial y sistema centesimal. El nombre de cada uno está relacionado con la unidad de medida adoptada.

Los sistemas más utilizados son los dos primeros.

Sistema sexagesimal
Unidad de medida: la unidad de medida es el grado sexagesimal (1°).
Se define como grado sexagesimal al valor del ángulo que se obtiene como las 360avas partes del ángulo determinado por rotación completa con signo + (Figura A.23).

$$\frac{1 \text{ rotación completa}}{360}$$

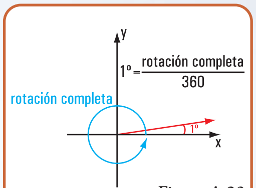


Figura A.23

Unidades menores que el grado: (submúltiplos de 1°)

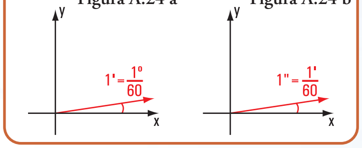
Minuto: 1'
Segundo: 1"

Se define como minuto sexagesimal (1') al valor del ángulo que se obtiene mediante las 60avas partes de un grado sexagesimal (Figura A 24 a).

$$1' = \frac{1°}{60}$$

Se define como segundo sexagesimal (1") al valor del ángulo que se obtiene mediante los 60avas partes del minuto o los 3.600avas partes del grado sexagesimal (Figura A.23 b).

$$1'' = \frac{1'}{60}$$



¿A qué se llama medida de una magnitud?

Medir significa comparar. Generalmente, se compara con la unidad de medida.

Esto significa que, por ejemplo, podamos querer determinar la medida de un ángulo, tal como lo presentamos a continuación.

El valor de uno de los ángulos de uno de los triángulos que se forman en la tranquera de un campo es $\hat{\alpha} = 45°$.
Si queremos hallar la medida de ese ángulo respecto de la unidad de medida del sistema sexagesimal, decimos que:

$$\text{Medida } \hat{\alpha} = \frac{45° \rightarrow \text{valor del ángulo}}{1° \rightarrow \text{valor de la unidad de medida}}$$

$$\text{Medida } \hat{\alpha} = 45$$

Por lo tanto, la medida es un número real, en este caso 45.

Sistema radial
Unidad de medida: 1 radián (rad)

Para definir al **radián** se considera la propiedad que establece que el valor de un arco de circunferencia es igual al valor del ángulo central que abarca el mismo arco.

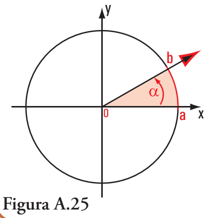


Figura A.25

Por lo tanto, hacer referencia al valor de un arco es similar a expresar el valor del ángulo central que lo subtiende (Figura A.25).

$$\textit{valor de } \hat{\alpha} = \textit{valor de } \overset{\frown}{ab}$$

Entonces realizadas estas consideraciones definimos al **radián.**

El radián (rad) es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre una circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual del radio.(Definición dada por el Sistema Internacional de Unidades – SI).
Consideramos que la siguiente definición es más clara si la expresamos del siguiente modo:

***El radián** es el valor del ángulo central de un círculo subtendido por un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio del círculo. La medida del arco de circunferencia es igual a la medida del ángulo central que abarca dicho arco.*

Sabemos que:
Longitud de una circunferencia $= 2\pi r$

Medida del arco total de la circunferencia considerando el radián como unidad de medida es:

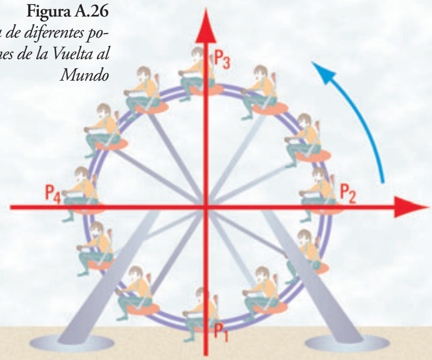
$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Observemos algunos casos:

La *vuelta al mundo* de un parque de diversiones gira aleatoriamente; unas vueltas las da en el mismo sentido de las agujas del reloj y, otras, en sentido contrario.
Referimos la rueda a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. El centro de la rueda coincide con el centro de coordenadas, el eje *x* está determinado por las posiciones $P_4 - P_2$ y el eje *y* por las posiciones $P_1 - P_3$ (Figura A.26).
Nos detenemos en el momento en que la rueda gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. La posición donde sube el pasajero está en la posición (P_1) y la silla a 70 cm del suelo.
Los ángulos los consideramos a partir de la posición (P_2).


Imagen A.4. *La vuelta al mundo en la Wasser Turm. Mannheim. República Federal de Alemania*

Figura A.26
Esquema de diferentes posiciones de la Vuelta al Mundo



¿Cuál es el valor del ángulo cuando el pasajero está en la posición más alta?

La posición más alta corresponde a un cuarto de circunferencia, o sea para esa posición:

$$\textit{valor de } \hat{\alpha} = \frac{2\pi}{4} \textit{ rad}$$

$$\textit{valor de } \hat{\alpha} = \frac{\pi}{2} \textit{ rad}$$

¿Cuál es el valor del ángulo cuando el carrito que lleva al pasajero llegue a la posición P_4 (Figura A.27 a)?

$$\textit{valor de } \hat{\beta} = \frac{2\pi}{2} \textit{ rad}$$

$$\textit{valor de } \hat{\beta} = \pi \textit{ rad}$$

¿Y cuando llega, nuevamente, a la posición inicial, o sea a P_1 (Figura A.27 b)?

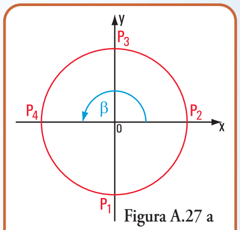


Figura A.27 a

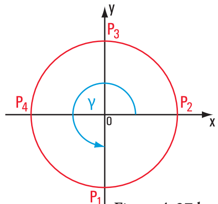


Figura A.27 b

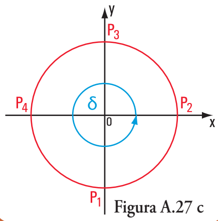


Figura A.27 c

valor de $\gamma = \frac{3}{2}\pi$ *rad*

¿Y cuando gira en forma completa (Figura a.27 c)?

valor de $\hat{\varphi} = 2\pi$ *rad*

Cuando se usa el valor de los ángulos en radianes no se coloca la unidad.

Sistema centesimal

Unidad de medida: la unidad de medida es el grado centesimal (1^G).

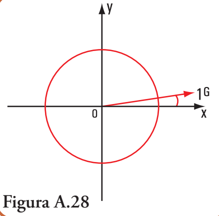


Figura A.28

Se define como grado centesimal al valor del ángulo que se obtiene como las 400avas partes del ángulo determinado por una rotación completa con signo + (figura A.28).

$$1^G = \frac{1 \text{ rotación completa}}{400}$$

Unidades menores que el grado centesimal (submúltiplos de)

Minuto centesimal: 1^M
Segundo centesimal: 1^S

Se define como minuto centesimal (1^M) al valor del ángulo que se obtiene dividiendo a 1^G en 100 partes.

Se define como segundo centesimal (1^S) al valor del ángulo que se obtiene dividiendo a 1^M en 100 partes o a 1^G en 1.000 partes.

