Todo lo que usted quiere saber sobre

MATEMÁTICA FINANCIERA

pero no se anima a preguntar

Dra. Patricia Kisbye
Dr. Fernando Levstein

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Todo lo que usted quiere saber sobre

MATEMÁTICA FINANCIERA

pero no se anima a preguntar

Dra. Patricia Kisbye y Dr. Fernando Levstein

ADVERTENCIA

La habilitación de las direcciones electrónicas y dominios de la web asociados, citados en este libro, debe ser considerada vigente para su acceso, a la fecha de edición de la presente publicación. Los eventuales cambios, en razón de la caducidad, transferencia de dominio, modificaciones y/o alteraciones de contenidos y su uso para otros propósitos, queda fuera de las previsiones de la presente edición -Por lo tanto, las direcciones electrónicas mencionadas en este libro, deben ser descartadas o consideradas, en este contexto-.

Distribución de carácter gratuito.

autoridades

Presidente de la Nación
Dra. Cristina Fernández de Kirchner

Ministro de Educación
Dr. Alberto E. Sileoni

Secretaria de Educación
Prof. María Inés Abrile de Vollmer

Directora Ejecutiva del Instituto Nacional de Educación Tecnológica
Lic. María Rosa Almandoz

Director Nacional del Centro Nacional de Educación Tecnológica
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum

Director Nacional de Educación Técnico Profesional y Ocupacional
Ing. Roberto Díaz

Ministerio de Educación.
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
Saavedra 789. C1229ACE.
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
República Argentina.
2010

Todo lo que usted quiere saber sobre

MATEMÁTICA FINANCIERA

pero no se anima a preguntar

Dra. Patricia Kisbye
Dr. Fernando Levstein

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección "Las Ciencias Naturales y la Matemática".
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Queda hecho el depósito que previene la ley N° 11.723. © Todos los derechos reservados por el Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

La reproducción total o parcial, en forma idéntica o modificada por cualquier medio mecánico o electrónico incluyendo fotocopia, grabación o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información no autorizada en forma expresa por el editor, viola derechos reservados.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0745-0

Director de la Colección:
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general y académica de la Colección:
Prof. Ing. Haydeé Noceti
Diseño didáctico y corrección de estilo:
Lic. María Inés Narvaja
Ing. Alejandra Santos
Coordinación y producción gráfica:
Tomás Ahumada
Diseño gráfico:
Sebastián Kirschenbaum
Ilustraciones:
Diego Gonzalo Ferreyro
Federico Timerman
Retoques fotográficos:
Roberto Sobrado
Diseño de tapa:
Tomás Ahumada
Administración:
Cristina Caratozzolo
Néstor Hergenrether
Colaboración:
Téc. Op. en Psic. Soc. Cecilia L. Vazquez
Dra. Stella Maris Quiroga

Nuestro agradecimiento al personal del Centro Nacional de Educación Tecnológica por su colaboración.

Kisbye, Patricia
Todo lo que Ud. quiere saber sobre matemática financiera pero no se anima a preguntar / Patricia Kisbye y Fernando Levstein; dirigido por Juan Manuel Kirschenbaum.
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2009.
188 p.: il.; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan Manuel Kirschenbaum.)

ISBN 978-950-00-0745-0

1. Matemática.
2. Finanzas.
3. Enseñanza Secundaria.
I. Levstein, Fernando
II. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.
III. Título

CDD 510.712

Fecha de catalogación: 07/12/2009

Impreso en Anselmo L. Morvillo S. A., Av. Francisco Pienovi 317 (B1868DRG), Avellaneda, Pcia. de Buenos Aires, Argentina.

Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares

Los Autores

Dra. Patricia Kisbye

Se graduó como Licenciada en Ciencias Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
Posteriormente obtuvo su título de Doctora en Matemática en la FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
Ha colaborado en el dictado de asignaturas específicas del Profesorado en Matemática, entre ellas Matemática Financiera. Ha dirigido tesinas en el área de finanzas para alumnos de la licenciatura en Matemática y de Ciencias de la Computación. Posee además publicaciones sobre la Teoría de los Números.
Actualmente es Profesora Adjunta de la FaMAF, UNC.

Dr. Fernando Levstein

Se graduó como Licenciado en Matemática en el IMAF de la Universidad Nacional de Córdoba. Luego obtuvo un doctorado en matemática del InstitutoTecnológico de Massachusetts. Durante varios años contribuyó a la organización de la Olimpíada Matemática Argentina y de la Reunión de Educación Matemática. Dictó en varias oportunidades un curso de matemática aplicada a la economía para el Doctorado en Economía de la UNC y estuvo a cargo del dictado de Matemática Financiera para el Profesorado en Matemática de la UNC. Actualmente es Profesor Titular de la FaMAF en la UNC. Su área de especialidad es la Teoría de Lie, en la cual ha realizado diversas publicaciones científicas y dictado conferencias en congresos nacionales e internacionales.

ÍNDICE

Prefacio

Esta publicación está dirigida a estudiantes y docentes del nivel medio. El objetivo ha sido introducir las principales nociones de matemática financiera, desde las más básicas hasta las más avanzadas que se puedan lograr en función de los conocimientos alcanzados por un alumno de secundaria.

El desarrollo de los temas se ha hecho a través de ejemplos, en los cuales se introducen gradualmente los conceptos y métodos de resolución de problemas. Al final de cada capítulo se ha incluido una lista de ejercicios de aplicación y sus resoluciones. Consta de once capítulos y tres apéndices.

En el Capítulo 1 se hace un breve repaso de los principales hitos que influyeron en el desarrollo histórico de la Matemática Financiera. De lo visto allí, podemos separar en dos partes el resto del libro. Una de las partes está formada por los capítulos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9 que sólo requieren de la matemática disponible hasta el siglo XIII, en pleno medioevo. Los restantes capítulos hacen uso de métodos y técnicas que fueron disponibles recién a partir del siglo XVII.

En el capítulo 2, se introduce el tema de sucesiones aritméticas y geométricas y se muestra una gran variedad de sus aplicaciones.

En los capítulos 3 y 4, se introducen las nociones básicas de tasas de interés y de descuento, junto a una variedad de fórmulas que los involucran.

En el capítulo 5 se describen las operaciones financieras y formas de pago usadas más frecuentemente.

El capítulo 6 trata sobre ciertas sucesiones de pagos de duración finita o indeterminada para los cuales se pueden encontrar fórmulas que expresen el valor actual y el valor final de las mismas.

En el capítulo 7 se desarrollan los sistemas más comunes de pagos de deudas en cuotas: sistema francés, alemán y americano.

En el capítulo 8 se introduce la noción de flujo de caja, que permite ver con nuevos ojos los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores.

El capítulo 9 está dedicado a clarificar el abuso que se observa muchas veces en las publicidades que se refieren a tasas de interés. En particular, se muestra cómo se puede anunciar una tasa más pequeña que la real.

En el capítulo 10 se intenta mostrar el comienzo del camino que siguió la matemática financiera en el siglo XX. Esto hace que se necesiten algunos conocimientos muy básicos de probabilidades, los cuales han sido desarrollados en el texto. Con esto se logra hacer un modelo que permite dar un valor aproximado al derecho de comprar una acción a un precio prefijado y en un tiempo determinado.

En el capítulo 11 se desarrollan los conceptos matemáticos que permiten dar sentido a la capitalización continua.

Se han incluido tres apéndices que complementan los conjuntos de ejercicios. Estos se refieren al uso de la planilla de cálculo, la calculadora financiera y tablas de valores útiles. Se recomienda al lector recurrir a ellos cuando la resolución de los ejercicios vaya más allá del cálculo con lápiz y papel. Se espera que una lectura temprana de estos apéndices le permita al lector realizar los ejercicios con el menor número de inconvenientes.

Capítulo 1

Introducción: Un poco de historia

Cada vez que tomamos una decisión económica estamos usando herramientas de la matemática aunque, muchas veces, nos cueste darnos cuenta. Muchas personas toman buenas decisiones, basadas en una gran experiencia, que incluye éxitos y fracasos. La matemática pone a nuestra disposición técnicas y métodos para resolver todo tipo de problemas, y en particular los económicos. Su estudio nos provee un camino más corto para aprender a tomar las mejores decisiones y saber justificarlas.

En este libro trataremos diversos aspectos de la matemática relacionados con la resolución de problemas financieros.

El origen de la matemática financiera se debe rastrear hasta los albores de la civilización. Podemos notar que, a lo largo del tiempo, el desarrollo de nuevas herramientas matemáticas ha guardado una estrecha relación con el surgimiento de operaciones financieras cada vez más sofisticadas.

En el capítulo 3 estudiaremos la noción de interés. Desde un punto de vista histórico, observamos que este concepto ha estado presente en toda sociedad que haya desarrollado, aunque sea mínimamente, su comercio. Por ejemplo, si nos remontamos a la civilización sumeria asentada en la parte sur de la antigua Mesopotamia, considerada la primer y más antigua civilización del mundo, vemos que, ya en el tercer milenio AC, tuvo una importante actividad comercial. Esto ocurrió a la par que desarrollaban un avanzado sistema de numeración: el posicional de base 60. Este sistema, que también se conoce como sexagesimal, perdura hoy en la medición de ángulos o de tiempo como tributo a los avances sumerios en astronomía.

Dicho sistema, permitió a los sumerios realizar con agilidad las operaciones aritméticas necesarias para el comercio, como por ejemplo, el cambio de monedas, que estaba basado en los porcentajes de las aleaciones de oro y plata que cada una poseía.

En Babilonia hace cuatro mil años, ya era usual prestar a interés. Por ejemplo: en el Código de Hammurabi (alrededor de 1850 AC) se encuentra tallada en piedra la siguiente ley:

> "Si un mercader ha hecho un préstamo de grano o plata, por el grano tomará un *panu* y cuatro *sutu* por cada *kur*. Si hizo un préstamo de plata tomará un sexto de *shekel* y seis *granos* por cada *shekel*."

Aunque para nosotros estos términos sean tan lejanos como el tiempo en que fueron escritos, se puede desentrañar su significado. Según el historiador Roth, esto corresponde a una tasa del 33% en el primer caso y 20% en el segundo. Notemos que la noción de tiempo no estaba explicitada en la ley. Esta falencia era aprovechada, a veces, para hacer usura, ya que podían cobrar un interés bajo y luego reclamar la devolución del préstamo en un lapso corto. En el capítulo 8 veremos formas actuales de producir una tasa de interés efectiva mayor que la tasa publicitada.

De la lectura de la Biblia, sabemos que los israelitas tenían prohibido prestarse entre sí a interés. Más adelante, el cristianismo retoma esta prohibición. Santo Tomás de Aquino argumenta contra el interés porque dice que: "sólo Dios dispone del tiempo". A partir de dicho argumento, podemos notar que se introduce la noción de tiempo en el cálculo de intereses.

En la civilización griega, la mayoría de los grandes pensadores consideraban indignas las aplicaciones de las matemáticas a los problemas cotidianos (comerciales). Aristóteles en su obra "Politika" toma una posición contraria al comercio, porque lo considera una actividad para ganar a costa de los demás. También está en contra del interés, porque el hecho de que el dinero se reproduzca por sí sola, le parece una aberración. En concordancia con esto, hebreos, romanos y griegos desarrollaron un sistema numérico en el cual era muy difícil efectuar la multiplicación, con lo cual se volvía muy engorroso hacer, por ejemplo, una conversión de monedas o un cálculo de interés.

En el capítulo 3 veremos cómo los economistas ingleses, desde hace ya dos siglos, justifican el cobro de interés.

En el último capítulo veremos que el mecanismo usado por Tales (ver recuadro), es el principio de los derivados. Estos instrumentos permiten a unos, asegurarse de no tener grandes pérdidas, y a otros tener la posibilidad de obtener grandes ganancias con un pequeño capital.

Aristóteles, en la misma obra citada anteriormente, cuenta una anécdota muy interesante sobre Tales de Mileto, al que conocemos por su famoso teorema de geometría. Dice que los vecinos de Tales se burlaban de él y opinaban que la filosofía (en esa época la matemática era una rama de ella) no servía para nada, ya que él no era rico. Para darles una lección, usó su habilidad en astronomía y al observar que era muy probable que hubiera una buena cosecha de aceitunas el siguiente año. Esto le daba un dato importante, pero él no poseía un capital suficiente para comprar un olivar. ¿Cómo hizo entonces para aprovechar la situación? Con su escaso capital dejó las señas necesarias para alquilar todos los molinos de la zona de Chios y Mileto. Cuando la gran cosecha llegó, los dueños de los olivares debieron alquilarle a él los molinos, y Tales pudo cobrar lo que se le antojó y hacer una buena ganancia.

El comercio se desarrolla muy lentamente durante la edad media, hasta que hace 800 años Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, introduce en Italia la numeración decimal que aprendió de los árabes que, a su vez, la obtuvieron de los hindúes. Esta es posicional y, a diferencia de la babilónica, es en base diez y posee una notación especial para el cero. Es la que usamos actualmente.

En su obra "Liber Abaci" (1202) Fibonacci resume toda la matemática conocida por los árabes e hindúes, muestra el uso de la nueva notación, que es adoptada paulatinamente debido a sus ventajas de cálculo.

Paralelamente, comienzan a funcionar los antepasados de los bancos europeos. En Italia era común que alguien con capital para prestar se ubicara en un banco de plaza (banca) y allí hiciera sus negocios. De allí deriva el nombre que damos actualmente a las instituciones bancarias. Así, en el siglo XIII se retoma el desarrollo de la matemática financiera, estancado durante más de mil años desde los tiempos del imperio romano. En este período se crean las tablas para el cálculo del interés compuesto.

El gran avance siguiente es el desarrollo de las tablas de logaritmos, que permitieron realizar cálculos más precisos y rápidos para obtener una raíz enésima o una dividir entre números con muchas cifras decimales. Esto último fue de suma utilidad para el desarrollo de la astronomía de esa época, y luego se extiende a todas las ramas de la matemática que necesitaban resolver ecuaciones con precisión. En particular, en matemática financiera permitirá resolver las ecuaciones planteadas para encontrar las tasas de interés reales de un negocio, en tiempos que no se disponía ni siquiera la idea de lo que sería una calculadora.

Con el advenimiento del cálculo infinitesimal en el Siglo XVII se hace posible la capitalización continua. Es entonces que Bernoulli descubre el número *e* que es la cantidad que deberíamos recibir al cabo de un año si depositáramos un peso a una tasa del 100% anual, y ésta se capitalizara continuamente (ver capítulo 11).

También en el Siglo XVII, nace la estadística. Con ella, aparecen las tasas de mortalidad y se posibilita el desarrollo de las compañías aseguradoras. La idea es sencilla: si sabemos que la tasa de mortalidad es un 2%, y se destina un 2% de los ingresos a un fondo de compensación a los deudos de quien fallezca, ninguna familia debería perder el sustento de un día para otro. De igual manera, si se transporta mercadería y se sabe que alrededor de un 5% no llega a destino, se puede formar un fondo común donde cada comerciante aporta el equivalente al 5% de la mercancía enviada, y con éste se protege a quienes sufran la pérdida.

El cálculo de probabilidades está en la base de la matemática financiera moderna. Se considera su fecha de nacimiento el 1900, cuando el matemático francés Louis Bachelier presenta su tesis doctoral: *Sobre la especulación financiera*, en la que muestra un modelo matemático para la cotización de acciones en bolsa. En dicha tesis, observa la similaridad entre los movimentos de la cotización de las acciones y de una partícula de polen flotando en el aire, u otro medio, fenómeno que había sido observado por el botánico Robert Brown. Este se llamó movimiento browniano en su honor, y fue llevado a la fama en 1905 por Albert Einstein en su tesis de doctorado para la Universidad de Zurich.

En 1945, el matemático japonés Kiyoshi Ito desarrolla un análogo del cálculo diferencial aplicable a funciones de las cuales sólo se conoce la probabilidad de que tomen distintos valores. Esta área se llama cálculo estocástico, y en 2006 ganó el premio Gauss por su desarrollo. Esta es una herramienta imprescindible para la toma de decisiones en un contexto de incertidumbre donde sólo se tiene como dato la probabilidad de que algo suceda.

El siguiente gran paso se produce durante los años setenta cuando Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton desarrollan técnicas para decidir el valor justo que le corresponde a ciertos instrumentos financieros llamados derivados. Por esta labor, los dos últimos recibieron el Premio Nobel de economía en 1997 cuando F. Black ya había muerto. Sus desarrollos posibilitaron la multiplicación de las operaciones realizadas.

Esto causó una explosión en los mercados de valores. Un caso particular de estos derivados son las opciones de compra o venta, que serán tratadas en el último capítulo.

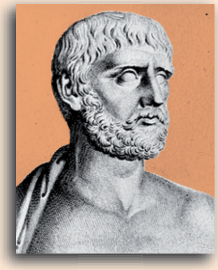
El costado negativo de estos avances es la propensión a generar nuevos mecanismos de inversión que, en caso de fallar la regulación o el control de los gobiernos, pueden producir una crisis de magnitud nunca vista como la de 2008 que comenzó con el otorgamiento masivo de créditos hipotecarios con escasa garantía en un momento en que las tasas de interés estaban en su mínimo histórico. Al subir éstas bruscamente, se desató la crisis.

1760 AC

La civilización sumeria produce el Código Hammurabi.

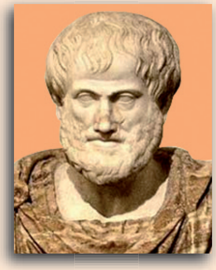
1447 AC

Éxodo del pueblo hebreo.



625-545 AC

Tales de Mileto.



384-322 AC

Aristóteles escribe su obra Politika.

Año 0

Nacimiento de Jesús en Nazareth bajo el imperio romano.

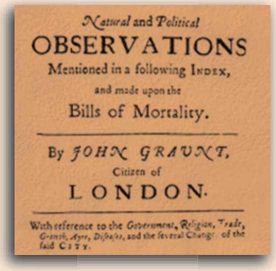
1170 - 1250

Fibonacci publica Liber Abaci.

Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

1550 - 1617

J. Napier publica Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.



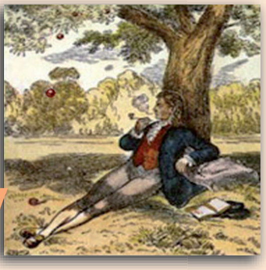
Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.
With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said City.

1620 - 1674

J. Graunt publica Natural and political observations made upon the bills of mortality.

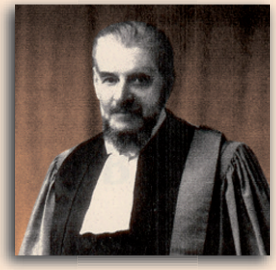
1654 - 1705

J. Bernoulli descubre el número e



1643 - 1727

I. Newton publica su Principia Mathematica.



1870 - 1946

L. Bachelier publica su tesis Théorie de la spéculation.

1915 - 2008

K. Ito desarrolla el cálculo estocástico.

1973

R. Merton, F. Black y M. Scholes producen una fórmula para valuar opciones.

Capítulo 2

Progresiones aritméticas y geométricas

Muchas veces escuchamos hablar de un crecimiento aritmético o geométrico y lo asociamos con un crecimiento lento o rápido, respectivamente. ¿Qué significan estos términos?

Se dice que algo crece (o decrece) aritméticamente, si en cada etapa se le va sumando (o restando) una cantidad constante.

Por ejemplo, si durante la semana pasada la temperatura creció un grado por día, podemos decir que creció aritméticamente.

Si las reservas del BCRA (Banco Central de la República Argentina) suben 200 millones de dólares por semana, se habla de un crecimiento aritmético.

Si el peso de una persona que realiza una dieta, reduce un kilogramo por mes, decimos que decrece en progresión aritmética.

Se dice que algo crece (o decrece) geométricamente si en cada etapa se multiplica por una cantidad constante mayor que 1 (o menor que 1).

Algunos ejemplos de crecimiento geométrico son:

- Una población de bacterias con suficiente alimento que se multiplica 8 veces por hora.
- Una cantidad de carbono-14, donde el radioisótopo del carbono se multiplica por 0,5 cada 5.730 años.

Otro ejemplo clásico de crecimiento geométrico es el siguiente:

Cuenta la historia que un rey quedó tan contento con el juego del ajedrez que había sido diseñado para él, que ofreció a su creador regalarle lo que quisiera. Este le contestó que "sólo" quería obtener como recompensa un grano de trigo por el primer casillero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente hasta llegar al casillero 64. El rey quedó sorprendido por tan modesto pedido y mandó a su visir que trajera una bolsa con los granos reclamados. Mayor fue su sorpresa cuando el visir hizo los cálculos y vio que no había tal cantidad de granos en toda la tierra.

Un crecimiento geométrico similar ocurre en los primeros días después de la concepción, cuando de una célula original se producen dos y de cada una de las obtenidas se vuelven a obtener dos, y así sucesivamente, aunque sólo por unos días.

1. Progresiones aritméticas

Definición 2.1 Llamamos progresión aritmética a una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ que tiene la propiedad de que la diferencia entre dos consecutivos es igual a una constante R, que llamaremos razón de la progresión.

En otras palabras, si se cumple que $a_{n+1} - a_n = R \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una progresión aritmética.

Ejemplo 2.1 La sucesión de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = 1$.

Ejemplo 2.2 La sucesión constante $\{2, 2, 2, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = 0$

Ejemplo 2.3 La sucesión de los números naturales $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $R = -1$.

1.1. El enésimo término de una progresión aritmética

Luego de considerar los ejemplos anteriores, la primera pregunta que nos planteamos es la siguiente:

¿Cómo se calcula el enésimo término de una progresión aritmética $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ de razón R?

Vemos que: $a_2 = a_1 + R$, $a_3 = a_2 + R = a_1 + R + R = a_1 + 2R$, razonando de la misma forma $a_4 = a_1 + 3R$, en general intuimos que $a_n = a_1 + (n-1)R$. Esto se puede expresar con el concepto de *suma telescópica,* esto es, una suma que colapsa. Observemos que

$$\begin{aligned} R + R + \cdots + R &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) \\ &= a_n + (-a_{n-1} + a_{n-1}) + (-a_{n-2} + a_{n-2}) + \cdots + a_2) - a_1 \\ &= a_n - a_1 \end{aligned}$$

de donde $a_n = a_1 + (n-1)R$

Si bien el razonamiento es muy convincente, no llega a ser una demostración (el punto débil son los puntos suspensivos que se usaron). En el ejemplo 2.6 se demostrará que la fórmula es verdadera cualquiera sea el n.

Ejemplo 2.4

En un país sólo ingresan 1.000 inmigrantes por año. Si llamamos con I_1 la cantidad de inmigrantes que hay actualmente, y con I_{n+1} la que habrá dentro de n años, se ve que $\{I_i\}$ es una progresión aritmética.

Ejemplo 2.5

¿Es posible tener triángulos rectángulos cuyos lados sean enteros y estén en progresión aritmética? Supongamos que los lados son de longitud a, $a + R$ y $a + 2R$, entonces debe cumplirse el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(a+2R)^2 &= (a+R)^2 + a^2 && \text{de donde}\\ a^2+4aR+4R^2 &= a^2+2aR+R^2+a^2 && \text{por lo tanto obtenemos}\\ 3R^2+2aR-a^2 &= 0\end{aligned}$$

Si despejamos R tenemos $R = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+3a^2}}{3}$ esto nos da las posibilidades $R = -a$ y $R = \frac{a}{3}$. La primera nos da un lado de longitud 0, por lo tanto no sirve. En la segunda como a y R deben ser enteros a es múltiplo de 3 y se tiene entonces las ternas $\{3n, 4n, 5n\}$, que corresponden a todos los triángulos que tienen lados enteros y son equivalentes al clásico triángulo de lados 3, 4 y 5.

2. Inducción completa y el efecto dominó

Existe un método muy ingenioso para probar que una fórmula es válida para todos los números naturales. Para ilustrarlo visualmente, podemos pensar que cada natural corresponde a una ficha de domino y que éstas se colocan en fila de tal manera que al caer la primera, ésta hace caer la segunda y así sucesivamente. (Ver figura 2.1). Se llama método de inducción completa y consiste en lo siguiente:

Figura 2.1

Supongamos que tenemos dos funciones $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y queremos probar que $F(n) = G(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ entonces:

Primero, se prueba que la fórmula es válida para $n = 1$, es decir se verifica que $F(1) = G(1)$.

Segundo, se hace una *hipótesis inductiva*, es decir, se asume que la fórmula es válida para un natural $n = k$ y, a partir de allí, se prueba que eso implica que será válida para el siguiente natural $n = k + 1$.

De esto, se concluye que la fórmula vale para todo número natural, porque si se verifica que vale para $n = 1$, entonces se podrá aplicar la segunda parte del método con $k = 1$ y así concluir que vale para $k = 2$. Si repetimos el procedimiento pero con $k = 2$, sabremos que vale para $k = 3$. De esta manera, armamos una maquinaria que permite verificar que la fórmula será válida para todos los naturales.

En general, el método sirve para probar que una familia de propiedades P_n son verdaderas.

Paso uno: probar que P_1 es verdadera.
Paso dos: probar que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

Ejemplo 2.6

Una progresión aritmética $\{a_n\}$ cumple $a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1)$.

Primero verificamos que $a_1 = a_1 + (1-1)(a_2 - a_1)$.

Luego, suponemos que vale $a_k = a_1 + (k-1)(a_2 - a_1)$, y probaremos que entonces debe ser cierta la igualdad $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)(a_2 - a_1)$.

Para esto usamos que, por ser una progresión aritmética la diferencia entre dos consecutivos debe ser la misma. Por lo tanto $a_{k+1} - a_k = a_2 - a_1$.

Despejando, se obtiene $a_{k+1} = a_k + (a_2 - a_1)$ y ahora reemplazamos a_k usando la hipótesis inductiva.

Tenemos entonces $a_{k+1} = a_1 + (k-1)(a_2 - a_1) + (a_2 - a_1)$ finalmente llegamos a que $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)(a_2 - a_1)$ deberá ser cierto.

Del ejemplo se sigue que toda progresión aritmética queda determinada por sus dos primeros términos.

Una progresión $\{a_n\}$, puede pensarse como una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada natural n el número a_n.

Si graficamos una progresión aritmética, observaremos que los valores que va tomando están alineados. Ellos se encuentran sobre el gráfico de la recta $y = a_1 + Rx$.

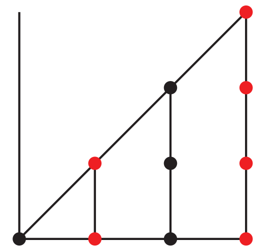


Gráfico 2.1

Una famosa anécdota sobre el gran matemático Karl F. Gauss cuenta que, un día su profesor de primaria (aparentemente con el objetivo de descansar un rato) pidió a sus alumnos que sumaran todos los números del 1 al 100. El pequeño Gauss entregó la respuesta velozmente, sorprendiendo al profesor. ¿Cómo hizo tan rápidamente el cálculo? Según le explicó al maestro, observó que si sumaba el primero y el último obtenía 101, el segundo y el anteúltimo también 101, y así hasta llegar a 50+51=101. En total obtuvo 50 veces 101 es decir 5.050, que es la respuesta exacta.

Una variante de esta idea se puede usar para dar una fórmula para la suma de los primeros n números:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\
S &= n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 \quad \text{sumando m. a m.} \\
2S &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\
2S &= n(n+1) \\
S &= n(n+1)/2
\end{aligned}$$

Una notación muy útil para trabajar con sumas es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Tiene la propiedad que:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i + b_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Por ejemplo, con esta notación escribimos la suma S_n de los primeros n números como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Supongamos que deseamos calcular la suma S_n de los primeros n términos de una progresión aritmética $\{a_i\}$ de razón R, esto es $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Si recordamos que $a_i = a_1 + (i-1)R$, usando la propiedad, se tiene:

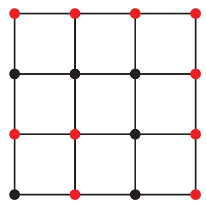
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)R \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + Rn(n-1)/2\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7

Podemos calcular la suma de los primeros n números impares.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$$

Esto se puede ver en el gráfico 2.2:



$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

Gráfico 2.2

Ejemplo 2.8

La forma de los dos gráficos anteriores sugiere llamar números triangulares y cuadrangulares a la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas 1, 2, 3, . . . y 1, 3, 5, . . . , respectivamente. Denotaremos a los primeros con T_n y a los segundos con C_n. Esto se puede generalizar y definir números pentagonales P_n, hexagonales H_n; etc. como la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas que comienzan con 1 y tienen razón 3; 4; etc. Geométricamente se cuentan los puntos en los correspondientes polígonos

Ejemplo 2.9

Un problema que podemos resolver con estas sumas es calcular el número máximo a_n de regiones en que se puede dividir un plano usando n rectas. Por ejemplo, si usamos una recta partimos al plano en dos, en consecuencia $a_1 = 2$. Si usamos dos rectas, podemos partirlo en cuatro regiones si se cortan y en tres si no, por lo tanto $a_2 = 4$. Si tenemos el plano partido en a_n regiones y trazamos una nueva recta que no sea paralela a ninguna de las anteriores, esta contendrá n puntos distintos provenientes de las intersecciones con las n rectas. Estos n puntos determinan $n + 1$ segmentos (dos de ellos infinitos). Cada uno de estos segmentos, parte en dos a una de las a_n regiones agregando así una región por cada segmento. Tenemos que $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)R \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= na_1 + Rn(n-1)/2\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $a_n = n\,(n + 1)/2 + 1$

Definición 2.2

Dada una sucesión de números $\{a_n\}$ podemos formar la *sucesión derivada* $\{a_n'\}$ que está definida por: $a_n' = a_{n+1} - a_n$

Ejemplo 2.10

Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R, la sucesión derivada $\{a_n'\}$ es la progresión constante R, ya que $a_{n+1} - a_n = R\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, si $\{a_n\}$ tiene sucesión derivada constante $a_n' = R$, entonces $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R. Si $R = 0$ entonces a_n es constante.

Si las sucesiones derivadas de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales, entonces la diferencia $\{a_n - b_n\}$ tiene derivada 0 y por lo tanto $a_n = b_n + R\ \forall n \in \mathbb{N}$. Geométricamente, vemos que a_n y b_n están sobre rectas paralelas.

Teorema 2.1

Teorema fundamental del cálculo discreto

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = a_{n+1} - a_1$$

Demostración

Basta observar que la suma de las derivadas es una suma telescópica que colapsa en el miembro de la derecha.

Ejemplo 2.10

Si la sucesión derivada de $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de razón R, ¿qué puede decirse de a_n?

Sabemos que $a_n' = a_0 + nR$

Usando el TFCD tenemos $a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + iR) = na_0 + Rn(n+1)/2$.

Por lo tanto, $a_{n+1} = a_1 + na_0 + Rn(n+1)/2 = \frac{R}{2}n^2 + (\frac{R}{2} + a_0)n + a_1$

Quiere decir que la sucesión es un polinomio de segundo grado en n.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos calcular la sucesión derivada de la sucesión derivada $\{a_n'\}$ y la llamamos derivada segunda denotada por $\{a_n''\}$.

Por lo visto anteriormente $\{a_n\}$ es una progresión aritmética si y sólo sí $a_n'' \equiv 0$.

Definición 2.3

3. Progresiones geométricas

Para definir una progresión geométrica sólo tenemos que cambiar diferencia por división en la definición de progresión aritmética, más precisamente tenemos:

Llamamos progresión geométrica a una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ que tiene la propiedad de que el cociente entre dos consecutivos es igual a una constante q, que llamaremos razón de la progresión.

Definición 2.4

En otras palabras, si se cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una progresión aritmética.

La sucesión de las potencias de dos $\{2, 4, 8, \ldots\}$ es una progresión aritmética de razón $q = 2$.

Ejemplo 2.12

La sucesión constante $\{2, 2, 2, \ldots\}$ es una progresión geométrica de razón q = 1.

Ejemplo 2.13

La sucesión de potencias de $\frac{1}{2}$: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ es una progresión geométrica de razón $q = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.14

La población de un país crece anualmente un 2%, quiere decir que si llamamos con P_n a la población en el año n, $P_{n+1} = P_n + \frac{2}{100}P_n = 1{,}02P_n$ Vemos que la población forma una progresión geométrica de razón 1,02.

Ejemplo 2.15

De los ejemplos, se observa que hay una manera muy sencilla de obtener una progresión geométrica de una progresión aritmética de números enteros $\{a_n\}$. Se puede hacer tomando cualquier número positivo, por ejemplo el 2, y formando $\{2^{a_n}\}$. Esta es geométrica, ya que $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^R = q$ constante. Usamos la propiedad $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ que viene de $a^b a^c = a^{b+c}$. Esta propiedad vale también para b y c racionales (e incluso para b y c reales) si definimos a $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

El matemático escocés John Napier en 1914, independientemente el suizo Joost Bürgi seis años después, inventaron los logaritmos, tratando de relacionar las progresiones geométricas con las aritméticas. Si tenemos una progresión geométrica a_n y fijamos un número positivo como el 10, queremos hacerle corresponder una progresión aritmética b_n de tal manera que $a_n = 10^{b_n}$. En otras palabras, se busca una operación inversa a la potenciación.

Definición 2.5 Dados números a, b, c con $a > 0$ el logaritmo de b en base a es c si $a^c = b$. Se denota por $\log_a b$

El problema que trataban de resolver Napier y Bürgi a principios del siglo XVII, era agilizar los cálculos que realizaban los astrónomos de la época, que necesitaban multiplicar y dividir cantidades con muchas cifras decimales.

Dado que es mucho más fácil sumar que multiplicar y restar que dividir, la idea básica detrás del desarrollo de los logaritmos fue encontrar una conexión que permitiera pasar de multiplicaciones a sumas y de divisiones a restas. El logaritmo es la respuesta, gracias a su propiedad característica:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Su aplicación requirió publicar tablas con gran cantidad de valores de logaritmos. Por ejemplo, para multiplicar x por y se buscan en la tabla los valores de $\log_{10} x$ y $\log_{10} y$, se suman y se busca un número c cuyo logaritmo sea $\log_{10} x + \log_{10} y$, entonces $c = xy$.