◆**Relación entre los sistemas: conversión de un sistema a otro**

El valor de un ángulo determinado por una rotación completa en el sentido contrario a las agujas del reloj lo podemos visualizar en el siguiente cuadro:

Sistema sexagesimal	Sistema radial	Sistema centesimal
$\hat{\alpha} = 360^o$	$\hat{\alpha} = 2\pi$	$\hat{\alpha} = 400^G$

Entonces:

$$360^\circ = 2\pi \qquad 360^\circ = 400^G$$
$$180^\circ = \pi \qquad 180^\circ = 200^G$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \qquad 90^\circ = 100^G$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \qquad 1^\circ = \frac{40\cancel{0}^G}{36\cancel{0}}$$

1° ≈ 0,0174533 radianes
1 radián = (180 / π) °
1 radián ≈ 57, 29578 °

En forma gráfica lo vemos en la figura A.29.

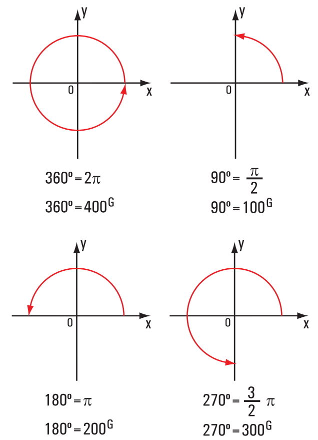


Figura A.29
Relación entre los sistemas de medición de ángulos

A4.3.- Las funciones circulares

Para definir las funciones circulares se hace necesario dar una definición previa. Definimos a la denominada *circunferencia trigonométrica* porque es en ella donde se definen las funciones circulares.

> *La **circunferencia trigonométrica** es aquella cuyo radio es la unidad de medida y el centro coincide con el origen de coordenadas. (Figura A.30)*

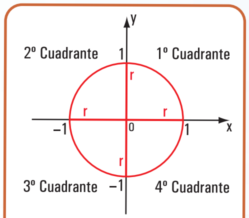


Figura A.30
Circunferencia trigonométrica

Observamos que el plano queda dividido en cuatro partes que llamamos a cada una, *cuadrante*; primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante.

Las funciones circulares son las siguientes: seno; coseno; tangente; cotangente; secante y cosecante

Una forma simple y fácil de visualizar, por ejemplo, la definición y la representación gráfica de la función seno es mediante el siguiente caso:

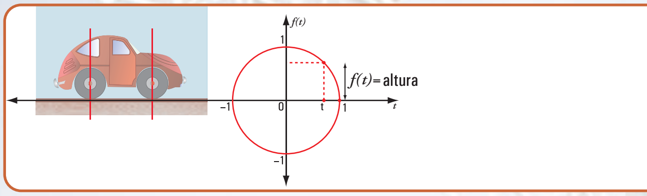


Figura A.31

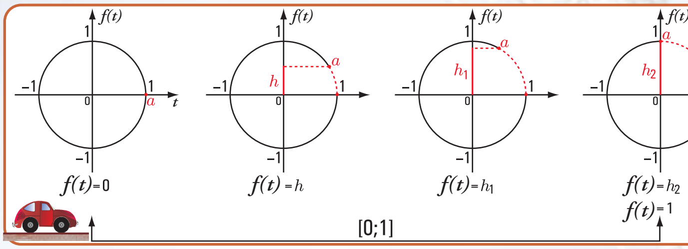


Figura A.32 a

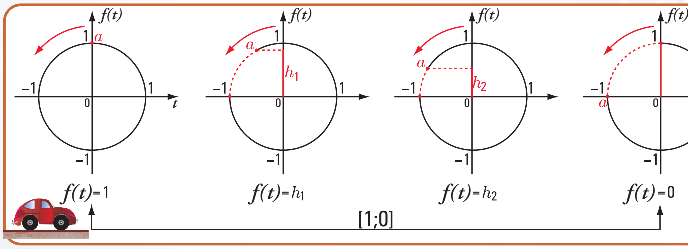


Figura A.32 b

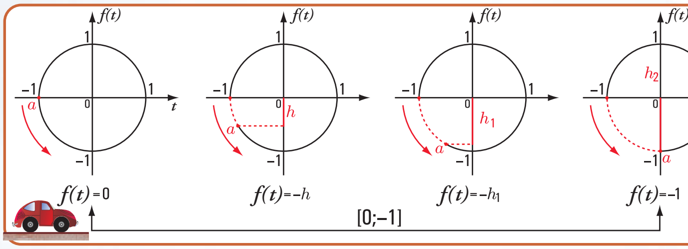


Figura A.32 c

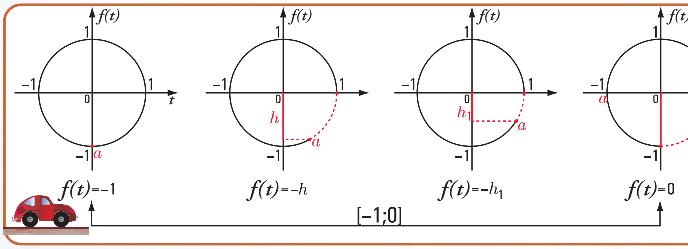


Figura A.32 d

Supongamos que marcamos un punto *a* en la rueda delantera izquierda de un automóvil.

Tomamos la altura de la marca sobre el centro de la rueda *f(t)* (Figura A.31)

Cuando la rueda recorre un cuarto de vuelta, el punto *a* describe un arco de circunferencia (0,π/2), y la altura *f(t)* el intervalo [0;1]; es decir crece de 0 a 1(Figura A.32 a).

Al continuar avanzando, la rueda realiza media vuelta completa (0,π); la altura recorre el intervalo [1;0]; o sea decrece de 1 a 0 (Figura A.32 b).

Continúa el avance de la rueda; da 3/4 de vuelta completa [0;2π/3], el valor de *f(t)* pasa de 0 a –1, o sea recorre el intervalo [0;–1] (Figura A.32 c).

La rueda avanza hasta completar una vuelta [0;2π]. La altura *f(t)* pasa de –1 a 0 (Figura A.32 d)

Si el móvil se desplaza con una velocidad de una unidad por segundo; cuando la rueda da una vuelta completa, el punto *a* recorrió 2π radio, que es la longitud de la circunferencia. Esto significa que la rueda tarda 2π segundos en recorrer una vuelta completa.
La función *f(t)* se denomina **función *seno*.** 301

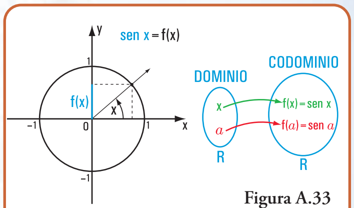


Figura A.33

Generalizando el caso anterior a otras situaciones similares, podemos dar la siguiente definición de la función seno.

Función seno.
Para todo número real x, el seno de x, es la ordenada del punto de intersección con la circunferencia trigonométrica del lado final del ángulo x expresado éste en radianes.

Para ello, primero definimos el conjunto dominio y el conjunto codominio. En el caso de la función seno el conjunto dominio o conjunto de partida es el conjunto de los números reales ℝ que corresponden a la medida de los ángulos. El conjunto codominio también es el conjunto ℝ (reales).

Representamos a la función *f(x)=sen(x)* en diagrama cartesiano ortogonal (Figura A.34).

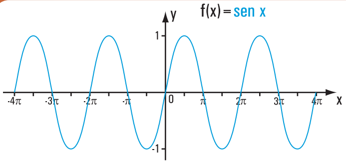


Figura A.34
La función seno en el período [– 4π; + 4π]

En el eje x representamos a los ℝ (números reales) que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje y, a los ℝ que representan a los valores de las ordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia trigonométrica con el lado final del ángulo.

◆Funciones coseno

Representamos a la función $f(x)=cos(x)$ en diagrama cartesiano ortogonal (Figura A.35)
En el eje x representamos a los ℝ que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje y, a los ℝ que representan a los valores de las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia trigonométrica con el lado final del ángulo.

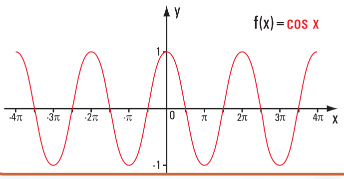


Figura A.35
La función coseno en el período [- 4π ; + 4π]

◆Dominio e imagen de las funciones seno y coseno

Si observamos las figuras anteriores (A.34 y A.35) podemos definir el conjunto dominio y el conjunto imagen de las funciones seno y coseno.

El conjunto dominio, tanto de la función seno como del coseno es el conjunto de los números reales ℝ y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales mayores o iguales que –1 y menores o iguales que +1.

Definimos por comprensión los conjuntos dominio e imagen de ambas funciones.

En símbolos

Dom.= $\{x \in \mathbb{R}\}$ conjunto dominio
Imagen = $\{y \in \mathbb{R} \ / -1 \leq y \leq +1\}$ o bien expresado como intervalo
Imagen= [–1; +1]

◆Propiedades de las funciones seno y coseno

Observamos en la gráfica de la función seno que, para los números reales: x y $x \pm 2\pi$ pertenecientes al conjunto dominio, el valor de la imagen es el mismo.

En símbolos:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2.\pi)$$

Ídem para el coseno

$$\cos x = \cos (x \pm 2\ \pi)$$

Podemos generalizar esta observación a cualquier número entero n de 2π:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2n\pi)$$
$$\cos x = \cos (x + 2n\pi)$$

Decimos, entonces que las funciones seno y coseno son **funciones periódicas.**

> ***Función periódica***
> *Una función no constante f es periódica para todo x del dominio de f, si existe un número positivo p, tal que:*
> $$f(x) = f(x+p),\ x \in Dom.f$$
> *El menor valor positivo de p es el período de la función f*

El **período** de las funciones seno y coseno es **2π**

En la circunferencia trigonométrica planteamos las siguientes situaciones:

a Consideramos dos valores del conjunto dominio: $+x$ y $-x$ (Figura A.36).
Observamos que:

$$\cos x = \cos (-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\text{sen } x = -\text{ sen } (-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Esta propiedad expresa que la función coseno es una función **par** y la función seno es **impar.**

- *Una funcion g es par, si y sólo si para todo x, perteneciente al conjunto dominio de g, se cumple que g(x) = g(–x).*
- *Una función g es impar, si y sólo si para todo x, perteneciente al conjunto dominio de g, se cumple que g(x) = –g(x)*

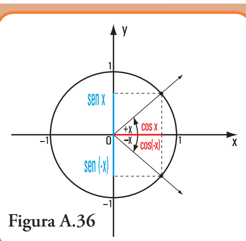


Figura A.36

b Para valores de x y de (π/2 –x), se verifica que:
sen x = cos (π/2 –x)
cos x = sen (π/2 –x)

c Para valores de x y de $(x + \pi)$, se verifica que:
$\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}\, x$

d Para valores de x y de $(\pi - x)$, se verifica que:
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$

e Para valores de x y de $(x + 2\pi)$, se verifica que:
$\text{sen}\, x = \text{sen}(x + 2\pi)$ y $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

◆Otras funciones circulares

Función tangente

Para todo número real $x \neq \pm(2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{N}_o$, la tangente de x, es la ordenada del punto de intersección del lado final del ángulo x, expresado éste en radianes, con la recta tangente a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (1;0).

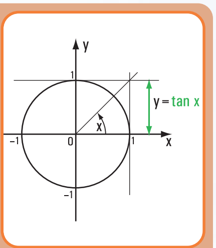


Figura A.37

Representamos a la función $f(x)=\tan(x)$ en diagrama cartesiano ortogonal (Figura A.38).

En el eje x representamos a los $\mathbb{R}$ que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje y, a los $\mathbb{R}$ que representan a los valores de las ordenadas de los puntos de intersección de del lado final del ángulo con la recta tangente a la circunferencia trigonométrica.

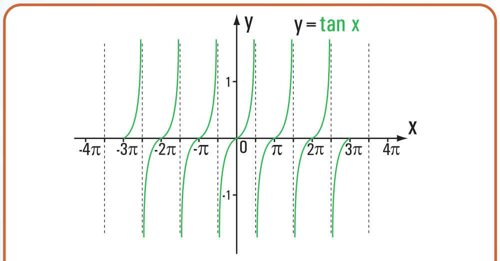


Figura A.38. *La función tangente en el período $[-3\pi; +3\pi]$*

Función cotangente

Para todo número real $x \neq \pm n\pi$ con $n \in \mathbb{N}_o$, la cotangente de x, es la abscisa del punto de intersección del lado final del ángulo x, expresado éste en radianes, con la recta tangente a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (0;1).

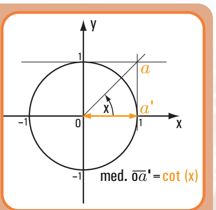


Figura A.39

Representamos a la función $f(x)= \cot(x)$ en diagrama cartesiano ortogonal (Figura A.39).

En el eje **x** representamos a los $\mathbb{R}$ que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje **y**, a los $\mathbb{R}$ que representan a los valores de las abscisas de los puntos de intersección de del lado final del ángulo con la recta tangente a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (0;1).

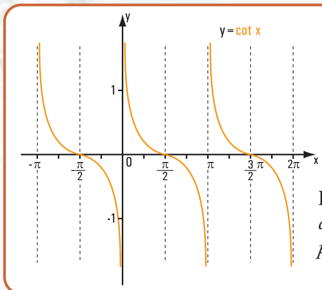


Figura A.40. *La función cotangente en el período $[-\pi; +2\pi]$*

◆Dominio e imagen de las funciones tangentes y cotangentes

El conjunto dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tal que, $x \neq \pm(2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{N}_o$ y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales.

Definimos por comprensión a los conjuntos dominio e imagen de la función tangente.
Dom.= $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm(2n+1)\pi/2 \text{ con } n \in \mathbb{N}_o\}$ conjunto dominio
Imagen = $\{y \in \mathbb{R}\}$

El conjunto dominio de la función cotangente es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tal que, $x \neq n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales.

Definimos por comprensión los conjuntos dominio e imagen de la función cotangente.
Dom.= $\{x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi \text{ con } n \in \mathbb{N}_o\}$ conjunto dominio
Imagen = $\{y \in \mathbb{R}\}$

El **período** de las funciones tangente y cotangente es π

Función secante

Para todo número real $x \neq \pm(2n+1)\pi/2$ con $n \in N_o$, la secante de x, es la medida del segmento que tiene por extremos al centro de coordenadas y al punto de intersección del lado final con la tangente geométrica a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (0;1).

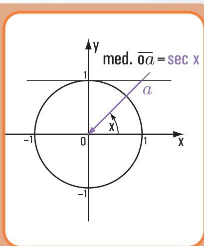


Figura A.41

En el eje *x* representamos a los que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje y, a los $\mathbb{R}$ que representan a los valores de los segmentos que tienen por extremos al centro de coordenadas y a los puntos de intersección de cada lado final de los ángulos con la recta tangente a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (0;1).

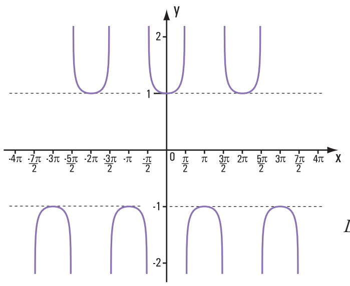


Figura A.42
La función secante en el período $[(-7/2)\pi; (+7/2)\pi]$

Función cosecante

Para todo número real $x \neq n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, la cosecante de x, es la medida del segmento que tiene por extremos al centro de coordenadas y al punto de intersección del lado final con la tangente geométrica a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (1;0)

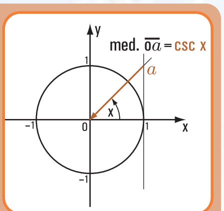


Figura A.43

Representamos a la función *f(x)* = csc *(x)* en diagrama cartesiano ortogonal (figura A.44).