El uso de los logaritmos permitió hacer cálculos mucho más precisos en astronomía, y se difundió hacia todas las áreas que requirieran de cálculos efectuados con rapidez y precisión. Durante tres siglos fue una herramienta fundamental para el cálculo.

En el siglo pasado, luego de la aparición de las calculadoras y las computadoras, se perdió completamente su uso en la práctica; pero en la matemática perdura como una función fundamental porque permite modelar crecimientos no explosivos y transformar una operación de multiplicación en una de suma.

Ejemplo 2.16 Queremos saber si los números 2, 6 y 42 forman parte de una progresión geométrica. Si esto fuese cierto, existirían un número real q y dos enteros n y m tales que $6/2 = q^n$ y $42/6 = q^m$. Elevando la primera ecuación a la m y la segunda a la n, vemos que:

$$3^m = (q^n)^m = (q^m)^n = 7^n$$

Pero esto es imposible, ya que el número primo 3 divide al miembro de la izquierda pero no al de la derecha.

Entonces, concluimos que 2, 6 y 42 no forman parte de ninguna progresión geométrica.

¿Cómo calcular el enésimo término de una progresión geométrica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ de razón R?

Sabemos que $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n b}{b a_1} = \frac{a_n}{a_1}$, de donde concluimos que $a_n = a_1 q^{n-1}$

Ejemplo 2.17 Se desea calcular el noveno término de una progresión geométrica que comienza con 3 y 6. La razón de esta progresión es $6/3 = 2$, luego haciendo $n = 9$ en la fórmula obtenida previamente, tenemos $a_9 = 3 \cdot 2^8 = 768$.

Ejemplo 2.18

Se quiere encontrar el número x que hace que $\{2, x, 18\}$ estén en progresión geométrica. Tenemos que hallar un x que cumpla $18/x = x/2$. Despejando, tenemos que: $x^2 = 2 \cdot 18 = 36$ y por lo tanto $x = \pm 6$.

Recordemos que en 2.2 definimos a'_n la derivada de la sucesión $\{a_n\}$. ¿Qué ocurre cuando tomamos la derivada de una sucesión geométrica de razón q?

$a'_n = a_{n+1} - a_n = a_n(a_{n+1}/a_n - 1) = a_n(q-1)$. Por lo tanto se tiene que a'_n/a_n es una constante igual a $q - 1$.

Definición 2.6

Dada una progresión geométrica $\{a_n\}$, la constante a'_n/a_n se conoce como tasa de crecimiento de la progresión $\{a_n\}$.

Ejemplo 2.19

Se hace un conteo de una población de bacterias en intervalos de una hora, y se observa que los valores se aproximan a una sucesión geométrica de razón 8. ¿Cuál es su tasa de crecimiento?

Por ser una sucesión geométrica sabemos que su tasa de crecimiento es la constante $q - 1 = 8 - 1 = 7$. Decimos entonces que la tasa de crecimiento es de 700% por hora.

Ejemplo 2.20

En 1978 había 25 millones de argentinos, 30 años después hay 40 millones. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual? Si llamamos t a la tasa de crecimiento anual debemos tener:

$$40 \cdot 10^6 = (1+t)^{30} \cdot 25 \cdot 10^6$$

entonces simplificando, debemos resolver $40/25 = (1 + t)^{30}$, por lo tanto $t = \sqrt[30]{1,6} - 1$.

Cuando la progresión no es geométrica, la tasa $t_n = a'_n = a_n$ no es constante, pero se sigue cumpliendo $a_{n+1} = (1 + t_n)a_n$.

Ejemplo 2.21

El precio P de cierto artículo aumenta 5% en julio y vuelve a aumentar 10% en diciembre. El precio a fin de año P_f se puede obtener haciendo

$$P_f = (1 + 0{,}1)(1 + 0{,}05)P$$

Observamos que el precio final hubiera sido el mismo, si el primer aumento hubiera sido de 10% y el segundo de 5 %.

También vemos que ambos aumentos son equivalentes a un único aumento de 15,5 %, ya que $(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}05) = (1 + 0{,}155)$.

Ejemplo 2.22

Compramos una herramienta que cuesta \$ 100 y pagamos en 6 cuotas sin interés con una tarjeta cuyo banco nos devuelve el 10% de la compra, pero nos cobra un seguro de 3 %. ¿Cuál es el ahorro final?

$P_f = (1 + 0{,}03)(1 - 0{,}1)100 = (1 - 0{,}073)100$, el ahorro fue de \$ 7,30.

Ejemplo 2.23

La sucesión de Fibonacci

En1202, Fibonacci plantea en su libro Liber Abaci el siguiente problema:

Un granjero tiene un corral y quiere dedicarse a la cría de conejos. Una pareja de conejos llega a su estado reproductivo en un mes y tarda un mes en engendrar una pareja de conejitos. ¿Cuántas parejas de conejos tendrá el granjero al cabo de 12 meses si comienza con una pareja de conejos recién nacidos? Vemos que el primer mes tiene una, el segundo mes sigue teniendo una pero ya en estado reproductor, al tercer mes tiene la pareja original y una recién nacida, al cuarto mes tendrá la original, una en estado reproductor y una recién nacida, en general en el mes $n + 1$ tendrá las del mes n más las recién nacidas, de las cuales hay una por cada pareja existente en el mes $n - 1$. Esto da la ecuación

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad a_1 = a_2 = 1$$

de la que se puede obtener a_{12}.

Ejemplo 2.24

Fórmula para la sucesión de Fibonacci

Se desea obtener una fórmula para los términos de la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8,. . . , donde cada término es la suma de los dos anteriores, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Si calculamos la sucesión derivada, vemos que cumple: $a'_n = a_{n-1}$ pero como $a_n \neq q a_{n-1}$, con q constante, observamos que no es geométrica.

Sin embargo, a_n se puede escribir como la diferencia de dos sucesiones geométricas: $a_n = b_n - c_n$. ¿Cuáles son b_n y c_n? Supongamos que son de la forma $b_n = C\lambda_+^n$ y $c_n = C\lambda_-^n$. Queremos encontrar las razones λ_+ y λ_-.

Para esto consideramos $b'_n - c'_n = (\lambda_+ - 1)b_n - (\lambda_- - 1)c_n = C(\lambda_+ - 1)\lambda_+^n - C(\lambda_- - 1)\lambda_-^n$.

Entonces si λ_+ y λ_- satisfacen las ecuaciones $(\lambda_+ - 1)\lambda_+ = 1 = (\lambda_- - 1)\lambda_-$ tendremos que $b'_n - c'_n = C\lambda_+^{n-1} - C\lambda_-^{n-1} = b_{n-1} - c_{n-1}$.

Por ser las dos raíces de $(x - 1)x = 1$, sabemos entonces que $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La constante C debe cumplir: $1 = a_1 = C(\lambda_+ - \lambda_-) = C\sqrt{5}$.

Verificamos que se cumple que $1 = a_2 = \frac{\lambda_+^2 - \lambda_-^2}{\sqrt{5}}$. Finalmente, concluimos que como $b_{n+1} - c_{n+1} = b_n - c_n + b_{n-1} - c_{n-1}$ y tiene los dos primeros términos iguales a a_1 y a_2, debe coincidir con la sucesión de Fibonacci.

Si observamos que $\lambda_-^n < 4/10$ vemos que a_n es siempre el número entero más cercano a b_n.

Para calcular a_{12} tomamos $\frac{\lambda_+^{12}}{\sqrt{5}} \sim 1,618^{12}/2,236 \sim 321,91574/2,236 \sim 143,96947$. Se tiene que el entero más cercano es 144 y este no es otro que el duodécimo término de la sucesión de Fibonacci.

Este número $\lambda_+ = 1,618\ldots$ se conoce con el nombre de razón áurea o número de oro, y se lo denota con la letra griega φ. El cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci a_{n+1}/a_n, se acerca cada vez más a φ a medida que aumenta n. Estas relaciones pueden verse en la naturaleza, por ejemplo, en una flor de girasol los granos van formando una espiral con an granos en la enésima vuelta. Algo similar ocurre en los caracoles de mar y en la distribución de hojas alrededor de un tallo. Aparece también en la construcción de un pentágono o un dodecaedro.

Ejemplo 2.25

Se quiere construir un triángulo rectángulo que tenga sus lados en progresión geométrica, ¿será esto posible? Si lo fuese, denotemos por a, aq y aq^2 las longitudes de los lados de dicho triángulo. Por el teorema de Pitágoras, cuando $q > 1$, debería cumplirse la ecuación $a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2$. Si desarrollamos los cuadrados y dividimos por a^2, vemos que la razón q deberá ser solución de $q^4 - q^2 - 1 = 0$ y $q > 1$. O sea que q^2 no es otro que el número de oro φ del ejemplo anterior. Los triángulos así construidos reciben el nombre de triángulos de Kepler, quien demostró por primera vez esta caracterización.

Ejemplo 2.26

Las torres de Hanoi

Cuenta la leyenda[1], que en un lejano país del sudeste asiático hay tres postes y un conjunto de 64 discos de distinto radio. Originalmente, estaban encastrados en uno de los postes, en orden de mayor a menor contando desde la base.
Un grupo de monjes tiene, como tarea, que trasladarlos hacia otro de los postes. La regla básica que deben cumplir es nunca superponer un disco de mayor radio sobre uno menor. Para esto, pueden usar al tercer poste como auxiliar. Cuando acaben de trasladarlos la vida se extinguirá. ¿Cuántos traslados deben realizar? En la figura 2.2 se puede ver una versión con 8 discos.

Figura 2.2

Si tuviéramos un disco, el número de traslados sería 1. Si hubiera dos, deben trasladar el más pequeño al poste auxiliar luego el mayor y finalmente el menor, es decir, 3 traslados. En general, si llamamos T_n al número de traslados necesarios para cambiar de poste n discos, tendremos:

$$T_{n+1} = T_n + 1 + T_n$$

El primer T_n corresponde a trasladar, de acuerdo a las reglas, los n discos superiores al poste auxiliar, para esto usamos el poste final como si fuera auxiliar. El 1 corresponde a trasladar el disco mayor que quedó en la base al poste de llegada que está vacío. Por último, tenemos T_n traslados para pasar al poste final los n discos que están bien ordenados en el poste auxiliar. Así tenemos la sucesión $1 = T_1$, $2T_1 + 1$, $2(2T_1 + 1) + 1, \ldots$

[1] Se le acredita haber creado el juego de las Torres de Hanoi al matemático francés Edouuard Lucas en 1883

Ejemplo 2.27

La sucesión del ejemplo anterior se puede escribir como: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 2^2, 1+2+2^2 +2^3, \ldots$. Cada término T_n es la suma de la progresión geométrica $\{2^i\}_{i=0}^{n}$. Vemos que

$$T_n = 2T_n - T_n = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Ejemplo 2.28

En general, si se desea una fórmula para la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica $\{Aq^i\}$ usamos la ecuación:

$$(q-1)\sum_{i=0}^{n} Aq^i = q\sum_{i=0}^{n} Aq^i - \sum_{i=0}^{n} Aq^i = \sum_{i=1}^{n+1} Aq^i - \sum_{i=0}^{n} Aq^i = Aq^{n+1} - A$$

y entonces obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} Aq^i = \frac{A(q^{n+1}-1)}{(q-1)}$$

Ejemplo 2.29

La Paradoja de Zenón

La fábula de Esopo sobre la liebre y la tortuga, cuenta cómo la veloz liebre perdió la carrera contra la tortuga por sobrestimar sus fuerzas. Zenón de Elea fue más allá e intentó probar "matemáticamente" que Aquiles, de los pies ligeros, nunca podría alcanzar a una tortuga si le daba 10 metros de distancia por más que corriese diez veces más rápido. Su razonamiento era el siguiente: para alcanzar a la tortuga, Aquiles debe recorrer primero los 10 metros de ventaja que la separan, pero cuando los haya cubierto, la tortuga, que corre a un décimo de la velocidad, habrá recorrido un metro. Cuando Aquiles cubra ese metro la tortuga estará 10 centímetros adelante y así siempre que Aquiles recorra la ventaja que le lleva la tortuga, esta habrá avanzado un trecho más y seguirá en ventaja.

Esta paradoja de Zenón, puede explicarse si se entiende que una suma de infinitos términos puede dar un resultado finito. Este es el caso de la suma de todos los términos de una progresión geométrica $\{q^i\}$ de razón $q < 1$. Hemos visto que la suma de los primeros n términos es $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Como a $\frac{1}{1-q}$, le restamos el número positivo $\frac{q^{n+1}}{1-q}$, el resultado siempre va a ser un número menor que $\frac{1}{1-q}$, por más que sumemos todos los términos que se nos antoje.

En el caso de Aquiles supongamos que tarda 10 segundos en hacer 10 metros, entonces tardará un segundo en recorrer el siguiente metro y una décima de segundo los 10 centímetros siguientes. Así, el tiempo empleado en alcanzar a la tortuga no superará $10 + \frac{1}{1-1/10} = 11+\frac{1}{9}$ segundos. En realidad, el tiempo empleado tampoco podrá ser menor y, por lo tanto, será igual a $11\frac{1}{9}$ segundos.

4. Ejercicios

Ejercicio 2.1

Si sabemos que el tercer término de una progresión aritmética es 7 y el séptimo término es 27, ¿cuánto vale el décimo término?

Ejercicio 2.2

Si 13, x, y, z, 25 forman una progresión aritmética, ¿cuál es su razón?

Calcule el promedio de los números de una progresión aritmética que tiene 4 términos, comienza en 7 y termina en 28. | **Ejercicio 2.3**

Calcule el promedio de los números de una progresión aritmética que tiene n términos, comienza en p y termina en f. | **Ejercicio 2.4**

Calcule la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre 20 y 400. | **Ejercicio 2.5**

Muestre que la suma de los números de n dígitos ($n > 2$) es igual a $495 \times 10^{2n-3} - 45 \times 10^{n-2}$. | **Ejercicio 2.6**

¿Puedes descomponer 1.000.000 como producto de dos números que no tengan ningún dígito 0? | **Ejercicio 2.7**

Los años bisiestos son aquellos divisibles por 4 pero no por 100 y los divisibles por 400. | **Ejercicio 2.8**

a) ¿Cuántos años bisiestos habrá entre el 2009 y el 2999?

b) Si el 9 de julio de 2008 fue miércoles, ¿qué día de la semana será el 9 de julio de 2816?

Encuentra dos sucesiones distintas a_n y b_n cuyas derivadas cumplan $a'_n = 2 = b'_n$. | **Ejercicio 2.9**

Encuentra una sucesión a_n cuya derivada cumpla $a'_n = a_n$ | **Ejercicio 2.10**

Calcule las sucesiones P_n y H_n de números pentagonales y hexagonales. | **Ejercicio 2.11**

Si los monjes de las torres de Hanoi tardan 10 segundos para cada traslado, ¿Cuántos minutos tardarán en trasladar los 64 discos? | **Ejercicio 2.12**

Si un supermercado hace un descuento del 15% y pagando con una tarjeta de débito, el banco nos devuelve un 10% del monto pagado al supermercado, ¿cuál es el porcentaje total de descuento que recibo? | **Ejercicio 2.13**

Si cada artículo que compramos tiene incluido 21% de IVA (impuesto al valor agregado), pero pagando con tarjeta de débito, el estado nos devuelve 5 puntos de IVA, ¿cuál es el porcentaje de lo pagado por el artículo que recibo? | **Ejercicio 2.14**

Ejercicio 2.15 Si los sueldos docentes aumentan 10% en marzo y 9% en setiembre ¿cuál es el porcentaje total de aumento que recibo?

Ejercicio 2.16 Usando inducción completa como en 2.1 probar que una progresión geométrica $\{a_n\}$ cumple $a_n = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{(n-1)}$.

Ejercicio 2.17 Decida si las siguientes ternas pertenecen a alguna progresión geométrica de números enteros.

a) $\{2, 12, 20\}$

b) $\{3, 12, 24\}$

Ejercicio 2.18

a) Calcule los 15 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

b) Muestre la aproximación del undécimo mediante b_{11}, el correspondiente término de la progresión geométrica dada por la razón áurea.

Ejercicio 2.19 ¿Cuánto miden los lados de un triángulo de Kepler si uno de ellos mide un decímetro? Analizar todas las posibilidades.

Ejercicio 2.20 ¿Cuánto tardaría Aquiles en alcanzar a la tortuga si fuera 20 veces más rápido que ella y corriese a una velocidad de un metro por segundo?

Ejercicio 2.21 ¿Cuántos años tardará un capital en duplicarse si está depositado y crece a una tasa del 12% anual?

Capítulo 3
El Interés

3.1. El fundamento del préstamo con interés

Podemos decir que toda operación financiera es un préstamo, en el que un *prestamista* entrega a un *prestatario* una cierta cantidad de dinero, a cambio de que este último lo devuelva al cabo de un cierto tiempo con un recargo o *interés*.

Por ejemplo, si se pide dinero prestado a una entidad financiera, éste deberá ser devuelto en un cierto plazo con un interés acordado previamente. Del mismo modo, si se deposita dinero en una cuenta bancaria, este capital se irá incrementando con el correr del tiempo. En este último caso, el prestamista es quien deposita el dinero y el prestatario es la entidad financiera.

A lo largo de la historia, siempre que el hombre ha prestado algo a otro, ya sea dinero u otros bienes, ha exigido que se le devuelva una cantidad superior a la prestada. Por otro lado, quien recibe el préstamo acepta devolverlo bajo esas condiciones. ¿Significa esto que la transacción es siempre beneficiosa para el prestamista? ¿Por qué entonces el prestatario acepta estas condiciones?

Ya en el siglo XVIII, Jeremy Bentham (1748-1832) formuló la doctrina *utilitarista* según la cual todo acto debe ser juzgado y valorado según la utilidad que brinda. Útil era aquello que aumentaba el placer y disminuía el dolor. Por lo tanto, el individuo que prestaba un bien también sacrificaba la utilidad que el mismo le podría dar si lo hubiera conservado. Por ello era razonable que, finalizado el préstamo, exigiera el valor del bien más el valor de la utilidad perdida.

La lógica de este comportamiento fue retomada por los economistas neoclásicos a comienzos del siglo XX, y en particular por Irving Fisher (1867-1947). Fisher expuso en su obra "Teoría del Interés" (1930) la razón de la exigencia de intereses en la devolución de cualquier préstamo, fundamentando que no sólo el interés se basa en la utilidad del bien en préstamo sino también en el tiempo que el mismo es prestado. Es decir, no sólo influyen aspectos cuantitativos del bien, sino también temporales. Fisher introduce en su obra la noción de tasa nominal y la tasa real de interés, relacionando a ambas con la tasa de inflación.

Las contribuciones de Irving Fisher a la teoría económica fueron muy importantes, y es considerado como uno de los economistas científicos más importantes de la historia.

3.2. Interés

Como ya se ha visto hasta ahora, el hombre no es indiferente al tiempo en el cual puede disponer de una cierta cantidad de dinero. Si se le ofrece disponer de $ 1.000 ahora o $ 1.300 quién sabe cuándo, no sabrá qué elegir. Si los $ 1.300 son para dentro de 1 mes, seguramente aceptará esta opción. Si son para dentro de 10 años preferirá recibir los $ 1.000 ahora, si es que existe alguna forma de invertirlos de modo de producir más de $ 1.300 durante 10 años. Por esto, no sólo importa cuánto dinero más se devolverá a cambio, sino también cuándo será la devolución.

Definición 3.1 En un intercambio no simultáneo de capitales, se llama *interés* a la diferencia neta entre lo que se devuelve y lo que se presta, independientemente del tiempo transcurrido.

En una operación financiera intervienen distintos elementos:

- C_I : capital inicial, o capital prestado,
- C_F : capital final, o capital devuelto,
- I: interés,
- *UM*: unidad monetaria, por ejemplo, pesos, dólares, euros, libras, etc.
- *UT*: unidad de tiempo, por ejemplo, días, meses, años, semestres, etc.

La relación existente entre el capital inicial, el capital final y el interés se expresa de la siguiente manera:

$$I = C_F - C_I$$

Ejemplo 3.1 Juan Pérez realizó un depósito a plazo fijo de $ 30.000 y al cabo de 30 días había en su cuenta la suma de $ 30.497.

En este caso, Juan Pérez presta dinero al banco, y el interés pagado por el banco al término de 30 días es de $ 497. Esto es, $I = C_F - C_I$ = $ 30.497 – $ 30.000 = $ 497.

Ejemplo 3.2 La empresa EMPRE S.A. solicitó un préstamo por 5 años de $ 200.000. Al cabo de dicho período deberá devolver $ 300.000.

Aquí, la entidad financiera es quien presta dinero a la empresa, y el interés que cobra por el término de 5 años es de $ 100.000 Esto es, $I = C_F - C_I$ = $ 300.000 – $ 200.000 = $ 100.000.

Si bien es claro que en el Ejemplo 3.2 se ha cobrado un interés mayor en cuanto al monto de dinero que representa, también es importante notar que el monto del préstamo y el tiempo transcurrido también son mayores. En realidad, el interés es un concepto relativo al dinero o capital en préstamo y también al tiempo que dura dicho préstamo.

Entonces, es más preciso comparar cuál es el interés que se cobra por una unidad de capital prestada en cada caso, considerando una misma unidad de tiempo. Esto nos conduce al concepto de **tasa de interés**.

Definición 3.2

En una operación financiera, la **tasa de interés** r por unidad de tiempo es el interés que corresponde a una unidad de capital en la unidad de tiempo considerada.

Ahora bien, el interés es directamente proporcional al capital en préstamo. Es decir, si por \$ 1 se pagan \$ 0,10 de interés por mes, entonces por \$ 50 se pagarán \$ 5, y por una cantidad \$ X el interés será de \$ $X \cdot 0{,}10$. Luego la tasa de interés se puede calcular como:

$$r = \frac{1{,}10 - 1}{1}, \qquad \text{o} \qquad r = \frac{55 - 50}{50} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{(X + X \cdot 0{,}10) - X}{X}.$$

En todos los casos el resultado es 0,10. La tasa de interés se puede calcular como el cociente entre el interés y el capital inicial en la unidad de tiempo considerada.

$$r_{UT} = \frac{C_F - C_I}{C_I}$$

En el Ejemplo 3.1, la tasa de interés por 30 días es

$$t_{30\,d} = \frac{497}{30.000} = 0{,}16566$$

En el Ejemplo 3.2, la tasa de interés por 5 años es

$$t_{5\,a} = \frac{100.000}{200.000} = 0{,}5$$

Aún no es posible comparar estas dos tasas de interés puesto que una de ellas está expresada en 30 días y la otra en 5 años. Para determinar cuál es la tasa mayor es necesario expresar ambas en una misma unidad de tiempo.

Es importante notar que las tasas de interés son independientes de la unidad monetaria utilizada. Es decir, si la operación financiera se expresa en otra unidad monetaria, la tasa de interés sigue siendo la misma.

Ejemplo 3.3

Supóngase una situación en la que un dólar (1 U\$D) equivale a tres pesos (\$ 3). Si por un préstamo de 100 dólares se cobra un interés mensual de 30 dólares, la tasa de interés (en dólares) es $\frac{130 - 100}{100} = 0{,}30$.

Si se considera la situación con el equivalente en pesos, se tiene que por un préstamo de \$ 300 se cobra un interés mensual de \$ 90 pesos. Por lo tanto la tasa de interés en pesos es

$$\frac{390 - 300}{300} = \frac{90}{300} = 0{,}30$$

Es así que la tasa de interés es una magnitud *adimensional*, es independiente de la unidad monetaria elegida.

Tanto por uno y tanto por ciento. Es frecuente emplear la notación de porcentajes cuando se trata de tasas de interés, indicando que "la tasa es del tanto por ciento". En este caso, una tasa de interés r se expresa en porcentajes como una tasa del $100r$ %. A modo de ejemplos:

- una tasa de interés del 3% anual es lo mismo que una tasa de interés anual de 0,03; puesto que $3 = 100 \cdot 0{,}03\%$.
- una tasa de interés del 0,125% mensual es una tasa del 12,5 mensual, ya que $0{,}125 \cdot 100 = 12{,}5\%$.
- en el Ejemplo 3.1 la tasa de interés es del 16,566% cada 30 días, mientras que en el Ejemplo 3.2 la tasa de interés por 5 años es del 50 %.

3.3. El interés simple y el interés compuesto

Al realizar una compra en cuotas, al depositar dinero en el banco, al pedir un crédito, y en cualquier operación financiera que involucre el cobro de intereses, siempre se enuncia una tasa de interés de la operación. Esta tasa permite calcular el interés que se cobrará en la operación, si la duración de la misma es una unidad de tiempo.

Ahora bien, si se quiere calcular el interés cobrado en un intervalo de tiempo arbitrario, no es suficiente con conocer la tasa. Es necesario conocer además la fórmula o tipo de interés que se aplica. Existen dos fórmulas diferentes de calcular el interés en base a la tasa, que dan lugar a dos *tipos* de interés: el *interés simple* y *el interés compuesto*.

Cada una de estas fórmulas indica cómo debe calcularse el interés sobre un capital inicial C_I después de un cierto tiempo T. Por ejemplo, si se hace un depósito de \$1.000 a plazo fijo por 3 meses a interés compuesto, con una tasa de interés del 2% mensual, se obtendrá un interés diferente a si se aplica un interés simple, aún con la misma tasa de interés y por el mismo período.

Para cualquiera de las fórmulas, es necesario conocer el capital inicial C_I , el tiempo en que se aplicará la tasa de interés y por supuesto, la tasa de interés r.

3.3.1. Interés simple

En el caso del interés simple, se asume que en cada unidad de tiempo transcurrida se suma una cantidad proporcional al capital inicial, siendo la constante de proporcionalidad la misma tasa de interés. Así, el interés simple luego de n unidades de tiempo está dado por:

$$I = C_I \cdot n\, r$$

y el capital final obtenido es

$$C_F = C_I + I = C_I \cdot (1 + n\, r)$$

Un capital de \$ 4.000 es depositado a una tasa de interés simple del 5% mensual durante dos meses. Esto significa que el interés ganado será, en pesos, igual a $I = 4.000 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 400$, es decir de \$ 400.

Ejemplo 3.4

En una operación en la que se aplica el interés simple, el capital inicial se incrementa a lo largo del tiempo de acuerdo a una progresión aritmética. Es decir, si el capital inicial es C_I y la tasa de interés por unidad de tiempo es r, entonces en las sucesivas unidades de tiempo el capital será:

$$C_I\,,\; C_I + r\, C_I\,,\; C_I + 2\, r\, C_I\,,\; C_I + 3\, r\, C_I\,,\; C_I + 4\, r\, C_I\,, \ldots.$$

Un capital de \$ 1.000 se deposita a una tasa de interés simple del 3% mensual durante 5 meses. Esto significa que al finalizar cada mes se agrega al capital una suma igual a \$ 1.000 · 0,03 = \$ 30. Por, lo tanto el capital se irá incrementando mensualmente de acuerdo a una progresión aritmética de razón 30:

\$ 1.000, \$ 1.030, \$ 1.060, \$ 1.090, \$ 1.120, **\$ 1.150**,

siendo el capital final al cabo de 5 meses igual a \$ 1.150.

Ejemplo 3.5

En la Figura 3.1 se ilustra el incremento del capital en los sucesivos meses. Se puede apreciar en la figura que el crecimiento del capital sujeto a un tipo de interés simple es lineal, es decir, que es posible unir con una línea o recta los puntos correspondientes a los sucesivos capitales.

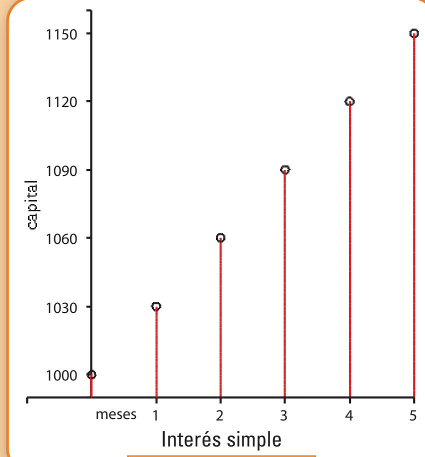


Figura 3.1

3.3.2. Interés compuesto

En el caso del interés compuesto, el interés obtenido en cada unidad de tiempo se *capitaliza*, es decir, pasa a formar parte del capital; de manera que en el período siguiente el interés se calcula sobre el monto formado por el capital inicial y el interés obtenido hasta ese momento.

En el caso del Ejemplo 3.5, los intereses se capitalizan una vez al mes. Así, para obtener el monto al final del primer mes se debe calcular

$$1.000 + 1.000 \cdot 0{,}03 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03) = \mathbf{1.030}$$

al finalizar el segundo

$$1.030 \cdot (1 + 0{,}03) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = \mathbf{1.060{,}90}$$

al finalizar el tercero

$$1.060{,}90 \cdot (1 + 0{,}03) = 1.000 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = \mathbf{1.092{,}727}$$

y así, sucesivamente. De este modo, los sucesivos montos mensuales son:

$ 1.000 $ 1.030 $ 1.060,90 $ 1.092,727 $ 1.125,5088   **$ 1.159,2741**.

Como se puede observar, el monto obtenido al cabo de dos o más unidades de tiempo, calculado según el interés compuesto, es mayor que el obtenido según el interés simple. En la Figura 3.2 se ha ilustrado esta situación superponiendo los puntos correspondientes al monto obtenido según se aplique el interés simple o el interés compuesto. Los puntos superiores son los que corresponden al interés compuesto.

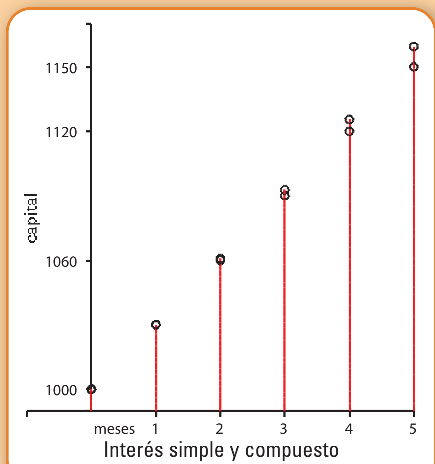


Figura 3.2

Para el interés compuesto, la fórmula general para obtener el capital final, con una tasa de interés r, luego de n unidades de tiempo (n un número natural) es

$$C_F = C_I \cdot (1 + r)^n$$

de donde deducimos que el interés producido está dado por

$$I = C_F - C_I = C_I \cdot ((1 + r)^n - 1)$$

En el caso del interés compuesto con una tasa de interés r, los sucesivos montos obtenidos al final de cada período constituyen una progresión geométrica, siendo la razón igual a $(1 + r)$.

Ejemplo 3.6 Un capital de $ 4.000 es depositado a una tasa de interés compuesto del 5% mensual durante dos meses. Esto significa que al cabo de dos meses, el capital final será de $C_F = 4.000 \cdot (1{,}05)^2 = 4.000 \cdot 1{,}1025 = \$\,4.410$ pesos y el interés ganado será $ 410.

Ejemplo 3.7

Se ha realizado un depósito de $ 1.000 por tres meses con una tasa del 20% mensual. ¿Cuál es el monto a retirar al cabo de tres meses?

En esta situación el depósito se incrementará en un 20% cada mes. Esto significa que los importes sucesivos serán:

$$\text{final del primer mes} = \$1.000 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.200$$

$$\text{final del segundo mes} = \$1.200 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.440$$

$$\text{final del tercer mes} = \$1.440 \cdot 1{,}20 = \$\ 1.728$$

El monto a retirar es de $ 1.728. También podríamos haberlo calculado haciendo $1.000 \cdot (1{,}20)^3 = \$\ 1.728$.

Importante: En la práctica es muy poco frecuente hablar de interés simple o de tasas de interés simple. La razón es que el interés compuesto, a partir de la segunda unidad de tiempo, produce un interés mayor. Por lo tanto, a lo largo de este texto asumiremos que se aplica la fórmula del interés compuesto, a menos que indiquemos lo contrario.

El gráfico de la Figura 3.3 muestra el incremento de un capital de $100 sometido a una tasa de interés mensual del 20% para cada uno de los tipos de interés, simple y compuesto. Puede apreciarse que la diferencia entre los sucesivos capitales es cada vez mayor. Precisamente, el crecimiento de un capital sometido a un tipo de interés simple es *lineal*, mientras que el interés compuesto produce un crecimiento de tipo *exponencial*.

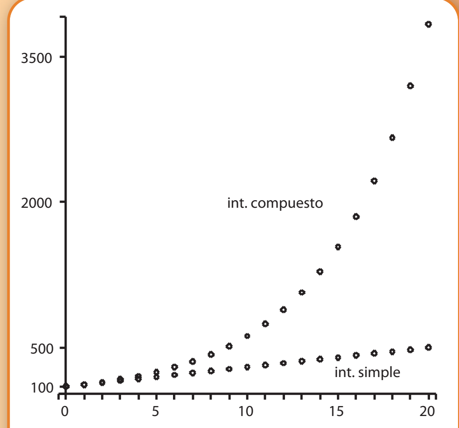


Gráfico comparativo de interés simple y compuesto

Figura 3.3

3.3.3. Tasas de interés proporcionales y equivalentes

Las tasas de interés pueden expresarse en diferentes unidades de tiempo: mensuales, o anuales, o cada 30 días, etc. A la hora de efectuar una operación financiera en la que es posible optar por diferentes tasas, es importante saber distinguir cuál es la tasa más conveniente. Si un individuo debe cobrar un interés, le interesará conocer cuál es la tasa que da mayor rendimiento, es decir, aquella que una misma unidad de tiempo produce un mayor interés. En cambio, si debe pagar un interés, optará por la tasa de menor rendimiento. Sea cual fuera el caso, es importante saber comparar dos tasas de interés.

Dos tasas de interés expresadas en una misma unidad de tiempo pueden compararse fácilmente: una tasa de interés mensual del 20% es mayor que una tasa mensual de 15%, y menor que una del 30 %.

En cambio, si se tienen dos tasas de interés expresadas en diferentes unidades de tiempo, la comparación no es tan sencilla. Por ejemplo, no es del todo claro si una tasa del 1% mensual produce menor, mayor o el mismo interés que una tasa del 12,5% anual, o si una tasa del 20% cada 30 días es *lo mismo* que una tasa mensual del 20 %.