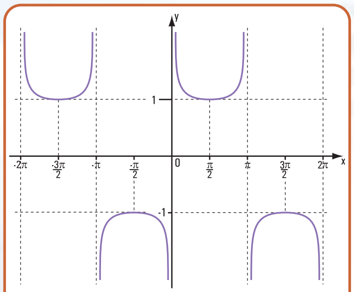


Figura A.44. *La función cosecante en el período* $[-2\pi; +2\pi]$

En el eje **x** representamos a los $\mathbb{R}$ que se corresponden con las medidas de los ángulos en radianes; en el eje *y*, a los $\mathbb{R}$ que representan a los valores de los segmentos que tienen por extremos al centro de coordenadas y a los puntos de intersección de cada lado final de los ángulos con la recta tan- gente a la circunferencia trigonométrica en el punto de coordenadas (1;0).

◆Dominio e imagen de las funciones secantes y cosecantes

El conjunto dominio de la función secante es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tal que, $x \neq (2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales, tal que $|y| \geq 1$

Definimos por comprensión a los conjuntos dominio e imagen de la función secante.
Dom. $= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \pm (2n+1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{N}_0\}$ conjunto dominio
Imagen $= \{y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$

El conjunto dominio de la función cosecante es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tal que, $x \neq n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales, tal que $|y| \geq 1$

Definimos por comprensión a los conjuntos dominio e imagen de la función cosecante.
Dom. $= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}\}$ conjunto dominio
Imagen $= \{y \in / \ \mathbb{R}; |y| \geq 1\}$

◆Relación entre los valores de sen *x*; cos *x* ; tan *x* y cot *x*

1.- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\forall \cos x \neq 0$

2.- $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$ $\forall \cot x \neq 0$

3.- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ $\forall \tan x \neq 0$

4.- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$

◆Relación entre los valores de sen *x*; cos *x* ; sec *x* y csc *x*

1.- sec x = 1 / cos x, $\forall \cos x \neq 0$
2.- csc x = 1/ sen x, $\forall \operatorname{sen} x \neq 0$

◆Otras propiedades importantes de las funciones circulares

1 Expresiones matemáticas de la suma y diferencia para las funciones seno y coseno

sen (u + v) = sen u . cos v + cos u . sen v
sen (u − v) = sen u . cos v − cos u . sen v

cos (u + v) = cos u . cos v − sen u . sen v
cos (u − v) = cos u . cos v + sen u . sen v

2 Expresiones matemáticas de la suma y diferencia para la tangente

tan (u + v) = (tan u + tan v) / (1 − tan u . tan v)

tan (u − v) = (tan u − tan v) / (1 + tan u . tan v)

Las fórmulas de las sumas y diferencias podemos usarlas para encontrar los valores exactos de las funciones seno, coseno y tangente de los ángulos o números que puedan ser reemplazados por sumas o diferencias de valores tales como: π/6; π/4;π/3; 2/3 π;... cuyos valores se dan en la tabla:

Tabla A.7

φ grados sexagesimales	φ radiantes	sen φ	cos φ	tan φ	ctan φ	sec φ	csc φ
0	0	0	1	0	no existe	1	no existe
30	π/6	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
45	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	π/2	1	0	no existe	0	no existe	1

3.- Expresiones matemáticas del ángulo doble y del ángulo medio

$$\cos 2v = \cos^2 v - \text{sen}^2 v$$

$$\text{sen } 2v = 2 \text{ sen } v \cdot \cos v$$

$$\text{sen}^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos v) \Rightarrow \text{sen}\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos v)}$$

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos v) \Rightarrow \cos\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1 + \cos v)}{2}}$$

$$\tan 2v = 2 \tan v/(1 - \tan^2 v)$$

$$\tan^2\frac{v}{2} = (1 - \cos v) \,/\, (1 + \cos v)$$

4.- Expresiones matemáticas del producto y suma

Las siguientes expresiones permiten escribir la suma de senos y cosenos en productos

sen u + sen v = 2 sen ((u + v)/2)) cos ((u − v)/2))
sen u − sen v = 2 cos ((u + v)/2)) sen ((u − v)/2))

cos u + cos v = 2 cos ((u + v)/2)) cos ((u − v)/2))
cos u − cos v = −2 sen ((u + v)/2)) sen ((u − v)/2))

Mediante las siguientes fórmulas podemos transformar productos de senos y cosenos en sumas

sen u . sen v = 1/2 [cos (u − v) − cos (u + v)]
cos u . cos v = 1/2 [cos (u − v) + cos (u + v)]
sen u . cos v = 1/2 [sen (u + v) + sen (u − v)]
cos u . sen v = 1/2 [sen (u + v) − sen (u − v)]

◆Funciones circulares inversas

En un apartado anterior definimos a las funciones inversas y expresamos la condición necesaria para que exista una función inversa de otra dada.
Observando las gráficas de las funciones circulares en todo su dominio podemos expresar que las mismas no cumplen la condición de ser biyectivas; condición para que existan funciones inversas.
No obstante, restringiendo, adecuadamente, los dominios podemos asegurar que las funciones circulares tienen inversas.
Las funciones inversas de las funciones circulares se definen como: arco seno, arco coseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante y arco cosecante.
Veamos la restricción que debemos hacer a cada uno de los dominios de las funciones circulares.

Función inversa del sen x

La función arco seno se define como:
y= arcsen x ⇔ x= sen y
en el intervalo
−π/2 ≤ y ≤ +π /2 y −1 ≤ x ≤ + 1

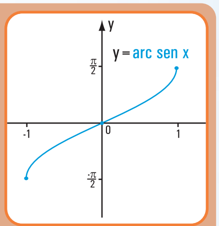


Figura A.45

Función inversa del cos x

La función arco cos se define como:
y= arccos x ⇔ x= cos y
en el intervalo
0 ≤ y ≤ +π y −1 ≤ x ≤ + 1

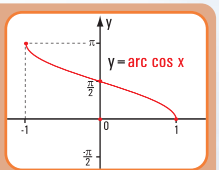


Figura A.46

Función inversa del tan x

La función arco tangente se define como:
y= arctan x ⇔ x= tan y en el intervalo
−π/2 ≤ y ≤ +π/2 y −∞ < x < +∞

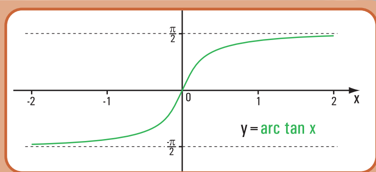


Figura A.47

A5.- La trigonometría del triángulo

Cuando el conjunto dominio de las funciones es el conjunto de los valores de los ángulos de un triángulo, entonces las funciones reciben el nombre de funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo se definen del siguiente modo:

sen φ = cateto opuesto / hipotenusa
cos φ = cateto adyacente / hipotenusa
tan φ = cateto opuesto/ cateto adyacente
csc φ = hipotenusa / cateto opuesto
sec φ = hipotenusa / cateto adyacente
cot φ = cateto adyacente / cateto opuesto

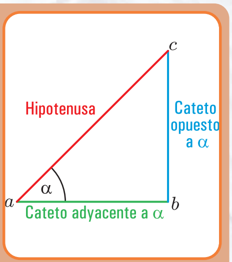


Figura A.48

En el caso de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, las seis funciones trigonométricas se definen como las razones de las longitudes de los lados del triángulo.

Nota. Las propiedades que hemos definido para las funciones circulares las hacemos extensivas a las funciones trigonométricas.

◆Utilización de la calculadora para el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas, circulares y sus inversas

Las calculadoras denominadas científicas permiten calcular, con aproximaciones, los valores de las funciones trigonométricas, de las funciones circulares y de sus inversas.

Para determinar las funciones circulares se procede de la siguiente manera:

1 adaptamos la calculadora en el modo que deseamos: Deg (grados sexagesimales); Rad (radianes); Gra (grados centesimales);
2 existen teclas con los nombres: **sin, cos y tan**, que nos permiten calcular las funciones trigonométricas para lo cual colocamos el modo **Deg o Rad o Gra**. Con las mismas teclas calculamos las funciones circulares, pero colocando sólo en modo **Rad;**
3 los valores de las funciones secante, cosecante y cotangente los podemos obtener haciendo:
sec φ = 1/ coseno φ; csc φ=1/ seno φ y ctg φ =1/ tangente φ;
4 en algunas calculadoras los valores de las funciones inversas se calculan del siguiente modo:

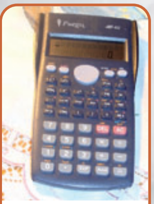


Imagen A.5. *Calculadora científica*

lo explicamos a través del siguiente ejemplo: si sabemos que sen φ = 0,5 y queremos calcular el valor de φ, entonces escribimos 0,5, oprimimos la tecla **INV** y luego **sin**. Obtenemos el valor de φ en el modo en que esté colocada la calculadora. Si está colocada en **Deg**, el valor de φ = 30°; si está en **Rad**, el valor de φ = 0,5236.

En otras calculadoras que tienen las teclas $\mathbf{sin^{-1}}$; $\mathbf{cos^{-1}}$; $\mathbf{tan^{-1}}$ debemos usar el modo **Rad.**
Para ello, en nuestro caso, se oprime primero la tecla $\mathbf{sin^{-1}}$ y luego se escribe el valor 0,5, obtenemos entonces el valor 0,5236.

◆Casos de resolución de triángulos rectángulos

De acuerdo con los datos se presentan los siguientes casos 1, 2, 3 y 4.
Se conocen:

1.-hipotenusa y un ángulo,
2.-un ángulo y el lado opuesto,
3.-dos lados,
4.-un ángulo y el lado adyacente.

A6.- Resolvemos los siguientes problemas de aplicación

Problema 1.1
En una escuela proyectamos la construcción de una rampa

Enunciado
Se proyecta remodelar el edificio de una escuela de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Entre las decisiones que se toman se destaca la construcción de elementos de acceso para personas con dificultades motrices. Por eso se proyecta colocar un ascensor y una rampa en un sector donde existe un desnivel de 1,50 m.

Se analizan las diferentes posibilidades según el valor del ángulo de inclinación.
¿Con cuál de los ángulos posibles, el recorrido es menor? ¿Cuál es la longitud del recorrido menor? y, ¿cuál es la longitud de su proyección horizontal en cada caso?
El ángulo de inclinación de las rampas para peatones oscila entre 6° y 24°. De acuerdo al valor del ángulo las rampas se clasifican en[2]:

1 rampas llanas: $\hat{\alpha} \leq 6^{\circ}$

2 rampas lisas: $6^{\circ} \leq \hat{\alpha} \leq 10^{\circ}$

3 rampas inclinadas: $10^{\circ} < \hat{\alpha} \leq 24^{\circ}$

[2] Neufert. *Arte de Proyectar en Arquitectura*-Pág. 125.

Primer caso: rampa llana
(Figura A.49 a)
Determinación del recorrido

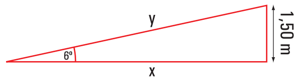


Figura A.49 a

$\hat{\alpha} \leq 6^\circ$

$$\text{sen } 6^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{y} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{sen } 6^\circ} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}104} \Rightarrow y = 14{,}42\text{m}$$

Determinación de su proyección horizontal

$$\text{tg } 6^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{tg } 6^\circ} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}105} \Rightarrow x = 14{,}28\text{ m}$$

Segundo caso: rampa lisa
(Figura A.49 b)
Determinación del recorrido

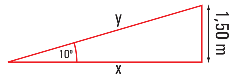


Figura A.49 b

$\hat{\alpha} = 10^\circ$

$$\text{sen } 10^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{y} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{sen } 10^\circ} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}17} \Rightarrow y = 8{,}82 \text{ m}$$

Determinación de su proyección horizontal

$$\text{tg } 10^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{tg } 10^\circ} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}18} \Rightarrow x = 8{,}33 \text{ m}$$

Tercer caso: rampa inclinada
(Figura A.49 c)
Determinación del recorrido

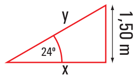


Figura A.49 c

$\hat{\alpha} = 24^\circ$

$$\text{sen } 24^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{y} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{sen } 24^\circ} \Rightarrow y = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}41} \Rightarrow y = 3{,}66 \text{ m}$$

Determinación de su proyección horizontal

$$\text{tg } 24^\circ = \frac{1{,}50 \text{ m}}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{\text{tg } 24^\circ} \Rightarrow x = \frac{1{,}50 \text{ m}}{0{,}45} \Rightarrow x = 3{,}33 \text{ m}$$

Resultado
La rampa que permite un desarrollo en horizontal y con menor recorrido es la rampa inclinada.
No obstante, se debe considerar que resulta conveniente para subir una silla de ruedas, la de menor ángulo de inclinación.
Debemos buscar un equilibrio entre las posibilidades que nos dan el espacio físico y la comodidad del transeúnte.

Problema 1.2
Proyectamos la construcción de rampas en un edificio de vivienda multifamiliar

Enunciado
En un edificio de catorce plantas se proyecta destinar las dos primeras plantas para cocheras con una única entrada de subida y bajada en el sector derecho de la fachada de frente. En el sector izquierdo se diseña un entrepiso y en el subsuelo también, para cocheras.
Las cocheras ubicadas entre el primer y segundo piso se construyen en cuatro niveles; mientras que, en el subsuelo, se destina sólo un entrepiso.
Cada una de las rampas con entrada en el sector derecho del edificio debe salvar una altura de 1,50 m. Por otra parte, por razones de espacio, se requiere que el desarrollo de dichas rampas, en la proyección horizontal oscile entre 8 m y 12 m y que cada una tenga la menor pendiente posible. En cuanto a la rampa del sector izquierdo, la misma debe tener una altura de 1,20 m y el recorrido debe ser de 10 m.

1) ¿Cuál es el ángulo de inclinación y la longitud del recorrido de cada una de las rampas del sector derecho?
2) ¿Cuáles son los ángulos de inclinación con la horizontal y con la vertical y, cuál es la longitud de la proyección horizontal de la rampa que va al subsuelo?