Definición 3.3 Dos tasas de interés r y r' se dicen *equivalentes* si el monto producido por un mismo capital, en un mismo período de tiempo, es el mismo para cada una de las tasas.

Ahora bien, ¿cómo medir un mismo período de tiempo con dos unidades de tiempo distintas? Por ejemplo, un período de un mes, ¿cuántos días tiene? Si bien en la vida real hay meses de 30, 31, 28 y 29 días, y también años de 365 y de 366 días, en matemática financiera se convienen otras relaciones y equivalencias entre las unidades de tiempo año, mes y día. Así, el *año financiero* es de 360 días, y el *mes financiero* de 30 días. Por lo tanto, a lo largo de este texto se asumirán las siguientes relaciones, que por otro lado son las más frecuentes:

$$\begin{aligned} 1 \text{ año} &= 12 \text{ meses} \\ &= 360 \text{ días} \\ 1 \text{ mes} &= 30 \text{ días} \end{aligned}$$

También se emplean, quizás con menor frecuencia, las unidades de tiempo derivadas del mes: bimestre, trimestre, semestre y cuatrimestre. Las relaciones son:

$$1 \text{ año} = 6 \text{ bimestres} = 4 \text{ trimestres} = 3 \text{ cuatrimestres} = 2 \text{ semestres}$$

De acuerdo a esta convención, cada año tiene 12 meses, cada mes tiene 30 días y los años son de 360 días. En particular, esto dice que una tasa mensual r produce el mismo interés en un mes que en 30 días. En otras palabras, que una tasa mensual r es equivalente a una tasa r cada 30 días.

Otro concepto que se utiliza frecuentemente es el de tasas proporcionales.

Definición 3.4 Dos tasas de interés r y $\frac{r}{m}$ se dicen *proporcionales,* si la unidad de tiempo correspondiente a r es m veces la unidad de tiempo correspondiente a $\frac{r}{m}$.

El siguiente ejemplo aclara esta definición:

Ejemplo 3.8 Una tasa de interés anual del 3,6% es proporcional:

- a una tasa de interés mensual del 0,3%, pues un año son 12 meses y $\frac{3,6}{12} = 0,3$,
- a una tasa de interés bimestral del 0,6%, pues un año son 6 meses y $\frac{3,6}{6} = 0,6$,
- a una tasa diaria del 0,01%, pues un año son 360 días y $\frac{3,6}{360} = 0,01$.

Ejemplo 3.9

(Un año de 365 días). En ciertas ocasiones se utiliza la relación

$$1 \text{ año} = 12 \text{ meses} = 365 \text{ días}$$

Esto implica que cada mes tiene más de 30 días, más precisamente, un mes equivale a 365/12 = 30.41 días, aproximadamente.

Por lo tanto una tasa mensual r no es proporcional a una tasa r cada 30 días, ni tampoco son equivalentes. Por ejemplo, una tasa del 5% cada 30 días produce un interés de $ 5 sobre un capital de $ 100 en 30 días, y en consecuencia producirá un interés un poco mayor en 1 mes = 30,41 días.

Si las tasas son proporcionales, entonces producen el mismo interés *simple* en un mismo período de tiempo.

Ejemplo 3.10

Una tasa del 20% mensual aplicado a un capital de $ 1.000, produce un interés simple de $ 600 al cabo de tres meses: 1.000 · 0,2 · 3 = 600.

A su vez, la tasa del 60% trimestral también produce $ 600 de interés al cabo de 3 meses, como lo muestra el cálculo 1.000 · 0,6 · 1 = 600.

Sin embargo, si consideramos la fórmula de interés compuesto, el capital producido por estas dos tasas no es el mismo a lo largo de tres meses. Si volvemos al Ejemplo 3.7, vemos que una tasa trimestral del 60% (proporcional a la tasa mensual del 20 %) producirá un capital final de $ 1.600, mientras que la tasa del 20% mensual produce un capital final de $ 1.728. Esto significa que la tasa del 20% mensual produce un interés del 72,8% trimestral. Por lo tanto, una tasa del 20% mensual es *equivalente* a una tasa del 72.8% trimestral.

Ejemplo 3.11

Si se considera un capital de $ 1.000 sujeto a una tasa de interés del 2% mensual, al cabo de un año se tendrá un capital igual a

$$\$\, 1.000 \cdot (1{,}02)^{12}$$

por lo que el interés producido es

$$\$\, 1.000 \cdot ((1{,}02)^{12} - 1)$$

La tasa de interés anual es entonces

$$r = (1{,}02)^{12} - 1 = 0{,}2682\%$$

Por lo tanto una tasa del 2% mensual es proporcional a una tasa del 24% anual, y equivalente a una tasa del 26,82% anual.

El Ejemplo 3.11 es útil para remarcar que, si bien un año tiene 12 meses, la tasa equivalente anual no se obtiene multiplicando por 12 a la tasa mensual cuando se trata de un interés compuesto.

Ejemplo 3.12

Una tasa del 3% mensual es proporcional a una tasa del 36% anual. Para determinar la tasa equivalente anual calculamos el interés producido por una unidad de capital en un período de un año. Esto es $I = (1{,}03)^{12} - 1 = 0{,}42576$, es decir que es equivalente a una tasa del 42,576% anual.

Existe una notación usual para referirse a las tasas proporcionales y equivalentes de una tasa de interés r determinada. La notación es la siguiente:

Notación: Si r es una tasa de interés asociada a una unidad de tiempo u, denotaremos con $r^{(m)}$ a la tasa de interés proporcional asociada a m unidades de tiempo y $r_{(m)}$ a la tasa equivalente a r asociada a m unidades de tiempo. Las fórmulas correspondientes son:

$$r^{(m)} = m \cdot r\ ,\ r_{(m)} = (1 + r)^m - 1$$

Si $m = 1$, entonces tenemos que $r^{(1)} = r_{(1)} = r$.

Ejemplo 3.13

Consideremos una tasa r del 5% mensual, es decir, $r = 0{,}05$. Entonces:

1. La tasa proporcional anual es $r^{(12)} = 12 \times 0{,}05 = 0{,}6$, o sea, del 60% anual.
2. La tasa equivalente anual es $r_{(12)} = (1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}795856$, es decir del 79,5856% anual.
3. La tasa proporcional diaria es $r^{(1/30)} = \frac{0{,}05}{30} = 0{,}001667$, es decir del 0,1667% diario.

3.3.4. Relación entre $r^{(m)}$ y $r_{(m)}$

En el Ejemplo 3.11 se puede observar que si $r = 1$ es la tasa mensual, entonces la tasa proporcional anual $r^{(12)}$ es menor que la tasa equivalente anual $r_{(12)}$. Esto no es un hecho casual. Puede demostrarse que la tasa equivalente a m períodos de tiempo (con $m > 1$) es mayor que la tasa proporcional correspondiente.

La aclaración $m > 1$ es importante, pues de lo contrario se da la relación inversa.

Ejemplo 3.14

Si $r = 0{,}6$ es una tasa anual, entonces $r^{(1/12)} = \frac{0{,}6}{12} = 0{,}05$ es la tasa proporcional mensual. La tasa equivalente mensual se obtiene planteando la ecuación:

$$(1 + r_{(1/12)})^{12} = 1 + 0{,}6$$

cuya solución es

$$r_{(1/12)} = \sqrt[12]{1{,}6} - 1 = 0{,}03994411$$

una tasa inferior a 0,05.

Proposición 3.1

Dada una tasa de interés r, un entero m, siendo $m > 1$, y las correspondientes tasas proporcional y equivalente $r^{(m)}$ e $r_{(m)}$, se verifica que

$$r^{(m)} < r_{(m)}$$

Demostración

Para demostrar esto, en primer lugar debe notarse que

$$(1 + \frac{r^{(m)}}{m})^m = 1 + r_{(m)}$$

Esta relación se deduce de las correspondientes definiciones de $r_{(m)}$ y $r^{(m)}$.

Ahora bien, la potencia de un binomio del tipo $(1 + \frac{r}{m})^m$ puede desarrollarse como una suma de potencias de $\frac{r}{m}$, más precisamente:

$$(1+\frac{r}{m})^m = 1 + m\,\frac{r}{m} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (\frac{r}{m})^k$$

Esta suma es estrictamente mayor que $1 + r$ si $m > 1$, por lo tanto, si reemplazamos r por $r^{(m)}$ se obtiene que $(1+\frac{r^{(m)}}{m})^m > 1 + r^{(m)}$. Es inmediato entonces que

$$r_{(m)} > r^{(m)}.$$

3.3.5. Tasas de interés nominal, periódica o real y equivalente

Es frecuente que en las operaciones financieras se enuncia una tasa de interés, pero la capitalización de intereses, o los pagos, se efectúan en períodos menores. Por ejemplo, para un plazo fijo a tres meses se enuncia una tasa de interés del 6% anual. Esto significa que en realidad se aplica una tasa del 1,5% (es decir 6/4 %) trimestral, pero se enuncia la tasa proporcional anual: 6 %. Esta tasa del 6% se denomina *tasa nominal anual*, y se simboliza como T.N.A.

La tasa de interés equivalente anual se llama *tasa equivalente anual* y se simboliza T.E.A.

Ejemplo 3.15

Un banco enuncia una tasa de interés nominal anual del 0,6% con capitalización mensual de intereses. Esto indica que mensualmente se aplicará una tasa real del 0,05% mensual, y que la T.E.A. es del $(1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}79585\%$ anual.

Resumiendo, si se considera como unidad de tiempo la m-ésima parte de un año, y para este período se aplica una tasa de interés i, se llama tasa nominal anual a la tasa proporcional anual y tasa equivalente anual a la tasa equivalente anual:

$$\text{T.N.A.} = i^{(m)}, \ \text{T.E.A.} = i_{(m)}$$

Observemos que la T.N.A. sólo es una tasa enunciada, pero no indica nada sobre el rendimiento a lo largo del año.

3.4. El interés aplicado en fracciones de tiempo

Si se aplica una tasa de interés mensual r en un depósito de \$ 1.000, entonces el capital formado al cabo de n meses es \$1.000 $(1 + r)^n$. Ahora bien, ¿cuál es el capital al cabo de 1 mes y medio?, ¿o al cabo de 20 días? La pregunta general es: ¿cómo se calcula el interés cuando el tiempo transcurrido no es un múltiplo de la unidad de tiempo considerado?

Existen distintas opciones que se describen a continuación.

Opción 1 Capitalización mixta. Una posibilidad es aplicar el interés compuesto sobre las primeras unidades de tiempo, y en la última fracción de tiempo emplear un tipo de interés simple. Por ejemplo, si un individuo deposita a una tasa del 3% mensual un capital de \$ 500 durante 45 días, entonces la forma de calcular el capital final es aplicar interés compuesto el primer mes, e interés simple el medio mes restante. De este modo el capital final es:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03)\,(1 + \frac{0{,}3}{2}) = \$\ 522{,}725$$

Opción 2 Interés compuesto. Una posibilidad es expresar el tiempo en la unidad de tiempo considerada, y aplicar la fórmula de interés compuesto. En el caso del ejemplo anterior, dado que 45 días equivale a 1,5 meses (un mes y medio), entonces se calcula el capital final como:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03)^{1{,}5} = \$\ 522{,}6679$$

Opción 3 Una tercera opción es considerar sólo las primeras unidades de tiempo y no capitalizar en la última fracción de tiempo. En el ejemplo equivale a capitalizar los intereses sólo el primer mes y no aplicar la tasa de interés en el medio mes restante. Así el capital final será:

$$C_F = \$\ 500\,(1{,}03) = \$\ 515$$

La representación gráfica de estos casos es la que se observa en la Figura 3.4.

De estas tres opciones, la que se utiliza más frecuentemente es la primera. Observemos que el monto es menor que en el segundo caso, lo cual favorece a quien debe pagar intereses (en general, al banco).

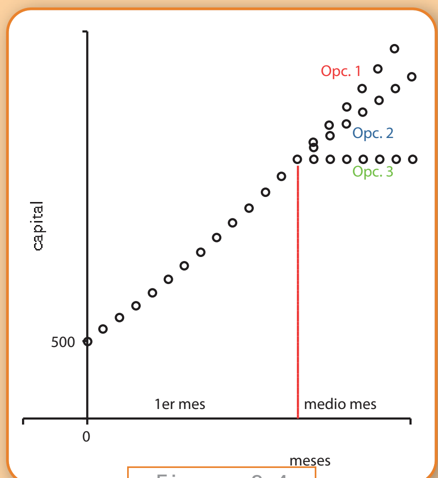


Figura 3.4

3.5. Si la incógnita es el tiempo

Puede ocurrir que un individuo desee depositar una cierta cantidad de dinero C_I en una cuenta, a una determinada tasa de interés r, y quiera saber cuánto tiempo debe depositarla para que su capital ascienda a C_F .

¿Cuánto tiempo debe depositarse un capital de $ 38.000, colocándolo a una TNA del 9% con capitalización mensual, para obtener un capital final de $ 55.833? **Ejemplo 3.16**

Para resolver esta situación se debe despejar la incógnita r de la fórmula del interés compuesto: $C_F = C_I\,(1 + r)^t$. Dividiendo en primer lugar ambos miembros por C_I :

$$(1+r)^t = \frac{C_F}{C_I}$$

la forma de despejar t es aplicando logaritmo en ambos miembros, cualquiera sea la base del logaritmo:

$$\log\big((1+r)^t\big) = \log\big(\frac{C_F}{C_I}\big)$$

Hemos utilizado las propiedades conocidas de la función logaritmo:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b), \quad \log(a/b) = \log(a) - \log(b), \quad \log(a^r) = r\log(a),$$

la fórmula para obtener t es

$$\boxed{t = \frac{\log(C_F) - \log(C_I)}{\log(1+r)}}$$

En el caso del Ejemplo 3.16, se tiene que el tiempo en meses es

$$t = \frac{\log(55.833) - \log(38.000)}{\log(1{,}0075)} = 51{,}4960076$$

es decir 51 meses y medio.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios en orden de dificultad creciente.

3.6. Ejercicios

Dada una tasa nominal de interés del 0,60 = 60% anual, calcular la T.E.A. si la capitalización es **Ejercicio 3.1**

a) mensual, **b) bimestral.**

Calcular la tasa nominal anual con capitalización trimestral, sabiendo que la tasa de interés equivalente anual es del 15%. Calcular además la tasa periódica que rige la capitalización. **Ejercicio 3.2**

Un capital de $1.000 es depositado en una cuenta, a una T.N.A. del 1% con capitalización trimestral. Calcular el capital que será posible retirar al cabo de 225 días (2 trimestres y medio). **Ejercicio 3.3**

Ejercicio 3.4 De una caja de ahorro en la que se aplica el interés simple, se sabe que hoy, 5 meses después de haberla abierto con un depósito de $ 2.500 pueden retirarse $ 2.550. ¿Cuánto podría retirarse si se espera hasta el octavo mes? ¿Cuál es la tasa de interés mensual simple que aplica dicha cuenta?

Ejercicio 3.5 ¿Cuál es el capital final correspondiente a un capital inicial de $ 20.000, colocado a un interés del 15% anual, durante 2 años, si se capitaliza anualmente?

Ejercicio 3.6 Calcular el interés obtenido sobre un depósito de $ 59.500 colocados a una T.N.A. del 10 %, durante 3 años, con capitalización semestral.

Ejercicio 3.7 Calcular el capital que debe depositarse a una T.N.A. del 10% con capitalización trimestral, para que al cabo de 6 años y medio el capital sea de $ 105.600.

Ejercicio 3.8 Calcular el tanto por ciento mensual al que se debe colocar un capital de $ 5.000, para que al cabo de 60 días el monto sea de $ 5.304,50.

Ejercicio 3.9 Calcular el tiempo que debe depositarse un capital de $ 1.000, colocado a interés del 5% mensual, para transformarse en $ 3.386,46.

Capítulo 4

El Descuento

4.1. Introducción

Existen documentos comerciales que implican promesas de pago futuro. Es decir, manifiestan el compromiso de una persona a pagarle a otra una determinada cantidad de dinero en un cierto plazo. Tal es el caso de los pagarés y las letras de cambio o giros bancarios, de las cuales se hará referencia explícita en el Capítulo 5.

La cantidad de dinero que expresa el documento se denomina *valor nominal*, y el plazo de pago es el *vencimiento* del documento. Si un individuo tiene en su poder un documento de un determinado valor nominal N cuyo vencimiento se operará en un futuro, y si lo quisiera transferir, vender o negociar antes de su vencimiento, seguramente no podrá hacerlo por el valor nominal N, sino por uno inferior, simplemente porque N representa un valor futuro.

Por ejemplo, una persona posee un pagaré por \$ 1.000 con vencimiento a 30 días, pero necesita efectivo para afrontar ciertos gastos. Quien acepte este pagaré a cambio de una cantidad E de dinero, asume que está prestando este efectivo a cambio de recibir \$ 1.000 en 30 días. Por lo tanto el efectivo E será seguramente menor que \$ 1.000, dado que cualquier préstamo supone interés. Así, los \$ 1.000 corresponderán al préstamo E más el interés.

La forma de calcular E es a través de una *actualización* del capital de \$ 1.000, asumiendo una determinada tasa de interés. Se dice que se ha realizado un **descuento** sobre el valor del documento.

4.2. Operación de descuento

En una operación financiera de descuento, existe un proceso de actualización de un capital disponible en un futuro. Por lo general, se trata de documentos con vencimiento: cheques diferidos, bonos, certificados de deuda, pagarés, etc., que poseen un determinado valor al momento de su vencimiento, pero que mientras tanto sólo son promesas de pago futuro.

El descuento puede verse como una operación financiera en la cual se presta una cantidad E, y al cabo de cierto tiempo t se devuelve el valor N. La cantidad $N - E$ es el interés cobrado en la operación y, por lo tanto, se tiene que el descuento y el interés, como cantidades de dinero, son las mismas.

Ejemplo 4.1 Considérense las siguientes situaciones:

a) A le presta a B la suma de \$ 80, a cambio de que B le devuelva al mes \$ 100.

b) B posee un pagaré por \$ 100 con vencimiento en un mes. A le canjea este documento a B por \$ 80.

El caso a) se considera una operación en la que se cobra un interés por un préstamo, y el caso b) se dice que es una operación en la que se realiza un descuento. Sin embargo, en ambos casos la operación financiera, desde el punto de vista del flujo de dinero, es la misma: A le entrega \$ 80 a B y recibe \$ 100 al mes, es decir que ha cobrado \$ 20 de interés. Por ello, no debe perderse de vista que toda operación de descuento puede verse como una operación financiera en la que hay un capital inicial, un capital final y un interés.

La característica de una operación de descuento es que ésta se realiza sobre un documento que es promesa de pago futuro. Debe notarse que, si bien el documento está disponible al momento de hacer la operación, su valor nominal estará disponible más adelante. Asimismo, aparentemente el descuento se realiza al comienzo de la operación, pero la realidad es que el valor que se descuenta estará disponible al final de la operación, en el momento en que el documento puede ser cobrado. Así, en el Ejemplo 4.1 b), hay un descuento de \$ 20, sin embargo, estarán disponibles para A al momento del vencimiento del pagaré y no al momento de hacer el descuento.

Algunos de los elementos intervinientes en una operación de descuento son:

1. N: **Valor Nominal** del documento sobre el cual se producirá un descuento, es decir, lo que valdrá el documento al momento de su vencimiento. Este capital estará disponible en un tiempo t, que es el tiempo de duración de la operación financiera.

2. E: **Valor efectivo**, o valor actual, o valor presente de dicho documento.

3. r: **Tasa de interés** que rige la operación, bajo la cual se calcula el valor presente del documento.

4. D: **Descuento**, cantidad descontada sobre este documento.

5. t: **Tiempo** de duración de la operación.

La relación entre estos elementos es

$$D = N - E \qquad N = E \cdot (1+r)^t \qquad E = N \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$$

Dado que N es un valor disponible en un futuro, se dice que E es el *valor presente* o *valor actual* de N. Asimismo, el factor $\frac{1}{(1+r)^t}$ se dice *factor de actualización*, y $(1 + r)^t$ es el *factor de capitalización*.

Se utilizará también la notación simplificada $u = (1+r)$ y $\nu = \dfrac{1}{1+r} = \dfrac{1}{u}$.

4.2.1. Tasa de descuento

Si bien en una operación de descuento, el interés y el descuento se refieren a una misma cantidad, no ocurre esto con la tasa de interés y la tasa de descuento.

La tasa de interés se calcula con respecto al capital inicial, es decir, con respecto al valor efectivo del documento. En cambio, la tasa de descuento es con respecto al capital final o valor nominal del documento.

La **tasa de descuento** d es el descuento producido sobre un valor nominal unitario en una unidad de tiempo. | **Definición 4.1**

Es decir, dado un documento con valor nominal N, la tasa de descuento es el descuento que se realiza sobre dicho documento por unidad de capital en una unidad de tiempo. Así, si el vencimiento de N es en una unidad de tiempo ($t = 1$), las fórmulas para el cálculo de d y de la tasa de interés r son:

$$d = \frac{N-E}{N} = \frac{D}{N} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{N-E}{E} = \frac{D}{E}$$

A su vez, usando que $N = E\,u$ y que $E = N$_, se obtienen las siguientes relaciones entre r y d:

$$\begin{aligned} d &= \frac{D}{N} = \frac{D}{E\,u} = \frac{D}{E}\frac{1}{u} = \frac{r}{u} = \nu\, r \\ &= \frac{N - N\nu}{N} = 1 - \nu \end{aligned}$$

Así, d es en términos de r:

$$\boxed{d = \frac{r}{1+r} = \nu r \qquad \text{y} \qquad d = 1 - \nu}$$

De estas fórmulas podemos despejar r en función de d para obtener:

$$\boxed{r = \frac{d}{1-d} \qquad \text{y} \qquad r = u\,d}$$

En particular, como $u > 1$, se deduce que la tasa de descuento es menor que la tasa de interés: $d < r$.

El gráfico 4.1 ilustra la operación de descuento tomando como unidad de tiempo la duración de la misma.

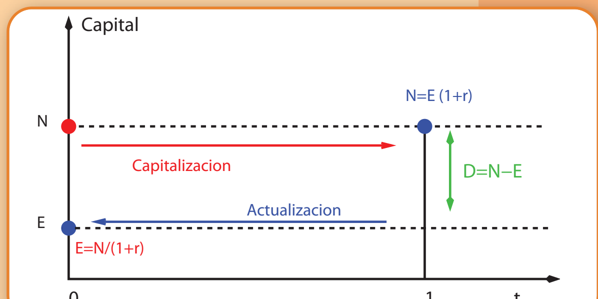


Gráfico 4.1

4.3. El descuento compuesto

Dada una tasa de descuento, el valor efectivo obtenido por un documento depende del tipo de descuento aplicado. El más frecuente es el tipo de descuento compuesto, que de manera análoga al interés compuesto, se aplica sucesivamente en cada período de tiempo. Así, dada una tasa de descuento d, un documento con valor nominal N y vencimiento en n períodos de tiempo, los sucesivos valores descontados serán:

$$N, \quad N(1-d), \quad N(1-d)^2, \quad \ldots \quad N(1-d)^n,$$

siendo $N(1-d)^n$ el valor efectivo obtenido por el documento.

Ejemplo 4.2

Dada una tasa de descuento mensual del 5 %, el valor efectivo por un pagaré de valor nominal \$ 3.500 será de:

\$ 3.325 un mes antes de su vencimiento: $3.500\ (1-0{,}05) = 3.500 \cdot 0{,}95 = 3.325$

\$ 3.158,75 dos meses antes de su vencimiento: $3.500\ (1-0{,}05)^2 = 3.500 \cdot 0{,}95^2 = 3.158{,}75$

\$ 2.708,23 cinco meses antes de su vencimiento: $3.500\ (1-0{,}05)^5 = 3.500 \cdot 0{,}95^5 = 2.708{,}23$

4.3.1. Tasa nominal de descuento

De manera análoga a la definición de Tasa Nominal Anual de Interés, se define también la Tasa Nominal Anual de Descuento (TNAD). Dada una tasa de descuento d, se define la tasa nominal anual a la tasa proporcional anual:

$$\text{Tasa Nominal Anual de Descuento} \quad = d^{(m)} = m\,d$$

donde m es el número de veces en que la unidad de tiempo, a la cual se refiere d, está contenida en el año.

Lo usual es que se enuncie la tasa nominal de descuento, y se calcule la tasa real de descuento mediante la fórmula:

$$d = \frac{d^{(m)}}{m}$$

Dada la tasa real de descuento, el valor efectivo obtenido por un documento de valor nominal N y vencimiento t se calcula como:

$$E = N\,(1-d)^t$$

y en consecuencia el descuento es $D = N\,(1-(1-d)^t)$.

Ejemplo 4.3

La empresa EMPRE S.A. decide descontar un cheque por un importe de \$ 90.000 que vence dentro de 45 días en una institución que ofrece una TNAD con capitalización a 60 días del 24%.

En este caso, tenemos que la unidad de tiempo de la operación de descuento es de 60 días, y el período de la operación es de 45 días. Así, $m = 6$, TNAD= $d^{(6)} = 0{,}24$, y la tasa real de descuento es $d = \frac{0{,}24}{6} = 0{,}04$. El plazo de la operación expresado en esta unidad de tiempo es $t = 45/60 = 0{,}75$. Por lo tanto, el valor efectivo obtenido por el descuento al cheque es:

$$E = 90.000\left(1 - 0{,}24\right)^{0{,}75} = 90.000\left(0{,}76\right)^{0{,}75} = 73.257{,}6029$$

El descuento efectuado sobre el cheque es de \$ 16.742,3971

Ejemplo 4.4

Una institución enuncia una tasa nominal de descuento del 60% anual con capitalización semestral. Si se descuenta en dicha institución un pagaré de \$ 1.000, 6 meses antes de su vencimiento, ¿Cuál es el valor efectivo obtenido en dicha operación?

Solución. Dado que el plazo de la operación es de 6 meses, la tasa de descuento a aplicar es $d = 0{,}6 / 2 = 0{,}3$ semestral. El descuento es:

$$D = \$\ 1.000 \times 0{,}30 = \$\ 300$$

y por lo tanto el valor efectivo es $E = N - D = \$\ 700$

La tasa de interés de la operación se calcula en relación al valor efectivo, es decir:

$$r = \frac{300}{700} = 0{,}4286 \text{ semestral}$$

que también se puede calcular a partir de d por la fórmula $r = \frac{d}{1-d}$.

Así, se cumple que $E = \$\ 1.000\ (1 + 0{,}4286)^{-1} = 700$.

4.3.2. Tasas de descuento equivalentes

Dos tasas de descuento se dicen equivalentes si producen un mismo descuento sobre un mismo capital en una misma unidad de tiempo.

El símbolo $d_{(m)}$ denotará la tasa de descuento equivalente a d, asociada a m unidades de tiempo a las que corresponde d. Por ejemplo, si d es una tasa de descuento mensual, entonces $d_{(12)}$ es la tasa de descuento equivalente anual.

La relación entre la tasa de descuento d y su equivalente $d_{(m)}$ está dada por:

$$\boxed{d_{(m)} = 1 - (1 - d)^m}$$

Ejemplo 4.5

En un banco se ha efectuado el descuento de un documento de \$ 4.000, 30 días antes de su vencimiento, siendo la tasa nominal anual de descuento de 1,8% con capitalización mensual. Calcular: el valor efectivo, la tasa de descuento, la tasa de interés de la operación, la tasa de interés equivalente anual y la tasa de descuento equivalente anual.

Solución: Puesto que el mes financiero es de 30 días, se tiene que $m = 12$ y la tasa nominal es $d^{(12)} = 1{,}8\%$ anual. El valor nominal del documento es $N = \$\ 4.000$. La tasa de descuento aplicada es:

$$d = \frac{d^{(12)}}{12} = \frac{1{,}8\%}{12} = 0{,}15\% \text{ para 30 días}.$$

La tasa de interés de la operación es:

$$r = \frac{d}{1-d} = \frac{0{,}0015}{0{,}9985} = 0{,}001502 = 0{,}1502\% \text{ para 30 días.}$$

El valor efectivo es $E = N(1 - d) = \$\ 4.000 \times 0{,}9985 = \$\ 3.994$

La tasa de interés equivalente anual y la tasa de descuento equivalente anual están dadas por:

$$r_{(12)} = (1+r)^{12} - 1 = (1{,}001502)^{12} - 1 = 1{,}81\%$$

y

$$d_{(12)} = 1 - (1-d)^{12} = 1{,}78\%.$$

También puede aplicarse la fórmula $d_{(12)} = \dfrac{r_{(12)}}{1+r_{(12)}} = \dfrac{0{,}0181}{1{,}0181} = 0{,}0178 = 1{,}78\%$

4.4. Otros tipos de descuento

Existen otros métodos para calcular el descuento sobre un documento. En particular, analizaremos los siguientes:

- el descuento simple comercial, y
- el descuento racional o matemático.

4.4.1. El descuento simple comercial

Consiste en descontar del documento una cantidad proporcional al tiempo que falta para su vencimiento. La constante de proporcionalidad es la tasa de descuento correspondiente. Así, dada una tasa de descuento d, el valor efectivo de un documento con valor nominal N se calcula como

$$E = N(1 - d\,t)$$

donde t es el tiempo que falta para el vencimiento del documento.

Ejemplo 4.6 El valor efectivo de una letra de cambio de $ 1.000 de valor nominal, descontado por una entidad financiera que aplica un descuento simple del 10% anual está dado por:

$$E = 1.000\,(1 - 0{,}1\,t)$$

donde t es el tiempo expresado en años. Por lo tanto, si la letra se descuenta un mes antes de su vencimiento, el valor efectivo será:

$$E = 1.000\left(1 - 0{,}1\,\frac{1}{12}\right) = \$\ 991{,}67$$

si se descuenta 6 meses antes de su vencimiento será:

$$E = 1.000\left(1 - 0{,}1\,\frac{1}{2}\right) = \$\ 950$$

y un año y medio antes de su vencimiento será:

$$E = 1.000\ (1 - 0{,}1 \cdot 1{,}5) = \$\ 850.$$

La desventaja de este tipo de descuento es que para valores de t mayores que d^{-1} el descuento es mayor que el valor nominal N. En otras palabras, al negociar el documento no se obtendría dinero a cambio sino que habría que pagar por él.

En el Ejemplo 4.6, si el documento se descuenta 10 años antes (t = 10) se obtiene un valor efectivo nulo, E = 0, y por más de 10 años el valor efectivo es negativo.

Ejemplo 4.7

Un documento de $ 100.000 que vence a los 180 días es descontado en una institución bancaria que cobra un 15% anual de descuento del tipo simple comercial. ¿Cuál es el descuento que sufre el titular y cuánto recibe en efectivo?

Solución. Lo que recibe el titular es el valor efectivo del documento luego de aplicarse el descuento. La unidad de tiempo es el año, por lo que el plazo de la operación es t = 180/360 =0,5. Dado que se aplica un tipo de descuento simple comercial, este valor es

$$E = 100.000 \cdot (1 - 0{,}15 \cdot 0{,}5) = \$\ 92.500$$

por lo que el descuento efectuado sobre el valor nominal es de $ 7.500.

4.4.2. Descuento simple racional

Este tipo de descuento evita la situación de tener un valor efectivo negativo. El valor efectivo E sobre un valor nominal N con vencimiento t para una tasa de descuento d está dada por:

$$\boxed{E = \frac{N}{1 + dt}}$$

De esta manera se tiene que $N = E/(1 + dt)$, es decir que el valor de E se calcula como el capital que debe depositarse durante un tiempo t a una tasa de interés simple d para que su valor final sea N.

El valor efectivo E se obtiene del cociente entre el valor nominal del documento y una expresión positiva: $1 + dt$. Por lo tanto, E no puede ser nulo ni negativo.

Además, de la fórmula de diferencias de cuadrados:

$$(1 + dt)\,(1 - dt) = 1 - (dt)^2$$

Y, observando que $1 - (dt)^2 < 1$ y $1 + dt > 0$, se sigue que $1 - dt < \dfrac{1}{1 + dt}$. Por lo tanto,

$$\frac{N}{1 + dt} \geq N \cdot (1 - dt)$$

Esto implica que el valor efectivo que se obtiene según el descuento racional es siempre mayor que en el descuento simple.

Asimismo, se puede calcular que el valor efectivo que se obtiene al tiempo $t = 1/d$ antes del vencimiento es

$$E = \frac{N}{1 + d\,\frac{1}{d}} = \frac{N}{2}$$

Esto es, el valor efectivo es la mitad del valor nominal, mientras que para el descuento simple comercial el descuento es por todo el documento.

El gráfico 4.2 ilustra la comparación, para una misma tasa de descuento d, entre el valor efectivo que se obtiene según el descuento simple comercial y el descuento racional o matemático.

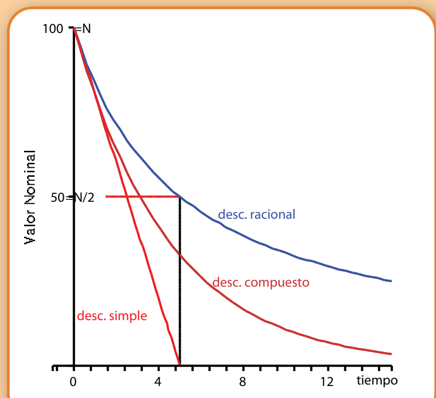


Gráfico 4.2

4.5. Ejercicios

Ejercicio 4.1

Una letra de cambio está firmada por $ 2.730 con vencimiento para el 22 de octubre. El tenedor de la misma desea hacerla efectiva el 4 de septiembre del mismo año y acude a un banco que le cobra una tasa mensual de descuento del 2 %. Determinar el valor descontado que recibirá por la letra de cambio y el descuento que le hace el banco suponiendo: a) Descuento racional b) Descuento comercial.