Desarrollo
1.- Rampas de subida y bajada en el sector derecho

Imagen A.6 a. *Edificio multifamiliar con dos entradas a cocheras*

a) Cálculo del ángulo de inclinación

Caso 1 (Figura 1.46 a)

$x = 8\ m$

$$tg\ \alpha = \frac{1{,}50\ m}{8\ m} \Rightarrow tg\ \alpha = 0{,}19 \Rightarrow \hat{\alpha} = 10{,}75^\circ$$

Caso 2

$x = 12\ m$

$$tg\ \alpha = \frac{1{,}50\ m}{12\ m} \Rightarrow tg\ \alpha = 0{,}125 \Rightarrow \hat{\alpha} = 7{,}12^\circ$$

Como existe una limitación que indica la menor pendiente posible, entonces consideramos la rampa de 12 m de longitud en su proyección horizontal.

b) Cálculo de la longitud del recorrido


Imagen A.6 b
Rampa de subida para automóviles


Imagen A.6 c
Rampa de bajada para automóviles

Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$y^2 = (1{,}50\ m)^2 + (12\ m)^2 \Rightarrow y^2 = 2{,}25\ m^2 + 144\ m^2$$

$$y^2 = 146{,}25\ m^2 \Rightarrow y = 12{,}09\ m$$

2) Rampa que va al subsuelo (Figura A.50)
a) Cálculo de la longitud de la proyección horizontal. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = y^2 - h^2 \Rightarrow x^2 = (10\ m)^2 - (1{,}20\ m)^2$$

$$x^2 = 100\ m^2 - 1{,}44\ m^2 \Rightarrow x^2 = 98{,}56\ m^2$$

$$x = 9{,}93\ m$$

b) Cálculo del ángulo de inclinación

$$sen\ \alpha = \frac{h}{y} \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{1{,}20\ m}{10\ m} \Rightarrow sen\ \alpha = 0{,}12$$

$$\hat{\alpha} = arc\ sen\ 0{,}12 \Rightarrow \hat{\alpha} = 6{,}89^{o}$$

c) Cálculo del ángulo de inclinación vertical

$$cos\ \beta = \frac{h}{y} \Rightarrow cos\ \beta = \frac{1{,}20\ m}{10\ m} \Rightarrow cos\ \beta = 0{,}12$$

$$\hat{\beta} = arc\ cos\ 0{,}12 \Rightarrow \hat{\beta} = 83{,}10^{o}$$

Respuesta

a) El ángulo de inclinación de cada una de las rampas del sector derecho es de 7,12°. La longitud del recorrido es de 12,09 *m*.
b) La longitud de la proyección horizontal *x* de la rampa que va al subsuelo es de 9,93 *m*. El ángulo de inclinación $\hat{\alpha}$ con la horizontal es de 6,89° y el de inclinación con la vertical $\hat{\beta}$ = 83,10°.

Es común intentar realizar el cálculo del valor del ángulo aplicando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo:

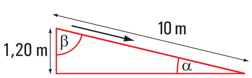


Figura A.50. *Esquema de la rampa que va al subsuelo*

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^{o} \Rightarrow \hat{\beta} = 90^{o} - \alpha$$

$$\hat{\beta} = 90^{o} - 6{,}89^{o} \Rightarrow \hat{\beta} = 83{,}11^{o}$$

Esta forma de cálculo, no es conveniente. ¿Por qué?

En este caso se ha utilizado en el cálculo del valor de $\hat{\beta}$, el valor de $\hat{\alpha}$, también hallado por cálculo, Es evidente que si este valor está mal calculado el error se traslada al valor de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.
Siempre, de ser posible se deben usar, en un cálculo, sólo los datos.

A5.2.- Resolución de triángulos oblicuángulos

El siguiente cuadro muestra los posibles casos que se nos pueden presentar en la resolución de triángulos oblicuángulos y las expresiones matemáticas que usamos en su resolución.

Datos	Incógnitas	Expresiones matemáticas		Cantidad de soluciones
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, A$	$C, B, \hat{\gamma}$	$\frac{A}{sen\ \alpha} = \frac{B}{sen\ \beta} = \frac{C}{sen\ \gamma}$ $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^{o}$	Teorema del seno	1
$A, B, \hat{\alpha}$	$C, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$	$\frac{A}{sen\ \alpha} = \frac{B}{sen\ \beta} = \frac{C}{sen\ \gamma}$ Caso ambiguo	Teorema del seno	1 2
A, B, C	$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$	$A^2 = B^2 + C^2 - 2B\,C\ cos\ \alpha$ $B^2 = A^2 + C^2 - 2A\,C\ cos\ \beta$ $C^2 = A^2 + B^2 - 2A\,B\ cos\ \gamma$	Teorema del coseno	1
A, B, γ	$C, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$	$A^2 = B^2 + C^2 - 2B\,C\ cos\ \alpha$ $B^2 = A^2 + C^2 - 2A\,C\ cos\ \beta$ $C^2 = A^2 + B^2 - 2A\,B\ cos\ \gamma$	Teorema del coseno	1

Sobre la base de lo indicado en el cuadro anterior resolvemos los siguientes problemas.

Problema 1.3
Reforma del techo a dos aguas de una vivienda unifamiliar

Enunciado
Una vivienda unifamiliar ubicada en la Villa Catedral (Bariloche - Argentina) está construida con madera y ladrillo. Tiene un techo a dos aguas con una estructura de madera y una cubierta de tejas españolas. Dado que algunos de los elementos estructurales del techo deben ser cambiados, los propietarios, la familia Rappes, deciden modificar totalmente el sistema de cubierta. Para ello, deben conocer algunas dimensiones. Les resulta fácil tomar longitudes, pero tienen dificultades para medir los ángulos de inclinación. Los datos que encuentran son los indicados en la figura A.51.

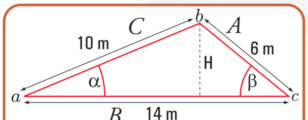


Figura A.51

Para la construcción del techo necesitan conocer los ángulos de inclinación y la altura donde colocar la cumbrera.

Desarrollo

1.- Cálculo de los ángulos de elevación $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Como conocemos tres lados del triángulo, utilizamos el teorema del coseno (Figura A.51).

a) Cálculo del ángulo α.

$A^2 = B^2 + C^2 - 2B\,C \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{-2B\,C}$$

$$\cos \alpha = \frac{(6\,m)^2 - (14\,m)^2 - (10\,m)^2}{-2 \times 14\,m \times 10\,m}$$

$$\cos \alpha = \frac{36\,m^2 - 196\,m^2 - 100\,m^2}{-280\,m^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{-260\,m^2}{-280\,m^2} \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}93$$

$$\hat{\alpha} = arc \cos 0{,}93 \Rightarrow \hat{\alpha} = 21{,}57^o$$

b) Cálculo del ángulo β.

$C^2 = B^2 + A^2 - 2B\,A \cos \beta$

$$\cos \beta = \frac{C^2 - B^2 - A^2}{-2B\,A}$$

$$\cos \beta = \frac{(10\,m)^2 - (14\,m)^2 - (6\,m)^2}{-2 \times 14\,m \times 6\,m}$$

$$\cos \beta = \frac{100\,m^2 - 196\,m^2 - 36\,m^2}{-168\,m^2}$$

$$\cos \beta = \frac{-132\,m^2}{-168\,m^2} \Rightarrow \cos \beta = 0{,}79$$

$$\beta = arc \cos 0{,}79 \Rightarrow \hat{\beta} = 37{,}8^o$$

c) Cálculo de H [3]

Aplicamos el teorema del seno.

$$sen\,\alpha = \frac{H}{C} \Rightarrow H = C \times sen\,\alpha$$

$$H = 10\,m \times sen\ 21{,}57^o$$

$$H = 10\,m \times 0{,}37 \Rightarrow H = 3{,}7\,m$$

Respuestas

El ángulo de inclinación $\alpha = 21{,}57^{\circ}$


Imagen A.7. *En la villa del Cerro Catedral*

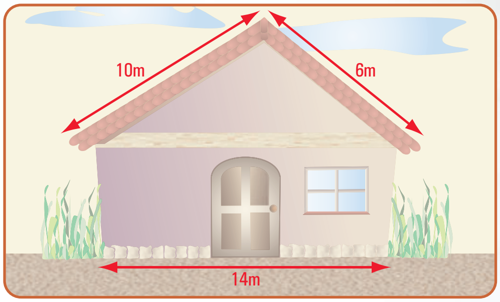


Figura A.52. *Esquema en 2D de la fachada de la vivienda*

El ángulo de inclinación $\beta = 37{,}8^{\circ}$

La altura es de $3{,}7\,m$.

Cuando el techista que realizará el trabajo observa estos resultados decide, en común acuerdo con la familia Rappes, modificar los ángulos de inclinación.