Ejercicio 4.2

Se realiza el descuento de un documento cuyo valor nominal es de $ 10.752,16. Sabiendo que el documento vence dentro de 90 días y la tasa nominal anual de descuento es del 27%, calcular:

1. **el valor efectivo a cobrar,**
2. **la tasa de interés equivalente anual y la tasa de descuento anual.**
3. **¿Cuál debería haber sido el valor nominal de descuento, para obtener el mismo valor efectivo con una tasa nominal anual del 23%?**

Ejercicio 4.3

Un documento tiene un valor efectivo de $ 890 si se lo descuenta 78 días antes de su vencimiento a una tasa del 8,1% trimestral simple. Calcular cuál es el valor nominal para ambos tipos de descuento: comercial y racional.

Ejercicio 4.4

Si se aplica descuento racional a un cheque diferido 8 meses antes del vencimiento, se deberá descontar una sexta parte del valor nominal del mismo. Determinar la tasa anual de descuento.

Capítulo 5

Operaciones financieras

5.1. Introducción

En este capítulo describiremos ciertas operaciones financieras básicas, algunas de las cuales ya hemos mencionado en los ejemplos y ejercicios anteriores. Fundamentalmente, consideraremos aquellas operaciones financieras en las cuales la tasa de interés está preestablecida, y por lo tanto se puede conocer su rendimiento financiero. Este tipo de operaciones se denomina *sin riesgo*.

Las operaciones *con riesgo* son aquellas cuyo rendimiento tiene una componente de azar o aleatoriedad. Un ejemplo, es la inversión en acciones de una determinada empresa. Como veremos más adelante, una acción es la posesión de una pequeña parte de la empresa: si la empresa prospera, la acción aumenta su valor, pero si la empresa quiebra, la acción pierde todo su valor. Otros ejemplos de operaciones con riesgo son la inversión en contratos forwards, futuros, opciones, etc., todas estas derivadas de la inversión en acciones.

Ahora bien, si existe la posibilidad de perder dinero, ¿por qué alguien preferiría invertir en una operación riesgosa? Principalmente, porque en general estas opciones otorgan mayores beneficios o ganancias que un simple depósito bancario, por supuesto, siempre que el inversor sea hábil y buen conocedor del mercado bursátil.

5.2. Formas de pago

Siempre que se realiza una operación financiera hay dinero involucrado. Ahora bien, no siempre este dinero se paga con billetes o monedas. Existen otras formas de pagar: con cheque, con tarjeta de crédito, con tarjeta de débito, con tarjetas de compra, etc. En esta sección definiremos algunas de estas formas de pago.

5.2.1. El cheque

Un cheque es un documento comercial. Consiste en una orden de pago librada contra un Banco en el cual el librador tiene fondos depositados a su orden en cuenta corriente o autorización para girar en descubierto (ver Depósito en cuenta corriente). En este documento deben constar diferentes datos y leyendas:

1. la denominación *cheque* inserta en su texto;
2. el *número de orden* impreso en el cuerpo del cheque y talón;
3. el *lugar* y *fecha* de emisión;
4. nombre y domicilio del *banco*;
5. expresión de si es a la orden, al portador o a favor de determinada persona;
6. la *cantidad* librada escrita en números y letras, especificando el tipo de moneda;
7. la *firma* del librador.

Ahora bien, ¿quién puede cobrar un cheque en el banco? Esto depende del tipo de cheque, y según esto se clasifican de la siguiente manera:

Cheque al portador: significa que el banco pagará el importe del mismo a cualquier persona que lo presente al cobro. Así es que si alguien pierde o le roban un cheque al portador, debe realizar de inmediato la denuncia para que el banco retenga el cheque y no lo pague a cualquier persona.

Cheque a favor de determinada persona o "a la orden": en este caso, el librador consigna el nombre del beneficiario seguido o no de "a su orden". Esto significa que sólo éste beneficiario podrá cobrar el cheque, o bien puede transmitirlo a un tercero por medio de un endoso. El banco lo pagará verificando previamente la autenticidad de la firma del librador y la del último endosante.

Cheque a favor de determinada persona, "no a la orden": aquí el banco paga a la persona cuyo nombre figure en el documento o cheque, o también puede ser depositado en la cuenta bancaria del beneficiario, pero no son transmisibles de persona a persona.

Cheque cruzado en general: son los cheques que llevan trazadas dos líneas paralelas transversales a su texto, entre las líneas puede consignarse "no negociable". Puede ser transferido de una persona a otra por vía del endoso, pero no puede cobrarse en la ventanilla de un banco, sino que tiene que ser depositado en cuenta. Si desea cobrarlo deberá endosarlo y depositarlo en su cuenta bancaria, luego librar un cheque de su propia firma pudiendo cobrar el efectivo transcurridas 24, 48 ó 72 horas.

Cheque cruzado en especial: tiene las mismas características del anterior, pero entrelíneas transversales el nombre de un determinado banco, sólo puede ser cobrado en ese banco.

Cheque conformado: el banco contra el cual se ha girado deja una constancia en el mismo cheque, asegurando que el librador posee fondos en su cuenta. Se emplean cuando se hacen determinadas transacciones, tienen por objeto garantizar la existencia de fondos ante quien ha de recibirlos.

Cheque del viajero: son los cheques que expiden los bancos a su propio cargo, siendo pagaderos en el mismo Banco, en sus sucursales o en otros que actúan como sucursales. Son utilizados por las personas que viajan y no desean llevar consigo grandes cantidades de dinero.

Cheque diferido: son órdenes de pago libradas a una fecha determinada, posterior a la fecha de su libramiento. A la fecha de *vencimiento*, el librador debe tener fondos suficientes depositados a su orden en cuenta corriente o autorización para girar en descubierto. El plazo máximo admitido para la emisión de un cheque de esta naturaleza es de 360 días.

Estos cheques son importantes para los que inician un pequeño o mediano emprendimiento y requieren de dinero anticipado. De esta manera, pueden adquirir el equipamiento necesario para poner en marcha la empresa, y pagar más adelante cuando haya comenzado la producción.

Por otra parte, los cheques diferidos son negociables. Esto significa que cotizan en el mercado, por lo cual se constituyen en documentos que pueden venderse y comprarse, de manera similar que los bonos de deuda, las acciones, y otros valores de riesgo.

5.2.2. Pagarés, giros y letras de cambio

Así como el cheque diferido es una orden de pago para una fecha posterior a la emisión del documento, existen otras formas de pago diferido: el pagaré y el giro o letra de cambio.

Pagaré: es un documento que registra la promesa incondicional de pago por parte del emisor o suscriptor, respecto a una determinada suma, con o sin intereses y en un plazo estipulado en el documento a favor del beneficiario o tenedor.

Letra de cambio: es un documento que expresa una promesa de pago de una suma determinada a un tercero, al vencimiento y en el lugar estipulado en el documento. Las partes que intervienen en una letra de cambio son:

- **librador:** es quien ordena el pago.
- **librado o fiado:** es quien debe pagar. Usualmente es una entidad bancaria.
- **beneficiario o tenedor:** es quien recibirá el pago de la suma.

5.2.3. Dinero electrónico

Llamamos dinero electrónico a la forma de pago mediante tarjetas. Principalmente se utilizan tres formas de pago con tarjeta: tarjeta de débito, tarjeta de crédito y tarjeta de compra.

Tarjeta de crédito: Este tipo de tarjeta posibilita diferir el pago de las compras efectuadas; comprar en cuotas con base en un plan de pagos predeterminado, o realizar un pago mínimo sobre consumos efectuados y financiar el saldo restante. De esta manera, es posible efectuar una compra sin tener al momento los fondos para pagarlos, pero teniendo la certeza que se los tendrá en un futuro para poder saldar la deuda contraída a través de la tarjeta.

Generalmente, la tarjeta de crédito está asociada a una cuenta bancaria, pero también existen otras entidades que ofrecen tarjetas de crédito.

Tarjeta de débito: : las tarjetas de débito sólo pueden utilizarse si el titular tiene fondos disponibles en su cuenta bancaria. Es importante porque el usuario no necesita de llevar consigo du dinero. Actualmente, la mayoría de las empresas privadas y estatales pagan los sueldos a sus empleados a través de acreditaciones en cuentas sueldo, que tienen asociadas una tarjeta de débito. Estas tarjetas, que son intransferibles, pueden utilizarse también para extraer dinero a través de los cajeros automáticos, siempre que no supere el tope diario para el monto a extraer o a pagar que impone la entidad bancaria. El usuario, para poder utilizarla, posee una clave numérica secreta. Ante la pérdida de la tarjeta, el titular debe efectuar su denuncia para que la misma sea bloqueada y no pueda ser usada por terceros.

Tarjetas de compra: es habitual que grandes negocios (tiendas o supermercados) emitan tarjetas de compras para que las utilicen sus clientes habituales para realizar sus compras. Son similares a una tarjeta de crédito, sólo que únicamente pueden utilizarse en el local que las emite.

Otra diferencia es que todos los consumos realizados sobre la tarjeta se pagan al vencimiento de la misma, y no hay financiamiento. Es frecuente que estos locales comerciales beneficien al usuario de la tarjeta con determinados descuentos por el uso de la misma.

5.3. Operaciones de depósito

Un tipo de operación financiera es el depósito de dinero en un banco u otra entidad financiera. Todo depósito es un préstamo a la entidad que resguardará el dinero, y esta entidad utilizará este depósito para realizar otras inversiones: préstamos, inversiones en bolsa, entre otras. Si el depositante requiere tener disponibilidad inmediata de dinero, el banco podrá hacer menores inversiones y en consecuencia ofrecerá una menor tasa de interés. Si, en cambio, permite que el banco disponga del dinero por mayor tiempo, éste tendrá un abanico mayor de posibilidades de inversión y en consecuencia otorgará mayor interés.

Por lo tanto, por regla general: a mayor tasa de interés, menor posibilidad de disponer del dinero en forma inmediata.

5.3.1. Depósito en caja de ahorro

Este tipo de depósito puede estar constituido en pesos, dólares estadounidenses o, si existiera autorización del Banco Central, otras monedas extranjeras. La idea de este tipo de depósito es que el banco custodie y resguarde el dinero, y que además la entidad reconozca alguna retribución por confiar este dinero en concepto de interés.

Es así que la primera y principal obligación del banco es la de asumir la custodia de los fondos depositados por el cliente, en una cuenta a su nombre, con el compromiso de mantener ese dinero a disposición del depositante para que realice las extracciones graduales o totales que considere necesarias. Finalmente, el banco abonará un interés que debe ser acordado con el cliente.

5.3.2. Depósito en cuenta corriente

Básicamente una cuenta corriente funciona como una cuenta de depósito, es decir, se alimenta del dinero que ingresa en la misma. La característica que lo distingue es que presta un *servicio de caja*, es decir, se utiliza para el titular pueda, a través de ella, realizar pagos a terceros. Los depósitos en cuenta corriente generan menor interés que una caja de ahorro, o en algunos casos pueden no pagar interés.

La cuenta corriente está asociada al uso de *cheques*. Un cheque es una orden de pago emitida contra el banco en el cual el librador tiene una cuenta corriente. Así, el titular de la cuenta emite o libra un cheque contra el banco, a favor de un tercero, y el banco paga contra el dinero depositado. Esto implica que el cuentacorrentista debe proveer la cantidad de fondos necesarios para cubrir los pagos a cheques.

Ahora bien, puede ocurrir que no existan fondos en la cuenta suficientes para hacer frente al pago de los cheques. En ese caso se presentan dos alternativas:

- que el banco rechace los cheques por no existir fondos suficientes en cuenta, lo que suele decirse un *cheque sin fondos*, o;

- que el banco celebre con su cliente un contrato de crédito, denominado habitualmente *giro en descubierto*, pues el cuentacorrentista *gira* o emite cheques sin tener el dinero depositado en la cuenta. En este caso el banco afronta el pago de los cheques emitidos por el titular, produciéndose al mismo tiempo una deuda que generará intereses a favor de la entidad.

5.3.3. Depósito a plazo fijo

En este tipo de depósito, el cliente entrega o deposita en la entidad bancaria una determinada suma financiera por un término de tiempo o plazo preestablecido. Al igual que en las cajas de ahorro, el banco asume la guarda de los fondos pero además, el banco usa esos fondos y los presta a terceros por el cual percibe un interés, o bien realiza otro tipo de inversiones. Es por esto que la entidad reconoce al depositante una remuneración o un precio por el uso de su dinero; esto es el interés, técnicamente conocido como *tasa pasiva* porque es el que el banco paga. La diferencia esencial con los depósitos en caja de ahorro, es que el depositante podrá disponer libremente de los fondos sólo al producirse el vencimiento del lapso acordado. Una vez vencido el plazo, el cliente puede retirar totalmente los fondos, o bien renovar el depósito parcialmente o en su totalidad.

5.4. Préstamos

Un préstamo bancario es una operación por la cual el banco otorga dinero a un cliente, y cuya devolución se pacta para un determinado plazo, tasa de interés, y frecuentemente con una financiación en cuotas.

Si el préstamo de dinero es importante, la entidad bancaria solicita una garantía de pago: un inmueble, un auto, una maquinaria para el agro, títulos de propiedad, etc. Según este tipo de garantía, los préstamos se denominan *hipotecarios* o *prendarios*.

Si el préstamo de dinero no es por un monto importante, se suele hacer un *préstamo personal*, también llamado *crédito a sola firma*. Esto no significa que no se exija ninguna garantía, ya que el crédito siempre se respalda sobre el patrimonio del deudor o de algún aval o garante.

5.4.1. Leasing

El Leasing es un contrato por el cual una persona entrega a otra un determinado bien, a cambio de un pago periódico y por un cierto plazo, al cabo del cual el beneficiario puede restituir el bien o adquirirlo.

De esta manera, el locatario puede adquirir este bien pagando una renta periódica a modo de alquiler, y al final del contrato puede optar por:

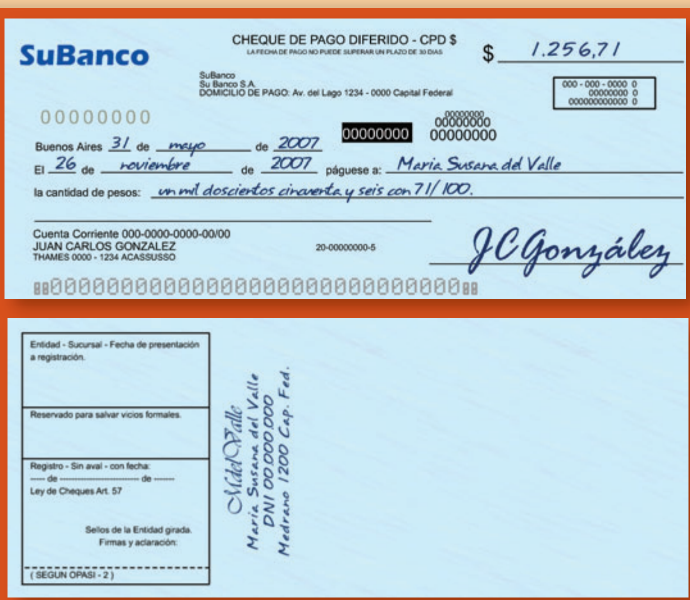
- adquirir el bien, (opción de compra);
- suscribir un nuevo contrato de Leasing sobre el mismo bien, o;
- restituir el bien al dador.

El contrato de Leasing es muy importante para las empresas pequeñas o medianas, que no cuenten con suficientes recursos para autofinanciarse en su actividad, o que quieran renovar su equipamiento tecnológico.

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.1 | **La figura 5.1 muestra un modelo de cheque con pago diferido, frente y dorso. Identificar los distintos elementos del mismo.**

Ejercicio 5.2 | **Un empresario posee una cuenta corriente en el Banco CORDO BANK, y emite un cheque para pagarle $2.500,58 a Venancio Enríquez en concepto de honorarios. El cheque tiene fecha del 2 de junio de 2009. ¿Cómo debería completar un cheque como el de la figura 5.2?**


SuBanco
CHEQUE DE PAGO DIFERIDO - CPD $
LA FECHA DE PAGO NO PUEDE SUPERAR UN PLAZO DE 30 DIAS
$ 1.256,71
SuBanco
Su Banco S.A.
DOMICILIO DE PAGO: Av. del Lago 1234 - 0000 Capital Federal
000 - 000 - 0000 0
00000000 0
000000000000 0
00000000
00000000 00000000
00000000
Buenos Aires 31 de mayo de 2007
El 26 de noviembre de 2007 páguese a: María Susana del Valle
la cantidad de pesos: un mil doscientos cincuenta y seis con 71/100.
Cuenta Corriente 000-0000-0000-00/00
JUAN CARLOS GONZALEZ
THAMES 0000 - 1234 ACASSUSSO
20-00000000-5
JCGonzález

Entidad - Sucursal - Fecha de presentación a registración.
Reservado para salvar vicios formales.
Registro - Sin aval - con fecha:
—— de —————— de ——
Ley de Cheques Art. 57
Sellos de la Entidad girada. Firmas y aclaración:
(SEGUN OPASI - 2)
MdelValle
María Susana del Valle
DNI 00.000.000
Medrano 1200 Cap. Fed.

Figura 5.1

Frente y dorso de un cheque de pago diferido

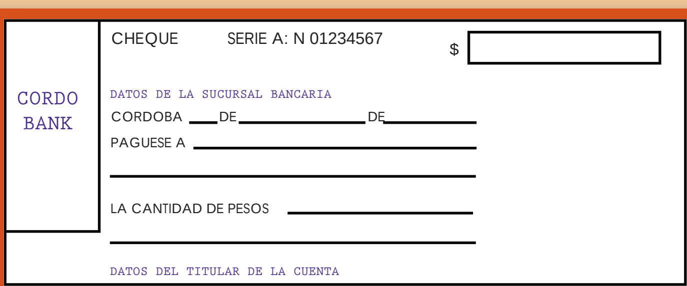

CORDO BANK
CHEQUE SERIE A: N 01234567 $
DATOS DE LA SUCURSAL BANCARIA
CORDOBA ___ DE ______ DE ______
PAGUESE A ______
LA CANTIDAD DE PESOS ______
DATOS DEL TITULAR DE LA CUENTA

Figura 5.2

La figura 5.3 ilustra un comprobante de pago con una tarjeta de débito. ¿Qué datos puede identificar en el mismo?

Ejercicio 5.3


02/05/09 10:12:42
MAESTRO
TIENDA S.A
CALLE A 1234
CORDOBA
30-0000000-9
datos de la transacción
IMP. TOTAL $156.86
C.A.$
FACTURA: 0000-00000000

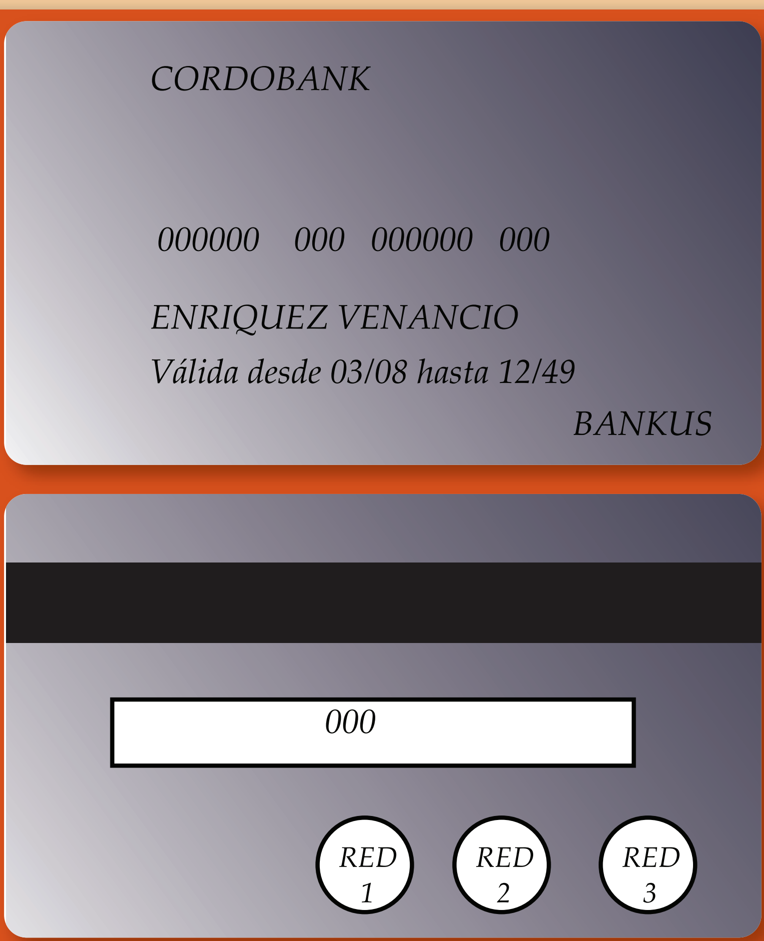
Figura 5.3

Comprobante de tarjeta de débito

Ejercicio 5.4 La figura 5.4 ilustra el frente y dorso de una tarjeta de débito. ¿Qué datos puede identificar en el mismo?

Figura 5.4

Tarjeta de débito



Capítulo 6

Capitalización y actualización

6.1. Introducción

En una operación financiera con capital inicial y final C_I y C_F respectivamente, se llama *capitalización* al proceso para obtener el capital final a partir del inicial, y *actualización* al proceso de obtener el capital inicial a partir del capital final.

En una operación financiera simple existe un capital inicial C_I y un capital final C_F relacionados por una tasa de interés i y un tiempo de duración de la operación t. Dado que asumiremos un tipo de interés compuesto, tenemos la siguiente relación entre estos elementos:

$$C_F = C_I\,(1+i)^t \quad \text{o equivalentemente} \quad C_I = C_F\left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

Estas ecuaciones permiten obtener el valor del capital interviniente, al final y al principio de la operación; es decir que cada una de estas fórmulas muestra el proceso de capitalización y de actualización, respectivamente para una operación financiera simple.

Fijada una tasa de interés r, los símbolos u y r denotarán $u = (1+r)$ y $\nu = \frac{1}{1+r}$. Si el plazo de la operación es por un período t, se llama factor de capitalización al factor u^t y factor de actualización a ν^t. Las relaciones anteriores se pueden describir entonces como

$$C_F = C_I u^t \qquad \text{y} \qquad C_I = C_F \nu^t.$$

Ejemplo 6.1

El Sr. Antonio Sánchez realizó un depósito en caja de ahorro, a una tasa de interés mensual del 4 %. Al cabo de medio año había en su cuenta \$ 27.800,00 ¿Cuánto dinero había depositado el Sr. Sánchez?

En este caso se desconoce el capital inicial C_I. La tasa de interés mensual es 0,04 y la duración de la operación en meses es $t = 6$. El factor de actualización es $\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^6 = 0{,}9615^6 = 0{,}7901$, y por lo tanto el capital inicial es:

C_I = \$ 27.800,00 × 0,7901 = **\$ 21.964,78**

En general, las operaciones financieras suelen ser más complejas e involucran diferentes tasas de interés en distintas unidades de tiempo, o bien no se cuenta sólo con un capital inicial sino que el capital final se forma a partir de una sucesión de pagos o depósitos efectuados en distintos momentos. Ejemplos de esta situación son los pagos de hipotecas, pagos de intereses sobre bonos de deuda, las primas de seguros, etc.

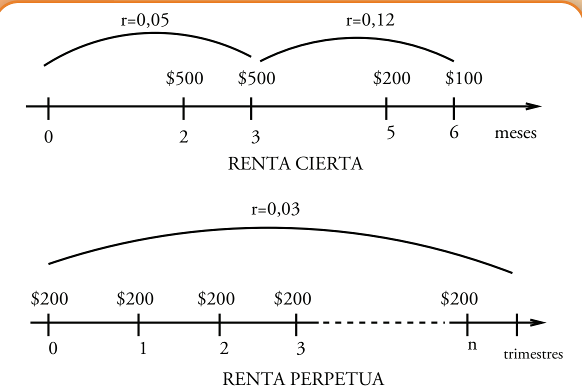
Una sucesión de pagos realizados a intervalos preestablecidos de tiempo, se denomina una *renta* o *anualidad*. Si el período de tiempo durante el cual se realizan estos pagos está preestablecido, se dice que es una renta *cierta*, y si es indeterminado, por ejemplo, durante la vida de una persona, la renta se dice *perpetua*. Cada uno de los pagos se denomina *cuota*, y el tiempo de duración de la operación es el *término* o *plazo* de la misma.

Así como en una operación financiera simple interesa conocer tanto el capital final como el capital inicial, lo mismo ocurre con el caso de las anualidades ciertas. En ciertos casos, estas rentas tienen como objetivo acumular un monto de dinero determinado al cabo de cierto tiempo y, por lo tanto, se necesitan herramientas matemáticas para calcular el valor final de una renta en términos de una tasa de interés, del número de cuotas y del monto de las mismas. En otras ocasiones una renta se utiliza para saldar una deuda en cuotas y, por lo tanto, es necesario saber calcular el valor actual de la renta en términos de los elementos que la conforman.

Para el caso particular de las rentas perpetuas, su objetivo suele ser el de amortizar el gasto en una determinada inversión, como es el caso de las empresas de peaje de rutas o puentes. Así es que estas empresas imponen un costo de peaje de modo de obtener un ingreso periódico de dinero, y que la renta así conformada salde, como mínimo, el gasto inicial de la inversión.

En la práctica no existen rentas que se extiendan indefinidamente en el tiempo, pero al desconocerse el término de las mismas se asumen de duración infinita. Es claro entonces que, para el caso de las rentas perpetuas, no es un objetivo conocer el valor acumulado de la misma. Más aún, matemáticamente sería imposible calcularlo a priori debido a que se desconoce el momento final de las mismas.

6.2. Rentas o anualidades



Renta cierta y renta perpetua

Figura 6.1

Toda renta es un conjunto de cuotas que se suceden unas a otras en el tiempo. Se conviene denotar con $t = 0$ al momento inicial de la renta. Este instante puede coincidir con el pago de la primera cuota o puede ser anterior.

Para representar gráficamente una renta, se suele trazar una recta que representa la línea de tiempo, se marca el origen de la renta, los momentos de las cuotas y el monto de las mismas. Si la renta es perpetua o se desea omitir un período de tiempo, se interrumpe con una línea discontinua. La Figura 6.1 representa dos casos particulares de rentas: una renta cierta de cuatro cuotas pagaderas en los meses 2, 3, 5 y 6, cuyos montos son respectivamente \$ 500, \$ 500, \$ 200 y \$ 100, y una renta perpetua con cuotas trimestrales de \$ 200. En el caso de la renta cierta, se asume una tasa de interés del 5% hasta el tercer mes de iniciada la operación y luego la tasa cambia al 12 %, mientras que la renta perpetua está sujeta a una tasa del 3 %.

Definición 6.1

Dada una renta cierta, se llama *valor final* de la renta en $t = T$ a la suma de las capitalizaciones de cada una de las cuotas al momento $t = T$.

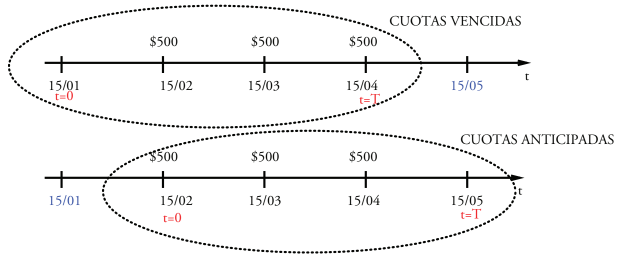
Asimismo, el *valor actual* o *valor presente* de una renta, cierta o perpetua, es la suma de los valores actuales de cada una de las cuotas en $t = 0$.

En esta definición se menciona la suma de valores actuales de cuotas de una renta perpetua, esto es, de infinitas cuotas. Si bien pareciera no tener sentido, es posible darle una explicación matemática a esta situación y se hará referencia a esto más adelante.

Según esta suposición, las anualidades pueden clasificarse de acuerdo a distintas características. Algunas de ellas son:

- **según los intereses que devengan:** rentas sujetas a interés simple o a interés compuesto, aunque usualmente se aplica el interés compuesto;
- **según los momentos de pago:** cuotas anticipadas si se pagan al comienzo de cada período, o cuotas vencidas si se pagan al final;
- **según el importe de la cuota:** constantes, si todas las cuotas son iguales, o variables en caso contrario.

NOTA: Los conceptos de cuota anticipada y cuota vencida son, si se quiere, un tanto subjetivos y están asociados a los momentos que se consideren inicio y final de la operación financiera. Por ejemplo, si un individuo paga 3 cuotas los días 15 de febrero, 15 de marzo y 15 de abril respectivamente, no puede saberse a priori si son cuotas vencidas o anticipadas. Ahora bien, si estas cuotas pertenecen a un plan de pagos por una compra realizada el 15 de enero, puede interpretarse como una renta de cuotas vencidas, pues los pagos son "a fin de mes". Pero, si el individuo ha realizado estos aportes con el objetivo de acumular un determinado capital al 15 de mayo se considera una renta de cuotas anticipadas. Ver Figura 6.2. Para cualquier día del año, el valor de la renta será único, independientemente de que las rentas se consideren vencidas o anticipadas.



Cuotas anticipadas y cuotas vencidas para una misma renta

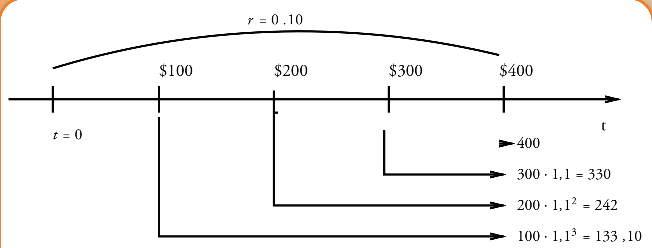
Figura 6.2

A continuación se estudiará cómo calcular el valor obtenido por la capitalización y la actualización de anualidades ciertas. En un principio, y para que la introducción al tema no resulte complicada, se asumirá que las cuotas se pagan equiespaciadamente en el tiempo y se tomará como unidad de tiempo al lapso entre dos cuotas. Por ejemplo, si las cuotas son mensuales, la unidad de tiempo será el mes. Además se considerará que la tasa de interés actuante es constante en toda la renta.

Para este tipo de rentas se pueden obtener fórmulas cerradas que permiten calcular explícitamente el valor final y el valor actual de las mismas. En todos los casos se ubicará el origen del tiempo $t = 0$ en el momento que comienza la operación financiera. Se denotará n al número total de cuotas, por lo cual $t = n$ es el término y final de la operación. Si las cuotas son anticipadas, la primera cuota se paga en $t = 0$ y la última en $t = n - 1$. Si son vencidas, la primera cuota se paga en $t = 1$ y la última en $t = n$.

6.3. Capitalización de una renta

En la Figura 6.3 se ha representado el caso de una renta de cuatro cuotas vencidas, y el cálculo del capital al momento del pago de la última cuota. Para ello, se debe capitalizar tres períodos a la primera cuota de \$ 100, dos períodos a la segunda de \$ 200, y un período a la de \$ 300. En este ejemplo, la última cuota no se capitaliza pues coincide con el momento final de la operación. El capital final de la renta es $V_F = 133{,}10 + 242 + 330 + 400 = \$\ 1.105{,}10$.



Renta cierta con cuotas vencidas

Figura 6.3

Aquellas rentas en las cuales interesa el valor del capital final, suelen llamarse también *imposiciones*. Cabe aclarar que el término imposición no hace referencia a un tipo de renta, sino al objetivo de la misma que es el de acumular una cierta cantidad de dinero final.

Los siguientes párrafos se refieren a anualidades sujetas a interés simple. Este tipo de rentas no es de uso frecuente, sin embargo, es útil entender el procedimiento para el cálculo del valor final de una anualidad.

6.3.1. Valor final de una anualidad a interés simple, con cuotas constantes y anticipadas

Asumamos que se realizarán n pagos o cuotas iguales de valor c, sobre los cuales se aplicará un interés simple de tasa periódica r. Sabiendo que los pagos comienzan en $t = 0$ y que se realizan siempre a comienzo de cada período, se desea saber cuál es el capital que se ha formado al finalizar el n-ésimo período a partir de las n cuotas.

Para esto se debe calcular el monto o capital final producido por cada una de estas cuotas en $t = n$. Así, el monto producido por la primera cuota c en $t = 0$ al cabo del n-ésimo período es $c\ (1 + r\ n)$, puesto que transcurren n unidades de tiempo. El producido por la segunda cuota en $t = 1$ es $c\ (1 + r\ (n - 1))$; y así sucesivamente, el monto producido por la i-ésima cuota en $t = i$ al cabo del n-ésimo período es:

$$c\ (1 + r\ (n - i))$$

La última cuota se paga en $t = n - 1$, que es el comienzo del último período, y el capital final producido por la misma es $c\ (1 + r)$.

Por lo tanto, el capital formado por la suma de estas cuotas en $t = n$ se obtiene sumando:

$$c\,(1 + rn)) + c\,(1 + r\,(n - 1)) + \cdots + c\,(1 + r\,(n - i)) + \cdots + c\,(1 + r).$$

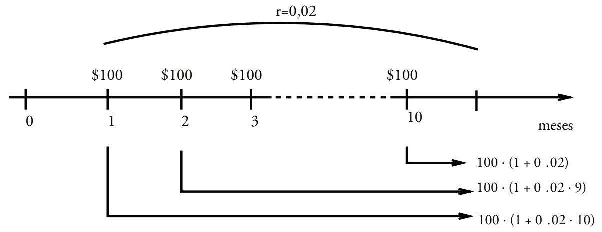
Invirtiendo el orden de la suma y escrita ésta en términos de sumatoria se obtiene:

$$V_F = \sum_{t=1}^{n} c(1 + r\,t) = c\,n + c\,r\,\frac{n(n+1)}{2} = c\left(n + r\,\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

> El Sr. López ha depositado 10 cuotas mensuales de \$ 300 en una entidad que aplica un interés simple mensual de 2 %. Calcular el capital acumulado un mes después del pago de la última cuota.

Ejemplo 6.2

Solución: La Figura 6.4 representa la capitalización de las cuotas 1, 2 y 10 de esta renta.



Renta a interés simple, con cuotas anticipadas

Figura 6.4

Según la fórmula anterior, el valor final de esta renta al momento del último pago es:

$$V_F = c\left(n + r\,\frac{n(n+1)}{2}\right) = 300\left(10 + 0{,}02\,\frac{10\cdot 11}{2}\right) = 3.\,330,$$

es decir, de \$ 3.330.