Consideran que el triángulo que se forme debe ser isósceles, no equilátero y los ángulos de elevación oscilen entre los 20° y 30°. Entonces nuevamente deben buscar algunas dimensiones.

En este caso, necesitan conocer, de las dos posibilidades (ángulos de 20° y/o 30°), las dimensiones de los lados A y C, y tomar de cada uno la dimensión menor.

Desarrollo

Primer caso (Figura A.53)

Cálculo de las longitudes de A y C.

Aplicamos el teorema del seno.

$$\frac{A}{sen\ 30^o} = \frac{B}{sen\ 120^o} \Rightarrow A = \frac{B \times sen\ 30^o}{sen\ 120^o}$$

$$A = \frac{14\,m \times 0{,}5}{0{,}87}$$

$$A = 8{,}05\,m$$

$$A = C \Rightarrow C = 8{,}05\,m$$

Segundo caso (Figura A.54)

$$-\frac{A}{sen\ 20^o} = \frac{B}{sen\ 140^o} \Rightarrow A = \frac{B \times sen\ 20^o}{sen\ 140^o}$$

$$A = \frac{14\,m \times 0{,}34}{0{,}64}$$

$$A = 7{,}44\,m$$

[3] En este caso, dado que los datos no son suficientes para calcular el valor de H, entonces se usa un valor previamente calculado, es decir una incógnita.

Figura A.53

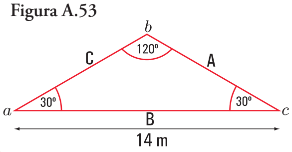
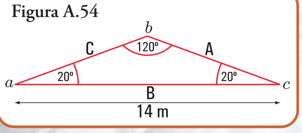


Figura A.54



Respuesta
El techista toma la decisión de considerar la menor pendiente. Las dimensiones son:

A= 7,44 m
C= 7,44 m

A6.-Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas o variables

◆Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas o variables

En la resolución de problemas de la Estática se nos presenta, en algunos casos, la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones, específicamente, sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
Existen diversos métodos que nos posibilitan la resolución de dichos sistemas. Ellos son: sustitución, igualación, sumas y restas o de eliminación y determinantes.
La resolución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (x,y) implica encontrar el par ordenado (a,b) que satisface a cada ecuación cuando se sustituyen a ***x*** y ***a*** y por ***a*** y ***b***, respectivamente.
Geométricamente, significa encontrar las coordenadas de los puntos de intersección entre las rectas que representan las respectivas ecuaciones.
Por ejemplo, un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es el siguiente:

$$\begin{cases} 3.x + 4 = 2.y \\ 5.x + 0{,}5 = -\,y \end{cases}$$

De los métodos enunciados, nosotros sólo desarrollamos el denominado método de determinantes, porque consideramos que es el más apropiado para la resolución de los problemas de la Estática.

◆ Método de determinantes

Este método, para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, se basa en la aplicación de los determinantes.
Para definir qué es un determinante, debemos conocer el concepto de matriz.

Una matriz es un arreglo rectangular o cuadro de números

En símbolos

$$x = \begin{vmatrix} x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\text{-----}x_{1n} \\ x_{m1}\ x_{m2}\ x_{m3}\text{-----}x_{mn} \end{vmatrix} \rightarrow \text{filas}$$

$\downarrow$ columna

Una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, se denomina *matriz cuadrada*. Si la matriz tiene dos filas y dos columnas es de segundo orden. Para cada matriz cuadrada podemos asociar un número, al que llamamos *determinante*.

◆Determinante de una matriz de segundo orden

Dada la matriz cuadrada de segundo orden

$$|x| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

el determinante de la matriz *X* es:

$$|x| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

$$|x| = x_{11} . x_{22} - x_{12} . x_{21}$$

Ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$ es una matriz cuadrada de segundo orden

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$ determinante de A

$$|A| = 3 . 6 - 4 . 5$$

$$|A| = -2$$

El valor del determinante de la matriz A es - 2

El determinante de una matriz A es un número que se obtiene como la resta de los productos de los elementos que se encuentran en la misma diagonal.

◆Cálculo de las soluciones de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = d \end{cases}$$

Las soluciones se obtienen así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ d & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}} \Rightarrow x = \frac{cn - bd}{an - bm} \Leftrightarrow an - bm \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}} \Rightarrow y = \frac{ad - cm}{an - bm} \Leftrightarrow an - bm \neq 0$$

Epílogo

A través del desarrollo de distintas temáticas, en cinco capítulos y un apéndice, hemos concluido este libro que titulamos: "LA ESTÁTICA EN LA VIDA COTIDIANA".

Diferentes fueron nuestros propósitos, pero el principal fue el de favorecer en los estudiantes el logro de la capacidad para discutir, analizar y aplicar los principios de la ***estática*** *en situaciones problemáticas, problemas y ejercicios que se presentan en la vida, desde una mirada con rigurosidad científica, pero a través de una forma amigable, de modo que el lector pueda meterse en el libro como si fuera él uno de sus protagonistas.*

En el prefacio del capítulo 1 (uno) hemos dejado una pregunta que, suponíamos todo lector se haría al empezar la lectura del mismo: ¿Qué es la estática? No la respondimos en ninguno de los capítulos restantes, por cuanto entendimos que podría el lector encontrar la respuesta después de haberse imbuido de todas las temáticas que se desarrollan a lo largo de los capítulos 1 (uno) a 5 (cinco).

Y, ya ha llegado el momento de compartir juntos la respuesta a dicha pregunta.

La estática es la parte de la física que se encarga de estudiar las condiciones que rigen el equilibrio de los cuerpos sólidos. Se parte del supuesto que los cuerpos son indeformables y rígidos, aunque en la naturaleza esta situación no se da, ya que todos los cuerpos se deforman por acción de las fuerzas que actúan sobre los mismos. Pero en el caso de las estructuras construidas por el hombre, si están correctamente diseñadas y dimensionadas, las deformaciones son pequeñas y pueden no afectar a las mismas.

Considerar que, un cuerpo no se deforma implica aceptar la hipótesis que establece la invariancia de las distancias entre dos puntos de un cuerpo, cuando éste se encuentra sometido a la acción de fuerzas.

Las fuerzas constituyen el corazón de la estática, por ello desde el capítulo 1 (uno) al 5 (cinco), siempre hemos trabajado con ellas. Y, si bien en el capítulo 3 (tres), al tratar el tema de la geometría de las superficies (secciones de los cuerpos), pareciera que salimos de la secuencia lógica que comenzamos en el capítulo 1 (uno), no es así.

Una de las categorías de fuerzas que aparece intrínsecamente en todos los cuerpos y, que en muchos casos nosotros, los seres humanos la padecemos, es la ***fuerza de gravedad****, la denominada fuerza* ***peso.*** *Y, la* ***fuerza peso*** *tiene su punto de aplicación en el denominado* ***centro de gravedad y/o baricentro****. La determinación de dicho punto correspondiente a secciones usuales en las estructuras de los cuerpos constituye un apartado del capítulo 3 (tres).*

Asimismo, otros conceptos acompañan al centro de gravedad, se trata ***del momento estático; del momento de inercia respecto de un eje, del radio de giro y del momento resistente****, propiedades éstas de las secciones y, que resultan imprescindibles al momento de tener que dimensionar un elemento estructural.*

En los capítulos 4 (cuatro) y 5 (cinco) hemos analizado los principios de la estática aplicados en la naturaleza, específicamente en los árboles y, en el mundo artificial creado por el hombre y, de él en el hábitat, tan importante para nuestra vida cotidiana.

Dado que, todos los capítulos están atravesados por conceptos y operaciones matemáticas, hemos destinado el apéndice para presentar aquellos conocimientos matemáticos que se aplican en la resolución de problemas y ejercicios específicos de la estática.