6.3.2. Valor final de una anualidad a interés simple, con pagos constantes y vencidos

Este caso es análogo al anterior, a excepción que no se paga una cuota en $t = 0$ y sí se paga una cuota en $t = n$. De este modo, y siguiendo un análisis similar al anterior, el capital final formado por la suma de las cuotas en $t = n$ es:

$$\sum_{t=0}^{n-1} c(1 + r\,t) = c\,n + c\,r\,\frac{(n-1)n}{2} = c\left(n + r\,\frac{(n-1)n}{2}\right).$$

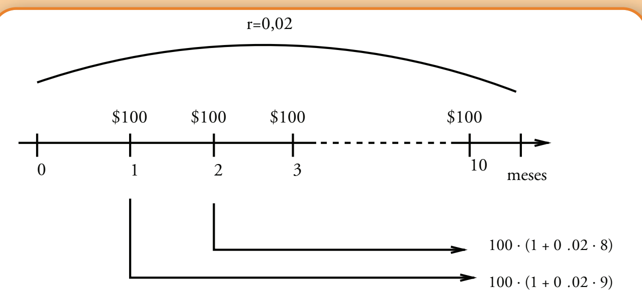
Notemos que las fórmulas obtenidas en los dos casos son muy similares, difiriendo en el factor $n + 1$ o $n - 1$.

> El Sr. López ha depositado 10 cuotas mensuales de \$ 300 en una entidad que aplica un interés simple mensual de 2 %. Calcular el capital formado al momento de pagar la décima cuota.

Ejemplo 6.3

Solución: Este ejemplo es similar al Ejemplo 6.2, sólo que las cuotas se consideran anticipadas. La Figura 6.5 representa la capitalización de las cuotas 1 y 2 de esta renta.

Obsérvese que al ser las cuotas vencidas, la primera se capitaliza nueve períodos, la segunda ocho períodos, y así siguiendo hasta que la última no se capitaliza. Según la fórmula anterior, el valor final de esta renta al momento del último pago es:



Renta a interés simple, con cuotas vencidas

Figura 6.4

$$V_F = c\left(n + r\,\frac{(n-1)n}{2}\right) = 300\left(10 + 0{,}02\,\frac{9\cdot 10}{2}\right) = 3.270$$

es decir, $ 3.270.

Si cada cuota se capitaliza un mes más, por cada una de ellas se agregan 300 · 0,02 = 6 pesos. Dado que son 6 cuotas, se suman $ 60 pesos en total. En efecto, 3.270 + 60 = $ 3.330.

De aquí en adelante, se considerarán rentas sujetas a interés compuesto, y dentro de ellas se estudiarán los casos de cuotas constantes y de cuotas variables en progresión aritmética.

6.3.3. Valor final de una anualidad a interés compuesto, con pagos constantes y vencidos

Asumiendo una tasa de interés r y un tipo de interés compuesto, y cuotas constantes de valor c, se tiene que cada cuota capitaliza un cierto número de períodos, y arroja un determinado valor final en $t = n$.

Ejemplo 6.4 Una renta está conformada por 4 cuotas de $ 100, sujetas a una tasa del 3 %, y se desea conocer el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota.

Solución. El Cuadro 6.1 representa un ejemplo de una renta de 4 cuotas de $ 100, sujetas a una tasa del 3 %, y el capital final obtenido al momento de pagar la cuarta cuota. Esto es, el valor final de la renta es de $ 418,3627.

Cuota	Períodos	Valor final
1	3	$100 \cdot (1{,}03)^3 = 109{,}2727$
2	2	$100 \cdot (1{,}03)^2 = 106{,}09$
3	1	$100 \cdot (1{,}03) = 103$
4	ninguno	100
Valor final		$100 \cdot (1 + (1{,}03) + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^3 = 418{,}3627)$

Cuadro 6.1

Ahora bien, si la renta tiene muchas cuotas puede resultar tedioso calcular la capitalización de cada una de las cuotas, y luego sumar todas ellas. Siempre es conveniente contar con una fórmula cerrada, que en términos del valor de la cuota, la tasa de interés y el número de cuotas, permita obtener el valor final.

Si se considera una renta de n cuotas constantes de valor c, sujetas a una tasa de interés periódica r, ésta podría representarse como lo muestra el Cuadro 6.2.

La expresión para el valor final es una suma geométrica, con razón $(1 + r)$ y cuyo primer término es c. Por lo visto en el Capítulo 2, esta suma es igual a:

$$c + c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^{n-1} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

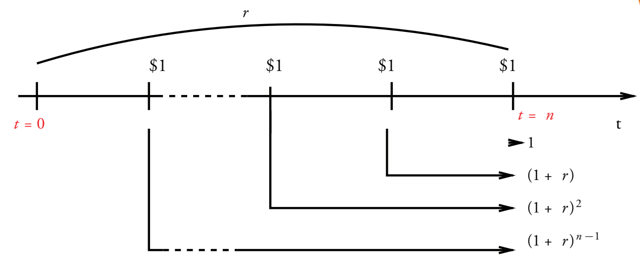
Cuota	Períodos	Valor final
1	$n-1$	$c \cdot (1+r)^{n-1}$
2	$n-2$	$c \cdot (1+r)^{n-2}$
3	$n-3$	$c \cdot (1+r)^{n-3}$
	$\vdots$	
$n-2$	2	$c \cdot (1+r)^2$
$n-1$	1	$c \cdot (1+r)$
n	ninguno	c
Valor final		$c + c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^{n-1}$

Cuadro 6.2: Valor final de una renta de n cuotas vencidas

De esta manera, se tiene que el valor final de la renta de cuotas vencidas es igual a c por una expresión que sólo depende del número de cuotas y de la tasa de interés. Esta expresión se la denota entonces $s_{\overline{n}|r}$:

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

El símbolo $s_{\overline{n}|r}$ es propio de la matemática financiera, e indica el valor final (s) de una renta de n cuotas periódicas vencidas iguales a 1, sujetas a una tasa de interés r. La Figura 6.6 ilustra esta situación:



Significado de $s_{\overline{n}|r}$

Figura 6.6

Si la renta es de cuotas iguales de valor c, entonces su valor final se obtiene multiplicando $s_{\overline{n}|r}$ por el valor de la cuota. De esta manera, el valor final de la renta es igual a c por una expresión que sólo depende del número de cuotas y de la tasa de interés constante que rige la operación.

Ejemplo 6.5

Calcular el valor final de una renta de \$ 2.000 anuales durante 5 años, asumiendo una tasa de interés anual del 9% y con cuotas vencidas.

Solución. En este caso se tiene que c = \$ 2.000, n = 5, r = 0,09 y las cuotas son vencidas. Por lo tanto el capital final será, en pesos, igual a:

$$\text{Capital final } = c \cdot s_{\overline{n}|r} = 2.000 \cdot s_{\overline{5}|0{,}09} = 2.000 \cdot \frac{1{,}09^5 - 1}{0{,}09} = \$\ 11.969{,}42$$

es decir que el capital acumulado es de \$ 11.969,42.

6.3.4. Valor final de una anualidad a interés compuesto, con pagos constantes y anticipados

En el caso de una renta con cuotas anticipadas, cada cuota se capitaliza un período más que en el caso de las rentas de cuotas vencidas. El Cuadro 6.3 ilustra el caso general.

La suma que representa el valor final es también una suma geométrica, de razón $(1 + r)$ cuyo primer término es $c\,(1 + r)$. Luego es igual a

$$c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^n = c \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = c \cdot (1+r) \cdot s_{\overline{n}|r}.$$

Ejemplo 6.6 Una persona deposita al comienzo de cada año la suma de \$ 2.000 en una cuenta que paga una tasa de interés anual del 9 %. ¿Cuál es el capital que habrá acumulado al comienzo del sexto año, antes de depositar la sexta cuota?

Solución. Esta renta puede interpretarse como una anualidad de cinco cuotas anticipadas, cada una de \$ 2.000. La tasa de interés es del 9%, y el número de cuotas es $n = 5$. El valor de esta renta al comienzo del sexto año es

$$V_F = 2.000 \cdot 1{,}09 \cdot s_{\overline{5}|0{,}09} = 13.046{,}66913$$

es decir, \$ 13.046,67 aproximadamente.

Cuota	Períodos	Valor final
1	$n-1$	$c \cdot (1+r)^n$
2	$n-2$	$c \cdot (1+r)^{n-1}$
3	$n-3$	$c \cdot (1+r)^{n-2}$
	$\vdots$	
$n-2$	2	$c \cdot (1+r)^3$
$n-1$	1	$c \cdot (1+r)^2$
n	ninguno	$c \cdot (1+r)$
Valor final		$c + c(1+r) + c(1+r)^2 + \cdots + c(1+r)^n$

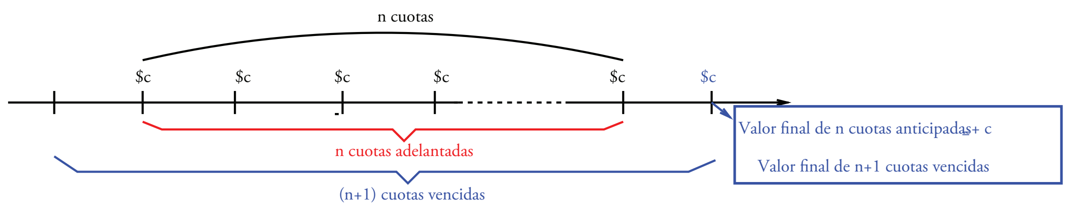
Cuadro 6.3: Valor final de una renta de n cuotas anticipadas

Este valor podría haberse obtenido también a partir del resultado del Ejemplo 6.6, capitalizando el capital final durante un período más. En efecto, 1.169 · 1,09 = \$ 13.046,67.

Una propiedad de $s_{\overline{n}|r}$ es la siguiente. Nótese que $(1 + r)\ s_{\overline{n}|r}$ es el valor final de una renta de cuotas anticipadas iguales a 1. Si a esta renta se le agrega una última cuota $c = 1$ en $t = n$, se convierte en una renta de $n + 1$ cuotas vencidas. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación:

$$\boxed{(r+1)\, s_{\overline{n}|r} = s_{\overline{n+1}|r} - 1}$$

La Figura 6.7 ilustra esta relación:



Relación entre rentas de n y $n + 1$ cuotas

Figura 6.7

6.3.5. Valor final de una anualidad con cuotas variables en progresión aritmética

En esta sección se estudiará el caso de aquellas imposiciones donde las cuotas son variables, en progresión aritmética, sujetas a interés compuesto con una tasa de interés r.

Puesto que las cuotas varían en progresión aritmética, pueden denotarse de la forma

$$c,\ c+h,\ c+2\cdot h,\ \ldots,\ c+(n-1)h$$

donde c es el valor de la primera cuota, y h es el término de la progresión aritmética.

Esta sucesión de pagos puede verse como una superposición o simultaneidad de imposiciones con cuotas constantes. Por ejemplo. dada una imposición de cuatro cuotas mensuales, con $c = 100$ y $h = 15$, las sucesivas cuotas serán 100, 115, 130 y 145.

Esta imposición es equivalente a tener 4 imposiciones simultáneas, cada una de ellas de cuotas constantes, a saber:

- cuatro cuotas de \$ 100 a partir del primer mes,
- tres cuotas de \$ 15 a partir del segundo mes,
- dos cuotas de \$ 15 a partir del tercer mes, y
- una última cuota de \$ 15 el último mes.

	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
	100	100	100	100
		15	15	15
			15	15
				15
Total	100	115	130	145

La Figura 6.8 ilustra la situación en una línea de tiempo.

Por lo tanto, para calcular el capital final de esta imposición es suficiente con calcular el capital final de cada una de las imposiciones de cuotas constantes. Si se supone una tasa r a interés compuesto del 10% y cuotas vencidas, entonces se puede calcular el capital final como:

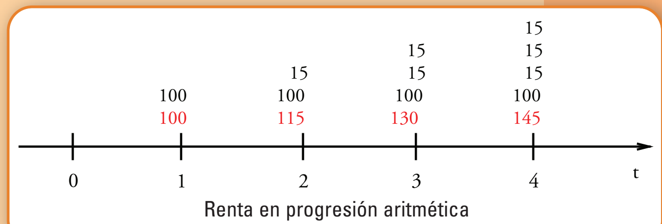


Figura 6.8

$$\text{Capital final} = 100\, s_{\overline{4}|0,1} + 15\, s_{\overline{3}|0,1} + 15\, s_{\overline{2}|0,1} + 15\, s_{\overline{1}|0,1}$$

Los sucesivos valores de $s_{\overline{n}|0,1}$ son

n	1	2	3	4
$s_{\overline{n}|0,1}$	1	2,1	3,31	4,641

y el capital final es $100 \cdot 4{,}641 + 15 \cdot 3{,}31 + 15 \cdot 2{,}1 + 15 = \$\ 560{,}25$.

Para un caso general, se tiene una sucesión de cuotas $c, c + h, c + 2 \cdot h, \ldots, c + (n - 1)h$.

Asumiendo que h es positivo, esto puede pensarse como en el ejemplo precedente, como una superposición de imposiciones de:

- n pagos o cuotas iguales a c, a partir del primer período,
- $n - 1$ pagos iguales a h comenzando en el segundo período,
- $n - 2$ pagos iguales a h comenzando en el tercer período, y así siguiendo hasta
- 1 pago igual a h en el último período.

Si las cuotas son anticipadas, cada pago se realiza al comienzo del período y si son vencidas se realizan al final. Las fórmulas obtenidas en cada caso se analizan en los siguientes párrafos:

Cuotas vencidas. Cada una de las n imposiciones de cuotas constantes produce un valor final, acorde al número de cuotas y al valor de las mismas. Estos valores finales pueden verse en el Cuadro 6.4.

La suma que representa el valor final puede reescribirse, y para ello se reemplaza $s_{\overline{k}|r}$ por la expresión que lo representa, para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} V_F &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \sum_{k=1}^{n-1} h \cdot s_{\overline{j}|r} \\ &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \sum_{k=1}^{n-1} h \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r} \\ &= c \cdot s_{\overline{n}|r} + \frac{h}{r} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^k - (n-1) - 1 \right) \\ &= \boxed{c \cdot s_{\overline{n}|r} + h \cdot \frac{s_{\overline{n}|r} - n}{r}} \end{aligned}$$

Valor de la cuota	Número de cuotas	Valor final
c	n	$c \cdot s_{\overline{n}|r}$
h	$n - 1$	$h \cdot s_{\overline{n-1}|r}$
	$\vdots$	
h	3	$h \cdot s_{\overline{3}|r}$
h	2	$h \cdot s_{\overline{2}|r}$
h	1	$h \cdot s_{\overline{1}|r} = h$
Valor final		$h + h\, s_{\overline{1}|r} + h\, s_{\overline{2}|r} + \cdots + h\, s_{\overline{n-1}|r} + c\, s_{\overline{n}|r}$

Cuadro 6.4: Valor final: renta en progresión aritmética con cuotas vencidas

En el penúltimo paso, la suma comienza desde $k = 0$ y aparece el término (-1). Esto mantiene el valor de la expresión, pues se suma y se resta 1, pero además permite encontrar una fórmula que sólo implica el cálculo de $s_{\overline{k}|r}$. Reemplazando los valores por los del ejemplo, se obtiene el mismo resultado que antes:

$$100 \cdot 4{,}641 + 15 \cdot \frac{4{,}641 - 4}{0{,}1} = 560{,}25$$

Si $h = 0$ se obtiene la fórmula correspondiente a cuotas constantes, como es esperable.

Si h es negativo la misma fórmula sigue siendo válida. El sistema de amortización alemán, que se verá en el Capítulo 7, es un ejemplo de imposición con cuotas variables, en progresión aritmética, donde el término h es negativo.

Cuotas anticipadas. En el caso que las cuotas sean anticipadas la fórmula es muy similar. Sólo se debe tener en cuenta que cada cuota se capitaliza un período más, por lo que toda la fórmula debe ser multiplicada por el factor de capitalización $(1 + r)$. Una cuota anticipada igual a c es equivalente a una vencida de valor $c \cdot (1 + r)$, por lo que el monto final es igual a:

$$c \cdot (1 + r) \cdot s_{\overline{n}|r} + h \cdot (1 + r) \cdot \frac{s_{\overline{n}|r} - n}{r}$$

Ejemplo 6.7

El Sr. González abrió en el banco una caja de ahorro y realizó los siguientes pagos mensuales: \$ 150, \$ 250, \$ 350, \$ 450, \$ 550. La T.N.A. fue del 18% con capitalización mensual. Un mes después del depósito de la última cuota retiró todo su dinero y necesitó \$ 215,23 para pagar el valor exacto de una computadora. ¿Cuál fue el precio de la computadora?

Solución. Este es el caso de una renta de cuotas anticipadas en progresión aritmética. El primer término de la progresión es 150, y el paso es 100. Por lo tanto, el valor final de la renta un mes después de la última cuota es

$$V_F = 150 \cdot 1{,}015 \cdot s_{\overline{5}|0{,}015} + 100 \cdot 1{,}015 \cdot \frac{s_{\overline{5}|0{,}015} - 5}{0{,}015} = 1.814{,}77222$$

es decir, aproximadamente \$ 1.814,77. Puesto que tuvo que agregar \$ 215,23 para pagar la computadora, el valor de la misma fue de 1.814, 77 + 215,23 = \$ 2. 030 pesos.

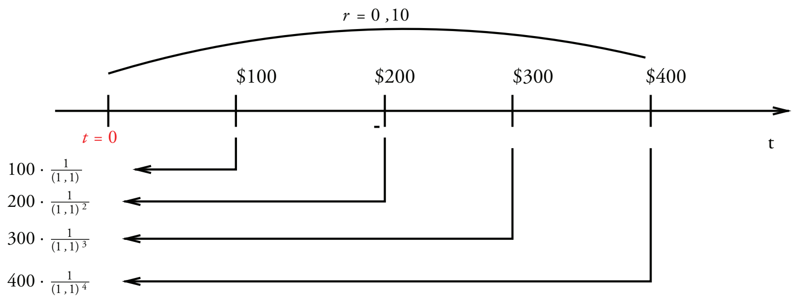
6.4. Actualización de una renta

Si un individuo solicita un préstamo de mucho valor, supongamos equivalente a veinte sueldos de los que cobra mensualmente, es muy probable que no pueda devolver este dinero de una sola vez, menos aún teniendo en cuenta el interés. Por ello es frecuente implementar la devolución de un préstamo mediante un plan de pago en cuotas. El valor de estas cuotas debe ser calculado de tal manera que la suma de sus valores actuales sea equivalente al préstamo. Para esto se asume una determinada tasa de interés. Este es un claro ejemplo de la necesidad de saber calcular el valor actual de una renta.

La Figura 6.9 ilustra el cálculo del valor actual de una renta igual a la considerada en la Figura 6.3. El valor actual de esta renta es

$$V_A = 100\,\frac{1}{1{,}1} + 200\,\frac{1}{(1{,}1)^2} + 300\,\frac{1}{(1{,}1)^3} + 400\,\frac{1}{(1{,}1)^4} = 754{,}7981695$$

es decir, \$ 754,80, aproximadamente.



Renta cierta con cuotas vencidas

Figura 6.9

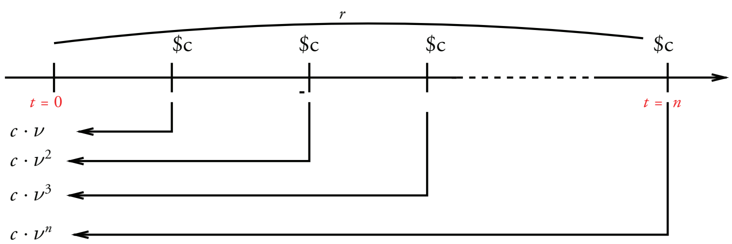
En esta sección veremos cómo calcular el valor actual o valor presente de una sucesión de pagos constantes, sujetos a una tasa de interés periódica r. Es decir, sabiendo que se realizará una sucesión de pagos periódicos, queremos averiguar la suma del valor actual de cada una de dichas cuotas.

Naturalmente, si sabemos cómo calcular el valor final de la renta, entonces el valor actual se obtiene actualizando este valor final tantos períodos como tenga la renta. De todos modos, analizaremos algunos casos a fin de introducir cierta notación muy frecuente en la literatura de la matemática financiera.

6.4.1. Valor actual de una renta con cuotas constantes vencidas

Considérese el caso en que se realizan n pagos constantes y vencidos durante n períodos, sujetos a una tasa de interés periódica r. Se indicará con $t = 0$ el comienzo de la operación, por lo que los pagos se realizan en los momentos $t = 1, 2, \ldots, n$. Asimismo, se denotará ν al factor de actualización en un período, esto es,

$$\nu = \frac{1}{1+r}$$



Actualización de una renta con cuotas vencidas

Figura 6.10

Así, si c es la cuota pagada en $t = j$, entonces $c \cdot \nu^j$ es su valor presente en $t = 0$. La Figura 6.10 ilustra la situación.

Luego, el valor actual V_A de una renta de n cuotas constantes vencidas e iguales a c es:

$$V_A = c \cdot \nu + c \cdot \nu^2 + \cdots + c \cdot \nu^n$$

Así, V_A es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $c \cdot \nu$ y su razón es ν. Por lo visto en el Capítulo 2, se tiene que:

$$V_A = c \cdot \nu \cdot \frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = c \cdot \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot 1 - \nu^n$$

Obsérvese que $\frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = \frac{1 - \nu^n}{1 - \nu}$. De esta manera, el numerador y el denominador de la fracción resultan positivos, puesto que $\nu < 1$.

Usando que $\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{1}{r}$, se obtiene la siguiente expresión para V_A:

$$V_A = c \cdot \frac{1-\nu^n}{r}$$

El valor actual de la renta es igual al producto de c por una expresión que sólo depende del número de cuotas n y de la tasa de interés r. Esta expresión se denotará $a_{\overline{n}|r}$.

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1-\nu^n}{r}$$

Así, dada una renta de n cuotas constantes e iguales a c, pagaderas en $t = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que $c \cdot a_{\overline{n}|r}$ es el valor actual de la renta calculado en $t = 0$, y $c \cdot s_{\overline{n}|r}$ es el valor final de la renta en $t = n$. Por lo tanto, se tienen las siguientes relaciones:

$$a_{\overline{n}|r} = \nu^n \, s_{\overline{n}|r}, \qquad \text{y} \qquad a_{\overline{n}|r}\,(1+r)^n = s_{\overline{n}|r}$$

Otra relación entre la capitalización y el valor presente se da en la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|r}} + r = \frac{r - r\,u^n - r}{u^n - 1} = \frac{r\,u^n}{u^n - 1} = \frac{r}{1-\nu^n} = \frac{1}{a_{\overline{n}|r}}$$

Ejemplo 6.8

Calcular el valor actual de una anualidad que consiste en cuotas mensuales vencidas de $ 285 durante 4 años, siendo la T.N.A. del 15% con capitalización mensual.

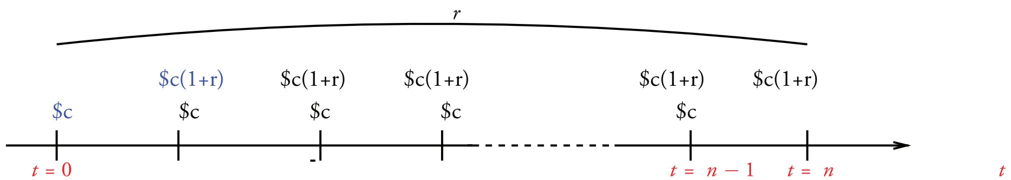
Solución. La tasa mensual aplicada es $r = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125$, y el número de cuotas es $n = 4 \cdot 12 = 48$. El valor actual V_A de la renta es

$$V_A = 285 \cdot a_{\overline{48}|0{,}0125} = 285 \cdot 35{,}9314809 = 10.240{,}47206,$$

es decir de $ 10.240,47 aproximadamente.

6.4.2. Valor actual de una renta con cuotas anticipadas

Una cuota de valor c pagada en el momento $t = j$ tendrá un valor $c\,(1 + r)$ un período más tarde, es decir, en $t = j + 1$. Por lo tanto, el valor actual de una anualidad de cuotas anticipadas iguales a c es igual al valor actual de una anualidad de cuotas vencidas iguales a $c\,(1 + r)$ (Ver Figura 6.11). Así, el valor actual V_A de una renta de cuotas constantes anticipadas, iguales a c, está dado por:



Cuotas anticipadas de valor c o cuotas vencidas de valor $c \cdot (1 + r)$

Figura 6.11

$$V_A = c \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r}$$

Ejemplo 6.9 ¿Cuál es el valor actual de 15 pagos anuales y anticipados de \$ 2.000 cada uno, considerando una tasa del 5% anual?

Solución: Simplemente aplicando las fórmulas, el valor actual es igual, en pesos, a:

$$V_A = 2.000 \cdot (1{,}05) \cdot a_{\overline{15}|0{,}05} = \$\ 21.797{,}28188$$

es decir, aproximadamente \$ 21.797,28.

6.5. Cálculo del número de cuotas y de la tasa de interés de una anualidad

6.5.1. Número de cuotas

En algunas entidades financieras, el pago de una deuda en cuotas se establece de acuerdo a los ingresos mensuales o periódicos del deudor. Por ejemplo, en base al sueldo que éste cobra. Esto es así porque la entidad necesita garantizar mínimamente que el deudor podrá afrontar el pago de la deuda. Surge entonces el problema de calcular cuántas cuotas de determinado valor deberían pagarse para que el valor actual, o el valor final, de la anualidad sea un cierto monto.

Ejemplo 6.10 ¿Cuántas cuotas mensuales iguales y vencidas de \$ 3.000 habrá que abonar para que el valor actual de la renta resulte de \$ 100.000 considerando una tasa del 2% anual?

En este problema se pide establecer el número de cuotas a pagar, sabiendo el monto de cada una y el valor actual de la renta. Analicemos este problema en un caso general, siendo la renta de n cuotas constantes y vencidas iguales a c, sujetas a una tasa de interés periódica r.

Sea V_A el valor actual de la renta, entonces $V_A = c \cdot \frac{1-\nu^n}{r}$. Despejando ν^n resulta

$$\nu^n = \frac{c - V \cdot r}{c}.$$

Para obtener el valor de n será necesario aplicar la función logaritmo en ambos miembros de la ecuación, y así se concluye que

$$\boxed{n = \frac{\log(c) - \log(c - V \cdot r)}{\log(1+r)}}$$

Así, esta fórmula permite calcular de manera aproximada, el número de cuotas iguales a c que deberán pagarse para que su valor actual sea V, asumiendo una tasa de interés compuesto r. Este número es aproximado, ya que al calcular el logaritmo es muy posible que el resultado no sea un número entero.

Solución del ejemplo 6.10. Volviendo a los datos del ejemplo, tenemos que

$$n = \frac{\log(3.000) - \log(3.000 - 2.000)}{\log(1{,}02)} = \frac{\log(3)}{\log(1{,}02)} \sim 55,48.$$

Este resultado no es un número entero, y se encuentra entre los enteros 55 y 56. Si se pagan 55 cuotas, no se alcanza el valor actual deseado, y si se pagan 56 se superará el mismo.

Supongamos que se decide cumplir con una anualidad de 55 cuotas iguales. Entonces el valor de la cuota debería ser $c = \frac{100.000}{a_{\overline{55}|0{,}02}} = 3.014{,}54$, un valor un poco mayor a \$ 3. 000.

Si en cambio la anualidad es de 56 cuotas iguales, entonces la cuota constante deberá ser de $\frac{100.000}{a_{\overline{56}|0.02}} = 2.984{,}66$, un poco menos de \$ 3.000.

Ejemplo 6.11

Mario compra un coche usado, y paga \$ 1.500 de contado al momento de la compra más \$ 182,50 mensuales durante 3 años. ¿Cuál es el precio de contado del automóvil, si la tasa de interés sobre el préstamo es del 18% nominal anual?

Solución. El precio de contado del automóvil se calcula como el monto pagado al momento de la compra más el valor actual de la renta por la cual se *amortiza* el préstamo. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}18/12 = 1{,}5\%$. Por lo tanto, el precio contado del automóvil se calcula como:

$$1.500 + 182{,}50\, a_{\overline{360}|0{,}015} = 1.500 + \frac{1 - 1{,}015^{-36}}{0{,}015} = \$\ 1.500 + \$\ 5.048{,}07 = \$\ 6.048{,}07$$

6.5.2. Tasa de interés

Si una persona deposita mensualmente \$ 300 en una cuenta, y al cabo de 4 años tiene un capital de \$ 15.000, ¿qué rendimiento tuvo su inversión? Es decir, ¿cuál fue la tasa de interés sobre dichos depósitos?

Esta es una situación en la que la incógnita es la tasa de interés, y se tienen como dato el valor final de la anualidad, el número de cuotas y el valor de las mismas. En principio, puede ocurrir que la tasa de interés haya variado a lo largo del tiempo, pero al menos se intenta conocer el valor promedio de la misma.

Si se considera el caso general de una renta de cuotas vencidas, constantes, siendo n el número de cuotas y c el valor de las mismas, se tiene la ecuación:

$$V_F = c \cdot s_{\overline{n}|r} = c \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

que con los datos del ejemplo es:

$$15.000 = 300 \cdot \frac{(1+r)^{48} - 1}{r}$$

Este tipo de ecuaciones tiene el inconveniente de que no es posible despejar explícitamente el valor de r, a menos que n = 2 en cuyo caso se trata de una ecuación de segundo grado. ¿Cómo obtener el valor de r ? Existen varias posibilidades: una de ellas es aproximar calculando qué valor final se obtiene eligiendo algunos valores de r. Por ejemplo:

- para r = 5%, arroja un valor final de \$ 56.407,62, lo que indica que la tasa debe ser mucho menor;
- para r = 0,5% el valor final resulta ser \$ 16.229,35, lo que se aproxima bastante más al resultado;
- para r = 0,17% se obtiene \$ 14.990,67 y
- para r = 0,18% el valor final es de \$ 15.026,28.

Así que puede estimarse una tasa de interés entre el 0,17% y el 0,18% mensual.

Otra posibilidad es la utilización de tablas que contienen los valores de $s_{\overline{n}|r}$ y de $a_{\overline{n}|r}$, según si el dato es el valor final V_F o el valor actual V_A, respectivamente, de una renta de cuotas vencidas. Usando que

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{V_F}{c} \qquad y \qquad a_{\overline{n}|r} = \frac{V_A}{c}$$

y conociendo el valor de n, esto permite hallar un valor aproximado de r. El Cuadro 6.5 muestra algunos valores de $s_{\overline{n}|r}$ tabulados, y se ha resaltado con color los valores cercanos a 50 = $\frac{15.000}{300}$, que corresponden a los datos del problema y se ubican en la fila correspondiente a n = 48.

n	r	0,001	0,0015	0,002	0,0025	0,003	0,0035
1		1	1	1	1	1	1
2		2,001	2,0015 2,002	2,0025 2,003	2,0035		
3		3,003001	3,00450225	3,006004	3,00750625	3,009009	3,01051225
4		4,006004001	4,009009003	4,012016008	4,015025016	4,018036027	4,021049043
5		5,010010005	5,015022517	5,02004004	5,025062578	5,030090135	5,035122715
6		6,015020015	6,022545051	6,03008012	6,037625235	6,045180405	6,052745644
7		7,021035035	7,031578868	7,04214028	7,052719298	7,063315947	7,073930254
8		8,02805607	8,042126237	8,056224561	8,070351096	8,084505895	8,09868901
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
48		49,1454923	49,73158147	50,32676843	50,93120842	51,54505939	52,16848215
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 6.5: Tabla de $s_{\overline{n}|r}$

En los Apéndices de este libro se ha explicado cómo obtener estas tablas usando una planilla de cálculo.

6.6. Valor actual de rentas con cuotas en progresión aritmética

Ya se ha analizado como obtener el valor final de una renta en progresión aritmética. Si las cuotas son de la forma

$$c, c + h, c + 2 \cdot h, \cdots, c + (n - 1) \cdot h$$

se puede interpretar a la anualidad como la suma de n anualidades: una de n cuotas iguales a c, y $n - 1$ rentas de cuotas iguales a h cuyo número de cuotas varía de 1 a $n - 1$.

La Figura 6.12 ilustra el caso de una renta en progresión aritmética, con cuotas vencidas.

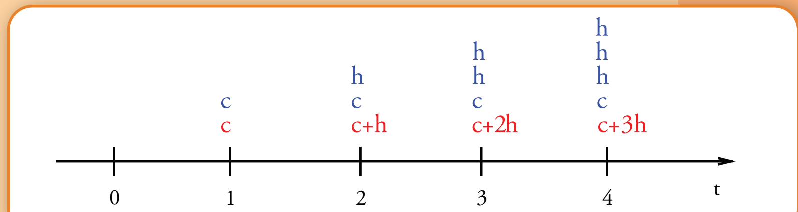


Figura 6.12

Ahora bien, las $n - 1$ rentas con cuotas iguales a h comienzan en $t = 2$ y no en $t = 1$, es decir, en el primer período no se aporta ninguna cuota. Lo mismo ocurre con todas las demás rentas de cuotas constantes iguales a h, que dejan 2, 3 y hasta $n - 1$ períodos, al comienzo sin aporte, para más adelante. Este tipo de rentas o anualidades se llaman *diferidas*.

En particular se tiene que $h \cdot a_{\overline{n-1}|r}$ es el valor actual de la renta con $n - 1$ cuotas calculado en $t = 1$, y por lo tanto debe actualizarse un período si se desea obtener el valor actual en $t = 0$. Las demás rentas que están diferidas 2, 3, y hasta $n - 1$ períodos con respecto a la de cuotas de valor c, deberán actualizarse esa cantidad de períodos. El Cuadro 6.6 muestra la situación para una renta de cuatro cuotas vencidas, en progresión aritmética.

Valor actual en $t = 0$	Rentas diferidas			
$c \cdot a_{\overline{4}|r}$	c	c	c	c
$\nu \cdot h \cdot a_{\overline{3}|r}$		h	h	h
$\nu^2 \cdot h \cdot a_{\overline{2}|r}$			h	h
$\nu^3 \cdot h \cdot a_{\overline{1}|r}$				h
	Renta en progresión aritmética			
$c \cdot a_{\overline{4}|r} + \nu \cdot h \cdot a_{\overline{3}|r} + \nu^2 \cdot h \cdot a_{\overline{2}|r} + \nu^3 \cdot h \cdot a_{\overline{1}|r}$	c	$c + h$	$c + 2h$	$c + 3h$

Cuadro 6.6. Valor actual de una renta en progresión aritmética

Para calcular el valor actual de una renta de n cuotas vencidas, en progresión aritmética, con término inicial n y paso h, debe obtenerse la suma de n términos:

$$V_A = c \cdot a_{\overline{n}|r} + (h \cdot \nu) \cdot a_{\overline{n-1}|r} + (h \cdot \nu^2) a_{\overline{n-2}|r} + \cdots + (h \cdot \nu^{n-2}) \cdot a_{\overline{1}|r}$$

Utilizando que $a_{\overline{k}|r} = \frac{1-\nu^k}{r}$, sacando factor común h y denominar común r en los últimos términos, se obtiene:

$$V_A = c \cdot a_{\overline{n}|r} + h \cdot \frac{(\nu(1-\nu^{n-1}) + \nu^2(1-\nu^{n-1}) + \cdots + \nu^{n-2}(1-\nu^2) + \nu^{n-1}(1-\nu))}{r}$$

Operando algebraicamente:

$$\begin{aligned} V_A &= c \cdot a_{\overline{n}|r} + h \frac{(\nu + \cdots + \nu^{n-1}) - (n-1)\nu^n}{r} \\ &= c \cdot a_{\overline{n}|r} + h \frac{\nu \cdot (1 + \nu + \cdots \nu^{n-1}) - n\,\nu^n}{r} \\ &= \boxed{c \cdot a_{\overline{n}|r} + h \frac{a_{\overline{n}|r} - n\nu^n}{r}} \end{aligned}$$

Si las cuotas son anticipadas, entonces cada cuota anticipada de valor c es equivalente a una cuota vencida de valor $c \cdot (1 + r)$. El valor actual de la renta se obtiene de la fórmula anterior teniendo en cuenta que la primera cuota es $c \cdot (1 + r)$ y el paso en la progresión aritmética es $h \cdot (1 + r)$ en lugar de h. El valor actual es entonces

$$\text{Valor actual} = \boxed{c \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r} + h \cdot (1+r) \cdot \frac{a_{\overline{n}|r} - n\nu^n}{r}}$$

Ejemplo 6.12 Una persona debe pagar un crédito en un plan de pagos de 12 cuotas cada 30 días, con una T.N.A. del 12% con capitalización mensual. La primera cuota es de \$ 1.000, y cada una de las siguientes es de \$ 50 menos que la anterior. Si comienza a pagarlas el 30 mayo, ¿cuál es el valor actual de esta anualidad al (a) 30 de abril, (b) 30 de mayo?

Solución. Se trata de calcular el valor actual de una renta en progresión aritmética, siendo 1.000 el primer término de la progresión y (-50) el paso de un término al siguiente. Esto es, $c = 1.000$ y $h = -50$. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}01$ y el número de cuotas es $n = 12$.

Para resolver (a), se debe calcular el valor actual de la renta considerando cuotas vencidas:

$$V_1 = 1.000 \cdot a_{\overline{12}|0,01} - 50 \frac{a_{\overline{12}|0,01} - 12\nu^{12}}{0{,}01} = 8.226{,}64366$$

es decir que el valor actual al 30 de abril es de \$ 8.226,64.

Para (b), las cuotas se consideran anticipadas, por lo que el valor anterior se multiplica por 1,01, es decir que se capitaliza 30 días:

$$V_2 = 8226{,}64366 \cdot 1{,}1 = 8.308{,}910097$$

por lo que el valor presente al 30 de mayo es de $ 8.308,91.

6.7. Rentas perpetuas

Una renta o anualidad perpetua es una renta cuyos pagos comienzan en una determinada fecha, pero nunca culminan. En la práctica no existen este tipo de rentas, pero sí hay anualidades que se desconoce hasta cuando se extenderán.

Ejemplo 6.13

La Fundación B.E.C.A. hará una inversión de capitales a una tasa del 12% anual, con el objetivo de utilizar estos fondos para pagar becas que cubran hasta $ 20.000 anuales durante los años siguientes. ¿Cuál deberá ser el capital invertido inicialmente?

El Ejemplo 6.13 muestra una situación en la que interesa calcular el valor actual de una anualidad perpetua: aunque en la práctica no se pagarán becas eternamente, en principio esa es la intención.

Si se tratara de una renta cierta de n cuotas vencidas, el valor actual se calcularía como:

$$V_A = 20.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}12^n}}{0{,}12}$$

Ahora bien, el número $\frac{1}{1{,}12^n}$ es cada vez más próximo a 0 cuanto más grande sea el número n. Esto se debe a que 1,12 es un número mayor que 1, y por lo tanto sus sucesivas potencias son cada vez más grandes. En matemática se dice que el límite de $\frac{1}{1{,}12^n}$ cuando n tiende a infinito es 0 y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1{,}12^n} = 0$$

Esto también es cierto si se calcula $\frac{1}{(1+r)^n}$, ya que al ser r una tasa de interés (positiva), se cumple que $1 + r$ es mayor que 1. Por lo tanto, la expresión $1 - \frac{1}{1{,}12^n}$ como así también cualquiera de la forma $1 - \frac{1}{(1+r)^n}$, $n > 1$, puede considerarse igual a 1 si n es suficientemente grande. En particular, para las rentas perpetuas.

Así es que para una renta perpetua de cuotas vencidas y constantes e iguales a c, el valor actual está dado por la fórmula

$$\boxed{V_A = \frac{c}{r}}$$

Para el Ejemplo 6.13, el depósito que deberá hacer la Empresa B.E.C.A. es de $\frac{20.000}{0{,}12}$ = $ 166.666,67 inciales.

6.8. Otras anualidades

En esta sección se resolverán algunos ejemplos de anualidades que no están representadas en las secciones anteriores. Si bien esto no abarcará la totalidad de los casos, sí se puede decir que cubre los más frecuentes. Las situaciones que se analizarán son las siguientes:

1. rentas con tasa de interés variable,
2. rentas con cuotas no equiespaciadas en el tiempo.

6.8.1. Rentas con tasas de interés variables

Esto significa que no hay una misma tasa de interés que gobierna la operación financiera. Por ello, al calcular el valor actual y el valor final debe tenerse cuidado al considerar cuál es la tasa de interés actuante.

Ejemplo 6.14 Se tiene una renta de 12 cuotas bimestrales vencidas de $ 200. El primer año se aplica una tasa de interés del 2% mensual, y el segundo año del 2,5% bimestral. Calcular el valor actual y el valor final de la misma.

Solución: En este ejemplo se tiene una anualidad de 12 cuotas bimestrales. La tasa bimestral correspondiente al primer año es la equivalente al 2% mensual, es decir

$$r_1 = 1{,}02^2 - 1 = 0{,}0404$$

La Figura 6.12 ilustra la situación. Para calcular el valor final V_F al momento de pagar la cuota 12 conviene seguir los siguientes pasos:

- calcular el valor final de las primeras 6 cuotas al momento de pagar la cuota 6, considerando la tasa r_1:

$$V_1 = 200 \cdot s_{\overline{6}|0{,}0404} = \$\ 1.327{,}93$$

- capitalizar V_1 al momento de la cuota 12, es decir *seis* períodos, con la tasa $r_2 = 0{,}025$:

$$V_1 \cdot 1.025^6 = \$\ 1.540$$

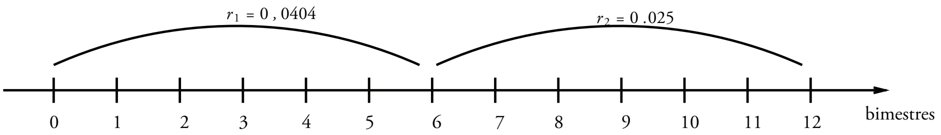
- calcular el valor final de las últimas 6 cuotas, con la tasa r_2:

$$V_2 = 200 \cdot s_{\overline{6}|0{,}025} = \$\ 1.277,55$$

- sumar ambos valores finales para obtener el valor final de la renta total:

$$\mathbf{V_1 \cdot 1.025^6 + V_2 = 1.540 + 1.277{,}55 = \$\ 2.817{,}54}$$

Como puede verse en este ejemplo, no hay dificultades matemáticas para calcular el valor final, ni tampoco para el valor presente, si la tasa de interés es variable. Sólo debe tenerse en cuenta cuál es la tasa de interés que gobierna cada período.



Tasa de interés variable

Figura 6.13

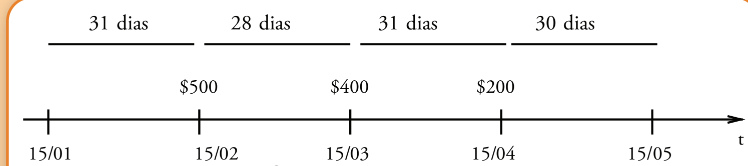
6.8.2. Rentas con cuotas no equiespaciadas

Este caso tampoco ofrece mayores dificultades, sólo que hay que adaptar cada período a la tasa de interés actuante. Por ejemplo, supóngase que un individuo deposita \$ 100 en una cuenta los días 15 de cada mes del año, y la tasa de interés es del 2% mensual. Dado que se ha convenido que un mes financiero equivale a 30 días, pero no todos los meses del año son de 30 días, se tiene un caso de cuotas no equiespaciadas. En la Figura 6.14 se representa una parte de la situación. Puede verse que algunos períodos son de 28 días, otros de 30, y otros de 31 días. Así, para calcular la capitalización de una cuota en un período de 30 días se podrá utilizar la tasa del 2% mensual, pero si el período es de 31 días deberá seguirse una de las siguientes opciones:

a) utilizar una tasa cada 31 días equivalente al 2% mensual, $r = (1{,}02)^{31/30} - 1$

b) expresar 31 días en términos de un mes financiero: $31 = \frac{31}{30}$ meses financieros.

Las dos opciones son equivalentes, y conducen a los mismos cálculos. Para calcular el valor final de la renta se deberá calcular el valor final de cada una de las cuotas. Así por ejemplo, el valor final de la cuota de \$ 500 al 15 de mayo se deberá calcular como:



Cuotas no equiespaciadas

Figura 6.14

$$500 \cdot (1{,}02)^{28/30} \cdot (1{,}02)^{31/30} \cdot (1{,}02)$$

y el valor actual al 15 de enero de la cuota de \$ 200 será el resultado de:

$$200 \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{31/30}} \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{28/30}} \cdot \frac{1}{(1{,}02)^{31/30}}$$

6.9. Ejercicios

Calcular el valor acumulado de una renta de cuotas vencidas de \$ 3.000 anuales, durante 7 años, sujeta a una tasa de interés anual del a) 8 %, b) 10,75 %, c) 17,29 %. **Ejercicio 6.1**

Ejercicio 6.2

Juan paga una deuda de $ 250 cada 30 días. Si no paga durante cuatro meses seguidos, ¿qué pago necesitará hacer al siguiente mes para actualizar su deuda, si la T.N.A. es del 14,4% con capitalización mensual?

Ejercicio 6.3

El Sr. Martínez quiere reunir $ 10.000 al final de 10 años. Comienza haciendo depósitos trimestrales en su caja de ahorros que paga una TNA del 8% con capitalización trimestral. ¿Cuál es el monto de estas cuotas?

Si al cabo de 4 años el banco cambia la tasa al 6% nominal anual, ¿cuál deberá ser el monto de las cuotas para alcanzar los $ 10.000 al final del décimo año?

Ejercicio 6.4

Una renta de $ 5.000 al año arroja un valor actual de $ 62.311,05171 si las cuotas vencen a fin de año, y de $ 65.425,50430 si éstas vencen a principio de año. Calcular la duración de la renta y la tasa de interés anual.

Ejercicio 6.5

Calcular el capital acumulado en un semestre si se depositan $ 1.000 mensuales en cuotas vencidas, y si la T.N.A. es del 36% con capitalización mensual.

Ejercicio 6.6

La Sra. García ha comprado un electrodoméstico con el siguiente plan de pagos: un pago inicial de $ 1.400, y 7 pagos mensuales vencidos por $ 160 más un último pago al final del octavo mes por $ 230. Calcular el valor del electrodoméstico asumiendo una tasa de interés del 27% anual con capitalización mensual.

Ejercicio 6.7

Una persona recibe tres ofertas para la compra de un automóvil:

(a) $ 40.000 de contado;

(b) $ 19.000 de contado y $ 5.000 semestrales, durante 2 años y medio;

(c) $ 2.000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de $ 25.000, al finalizar el cuarto año.

¿Qué oferta es la más conveniente, si la T.N.A. es del 8% anual?

Ejercicio 6.8

Se desea reemplazar una renta de cuotas anuales vencidas de $ 8.000, por una equivalente en pagos mensuales anticipados, siendo la tasa de interés del 9% con capitalización mensual. Calcular el valor de la cuota mensual.

Ejercicio 6.9

Un agricultor plantó olivos que empezarán a producir dentro de 5 años. La producción anual se estima en $ 20.000 y ese rendimiento se mantendrá por espacio de 25 años. Calcular, asumiendo una TEA del 6 %, el valor presente de la producción.

Capítulo 7

Sistemas de amortización

7.1. Introducción

Un sistema de amortización es un método por el cual un capital cedido en préstamo es devuelto por una sucesión de pagos o cuotas. Estas cuotas periódicas constituyen una renta cuyo valor actual deberá ser igual al préstamo otorgado, y deben constituir a su vez una imposición cuyo valor final sea equivalente a la capitalización del préstamo al cabo de dichos períodos.

Se puede suponer que cualquier sistema de amortización es una anualidad o renta con pagos vencidos, ya que si la primera cuota se pagara al momento del préstamo sería equivalente a considerar un préstamo de menor valor con cuotas vencidas. Lo dicho anteriormente equivale a decir que si el préstamo es V y las cuotas son $c_1, c_2, \cdots, c_n$, entonces el valor actual de dicha renta deberá ser V y el valor final de las mismas será $V \cdot (1 + r)^n$.

Existen diferentes sistemas de amortización. Dos de los más sistemas más conocidos son el *sistema alemán*, que utiliza cuotas variables, decrecientes en forma aritmética, y el *sistema francés* en el cual la deuda se amortiza con cuotas constantes.

7.1.1. Características comunes de los sistemas de amortización

En todo sistema de amortización existe un préstamo V, el cual será devuelto en n cuotas equiespaciadas en el tiempo: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cada una de estas cuotas se compone de dos partes:

$$c_i = v_i + s_i$$

donde v_i se denomina *cuota de amortización real* y s_i es la *cuota de interés*. La suma de las cuotas de amortización real es igual al valor del préstamo: $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. La cuota de interés se calcula como el interés sobre las cuotas de amortización aún no pagadas: $s_i = r \cdot (v_i + \cdots + v_n)$.

Esto significa que en cada cuota el deudor paga una parte del capital prestado, v_i, y los intereses sobre el capital aún adeudado.

En particular, justo después de pagar la i-ésima cuota, el valor actual de la renta que resta pagar es igual a

$$V_A^{(i)} = v_{i+1} + \cdots + v_n \qquad 1 \leq i < n$$

Ejemplo 7.1 Supóngase un préstamo de $ 1.000 que se amortiza en tres cuotas cada 30 días, y cuyas cuotas de amortización real son de $ 300, $ 300 y $ 400 respectivamente. La tasa de interés mensual es del 2 %.

Las cuotas a pagar estarán conformadas de la siguiente manera:

Cuota i	Amortización real v_i	Cuota de interés s_i	Cuota c_i	Saldo adeudado $V_A^{(i)}$
1	$300	$ 1.000 · 0,02 = $ 20	$ 320	$ 700,00.
2	$300	$ 700 · 0,02 = $ 14	$ 314	$ 400,00.
3	$400	$ 400 · 0,02 = $ 8	$ 408	$ 0,00.

Como ejemplo, la fila correspondiente a la cuota 2 debe leerse así: *en la cuota 2, paga $ 300 de amortización real más $ 14 de interés, por lo que la cuota es de $ 314. El saldo adeudado luego de pagar la cuota resulta de $ 400.*

El valor actual de la renta es

$$V_A = 320 \cdot \frac{1}{1{,}02} + 314 \cdot \frac{1}{1{,}02^2} + 408 \cdot \frac{1}{1{,}02^3} = \$\ 1.000.$$

El valor actual de la renta calculado inmediatamente después de pagar la primera cuota es:

$$V_A^{(1)} = \frac{314}{1{,}02} + \frac{408}{1{,}02^2} = \$\ 700,$$

es decir, el saldo adeudado a ese momento.

7.1.2. Sistema alemán

El sistema alemán es un sistema de amortización donde las cuotas de amortización reales son todas iguales. Es decir, si se prevén n cuotas, entonces cada cuota de amortización real es igual a

$$v_i = \frac{V}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por lo tanto, el interés que se paga en cada cuota está dado por

$$s_i = r \cdot (v_i + \cdots + v_n) = r \cdot (n + 1 - i) \cdot \frac{V}{n}$$

Como se puede observar, los valores $s_1, s_2, \ldots,$ decrecen en forma aritmética: $s_{i+1} = s_i - r\, V/n$.

Como las cuotas de amortización son constantes, esto implica que las cuotas del sistema de amortización, c_i, también decrecen en forma aritmética: $c_{i+1} = c_i - r\, V/n$. Dado que la cuota es igual a la cuota de amortización más el interés sobre todo el préstamo: $c_1 = \frac{V}{n} + r \cdot V$, y las cuotas disminuyen en $r\, V/n$, se sigue que las siguientes cuotas están dadas por $c_i = V/n + r \cdot V - (i-1) \cdot r\, V/n$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Por otra parte, para que la anualidad determinada por las cuotas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sea un sistema de amortización, debe cumplirse que el valor actual de las mismas sea igual al préstamo V. En efecto, teniendo en cuenta la fórmula para el cálculo del valor actual de una renta en progresión aritmética con cuotas vencidas vista en el Capítulo 6, siendo la cuota inicial $c = V/n + r\, V$ y la razón $h = -r\, V/n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} V_A &= \left(\frac{V}{n} + r\,V\right) a_{\overline{n}|r} - r\,\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n}|r} - n\cdot\nu^n}{r}\right) \\ &= \frac{V}{n}\, a_{\overline{n}|r} + r\,V\, a_{\overline{n}|r} - \frac{V}{n}\, a_{\overline{n}|r} + V\,\nu^n \\ &= V\left(\nu^n + r\, a_{\overline{n}|r}\right) = V \end{aligned}$$

Es decir, el valor actual de la renta es igual al préstamo otorgado.

También debe cumplirse que el valor actual en $t = i$ de la anualidad compuesta por las cuotas $c_{i+1}, c_{i+2}, , \ldots, c_n$ sea igual a la parte del préstamo aún no amortizado. Esto es

$$V_A^{(i)} = v_{i+1} + v_{i+2} + \cdots + v_n$$

En efecto, estas últimas cuotas también conforman una anualidad de $n-i$ cuotas, en progresión aritmética, con razón $h = -r\, V/n$ y primer término c_{i+1}. Este término es $c_{i+1} = V/n + r \cdot (n-i) \cdot V/n$, por lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} {V_A}^{(i)} &= c_{i+1}\cdot a_{\overline{n-i}|r} - r\,\frac{V}{n}\left(\frac{a_{\overline{n-i}|r} - (n-i)\nu^{n-i}}{r}\right) \\ &= \left(\frac{V}{n} + r\,(n-i)\,\frac{V}{n}\right) a_{\overline{n-i}|r} - \frac{V}{n}\, a_{\overline{n-i}|r} + \frac{V}{n}\,(n-i)\,\nu^{n-i} \\ &= \frac{V}{n}\,(n-i)\left(r\, a_{\overline{n-i}|r} + \nu^{n-i}\right) = \frac{V}{n}\,(n-i) \end{aligned}$$

Significa que el valor actual de dicha renta es exactamente la suma de las cuotas de amortización reales que resta pagar, es decir, la parte del préstamo aún adeudado.

Hemos visto entonces que el sistema alemán cumple con las propiedades de un sistema de amortización. Una característica de este sistema es que las cuotas son decrecientes. Esto tiene la desventaja de que las primeras cuotas son de mayor valor monetario, y por lo tanto más difíciles de afrontar para el deudor. Una alternativa que suele usarse es modificar el sistema alemán variando la tasa de interés. Así, se calculan primero los valores de las cuotas para una tasa baja de interés, y luego de pagar algunas cuotas se refinancia la deuda con una tasa de interés más alta.

Ejemplo 7.2

Supóngase un préstamo por $ 10.000 a pagar en cuatro cuotas, aplicando el sistema alemán con una tasa de interés del 2% para las dos primeras cuotas y del 4% para las dos últimas.

Para las dos primeras cuotas se tiene:

$$c_1 = \$\ 2.500 + \$\ 200 = \$\ 2.700 \qquad c_2 = \$\ 2.700 - 0{,}02 \cdot \$\ 2.500 = \$\ 2.650.$$

El saldo adeudado al finalizar la segunda cuota es de \$ 5.000, y la refinanciación implica que las próximas cuotas serán $c_3 = 2.500 + 0{,}04 \cdot 5.000 = \$\ 2.700$ y $c_4 = 2.700 - 0{,}04 \cdot 2.500 = \$\ 2.600$.

La anualidad de cuotas \$ 2.700, \$ 2.650, \$ 2.700, \$ 2.600 tiene un valor actual próximo a \$ 10.000 si se utiliza una tasa de interés constante del 2,6 %. Sin embargo, si se aplica el sistema alemán con una tasa fija del 2,6 %, las dos primeras cuotas serían iguales a:

$$c_1 = \$\ 2.500 + \$\ 260 = \$\ 2.760 \qquad c_2 = \$\ 2.760 - 0{,}026 \cdot \$\ 2.500 = \$\ 2.695$$

algo superiores al sistema que utiliza dos tasas.

Otra alternativa es la aplicación del sistema francés, como veremos en la siguiente sección.

7.1.3. Sistema francés

El sistema francés es un sistema de amortización en el cual las n cuotas a pagar son todas iguales: es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$.

Para determinar el valor de c, tendremos en cuenta que el valor actual de la renta debe ser igual al préstamo V. Por otro lado, utilizando la fórmula de actualización de una renta con cuotas constantes y vencidas, este valor actual debe ser $c \cdot a_{\overline{n}|r}$. Por lo tanto:

$$c = \frac{V}{a_{\overline{n}|r}} = V\,\frac{r}{1-\nu^n}$$

Como hemos visto, cada cuota de la renta se compone de una cuota de amortización real v_i y una cuota de interés s_i. La cuota v_i es la parte del capital adeudado que se salda en el instante $t = i$. Así, si denotamos con $V_A{}^{(i)}$ el valor actual de la renta en $t = i$, entonces:

$$\begin{aligned} v_i &= V_A{}^{(i-1)} - V_A{}^{(i)} = c \cdot \left(a_{\overline{n-i+1}|r} - a_{\overline{n-i}|r}\right) \\ &= \frac{V \cdot r}{1-\nu^n}\,\frac{\left(1-\nu^{n+1-i} - 1 + \nu^{n-i}\right)}{r} \\ &= \frac{V}{1-\nu^n}\,\nu^{n-i}\,(1-\nu) \end{aligned}$$

y usando que $1 - \nu = r \cdot \nu$ concluimos que:

$$v_i = \frac{V \cdot r}{1-\nu^n}\,\nu^{n+1-i} = c \cdot \nu^{n+1-i}$$

Además, puesto que $c = v_i + s_i$ se sigue que:

$$s_i = c \cdot \left(1 - \nu^{n+1-i}\right)$$

La sucesión de cuotas de amortización reales v_i es creciente $(1 \leq i \leq n)$ mientras que s_i es decreciente.

Naturalmente, el valor actual de esta renta es V (pues de esa manera ha sido elegido c), y el valor final es

$$\text{Valor final } = c \cdot s_{\overline{n}|r} = \frac{V \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} \, \frac{(1+r)^n - 1}{r} = V \cdot (1+r)^n$$

Concluimos esta sección con un ejemplo que muestra las cuotas de amortización de un préstamo, utilizando el sistema alemán y el francés respectivamente.

Ejemplo 7.3

Un préstamo de $ 1.000.000 es amortizable en 5 años, con el 15% de interés anual sobre saldos. Los siguientes cuadros resumen los pagos a efectuar según los sistemas alemán y francés respectivamente.

Cuadros de amortización. Los siguientes cuadros de amortización muestran el valor de las cuotas a pagar según cada sistema, la composición de las mismas, y el saldo adeudado al comienzo del período.

Puede observarse que las primeras cuotas son mayores para el caso del sistema alemán, y esta relación se invierte en las últimas cuotas.

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1.000.000	150.000	200.000	350.000
2	800.000	120.000	200.000	320.000
3	600.000	90.000	200.000	290.000
4	400.000	60.000	200.000	260.000
5	200.000	30.000	200.000	230.000
suma		450.000	1.000.000	1.450.000

Cuadro 7.1 Sistema Alemán

Período	Capital adeudado al comienzo del período	Intereses a fines del período	Amortización real a fines del período	Cuota a fines del período
1	1.000.000	150.000	148.315,55	298.315,55
2	851.684,45	127.752,67	170.562,89	298.315,55
3	681.121,56	102.168,23	196.147,32	298.315,55
4	484.974,24	72.746,14	225.569,42	298.315,55
5	259.404,83	38.910,72	259.404,83	298.315,55
suma		491.577,76	1.000.000	1.491.577,76 *

Cuadro 7.2 Sistema Francés

* La diferencia se debe a cálculos de aproximación.

7.2. Sistema americano y fondo de amortización

El *sistema americano* es un sistema de amortización de n cuotas en las que las $n-1$ primeras están constituidas únicamente por intereses, y en la última se devuelve el total del préstamo adeudado más los intereses correspondientes al último período. De esta forma, si el valor del préstamo es V y la tasa periódica es r, entonces las $n-1$ primeras cuotas son:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = V\,r$$

y la última cuota es $c_n = V + V\,r = V\,(1 + r)$.

Notemos que en este sistema la última cuota es considerablemente elevada, ya que su valor es aún mayor que el monto total del préstamo. Por lo tanto, este sistema se suele combinar con una serie de depósitos en un *fondo de amortización*. Esto es, al mismo tiempo que el deudor devuelve las cuotas de interés, aporta al fondo una sucesión de pagos iguales de modo que se forme finalmente un capital equivalente al préstamo. Estas cuotas están sujetas a una tasa de inter es r', usualmente distinta e inferior a r. Si llamamos f a las cuotas del fondo de amortización, entonces se debe cumplir que:

$$f\,s_{\overline{n}|r'} = V \qquad \text{es decir} \qquad f = \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

En un sistema americano combinado con el fondo de amortización, el deudor pagará una renta de n cuotas constantes iguales a $f + V\,r$, donde las cuotas f reconstruyen el préstamo. Cabe entonces preguntarse cuál es la diferencia entre el sistema americano y el sistema francés, el cual también asume cuotas constantes.

7.2.1. El sistema francés vs. el sistema americano

Sea r la tasa de interés por período sobre una deuda de valor V, tanto para el sistema francés como para el sistema americano, y sea r' la tasa de interés para la formación del fondo de amortización. Sea n el número de cuotas.

Según el sistema francés, cada cuota es igual a

$$C_1 = \frac{V}{a_{\overline{n}|r}} = V\,r + \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

y en el sistema americano las cuotas son iguales a

$$C_2 = V\,r + \frac{V}{s_{\overline{n}|r'}}$$

Podemos concluir entonces que si $r > r'$, entonces $s_{\overline{n}|r} > s_{\overline{n}|r'}$ y $C_1 < C_2$. Luego es preferible el sistema francés. Si ambas tasas son iguales: $r = r'$, entonces ambos sistemas son equivalentes; y si $r' > r$, entonces es conveniente el sistema americano.

En la práctica, las tasa de interés para préstamos son superiores a las tasas de interés para depósitos. Por lo tanto es conveniente para el deudor un sistema de amortización francés.

Una empresa puede pedir un préstamo de $ 200.000 a 15 años. Para devolver la misma, tiene dos posibilidades:

Ejemplo 7.4

1. amortizar la deuda con cuotas anuales constantes a una tasa del 11 %.
2. pagar los intereses por el préstamo a una tasa anual del 10,5% y establecer un fondo de amortización con tasa anual del 7,5 %.

¿Cuál opción es más conveniente?

Solución. En este caso el interés sobre la deuda es diferente según se aplique el sistema francés o el sistema americano. Por lo tanto, debemos calcular las cuotas en cada caso. Para el sistema francés, cada una de las 15 cuotas anuales deberá ser igual a

$$C_1 = \frac{\$\ 200.000}{a_{\overline{15}|0,11}} = \$\ 27.813{,}05$$

Para el sistema americano, las cuotas de interés serán de $ 200.000 (1,105)=$ 21.000 y el depósito anual para el fondo de amortización será de

$$\frac{\$\ 200.000}{s_{\overline{15}|0,075}} = \$\ 7.657{,}45$$

Por lo tanto la empresa deberá aportar anualmente una cuota de $ 28.657,45.

La opción más conveniente es la 1.

7.3. Ejercicios

Ejercicio 7.1

Un individuo es deudor de un préstamo concedido hace cinco años, por un importe de $ 1.000.000. El préstamo debía ser amortizado con pagos constantes de $ 162.745,40 al año, siendo la tasa de interés del préstamo del 10 %. Calcular qué cantidad debería entregar el deudor al banco para cancelar el préstamo en este momento.

Ejercicio 7.2

De un préstamo de $ 1.000.000 a amortizar en 4 años por el sistema francés a una tasa anual del 10% calcular:

1. **el valor de cada cuota.**
2. **el monto adeudado al comenzar el tercer año.**
3. **la tercera cuota de amortización real.**
4. **la cuota de interés del cuarto año.**
5. **el capital amortizado en los tres primeros años.**

Ejercicio 7.3

De un préstamo de 10 mil de pesos a amortizar por el sistema francés, con pagos anuales al 10% anual, se sabe que la última cuota de amortización asciende a $ 1.479,504. Calcular la duración de la operación.

Ejercicio 7.4

Un préstamo de 10 mil pesos es concedido para ser amortizado en cinco años, con pagos semestrales, siendo la cuota de amortización real semestral constante. Si la tasa de interés nominal anual es igual al 10 %, calcular:

a) pago correspondiente al octavo semestre.

b) capital adeudado inmediatamente después de pagar la segunda cuota.

Ejercicio 7.5

El Sr. Domínguez contrae una deuda de $ 85.000, a amortizar con el pago de 18 cuotas cada 30 días iguales y vencidas a una tasa de interés del 0,15 % anual.

a) Suponiendo que no paga la cuota 10, y de la cuota 11 sólo abona los intereses. ¿de cuánto debe ser la cuota 12 para regularizar los pagos?

b) Al pagar la cuota 9 el Sr. Domínguez desea reducir el importe de las siguientes cuotas en un 10 %. ¿Qué pago extraordinario deberá hacer junto con la cuota 9?

Ejercicio 7.6

Se sabe que un préstamo de X pesos se amortiza en diez años mediante cuotas que disminuyen en progresión aritmética de manera que la diferencia entre dos cuotas consecutivas es de $ 200. Se sabe además que la última cuota asciende a $ 3.918,15 y que el préstamo ha sido concertado a una tasa de interés anual del 8 %.

Calcular las componentes del cuadro de amortización del séptimo año.

Ejercicio 7.7

En la compra de un electrodoméstico por un importe de $ 3.000 se ofrece pagarlo en 3 cuotas con amortización constante, abonando la primera cuota a los 90 días de realizada la operación, la siguiente los 31 y la tercera a los 32. La tasa de interés pactada en la operación es de 2 % para 30 días. Calcule los importes que deberán pagarse en cada cuota y la composición de las mismas.

Capítulo 8

Flujos de caja

8.1. El concepto de valor actual

¿Cómo se hace para comparar una cantidad de dinero obtenida en este momento con otra que recibiremos en el futuro? Si la actual es mayor que la futura, obviamente preferiremos la primera, ya que podríamos utilizar la diferencia en cualquier momento y reservar el resto para hacer con ello lo mismo que haríamos con la cantidad que íbamos a recibir en el futuro.

La única contra que tiene una cantidad mayor en el presente es que puede ser perdida más fácilmente que la futura, por ejemplo, alguien nos dice que prefiere que le paguemos la semana que viene que es cuando necesitará realmente el dinero, y no ahora que se expone a gastarlo innecesariamente o ser robado. Sin embargo, estos casos son relativamente poco frecuentes, por lo cual, no serán tomados en cuenta.

Si la cantidad futura es mayor que la actual, la decisión no será tan sencilla. Evaluar qué podremos hacer con esa suma en el futuro dependerá de la evolución de los precios. Esto permitirá comprobar hasta qué punto es válido el refrán: "más vale pájaro en mano que cien volando".

Una forma sencilla de hacer una comparación entre una cantidad C_0 hoy y otra C_1 dentro de seis meses consiste en pensar que pedimos un préstamo a un banco por una cantidad que se pueda pagar exactamente con C_1 dentro de seis meses. Si la tasa de interés del préstamo bancario es de r, la cantidad que podemos recibir ahora es de $C_1(1+r)^{-1}$ y esta se puede comparar directamente con C_0.

Otra forma de hacer la comparación es pensar que con $\$C_0$ podríamos buscar un banco y hacer un plazo fijo a seis meses a una tasa de interés r' en el período. De esta forma el banco nos devolverá dentro de seis meses una cantidad $C_0(1 + r')$ y podemos comparar esta suma directamente con C_1.

Notemos que ambas formas coinciden sólo si $r = r'$. En general se tiene que $r > r'$, por lo que será importante, al establecer comparaciones, tener en claro cuál es la tasa de interés que se tomará como referente.