Durante el desarrollo de la totalidad de los capítulos incorporamos una gran cantidad de problemas y ejercicios con las soluciones desarrolladas, dado que consideramos una excelente forma de aprendizaje, y como una forma de discutir, analizar y aplicar determinados conocimientos.

De la mano de ***Coni*** *y de su amigo* ***Gastón,*** *fuimos de lo más simple a lo más complejo, ampliando y profundizando, en una secuencia lógica, los diferentes saberes inherentes a esta parte de la física:* ***la estática****.*

Para finalizar dejamos una serie de problemas y ejercicios para pensar y resolver que, si bien el lector encontró su resolución al final del libro, creemos que es una buena oportunidad para medir cuánto se ha aprendido. Por ello, siempre recomendamos la resolución individual por parte de cada lector, antes de consultar la resolución dada por nosotros.

Asimismo, al comienzo del capítulo 1 (uno) presentamos una situación problemática que interrelaciona los conceptos vertidos en todos los capítulos y, que por ser situación problemática, no existe una solución dada por nosotros. Pero que ustedes pueden compartir con sus compañeros y colegas.

Hemos recorrido juntos cinco capítulos y un apéndice. Este recorrido lo hicimos, mostrando cómo en nuestra vida diaria todos los conceptos, propiedades y principios de la estática están presentes en forma permanente.

En lo más cercano a nosotros; en nuestro cuerpo, no sólo nos acompañan, sino que los sentimos y, en muchos casos fuertemente.

¿Qué nos pasa cuando adelgazamos, o cuando engordamos? Cambia nuestro peso, y con él nuestro centro de gravedad, nuestra forma de caminar, nuestra postura,...nuestro equilibrio.

El equilibrio, en el mundo en el cual vivimos, constituye una condición fundamental para los objetos naturales y para los artificiales creados por el hombre. Y, cuando hablamos de equilibrio nos estamos refiriendo al equilibrio de todas las fuerzas que sobre ellos actúan, ***razón de ser de la estática.***

Esta es la *ESTÁTICA,* ***presente en nuestra vida.***

Bibliografía

1.- Arte/Rama. *Enciclopedia de las artes de todos los pueblos en todos los tiempos* (1969). Editorial Codex. S.A. España.

2.- Benazzi, A. (2004). *Planeamiento Paisajista y Medio Ambiente.* Tomo II. Serie Didáctica. Editores. La Plata

3.- Beer Ferdinand; E.Rusell Johnston, Jr. (2000). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática.* Mc. Graw Hill. Madrid (España).

4.- Courant Robbins (1967). *¿Qué es la Matemática?* Editorial Aguilar. Madrid. España.

5- Cozzo, D. (1979). *Árboles forestales, maderas y silvicultura de la Argentina.* Enciclopedia Argentina de Agricultura y Jardinería. Segunda edición. Tomo II. Fascículo 16-1. Editorial Acmé. Buenos Aires.

6.- Desideri Paolo; Nervi Pier Luigi Jr.; Positano Giuseppe (1981). Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona (España).

7.- De Saja José Antonio; Rodríguez María Luz (2005). *Materiales. Estructura, propiedades y aplicaciones.* Editorial Thomson. México.

8.- Diccionario ilustrado de las Ciencias y la Tecnología (2008). Editorial Océano. Barcelona (España).

9.- *El Acero en la Construcción.* Manual para el proyecto, cálculo y ejecución de Construcciones en Acero (1971). Editorial Reverté, S.A. España.

10.-Fliess Enrique (1970). *Estabilidad.* Primer curso. Editorial Kapelusz.Buenos Aires. Argentina.

11.-Folla, C.; Carponi, M. S.; Brizuela, A. y Laurencena, M.I. (2001). *Efecto Moderador del arbolado en el ecosistema urbano de la ciudad de Paraná*. Entre Ríos. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de Entre Ríos.

12.-Glusberg Jorge (1997). Antonio Berni. Museo Ncional de Bellas Artes. Buenos Aires (Argentina).

13.-Hecht Eugene (1999). *Física 1. Álgebra y trigonometría.* Editorial Thomson. México.

14.-Hewitt Paul G. (2009). *Fundamentos de Física conceptual*. Editorial Pearson Addison Wesley. México

15.-Izurieta, G.; Crespo, J.; Barroso, A.; Bustamante, E. y Esteban, J.L. (2002). *El arbolado en el medio ambiente*. Publicaciones Técnicas. Agencia Córdoba Ambiente. Córdoba.

16.-*La era de los impresionistas*. Colección Globos. Renoir (1841-1919). Globus Comunicación, S.A. Madrid (España).

17.-Lell, J. (2006). *Arbolado Urbano. Implantación y cuidados de árboles para veredas.* Orientación Gráfica Editora SRL. Buenos Aires

18.-Mc. Cormac Jack C. (2004). *Diseño de estructuras de acero*. Editorial Alfaomega. México.

19.-Noceti Haydeé; Montoto Raúl (2006). *Construcciones en hormigón armado: tecnología, diseño estructural y dimensionamiento*. Instituto Nacional de Educación Tecnológica - PNUD.

20.-Noceti Haydeé (2006). *Construcción de Edificios. Cómo enseñarla a través de la resolución de problemas*. Instituto Nacional de Educación Tecnológica - PNUD.

21.-Norberg-Schulz Christian (2001). *Arquitectura Occidental*. Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona (España).

22.-Peri, P. (2003). *Cortinas forestales cortaviento. Producción vegetal.* Universidad Nacional de la Patagonia Austral.

23.-Pire, E. (2007). Publicación de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Rosario. ISSN 16698584. 22 – 8/2007. 23 – 12/2007

24.-Pytel Andrew; Kiusalaas Jaan (1999). *Ingeniería Mecánica. Estática*. Editorial Thomson. México.

25.-Rivera, S. M. y Galiussi, E. (2002). *Naturaleza Urbana*. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Área Dendrología. Universidad Nacional de la Plata.

26.-Serway, R. A.; Jewett, J. W. (2004). *Física, Vol. 1, Mecánica, Oscilaciones y ondas, Termodinámica*. 6ª edición. Editorial Thomson. Madrid.

27.-Shigo, Alex L. (1994). *Arboricultura Moderna compendio*. Shigo and Trees Associates. Dirham. New Hampshire. EE. UU.

28.-Sterken, P. (2005). *Una Hipótesis sobre el Diagnóstico de Estabilidad de Arbolado*. International Society of Arboricultura. En www.isa-hispana.com

29.-Strasburger, E.; Noll, F.; Schenck, H. y Schimper, A. F. W. (1974). *Tratado de botánica*. Editorial Marín. Barcelona. España

30.-Torroja Eduardo (4ª. Edición). *Razón y Ser de los tipos estructurales.* Instituto Eduardo Torroja de la construcción y del cemento. Madrid (España).

31.-Villagran, J. (2000). *Avances científicos y tecnológicos para evaluar la mecánica del árbol.* Conferencia IV Congreso Nacional del Arbolado Público. San Salvador de Jujuy. En: www.arboladopublico.com.ar/Artículos/art002.htm.

32.-Wauer Stefan; Costenoble (2002). *Cálculo aplicado*. Editorial Thomson Learning. México.

33.-Wilson Jerry D. (1996). *Física*. Editorial Prentice Hall. México.

34.-Worsnop, B. L. y Flint, H. T. (1994). *Curso superior de física práctica*. Eudeba. Buenos Aires.

35.-Zago Manrique (1998). *Arte bajo la ciudad*. Art Beneath the City. Editorial Manrique Zago. Buenos Aires (Argentina).

36.-Zill Denis; Dewar Jacqueline (1996). *Álgebra y Trigonometría*. Editorial Mc. Graw Hill. Colombia.