Definición 8.1

Un capital C_0 disponible hoy y otro capital C_1 que estará disponible al finalizar un período, son equivalentes si $C_0(1+r) = C_1$ donde r es la tasa de interés del período

Ejemplo 8.1 La pregunta más usual que nos planteamos es ¿conviene pagar \$ 1.000 ahora o \$ 1.100 dentro de seis meses? Supongamos que la tasa de interés bancaria para préstamos es de 24% anual y la tasa para depósitos a plazo fijo es de 12% anual.

Para responder esta pregunta es necesario considerar dos casos.

1. Dispondremos de \$ 1.100 dentro de seis meses. Entonces, nos podemos plantear, en lugar de esperar seis meses para recibir los \$ 1.100 y pagar nuestra deuda, tomar un préstamo por \$ 1.000 para pagar la deuda ahora y dentro de seis meses pagar el préstamo. Según lo visto \$ 1.100 dentro de seis meses equivalen a \$ $1.100(1+0{,}12)^{-1}$ ahora lo que es menor que \$ 1.000. Por lo tanto no conviene tomar el préstamo.

2. Tenemos los \$ 1.000. En este caso la alternativa que se nos presenta es usarlos para hacer el pago ahora o hacer un depósito a plazo fijo por seis meses y pagar con lo que se obtenga. Si hacemos esto último, \$ 1.000 ahora equivalen a \$ 1.000(1+0,06) dentro de seis meses, que es menor que \$ 1.100. Por lo tanto, nos conviene usar nuestro dinero para pagar ahora.

Con esta idea de equivalencia entre capitales podemos definir la noción de **valor presente**.

Definición 8.2 El valor presente o actual de un capital C que estará disponible dentro de n períodos o estuvo disponible hace m períodos, en ambos casos con una tasa de interés r por período, es de $V_A = C(1 + r)^{-n}$ en el primer caso y $V_A = C(1 + r)^m$ en el segundo.

Si $r > 0$, en el primer caso el valor actual será menor que C ya que lo estamos multiplicando por un número menor que 1 (el inverso de $(1 + r)^n$). En cambio, en el segundo caso será mayor que C ya que multiplicamos por un número mayor que 1.

En los casos que hay que actualizar un valor pasado, se suele utilizar una tasa de interés que refleje la inflación del tiempo transcurrido.

Ejemplo 8.2 Si la inflación de 2005, 2006 y 2007 fue de 9%, 15% y 20% respectivamente ¿A cuánto equivalen \$ 1.000 del 1° de enero de 2005, al 1° de enero de 2008?

Podemos actualizar año a año para obtener $V_A = (1 + 0{,}20)(1 + 0{,}15)(1 + 0{,}09)1.000 =$ \$ 1.504,2. Esto equivale a una actualización en todo el período con una tasa del 50,42%.

También se pueden actualizar pagos en varios períodos a la vez.

Ejemplo 8.3 Si la tasa de interés bancaria para depósitos a plazo fijo es de 12% anual, ¿cuál es el valor actual de cuatro pagos trimestrales de \$ 1.000.

La tasa trimestral es del 3%. Por lo tanto el primer pago, que se realiza al finalizar el primer trimestre, será equivalente a \$ $1.000(1+0,03)^{-1}$ al comienzo del trimestre, el segundo a $1.000(1+0,03)^{-2}$ y así podemos calcular el valor actual como:

$$\begin{aligned}
V_A &= 1.000(1+0,03)^{-1} + 1.000(1+0,03)^{-2} + 1.000(1+0,03)^{-3} + 1.000(1+0,03)^{-4} \\
&= 1.000(1+0,03)^{-1}(1 + (1+0,03)^{-1} + (1+0,03)^{-2} + (1+0,03)^{-3}) \\
&= 1.000(1+0,03)^{-1}\frac{1-(1+0,03)^{-4}}{1-(1+0,03)^{-1}} \\
&= \$\ 3.619,69
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.4

Si en el ejemplo anterior deseáramos conocer el valor actual que tendrán los pagos al finalizar el año, tendríamos que el primer pago será equivalente a $1.000(1+0,03)^3$, ya que transcurren tres trimestres desde que el primer pago es realizado. El segundo pago equivaldrá a $1.000(1+0,03)^2$, el tercero a $1.000(1+0,03)$ y el último simplemente 1.000.

Así, el valor actual al finalizar el año será de:

$$\begin{aligned}
V_A &= 1.000(1+0,03)^3 + 1.000(1+0,03)^2 + 1.000(1+0,03) + 1.000 \\
&= 1.000((1+0,03)^3 + (1+0,03)^2 + (1+0,03) + 1) \\
&= 1.000\frac{1-(1+0,03)^4}{1-(1+0,03)} \\
&= \$\ 4.183,62
\end{aligned}$$

De una manera análoga, también se podría calcular el Valor actual al momento de realizar cualquiera de los pagos.

Félix de Samaniego (1745-1801) narra en un poema que una lechera llevaba un cántaro de leche para vender en el mercado, mientras pensaba en como podría invertir el dinero recibido. Podré comprar un canasto de huevos, se decía, para luego empollarlos y cambiar a los 100 pollos ya crecidos, por un lechón que al engordar se pueda vender y obtener dinero suficiente para comprar una vaca con ternero. En un salto que dió por la alegría que esto le provocaba, cayó el cántaro al suelo y se rompió junto a sus sueños. En este ejemplo, a partir de una inversión equivalente a un cántaro de leche o un canasto de huevos, en el primer período obtiene la diferencia entre 100 pollos menos el canasto de huevos, en el segundo un cerdo menos los 100 pollos, y por último la vaca con el ternero menos el cerdo.

La lechera de Vermeer

Los ejemplos anteriores son casos particulares de lo que se conoce como **flujos de caja**.

Definición 8.3

Una sucesión de pagos y cobranzas $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n)$ se conoce con el nombre de *flujo de caja*. Se conviene que $c_i < 0$ corresponde a un pago y $c_i > 0$ corresponde a una cobranza.

Si aceptamos valores $c_i = 0$ podemos suponer que c_k corresponde al final del k-ésimo período y que todos los períodos tienen la misma duración.

Ejemplo 8.5

Supóngase que cobraremos mensualmente ciertas cantidades (en miles de pesos) durante los próximos cuatro años. ¿Cuál de las siguientes tres posibilidades es más conveniente?

a = (10, 11, 12, 13, 14)

b = (12, 12, 12, 12, 12)

c = (14, 13, 12, 11, 10)

Si llamamos x_i al pago que recibiremos al finalizar el i-ésimo mes y r la tasa de interés mensual, el valor presente de la sucesión de cinco pagos se puede representar por la fórmula:

$$V = \sum_{i=1}^{5}(1+r)^{-i}x_i$$

Intuitivamente, mientras mayor sea la tasa menos importante serán los pagos futuros y convendrá más la alternativa que realiza mayores pagos al comienzo. Si multiplicamos la fórmula por $(1+r)^k$ obtenemos el valor que tendrán los pagos al finalizar el k-ésimo mes. Como multiplicar las cantidades por un mismo número positivo no altera la relación de orden podemos comparar los valores al finalizar el tercer mes y obtenemos:

$$V_a = 10(1+r)^2 + 11(1+r) + 12 + 13(1+r)^{-1} + 14(1+r)^{-2}$$

$$V_b = 12(1+r)^2 + 12(1+r) + 12 + 12(1+r)^{-1} + 12(1+r)^{-2}$$

$$V_c = 14(1+r)^2 + 13(1+r) + 12 + 11(1+r)^{-1} + 10(1+r)^{-2}$$

De donde

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= -2(1+r)^2 - (1+r) + (1+r)^{-1} + 2(1+r)^{-2} \\ &= ((1+r)^{-1} - (1+r))(1 + 2((1+r)^{-1} + (1+r))) \end{aligned}$$

De esta ecuación deducimos que V_a será menor que V_b siempre que la tasa r sea positiva.

De la misma forma, podemos ver que V_b será menor que V_c siempre que r sea positivo. En este ejemplo, la suma de los pagos era la misma en cada caso. Un pequeño cambio en las cantidades puede producir cambios radicales. En los ejercicios se verán casos donde distintos valores positivos de la tasa hacen cambiar la elección de pagos, por ejemplo, cuando $r = 0{,}1$ convendrá más un flujo y cuando $r = 0{,}2$ convendrá más el otro.

Una manera más constructiva de hacer la comparación entre dos flujos de caja es la siguiente: consideremos los flujos **a** y **b** del ejemplo anterior, vemos que el flujo **b** posee 2 unidades más que el **a** el primer mes, además es claro que **b** es equivalente a **b’** = (10, 2(1+r) + 12, 12, 12, 12).

Esto corresponde a ahorrar las dos unidades que le sobran el primer mes. Por otra parte, cuando tenemos dos flujos cuyos primeros pagos son iguales, la preferencia estará determinada por los restantes pagos.

De esta forma comparar **a** con **b'** dará el mismo resultado que comparar **a'**= (11, 12, 13, 14) con **b''**= (2(1 + r) + 12, 12, 12, 12). Si se realiza el mismo razonamiento, se puede reducir la comparación a dos flujos de 3 meses, luego a flujos de dos meses, y finalmente a flujos de un mes cuya comparación es obvia.

En general se tiene:

Propiedad 1.1

Dados dos flujos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$*, si el valor presente de* **a** *es menor que el de* **b** *se puede obtener un flujo* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *equivalente a* **b** *con* $c_i = a_i$ $1 \leq i < n$ *y* $a_n < c_n$.

Un tipo de problemas que se pueden resolver con los conceptos de valor actual y flujo de caja es el de reemplazo de maquinaria. Es usual que en una fábrica u oficina, con el paso del tiempo, la maquinaria requiera mayores gastos de mantenimiento. Entonces, se plantea la compra de un nuevo equipo, que insumirá un gasto inicial mayor pero menores egresos futuros. Para comparar las distintas alternativas será necesario establecer los correspondientes flujos de caja y sus respectivos valores presentes.

Ejemplo 8.6

Una compañía necesita para su producción una máquina por los siguientes cinco años. Actualmente posee dicha máquina cuyo valor es de $ 18.000 pero se depreciará $ 6.000 en los próximos tres años, tras lo cual quedará sin valor de venta ni posibilidad de uso. El costo operacional (a principio de año de esta máquina) es de $ 27.000 y se espera que este se incremente en $ 6.000 por año mientras siga siendo usada.

Al comienzo de cada año, se tiene la alternativa de comprar una máquina nueva cuyo costo es de $ 66.000. La vida útil de una máquina nueva es de seis años, su valor se deprecia $ 9.000 cada uno de los primeros dos años, y de allí en adelante $ 12.000 por año. Esta nueva máquina tiene un costo operacional de $ 18.000 el primer año y luego se va incrementando $ 3.000 por año.

¿Si la tasa de interés es del 10 %, cuándo le conviene comprar la nueva máquina a la compañía?

Este problema puede resolverse calculando los diferentes flujos de caja que se generan al comprar la nueva máquina en distintos años. Los escribiremos usando unidades de mil. Por ejemplo si se compra al comienzo del primer año tendremos el flujo:

$$66, 21, 24, 27, 30, -12$$

Esto se debe a que el primer año desembolsamos $ 66.000 en la compra de la nueva máquina, más $ 18.000 por su costo operativo y recibimos $ 18.000 por la venta de la máquina usada. El segundo año sólo gastamos $ 21.000 por el costo de operación y los siguientes $ 24.000, $ 27.000 y $ 30.000. Finalmente, la máquina es vendida por su valor residual de $ 12.000 y, como recibimos esa cantidad, la denotamos con signo negativo.

De la misma forma se obtienen los flujos alternativos y se tiene:

• compra al comienzo del primer año	66, 21, 24, 27, 30, -12
• compra al comienzo del segundo año	27, 72, 21, 24, 27, -24
• compra al comienzo del tercer año	27, 33, 78, 21, 24, -36
• compra al comienzo del cuarto año	27, 33, 39, 84, 21, -48

Usando la tasa anual de interés del 10% tenemos que r = 0,1 y podemos calcular, por ejemplo, el valor actual del segundo flujo de caja:

$$27 + \frac{72}{1,1} + \frac{21}{(1,1)^2} + \frac{24}{(1,1)^3} + \frac{27}{(1,1)^4} - \frac{24}{(1,1)^5} = 131,382$$

De la misma forma obtenemos el valor actual de los restantes flujos de caja y obtenemos:

138,249 131,382 131,280 136, 881

Vemos que conviene comprar la nueva máquina al comienzo del tercer año. También se observa que la diferencia con hacer la compra el segundo año es muy pequeña, no así con el primero y el cuarto.

8.2. Tasa interna de retorno

Una inversión genera un flujo de caja. Una manera conveniente de comparar el rendimiento de distintas alternativas de inversión es asignarles un número llamado la **tasa interna de retorno o TIR**. Supongamos que invertimos una cantidad a y obtenemos una sucesión de pagos b_1, b_2, ... , b_n no negativos, donde b_i es la cantidad que recibimos al final del i-ésimo período y $b_n > 0$.

Definición 8.4 La tasa interna de retorno por período de dicha inversión es el valor de la tasa de interés r^* que hace que el valor actual del flujo de caja generado sea 0 cuando se usa esa tasa de descuento.

Esto se puede expresar matemáticamente si definimos la función P por:

$$P(r) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i}$$

entonces la tasa interna de retorno por período es el valor $r^* > -1$ para el cual $P(r^*) = 0$.

Este número r^* representa la tasa de interés que iguala los valores presentes de lo que entregamos con lo que recibiremos. Al usar la misma tasa r^* para calcular el valor presente de cada período estamos suponiendo que no hay riesgo de reinversión, es decir, cuando recibamos el primer pago b_1 lo podremos volver a invertir a una tasa r^*, lo mismo con los restantes pagos. La existencia de r^* está garantizada cuando:

$$P(0) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i > 0$$

Además puede demostrarse que r^* será único si $b_i \geq 0 \ \forall i$.

Si entregamos \$ 100 y recibimos al cabo de un año \$ 200 tenemos $P(r) = -100 + 200(1 + r)^{-1}$ de donde $r = 1$ o sea una TIR de 100% anual.

Ejemplo 8.7

Si pagamos \$ 100 y obtenemos \$ 70 al final de cada uno de los siguientes dos semestres, tendremos $P(r) = -100 + 70(1 + r)^{-1} + 70(1 + r)^{-2}$

Ejemplo 8.8

Debemos resolver:

$$100 = \frac{70}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2}$$

Equivalentemente:

$$100(1+r)^2 = 70(1+r) + 70$$

Desarrollando:

$$100r^2 + 130r - 40 = 0$$

Entonces:

$$r = \frac{-130 + \sqrt{130^2 + 16.000}}{200} = \frac{-130 + 181{,}4}{200} = 0{,}257$$

Es decir que la TIR es de 25,7% semestral.

En este ejemplo vemos la equivalencia entre el flujo $(-100, 70, 70)$ y el flujo que obtendríamos en caso de volver a invertir a tasa r el primer pago: $(-100, 0, 70(1 + r) + 70)$.

Se desea calcular la TIR de un bono del estado que ofrece pagar 7% de interés anual durante tres años y el tercer año se devuelve el total del capital. Si el bono se consigue al 30% de su valor ¿cuál es la TIR correspondiente?

Ejemplo 8.9

El flujo de caja generado es -30, 7, 7, 107. La ecuación a resolver es:

$$30 = 7(1 + r)^{-1} + 7(1 + r)^{-2} + 107(1 + r)^{-3}$$

Si multiplicamos ambos miembros por $(1 + r)^3$ podemos resolver el problema equivalente

$$30(1 + r)^3 = 7(1 + r)^2 + 7(1 + r) + 107$$

Desarrollando, obtenemos la ecuación polinomial en r:

$$30r^3 + 83r^2 + 69r - 91 = 0$$

Por ser una ecuación de tercer grado tiene, a lo sumo, tres soluciones que son las raíces del polinomio. Puede verse en este caso que la función es creciente para $r > 0$ y, por lo tanto, hay sólo una raíz positiva, que es la que nos interesa. Cuando el grado del polinomio es menor que cinco se puede aplicar una fórmula para encontrar las raíces. En general, hay métodos efectivos para calcular aproximaciones.

Un método básico, fácil de programar, es el de bisección. Este consiste en encontrar un intervalo $[a_0, b_0]$ donde se halla la raíz. Una forma de saber si la raíz se encuentra en un intervalo (a, b) es evaluar la función en ambos extremos y comprobar que toma valores con signos distintos en a y b. En este ejemplo el [0, 1] es uno de esos intervalos, ya que

$$P(0) = -84 < 0 \text{ y } P(1) = 30 + 83 + 69 - 91 = 91 > 0$$

Una vez que conseguimos un intervalo $[a_0, b_0]$ con una raíz, calculamos su punto medio $m = (a_0 + b_0)/2$ y partimos el intervalo en dos mitades: $[a_0, m]$ y $[m, b_0]$. Ya sabemos como averiguar en cuál de ellas quedo la raíz. En nuestro ejemplo, calculamos $m = 1/2$ y evaluamos el polinomio:

$$P(1/2) = 30/8 + 83/4 + 69/2 - 91 = -32 < 0$$

Por lo tanto, la raíz se encuentra en [1/2, 1]. Evaluamos en $3/4 = (1/2 + 1)/2$ y vemos que:

$$P(3/4) = 15{,}27/32 + 83{,}9/16 + 69{,}3/4 - 91 = 20,\ 13 > 0$$

por lo tanto, la raíz pertenece a [1/2, 3/4]. De esta manera obtenemos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, que contienen la raíz.

Si nos detenemos en $[a_n, b_n]$ sabemos que $\frac{a_n+b_n}{2}$ dista de la raíz en menos que $\frac{b_n-a_n}{2}$. En nuestro ejemplo la raíz r dista de $(1/2 + 3/4)/2 = 0{,}625$ en menos de $(3/4 - 1/2)/2 = 0{,}125$. En otras palabras hemos determinado que la tasa es al menos 50% y a lo sumo 75%, y tomamos como tasa aproximada el 62,5 %. También podríamos seguir afinando el intervalo hasta obtener la precisión que deseemos.

Aquí hemos descripto sucintamente los pasos que se deben realizar para el cálculo de la tasa interna de retorno. Como se puede observar, aún en un flujo de cuatro términos, resulta necesario el uso de una calculadora dado el número de multiplicaciones que debemos realizar para obtener cada aproximación.

Al aumentar el número de períodos, la dificultad conceptual es la misma pero la cantidad de operaciones necesarias para obtener un resultado es tal, que vuelve imprescindible el uso de una calculadora financiera o, de ser posible, una computadora y con un programa (software) conocido como planilla u hoja de cálculo. En ambos casos se cuenta con funciones específicas para la matemática financiera que serán tratadas en los apéndices.

Una función que nos ahorrará mucho tiempo se llama TIR. Con ella se puede obtener la tasa interna de retorno de un flujo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ simplemente valuándola en el flujo.

Esto es:

$$\mathrm{TIR}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = r^*.$$

En el caso de una calculadora financiera, para obtener r^*, se deberá ingresar los datos: a_i y luego buscar y aplicar la función TIR o IRR. El caso de una planilla de cálculo es similar y se facilita el ingreso de datos y el resguardo del resultado.

Ejemplo 8.10

Dado un bono como el del ejemplo anterior nos planteamos encontrar el precio p al que deberíamos comprar el bono para obtener una tasa de 50 %.

Para esto debemos resolver la ecuación: $p(1{,}5)^3 = 7(1{,}5)^2 + 7(1{,}5) + 107$ o sea $p = 39{,}48$. Es decir, si compramos el bono a menos de \$ 39,48 obtendremos una tasa mayor que el 50% anual.

Vemos en este último ejemplo que es mucho más fácil obtener el precio para una determinada tasa, que la tasa para un determinado precio. Esto nos muestra que puede ser más sencillo hacer una tabla donde demos la TIR y el precio que le corresponde. Cuando queremos resolver el problema inverso buscamos en la tabla un precio aproximado al dato y su correspondiente TIR nos dará una aproximación de la tasa buscada. Esta es una alternativa intermedia a las calculadoras y computadoras, ya que requieren el uso de estas para su elaboración, pero luego permiten obtener una aproximación de la TIR sin usar pilas ni cables.

Otra función de mucha utilidad es la función $VAN(r, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que permite obtener el valor actual del flujo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a una tasa r. Notemos que por su definición, VAN y TIR están relacionadas por la siguiente fórmula:

$$\mathrm{VAN}(\mathrm{TIR}(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_1, a_2, \ldots, a_n) \approx 0$$

El concepto de flujo de caja nos permite representar situaciones ya estudiadas en los capítulos anteriores. Por ejemplo, la amortización de un crédito puede verse como un flujo $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde n es la cantidad de cuotas que debemos pagar, $-a_0 = C$ es el monto que recibimos prestado y a_i con $1 \leq i \leq n$ es la cuota que debemos pagar al finalizar el i-ésimo mes. La tasa de actualización utilizada corresponde a la tasa de interés que el banco recibe por el préstamo.

Ejemplo 8.11

Tomamos un préstamo en un banco por un monto de \$ M, a una tasa anual r, pagadero en n cuotas iguales de \$ c.

¿Cuánto vale cada cuota?

¿Cuál es la deuda R_k que resta una vez pagada la k-ésima cuota?

Consideramos el flujo $(-M, c, \ldots, c)$ donde c aparece n veces y buscamos un valor de c que anule el valor presente del flujo. Esto se refleja en la siguiente ecuación:

$$M = \sum_{k=1}^{n} c(1+r)^{-k}$$

De aquí se deduce el valor de la cuota:

(1) $$c = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{-k}} = \frac{Mr}{1-(1+r)^{-n}}$$

Para calcular R_k pensemos que antes de pagar la k-ésima cuota debíamos R_{k-1} más sus intereses rR_{k-1}, restando a esto la cuota pagada nos queda lo que aun debemos. Esto es:

$$R_k = (1+r)R_{k-1} - c$$

Sabemos que $R_n = 0$, ya que después de la última cuota no deberemos nada. La relación nos dice entonces que $R_{n-1} = c/(1+r)$. Consideremos $T_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j}$ y $T_n = 0$. Estos valores cumplen:

$$T_k = (1+r)T_{k-1} - c \qquad\qquad 1 \leq k \leq n$$

Observemos que $T_{n-1} = c/(1+r) = R_{n-1}$ y los T_k cumplen la misma relación que los R_k.

Podemos entonces concluir que

(2) $$R_k = T_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j} = \frac{c(1-(1+r)^{k-n})}{r} \qquad 1 \leq k \leq n$$

Veamos ahora que sucede en un ejemplo más concreto.

Ejemplo 8.12

El Banco de la Plaza nos ofrece un crédito de \$ 1.000 a pagar en 60 cuotas iguales (sistema francés) con una tasa de 18% anual. Calculemos el valor de cada cuota y la deuda que restará al completar un año de pagos.

Usando la ecuación (1) obtenemos

$$c = \frac{1.000}{\sum_{k=1}^{60}(1,015)^{-k}} = \frac{1.000}{\frac{1-1,015^{-60}}{0.015}} = \frac{15}{0,5907}$$

Concluimos entonces que $c = 25{,}39$ es la cuota que se deberá pagar mensualmente.

En los ejemplos anteriores cada cuota c se compone de una parte A_k que amortiza el capital prestado y una parte I_k que corresponde a los intereses de la parte del capital adeudado al comienzo del período anterior. Recordemos que R_k es la deuda que aún nos resta pagar al realizar el k-ésimo pago y r la tasa de interés del préstamo. Entonces $I_k = rR_{k-1}$. Ahora podemos usar la ecuación (2) y así obtenemos:

(3) $$I_k = rR_{k-1} = c(1-(1+r)^{k-1-n})$$

Cómo $c = I_k + A_k$ deducimos:

(4) $$A_k = c - I_k = c - c(1-(1+r)^{k-1-n}) = c(1+r)^{k-1-n}$$

Si en el ejemplo 8.12, deseamos calcular la parte correspondiente a intereses y a amortización usamos las ecuaciones (3) y (4) y tenemos para los intereses:

$$I_k = c(1 - (1 + r)^{k-1-n}) = 25,39(1 - 1,015^{k-61})$$

y para las amortizaciones:

$$A_k = c(1 + r)^{k-1-n} = 25,39(1,015)^{k-61}$$

También podemos plantear los problemas de capitalización con un flujo de caja donde la tasa de actualización corresponde a la tasa bancaria de depósitos.

Ejemplo 8.13

Nos proponemos crear un fondo de ahorro depositando $ 500 por mes durante 36 meses para luego retirar mensualmente un monto x durante los siguientes 36 meses. ¿Qué monto podremos retirar si en el banco nos aseguran una tasa de 8% anual durante los próximos seis años?

En este caso el flujo es de la forma $(500, \ldots, 500, -x, \ldots, -x)$. De aquí se deduce la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{35} 500(302/300)^{-k} = \sum_{k=36}^{71} x(302/300)^{-k}$$

donde hemos usado que $302/300 = 1 + 2/300$ es el coeficiente de actualización correspondiente a una tasa de interés del 8/12% mensual y hemos contado los 72 meses del 0 al 71. Así obtenemos:

$$500\left(\frac{1 - (300/302)^{36}}{0,006666}\right) = x(300/302)^{36}\left(\frac{1 - (300/302)^{36}}{0,006666}\right)$$

Simplificando, obtenemos $x = 500(302/300)^{36} = 635,11$. En general, si la cantidad n de meses durante los que ahorramos un monto C es igual a la de los meses durante los cuales extraeremos la renta x, cuando la tasa de capitalización es r tendremos:

$$\mathrm{x} = C(1 + r)^n$$

8.3. Usufructo y nuda propiedad

A veces aparece entre los avisos clasificados, alguno donde se ofrece a la venta la nuda propiedad de un inmueble. ¿Qué quiere decir esto? Significa que se está separando por un lado el derecho a ser el dueño del inmueble, y por otro el derecho a la renta que este puede brindar durante un cierto lapso. Al primero se lo llama nuda propiedad y al segundo, usufructo. Estos conceptos también se trasladan al caso de un préstamo. Como hemos visto en el ejemplo 8.11, un préstamo de $\$M$ genera un flujo de caja $(-M, c, \ldots, c)$ donde c es el valor de cada pago. También sabemos que cada cuota se descompone en una parte que amortiza el capital y otra que consiste en el interés por el capital que resta devolver. Esto genera dos flujos $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ y $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Nos planteamos el siguiente problema: supongamos que al cabo de k meses, la tasa de interés del mercado es ahora r_m y el banco decide vender su derecho de cobranza. ¿A cuánto debería venderlo? Más aún, el banco desea vender por separado su derecho al cobro de intereses y su derecho al cobro de las amortizaciones. ¿Cuánto debe cobrar por cada uno?

La respuesta es sencilla, hay que calcular el valor presente de los flujos $(I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n)$ y $(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n)$ usando la nueva tasa de mercado r_m. Tenemos entonces:

(5)
$$U_k = \sum_{j=1}^{n-k} I_{k+j}(1+r_m)^{-j}$$

(6)
$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k} A_{k+j}(1+r_m)^{-j}$$

Definición 8.5 El valor actual U_k, del flujo de intereses $(I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_n)$ se conoce con el nombre de **usufructo**. Al valor presente N_k, del flujo de amortizaciones $(A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n)$ se lo llama **nuda propiedad**.

La fórmula

(7)
$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k} c(1+r)^{k+j-1-n}(1+r_m)^{-j} = c(1+r)^{k-1-n}\sum_{j=1}^{n-k}\left(\frac{1+r}{1+r_m}\right)^j$$

da el valor de la nuda propiedad N_k, con una tasa de mercado r, después de haber pagado k cuotas de n.

Como $c = I_k + A_k$, $1 \leq k \leq n$ tenemos:

$$U_k + N_k = \sum_{j=1}^{n-k} I_{k+j}(1+r_m)^{-j} + \sum_{j=1}^{n-k} A_{k+j}(1+r_m)^{-j} = \sum_{j=1}^{n-k} c(1+r_m)^{-j}$$

Ahora podemos expresar U_k en términos de N_k y la actualización de un flujo de capital constante:

(8)
$$U_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j} - N_k$$

Ejemplo 8.14 En el ejemplo 8.12, suponemos que al cabo de un año la tasa de mercado es del 12% anual y el banco decide vender la nuda propiedad del préstamo. ¿Qué precio tendrá esta?

Aplicamos al ejemplo la fórmula (7) para la nuda propiedad:

$$N_{12} = c(1+r)^{-49}\sum_{j=1}^{48}\left(\frac{1+r}{1+r_m}\right)^j$$

Reemplazamos las tasas y la cuota por su valor y desarrollamos:

$$\begin{aligned} N_{12} &= 25{,}39(1{,}015)^{-49}\sum_{j=1}^{48}\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}\right)^j \\ &= \frac{25{,}39(1{,}015)^{-49}\left(\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}\right)^{48}-1\right)}{\left(\frac{1{,}015}{1{,}01}-1\right)} \\ &= 661{,}43 \end{aligned}$$

Para obtener el usufructo usamos la fórmula (8):

$$\begin{aligned} U_{12} &= 25,39\sum_{j=1}^{48}(1+r_m)^{-j} - N_{12} \\ &= 964,16 - 661,43 \\ &= 302,73 \end{aligned}$$

Una manera alternativa de calcular U_k y N_k para un préstamo de tipo francés es usar las relaciones (ver Ejercicio 8.6):

$$\begin{aligned} U_k + N_k &= c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j} \\ \frac{r_m}{r}U_k + N_k &= c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j} \end{aligned}$$

Si calculamos primero $c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r_m)^{-j}$ y la deuda remanente $R_k = c\sum_{j=1}^{n-k}(1+r)^{-j}$, nos queda planteado un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas U_k y N_k, que tiene una única solución siempre que $r_m \neq r$, y se resuelve fácilmente.

8.4. Ejercicios

Ejercicio 8.1

Tenemos a la venta un auto y nos ofrecen pagar $ 10.000 al contado o un pago de $ 5.000 y tres pagos semestrales de $ 2.500

a) ¿Cuál de las ofertas nos conviene aceptar si la tasa de descuento es del 15% anual?

b) ¿Y si fuese del 24% anual?

Ejercicio 8.2

Con las mismas hipótesis que en el ejercicio 8.1,

a) ¿Cuál debería ser la tasa de descuento para que las ofertas fuesen equivalentes?

b) ¿Cuál debería ser el pago inicial de la segunda oferta para que fuese equivalente a la primera con tasa de descuento de 24%?

Ejercicio 8.3

¿Cuál es la tasa interna de retorno de un bono como el del ejemplo 8.9 si lo compramos al 50% de su valor?

Ejercicio 8.4

Calcular la tasa interna de retorno de un bono a 10 años de $ 10.000 que paga semestralmente $ 500 durante 20 semestres y el último semestre amortiza el total del capital, en cada una de las siguientes alternativas:

a) Si pagamos por él $ 10.000 (A la par).

b) Si lo conseguimos a $ 9.000. (Bajo la par).

c) Si lo compramos a $ 10.500. (Sobre la par).

Ejercicio 8.5

Tomamos un préstamo de \$ 100.000 a pagar en 20 cuotas semestrales iguales con una tasa anual del 10 %.

a) ¿Cuál es la cuota semestral que debemos pagar?

b) ¿Cuál es la deuda remanente después de realizar nuestro sexto pago?

c) Si en ese momento la tasa de mercado es del 6% anual ¿Cuánto vale el usufructo U_6?

d) ¿Cuanto valdría U_6, si la tasa de mercado fuera del 15% anual?

Ejercicio 8.6

Teniendo en cuenta que $R_n = 0$, mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1} - R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - r_m \sum_{j=1}^{n-k} R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$$

Deducir que $N_k = R_k + \frac{r_m}{r}\sum_{j=1}^{n-k} r R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$ y por lo tanto

$$N_k = R_k + \frac{r_m}{r} U_k$$

Ejercicio 8.7

Hemos tomado un préstamo con una tasa de interés r del 12% anual a pagar en 84 cuotas mensuales de \$ 100 cada una. Cuando restan aún 60 cuotas, la tasa de mercado es del 6% anual. Calcular el valor del usufructo U_{24} y la nuda propiedad N_{24}.

Ayuda: usar $R_{24} = \frac{c\,(1-(1+r)^{24\,-84})}{r}$ y el sistema de dos ecuaciones.

Ejercicio 8.8

Hemos tomado un préstamo con una tasa de interés r del 15% anual a pagar en 60 cuotas mensuales de \$ 100 cada una. ¿Cuántas cuotas nos quedan de pagar si la deuda remanente es de \$ 3.252,13?

Capítulo 9

Las apariencias engañan

9.1. No todo lo que reluce es oro

En este capítulo analizaremos diversas formas de presentar planes de pago que los hacen más atractivos a los consumidores aunque en realidad impliquen el pago de una tasa de interés más alta que la publicitada.

Una forma común de esconder la tasa efectiva es anunciar una tasa anual, tomar la tasa mensual proporcional y aplicar la actualización mediante esta. En el siguiente ejemplo vemos que esto conduce a una tasa efectiva superior a la tasa anual anunciada.

Ejemplo 9.1

Nos ofrecen un crédito de \$ 1.000 pagadero en 24 cuotas iguales a una tasa anual del 12 %, las cuotas se calculan con la ecuación $1.000 = c.\ A_{\overline{24}|0,01}$ donde 24 es la cantidad de períodos y $r_m = 0{,}01$ es la tasa proporcional que le corresponde a cada período. De la fórmula $A_{\overline{n}|r} = (1 - (1 + r)^{-n})/r$ obtenemos $A_{\overline{24}|0,01} = 21{,}2434$ y cada cuota será de \$ 47,07 = $1.000(21{,}2434)^{-1}$. La tasa equivalente anual del crédito se obtiene de la fórmula: $r_a = (1 + r_m)^{12} - 1$ de donde $r_a = 0{,}1268\%$ es decir el 12,68% que es mayor a la anunciada.

Una forma que suele ser usada a veces es la de calcular los intereses en una forma directa mediante la tasa publicada y luego dividir por el número de cuotas. Esto hace que la tasa equivalente sea mucho mayor ya que no se toma en cuenta lo que se amortiza del crédito mes a mes.

Ejemplo 9.2

Compramos un paquete de vacaciones que cuesta \$ 3.000 y nos ofrecen pagarlo en 12 cuotas a un interés del 6,62% anual calculado directamente y repartido en las cuotas. El interés que debemos pagar es entonces de \$ 198,6 y las cuotas serán $c = (3.000 + 198{,}6)/12 = \$\ 266{,}55$. Dado que $A_{\overline{12}|0,01} = 11{,}255$ y $c = \$\ 266{,}55 = 3.000/11{,}255$ tenemos que la tasa equivalente anual pagada efectivamente es del 12% anual, ¡casi el doble que la anunciada!

Una variante de la forma de aumentar la tasa efectiva vista en el ejemplo es el cobro anticipado de los intereses. En este caso se calculan los intereses del préstamo de manera simple, se deducen del monto a prestar y luego se divide por el número de cuotas.

Ejemplo 9.3 Nos ofrecen un préstamo de $ 1.000 con un interés del 1% mensual y a pagar en 6 meses. El interés correspondiente del 6% es descontado al entregar el capital. Entonces recibimos $ 940 = 1.000 – 60 y pagaremos seis cuotas de 1.000/6 cada una.

Para obtener la tasa efectiva correspondiente r_e debemos resolver la ecuación:

$$940 = (1000/6)A_{\overline{6}|r_e}$$

Es decir $A_{\overline{6}|r_e} = 5,640$. Como $A_{\overline{6}|0,018} = 5,6394$ y $A_{\overline{6}|0,0179} = 5{,}6413$, vemos que la tasa efectiva es aproximadamente 1,8% mensual.

Otra forma de obtener por un préstamo una tasa equivalente superior a la anunciada consiste en cobrar anticipadamente la primera cuota. Esto tiene como consecuencia que el capital efectivamente prestado sea inferior en una cuota y el número de cuotas disminuya en uno.

Consideremos que C es el capital prestado, r la tasa mensual y n la cantidad de meses en que se pagará el préstamo con cuotas iguales vencidas de valor c que se pagan anticipadamente.

Entonces el valor efectivamente recibido es de $C - c$ y debe ser igual al valor actualizado de las n – 1 cuotas restantes.

Para calcular la tasa equivalente r_e debemos resolver la siguiente ecuación:

$$C - c = cA_{\overline{n-1}|r_e}, \text{donde } c = C.A^{-1}_{\overline{n}|r}$$

Para obtener la solución suele ser conveniente utilizar una tabla.

Ejemplo 9.4 Nos ofrecen un préstamo de $ 1.000 en 24 cuotas iguales vencidas y a una tasa del 12% anual y queremos saber la tasa equivalente anual.

Primero calculamos $A^{-1}_{\overline{24}|0,01} = 0{,}04707$ de donde obtenemos c = 47,07. Ahora calculamos el cociente $\frac{C-c}{c} = 952,93/47,07 = 20,245$ y planteamos la ecuación:

$$A_{\overline{23}|r_e} = 20,245$$

Si usamos una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$, ubicamos el valor de $A_{\overline{23}|0,01}$ = 20,4558 y de $A_{\overline{23}|0,0125}$ = 19,8820. Usando regla de tres simple aproximamos el valor de r_e por

$$\frac{r_e - 0{,}01}{20{,}2449 - 20{,}4558} = \frac{0{,}0125 - 0{,}01}{19{,}8820 - 20{,}4558} = -0{,}004357$$

De aquí resulta que r_e = 0,01+0,004357   0,2109 = 0,0109188 es decir que la tasa equivalente mensual esta apenas por debajo del 1,1 %.

Alternativamente, se puede pensar el problema del lado del prestamista que invierte $ 952,93 (no $ 1.000, ya que al ser el préstamo a cuotas vencidas nos descuenta la primera cuota $ 47,07 al inicio). Esta inversión le produce un flujo de 23 pagos mensuales de

$ 47,07. Ahora el problema de encontrar la tasa equivalente mensual se resuelve buscando una tasa que anule el valor presente del flujo de caja correspondiente a una inversión de $ 952,93 por la cual se obtienen 23 pagos mensuales de $ 47,07. Como sabemos esta tasa nos es otra que la TIR del flujo. Con una calculadora financiera obtenemos que la TIR de este flujo es 0,010907072. La diferencia con la encontrada anteriormente se debe a que en el primer método usamos una aproximación mediante regla de tres simple. Aprovechamos la mayor precisión de este segundo método para calcular la tasa efectiva anual:

$$(1 + 0{,}010907072)^{12} = 1{,}139029093\ \%$$

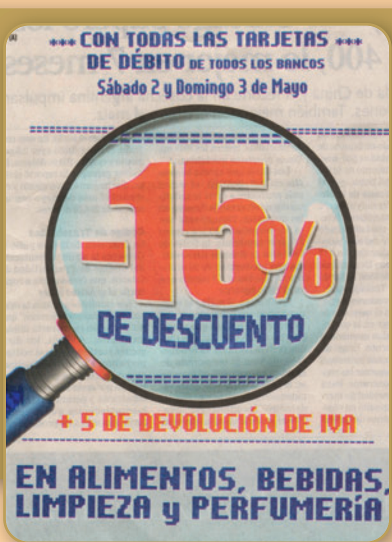
Es frecuente que en los préstamos hipotecarios se agreguen una serie de gastos al monto prestado: gastos de evaluación, escribanía, otorgamiento. También se suelen añadir costos a la cuota correspondientes al seguro contra incendio de la propiedad y cargo mensual de una cuenta bancaria. Es por esto que la tasa anual efectiva suele ser muy superior a la anunciada, muchas veces hasta un 50% mayor. El abuso llegó a tal grado que ahora se exige que en la publicidad se deje claramente expresado el costo financiero total, abreviado CFT, que muestra la tasa efectiva anual. Esto también es obligatorio en los préstamos que no son hipotecarios.

Ejemplo 9.5

Un negocio ofrece a quienes utilicen cierta tarjeta de crédito para pagar sus compras, la posibilidad de realizar los pagos en 12 cuotas “sin interés”. Sin embargo, en letra chica aparece la expresión CFT 4% anual. Esto se debe a que la tarjeta hace un cargo mensual por el costo del seguro sobre saldos adeudados, que es un seguro que se contrata automáticamente para responder por nuestra deuda en caso de muerte del titular de la tarjeta.

Ejemplo 9.6

El gobierno decidió hacer una rebaja de cinco puntos de IVA a quienes paguen con tarjeta de débito. El mecanismo consiste en pagar con tarjeta de débito el precio total que incluye un 21% de IVA y luego el gobierno devuelve a la caja de ahorro de la tarjeta lo que corresponde a cinco de los 21 puntos de IVA. Muchas veces, esto es presentado en avisos de publicidad como un 5% de descuento si se compra con tarjeta de débito. Sin embargo si hacemos la cuenta vemos que si el artículo cuesta $ 100 sin impuesto el importe debitado de nuestra cuenta será de $ 121 y lo que nos devolverán será $ 5. En otras palabras el descuento obtenido será de 5/121, esto es un 4,13 %.



Tampoco se dice en la publicidad que debido al artículo 7 del Decreto 1548/01, que reglamenta la devolución, esta sólo se aplica cuando el débito es menor o igual que $ 1.000. Así, si compramos dos equipos de $ 500,10 cada uno y lo debitamos en un pago no obtendremos reembolso, pero si lo hacemos en dos compras obtendremos entre ambas una devolución total de $ 41,14.

9.2. Deuda Pública

Cuando el estado necesita más dinero que el que recauda por impuestos suele hacer un empréstito mediante títulos públicos. Esto se realiza mediante la emisión de una serie de bonos que dan derecho a un flujo de pagos que hará el gobierno.

Cada pago corresponde a un *cupón*, el que puede ser de renta, si se pagan intereses por el capital adeudado, o de amortización si se trata de una devolución del capital.

La tasa de interés pactada puede ser fija o variable y puede consistir en pagos mensuales, semestrales o anuales.

Con los datos de la emisión del bono se puede calcular el rendimiento del bono. ¿Cómo se hace para que este coincida con el rendimiento que desean obtener los inversores? Para esto el gobierno realiza una subasta de los bonos, otorgándoselos a quien los pague mejor.

Si la mejor oferta supera el valor nominal del bono se dice que la colocación es sobre la par, en caso contrario será bajo la par. En el primer caso la TIR será menor que la correspondiente a las condiciones originales de la emisión y en el segundo caso obtendremos una TIR mayor.

Ejemplo 9.7

El gobierno realizó una licitación por U$S 500 millones del Bonar VII, un título emitido a siete años de plazo. La amortización de este instrumento se realiza íntegramente a su vencimiento (esto se conoce como bono de tipo bullet), mientras que los pagos de renta se abonan semestralmente. El cupón paga un interés del 7% nominal anual.

Si sabemos que la TIR resultante de la licitación fue del 8,4 %, ¿cuál fue el precio de corte?

Solución: si llamamos x al precio de corte en dólares por un bono de U$S 1.000, el flujo generado es el siguiente:

$$(-x, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 1.035)$$

Usamos ahora que el valor presente del flujo correspondiente a la tasa licitada del 4,2% semestral, debe ser nulo. Esto quiere decir que si la tasa de descuento es del 4,2 %, debe ser equivalente tener la cantidad x ahora o recibir los pagos de renta y amortización que nos corresponden por haber comprado el bono.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{14} 35(1+0,042)^{-k} + 1.000(1+0,042)^{-14} \\ &= 35\frac{1-1,042^{-14}}{0,042} + 1.000(1,042)^{-14} \\ &= 364,875 + 562,150 \\ &= \text{U\$S } 927{,}02 \end{aligned}$$

Entonces, el precio que se pagó por estos títulos en la licitación tuvo un descuento de aproximadamente 7,3 %.

¿Qué TIR esperaba obtener quien ofertó comprar los bonos con un 10% de descuento?

En este caso tenemos que calcular la tasa que hace nulo el valor actual del flujo:

$$(-900, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 1.035)$$

Podemos ver, con la ayuda de una tabla o computadora, que una solución aproximada es 8,95 %. Comprobar que estamos cerca de la solución es más sencillo, basta ver que si se usa esta tasa, el valor actual del flujo de pagos V es aproximadamente U$S 900:

$$\begin{aligned} V &= 35\frac{1-1,04475^{-14}}{0,04475} + 1.000(1,04475)^{-14} \\ &= 358,38 + 541,78 \\ &= \text{U\$S } 900{,}16 \end{aligned}$$

$$VAN(8,954/200; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 35; 1035) = 899,97 \approx 900$$

Ejemplo 9.8

El estado emite una serie de bonos a 10 años de plazo con una tasa de interés del 6% anual pagaderos semestralmente y con amortizaciones anuales del 12,5% a partir del tercer año. ¿Cuál es la TIR que le corresponde a esta inversión si los bonos son colocados bajo la par con un descuento del 10% sobre el valor nominal? ¿Cuál es la TIR si pagamos un 5% por encima del valor nominal?

El flujo generado por una inversión de $ 800 a valor nominal será

(-800, 24, 24, 24, 124, 21, 121, 18, 118, 15, 115, 12, 112, 9, 109, 6, 106, 3, 103)

y le corresponde una TIR de 6% anual

Si obtenemos un 10% de descuento al suscribir tendremos el flujo:

(-720, 24, 24, 24, 124, 21, 121, 18, 118, 15, 115, 12, 112, 9, 109, 6, 106, 3, 103)

que tiene una TIR del 8,4% anual.

Si pagamos un 5% al suscribir tendremos el flujo:

(-840, 24, 24, 24, 124, 21, 121, 18, 118, 15, 115, 12, 112, 9, 109, 6, 106, 3, 103)

que da una TIR del 4,93 %.

En los ejemplos anteriores, el cálculo de la TIR asume que, al cobrar intereses o amortización parcial, ese dinero puede ser reinvertido a la misma tasa. Esto no siempre es posible y genera un riesgo llamado riesgo de reinversión. Un tipo de bonos que no corren este riesgo son los bonos cupón cero, que deben su nombre a que no poseen cupones de intereses o amortizaciones parciales. Un bono cupón cero se amortiza totalmente a su vencimiento. Si el valor nominal del bono es de V y al suscribirlo pagamos p, la TIR r^* correspondiente resulta de la ecuación

$$p = V(1 + r^*)^{-n}$$

donde n es el número de períodos hasta su vencimiento.

Si tomamos en cuenta que el flujo de caja generado es de la forma $(-p, 0, 0, \ldots, 0, V)$ podemos calcular la tasa como:

$$r^* = TIR(-p; 0; 0; \ldots; 0; V)$$

Este tipo de bonos suele usarse para garantizar la devolución del capital. La República Argentina no emite este tipo de bonos pero si ha usado los bonos cupón cero del gobierno de EEUU para garantizar el pago de la deuda externa refinanciada mediante el Plan Brady a comienzos de la última década del siglo pasado. Mediante este mecanismo, el gobierno suscribe bonos cupón cero a 20 ó 30 años por el total del capital adeudado y los entrega como garantía de pago del capital adeudado. Con esto, el acreedor se asegura el cobro del capital prestado al cabo de 20 ó 30 años y sólo arriesga la desvalorización de ese capital durante ese tiempo. Al disminuir el riesgo, esto hace que la tasa de interés pactada sea menor y se haga posible la financiación.

9.3. ¿Qué es el Riesgo País?

Este se define como la posibilidad que un estado se vea en dificultades para cumplir con las obligaciones inherentes a su deuda externa. Los economistas tratan de medir el Riesgo País mediante un índice de mercados emergentes (EMBI+) que combina la TIR de los principales bonos que componen la deuda externa de un país y la comparan con la tasa que ofrecen los bonos del tesoro de Norteamérica. Según esta forma de medirlo, el riesgo país de Estados Unidos es nulo por definición.

Si un país tiene un índice de 700 puntos significa que el estado de dicho país deberá pagar para obtener dinero aproximadamente un 7% de interés anual más que lo que paga el gobierno de EEUU. Cuando el índice pasa los 1.200 puntos, deja de tener sentido y lo único que significa es que el estado no puede tomar préstamos y se teme que declare una cesación de pagos (default) como pasó en Argentina a fines de 2001.

Muchos fondos de inversión extranjeros sólo pueden invertir en países con un índice menor que 300. Por ejemplo Brasil llegó a esta situación en 2008.

9.4. Corrección por inflación

A menudo se generan confusiones debido a la *inflación*. Así llamamos al fenómeno por el cual los precios al final de un período son mayores que al comienzo. En símbolos, podemos representar con P_0 y P_1 los precios al comienzo y al final del período. Entonces:

$$\text{INFLACIÓN} <=> P_1 > P_0$$

La existencia de inflación puede causar que lo que parecía un buen rendimiento no lo sea tanto, e incluso llegue a ser una pérdida. Por esto se suele hacer la distinción entre rendimiento *financiero* y rendimiento *económico* de una operación financiera. Supongamos que tenemos un capital C_0 al comienzo de un período y realizamos una operación de tal forma que al final obtenemos $C_1 > C_0$. Tendremos entonces que $I = C_1 - C_0$ es el rendimiento **financiero** de la operación.

Por otra parte, si al comienzo del período con $ C_0 comprábamos 100 kg de carne y al final con $ C_1 compramos 90 kg tuvimos un rendimiento **económico** negativo. Si en cambio con $ C_1 compramos más de 100 kg el rendimiento económico habrá sido positivo.

En otras palabras, si sólo conocemos la tasa de interés que nos ofrece una inversión, no podremos decidir si esta última nos dará un beneficio económico o una pérdida. Para esto debemos relacionar la tasa de interés con la tasa de inflación en el período. Lamentablemente, sólo se conocen las tasas de inflación una vez finalizado el período. Por lo cual recién podremos decir si la inversión fue buena o mala una vez concluida. Más aún, muchas veces se manejan distintos índices de inflación, por lo cual deberemos usar el más apropiado para nuestra situación.

Ejemplo 9.9

Un importador invierte en la compra de productos U$S 100.000, que consigue el 2/1/08 a $ 3,17 cada uno. Con la venta de los productos obtiene a fin de año $ 360.000 y el dólar se vende a $ 3,47. Un importador brasileño invierte en la compra de productos U$S 100.000, que consigue el 2/1/08 a 1,80 reales por dólar. Con la venta de los productos obtiene a fin de año 210.000 reales y el dólar se vende a 2,16 reales. ¿Qué rendimiento tuvo cada inversor?

Para calcular el rendimiento financiero del importador argentino determinamos primero $C_0 = 3{,}17 \cdot 100.000$ que es el capital invertido. Por otra parte lo que obtiene es:

$$C_1 = 360.000 \text{ y por lo tanto } I = 360.000 - 317.000 = 43.000$$

Por lo tanto el rendimiento es de 13,56 %.

En el caso del brasileño tenemos una inversión de $1{,}80 \cdot 100.000$ con la cual obtiene a fin de año 210.000 reales, por lo tanto una diferencia de 30.000 reales. Esto da un rendimiento financiero del 14,29 %.

Para ver sus rendimientos económicos, en ambos casos conviene relacionarlos con el precio del dólar. Al comienzo del año ambos compraban con su capital U$S 100.000. ¿Cuántos dólares compran a fin de año con el resultado de su inversión?

Esto es:

$$C_1/3{,}47 = 360.000/3{,}47 = 103.746{,}40 \text{ en el caso argentino y}$$

$$210.000/2{,}16 = 97.222{,}22 \text{ en el brasileño.}$$

Entonces, el rendimiento económico del argentino fue positivo, ya que puede comprar un 3,75% más de dólares que los que compraba a principio de año, pero el brasileño tuvo un rendimiento económico negativo (-2,78 %) porque no recupera los dólares que invirtió.

Vemos en el ejemplo que los rendimientos económicos fueron menores que el financiero. Queremos tener una medida más precisa de lo ocurrido.

Recordemos que el concepto de valor actual nos permite relacionar cantidades que corresponden a distinto tiempo. Entonces podemos actualizar el resultado de invertir un peso según el índice de aumento más apropiado a nuestra situación, en el ejemplo, el correspondiente al dólar.

Definición 9.1 Llamaremos r a la tasa de rendimiento real asociada al índice de inflación α. Esta tasa surge de actualizar el resultado que se obtiene de invertir un peso a una tasa de interés nominal i, usando α como tasa de descuento. En símbolos:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\alpha}$$

Ejemplo 9.10 En el ejemplo 9.9 tenemos para el caso argentino:

$$i = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{43.000}{317.000} = 0,13564669$$

Por su parte α es la tasa de aumento del dólar:

$$\alpha = \frac{3,47 - 3,17}{3,17} = 0{,}09463722$$

Así podemos calcular r:

$$1 + r = \frac{1 + 0,13564669}{1 + 0,09463722} = 1,037464$$

Notemos que al multiplicar por 100.000 obtenemos la cantidad de dólares que el importador argentino podía comprar a fin de año. El importador obtuvo una tasa de rendimiento real del 3,75% anual.

Para el caso brasileño tenemos:

$$i = \frac{210.000 - 180.000}{180.000} = 0{,}166667$$

Por otro lado calculamos la tasa de aumento del dólar α:

$$\alpha = \frac{2,16 - 1,80}{1,80} = 0{,}20$$

Finalmente tenemos la tasa real r:

$$r = \frac{1 + 0,1666667}{1 + 0,200000} - 1 = 0,97222225 - 1 = -0,02777775$$

Así el importador brasileño tuvo una tasa real negativa de 2,78% anual.

De estos ejemplos, vemos que la tasa de descuento por inflación puede hacer que un negocio aparentemente beneficioso se vuelva un mal negocio. Es por ello que hay que prestar mucha atención al índice que usamos para aproximar la inflación. En el ejemplo usamos el aumento del dólar, pero suelen usarse el índice de precios al consumidor (IPC), índice de precios mayoristas, índice salarial, etc. En Argentina, todos estos índices son elaborados por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC). Este organismo hace encuestas en hogares mediante las cuales elabora una lista de los bienes y servicios que más representan el consumo de cada familia. A partir de esto, se calcula para cada bien, la proporción en que incide cada variedad de producto en el total consumido. Por ejemplo, el pan fresco tiene una incidencia del 2,0% y esto quiere decir que representa un 2,0% del total gastado en un período. El conjunto de estos productos se conoce como **canasta**. Cada mes se relevan en distintos puntos de venta, los precios de los productos que componen la canasta. La variación mes a mes del precio de esta canasta se refleja en el Índice de precios al consumidor (IPC).

Ejemplo 9.11

¿Cuánto es el IPC de febrero si en enero valía 100 y todos los bienes mantuvieron el mismo precio salvo el pan fresco que se duplicó (suponemos que este ítem tenía una participación del 2% en enero)?

La canasta del mes l se puede representar por una suma $C_l = \sum_{k=1}^{n} c_k p_{k,l}$ donde c_k es la cantidad consumida del k-ésimo bien y $p_{k,l}$ es su precio correspondiente al mes l. Podemos suponer que el índice $k = 1$ corresponde al pan fresco. La hipótesis de que el IPC de enero es 100 quiere decir que haremos C_1 equivalente a 100. Para calcular C_2 usamos que $p_{1,2} = 2p_{1,1}$ y $p_{k,2} = p_{k,1}$ $\forall k > 1$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} C_2 &= c_1 p_{1,2} + \sum_{k=2}^{n} c_k p_{k,2} \\ &= c_1 2 p_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} c_k p_{k,1} \\ &= c_1 p_{1,1} + \sum_{k=1}^{n} c_k p_{k,1} \\ &= c_1 p_{1,1} + C_1 \end{aligned}$$

Más aún, sabemos que la participación del pan fresco en el gasto de enero era del 2 %, esto es:

$$\frac{c_1 p_{1,1}}{C_1} = \frac{2}{100}$$

Entonces $C_2 = C_1(2/100 + 1) = 102C_1/100$. El IPC de febrero es por lo tanto: $IPC_2 = (C_2/C_1)100 = 102$. La variación es entonces del 2 %.

Alternativamente, hacemos el siguiente razonamiento: como $C_1 = 100$ podemos suponer que el gasto total al principio de enero era de $ 100 y en pan era de $ 2. Durante el mes el gasto en pan aumentó a $ 4 y los demás productos se mantuvieron estables por lo cual el total del gasto a principios de febrero, será de $ 102. Tenemos así que el IPC de febrero será de 102 como habíamos calculado.

El IPC mensual es la base para el cálculo de los valores diarios del Coeficiente de Estabilización de Referencia (CER), que es usado en la indexación de varios títulos públicos emitidos en pesos. Esencialmente el CER distribuye a lo largo del corriente mes la inflación registrada el mes anterior. Esto permite hacer actualizaciones diarias de tal forma que si se ajusta un monto mediante el CER desde el día 7 de un mes, cuando el INDEC da a conocer el IPC, hasta el día 6 del mes siguiente, se obtiene el monto actualizado por dicho IPC, que corresponde a la evolución de precios del mes anterior. La idea es que al actualizar el valor del bono mediante el CER, este no pierda el poder adquisitivo dentro del país. También es posible hacer plazos fijos indexados por CER.

Ejemplo 9.12

Realizamos un plazo fijo de $ 10.000 a un año con una tasa anual de 2% más el CER. Si la variación anual del IPC fue del 10%, a fin de año recibiremos $ 11.200.

En caso que suscribamos títulos indexados por CER, recibiremos pagos por intereses, amortización y actualización del capital.

9.5. Ejercicios

Ejercicio 9.1

Nos ofrecen un crédito de $ 2.000 pagadero en 20 cuotas iguales a una tasa anual del 20%. ¿Cuál es la tasa equivalente anual?

Ejercicio 9.2

¿Cuál es la tasa equivalente anual de un crédito a 30 cuotas al 15% anual, donde la cuota se calcula con la proporción correspondiente de la tasa anual anunciada?

Ejercicio 9.3

Compramos un electrodoméstico que cuesta $ 2.000 y nos ofrecen pagarlo en 12 cuotas a un interés del 12% anual calculado directamente y repartido en las cuotas. Calcular el interés total que pagaremos, el importe de cada cuota y la tasa equivalente anual efectivamente pagada.

Ejercicio 9.4

Queremos comprar un equipo que cuesta $ 1.000 y nos ofrecen pagarlo en 10 cuotas a un interés del 10% anual calculado directamente y repartido en las cuotas. ¿Cuánto costará cada cuota? ¿Cuál es la tasa equivalente anual que nos cobran?

Ejercicio 9.5

Una lotería nos ofrece como premio $ 1.000.000 a pagar en 200 cuotas mensuales de $ 5.000 cada una. Si la tasa de depósitos a plazo fijo es de 12% anual, ¿me conviene aceptar una oferta de $ 500.000 al contado?

Ejercicio 9.6

Nos ofrecen un préstamo de $ 2.000 con un interés del 1% mensual y a pagar en 10 meses. El interés correspondiente del 10% es descontado al entregar el capital. Y debemos pagar los $ 2.000 en 10 cuotas de $ 200 cada una. Calcular la tasa equivalente anual que nos cobran efectivamente.

Nos ofrecen un préstamo de $ 1.000 con un interés del 1% mensual y a pagar en 12 meses. El interés total es descontado al entregar el capital. Si pagamos los $ 1.000 en 12 cuotas de $ 1.000/12 cada una, ¿cuál es la tasa equivalente anual que nos cobran?.

Ejercicio 9.7

Nos ofrecen un préstamo de $ 1.000 a una tasa del 12% anual a pagar en 12 cuotas iguales vencidas donde la primera es descontada al recibir el préstamo. ¿Cuál es la tasa equivalente anual?

Ejercicio 9.8

Calcular la tasa equivalente anual de un préstamo de $ 3.000 a una tasa del 10% anual a pagar en 24 cuotas iguales vencidas donde la primera es descontada al recibir el préstamo.

Ejercicio 9.9

Si la tasa interna de retorno de un bono cupón cero a 20 años de plazo es del 10% anual, ¿cuánto debemos pagar por un bono de un millón de dólares?

Ejercicio 9.10

En la novela Crimen y Castigo de F. Dostoievski, el estudiante Raskolnikof pide un préstamo de un rublo y medio, por el cual le cobran de interés diez kopeks por rublo al mes (1rublo=100 kopeks). Si el pago de los intereses se hace por anticipado y el capital se devuelve al mes ¿cuál es la tasa real de interés mensual?

Ejercicio 9.11

¿Cuánto nos acreditarán por devolución de IVA si pagamos con tarjeta de débito una compra de $ 300 en el supermercado?

Ejercicio 9.12

En el ejemplo 9.11, supongamos que el gasto en leche fluida en enero fue el 1% del gasto total. ¿Cuánto hubiera sido el IPC de febrero si además del pan fresco hubiera subido el 50% la leche fluida?

Ejercicio 9.13

Capítulo 10

La matemática financiera moderna

10.1. Las bases del modelo

Como decíamos en la introducción, se considera a Louis Bachelier como el pionero de la matemática financiera moderna. Fue él quien instaló el uso de modelos matemáticos probabilísticos para representar el precio de las acciones. ¿Qué es un modelo matemático?

Louis Bachelier

Un modelo matemático representa mediante ecuaciones un aspecto de la realidad. **Definición 10.1**

Por ejemplo $A = l^2$ es un modelo que nos permite representar el área de un cuadrado cuyos lados miden l.

Ejemplo 10.1

$C(n) = C_0(1 + r)^n$ es un modelo mediante el cual representamos el crecimiento de un capital C_0 en n períodos con una tasa de crecimiento por período r.

En estos modelos todo esta determinado y nada queda librado al azar: si un lado del cuadrado mide 2 entonces su área medirá indefectiblemente 4. En cambio, en un modelo probabilístico interviene el azar, por lo cual debemos leer las ecuaciones como probabilidades de que ocurra cada resultado posible.

Ejemplo 10.2

La tirada de un dado común se puede representar mediante el siguiente modelo probabilístico:

$$X = i \text{ con probabilidad } 1/6 \text{ para } 1 \leq i \leq 6$$

Tipos de dados

Este modelo dice que la variable X toma el valor que se obtiene al arrojar un dado, como sabemos, este puede ser 1, 2, 3, 4, 5, ó 6. También nos dice que cada una de las caras del dado puede aparecer con idéntica probabilidad 1/6. Esto último significa que el dado que modelamos no está cargado (ninguna cara aparecerá con mayor frecuencia que otra).

En adelante, cuando hablemos de probabilidad, lo haremos en el sentido más intuitivo de la palabra.

Ejemplo 10.3 Si extraemos una carta de un mazo de naipes español de 40 cartas la probabilidad de obtener una espada es $p = 10/40 = 1/4$ ya que de las cuarenta cartas que componen el mazo sólo diez son espadas. Asimismo, la probabilidad de obtener un siete es $p = 4/40 = 1/10$ porque hay exactamente 4 sietes en todo el mazo.

Naipe español

Ejemplo 10.4 Si arrojamos una moneda, esta tiene una probabilidad p de salir cara.

Para fijar ideas consideraremos que este número p surge de arrojarla al aire 1.000 veces y tomar

$$p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos cara}}{1.000}$$

Un teorema fundamental de la probabilidad nos dice que el resultado así obtenido debería estar muy cerca del valor teórico de p, por ello acá no haremos diferencia entre dichos valores.

Resulta claro que

$$1 - p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos ceca}}{1.000}$$

y puede tomarse como la probabilidad de obtener ceca.

Definición 10.2 Si la probabilidad p de salir cara es igual a la de salir ceca, diremos que la moneda no tiene sesgo. En tal caso $p = 1 - p$ y por lo tanto $p = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 10.5 Deseamos modelar un experimento que consiste en arrojar una moneda y observar su resultado: cara o ceca. Esto podemos hacerlo mediante el uso de una variable X que tomará el valor 1 si la moneda cae cara y 0 si la moneda cae ceca. Supongamos que la moneda tiene una probabilidad p de caer cara.

El modelo nos permite agregar este dato. Para esto diremos que la variable X toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Esta variable X se llama *de Bernoulli* y se suele escribir de la siguiente forma:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Ahora queremos un modelo que nos dé información sobre el resultado de arrojar una moneda 1.000 veces. Podemos pensar entonces que para cada tirada tenemos una variable de Bernoulli X_i que modela la i-ésima tirada, y valdrá 1 con probabilidad p si la moneda sale cara y 0 en caso contrario.

Ejemplo 10.6

Así tendremos que:

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

valdrá exactamente n cuando haya salido n veces cara y $1.000-n$ veces ceca. Notemos que Y es una variable que toma valores entre 0 y 1.000.

10.2. Luz, cámara,... acción

Este tipo de variables nos servirán para modelar el comportamiento del valor de una acción. Recordemos que una acción representa una fracción del valor de una Sociedad Anónima y otorga diversos derechos a su poseedor, entre ellos, el derecho a participar en el reparto de utilidades.

Las acciones de una Sociedad Anónima pueden cotizar en la Bolsa de Valores. Eso permite que los interesados puedan comprarlas y venderlas. Estamos pensando en una acción de cualquier empresa que cotice en la Bolsa de Comercio. Para nuestro modelo supondremos que en un período T (un día, una hora, un minuto) el valor de la acción puede subir un porcentaje fijo s con probabilidad p o bajar un porcentaje fijo b con probabilidad $1 - p$. Esto lo podemos representar de la siguiente forma: si V_0 es el valor de la acción al comienzo del período y V_1 al final, tendremos:

$$V_1 = \begin{cases} V_0(1+s) & \text{con probabilidad } p \\ V_0(1-b) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Al final del segundo período tendremos:

$$V_2 = \begin{cases} V_0(1+s)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ V_0(1+s)(1-b) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ V_0(1-s)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Estamos haciendo la siguiente hipótesis: la suba o baja del valor de la acción en el primer período no tiene influencia sobre lo que ocurra con éste en el segundo período. Más concretamente, la probabilidad de que suba en el segundo período, si subió en el primero, es la misma que la probabilidad de que suba en el segundo, si bajó en el primero (en ambos casos es igual a p).

De esta hipótesis podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{probabilidad de subir en los dos períodos} &= p \cdot p \\
\text{probabilidad de subir en el primero y bajar en el segundo} &= p(1-p) \\
\text{probabilidad de bajar en el primero y subir en el segundo} &= (1-p)p \\
\text{probabilidad de bajar en los dos períodos} &= (1-p)(1-p)
\end{aligned}$$

Podremos representar el valor al cabo de n períodos usando la variable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde X_i es una variable de Bernoulli. Entonces:

$$V_n = V_0(1 + s)^Y (1 - b)^{n-Y}$$

Observemos qué nos dice esta fórmula para el valor de la acción al cabo de n períodos: hay una probabilidad p_k de que la acción valga $V_0(1 + s)^k(1 - b)^{n-k}$. La probabilidad p_k es justamente la probabilidad de que la variable Y tome el valor k. Es posible calcularla y ver que es igual a $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Ahora, pensemos que el intervalo de tiempo en que transcurre todo es un número fijo T y lo subdividimos en períodos más pequeños, todos de duración T/n. En este caso, el aumento o disminución que puede ocurrir desde un período al siguiente se representará multiplicando por $1 + sT/n$ o $1 - bT/n$.

10.3. Opciones

¿Qué es una *opción de compra* de una acción?

Es un derecho a comprar una acción dentro de un cierto lapso de tiempo, a un determinado precio K.

Las *opciones de compra* forman parte de la categoría de instrumentos financieros conocidos con el nombre de *derivados* ya que su valor no está ligado a algo concreto, como en el caso de la acción que representa una porción de una sociedad. El objetivo de estos instrumentos es moderar el riesgo.

Ejemplo 10.7

Un inversor posee 10.000 acciones del Banco de la Plaza que cotizan a $ 0,85 cada una. No quiere arriesgarse a perder más de $ 1.000 en los próximos dos meses. Entonces por $ 500 compra una opción de vender a $ 0,85 cada acción del Banco dentro de dos meses. Así él se asegura su objetivo, ya que si sus acciones valen menos de $ 0,85 dentro de dos meses, él hará uso de su opción, las venderá a $ 0,85 y habrá perdido sólo lo que pagó por la opción. Por su parte, quien le vende la opción de venta a $ 0,85 asume el riesgo de que la acción baje a menos de $ 0,80, en cuyo caso sufrirá una pérdida. En cambio, si la acción vale más de $ 0,85 habrá ganado lo que cobró por la opción.

Ejemplo 10.8

Un inversor tendrá que aportar 10.000 acciones de Pampa dentro de dos meses, que actualmente cotizan a $ 1 cada una. Ahora, no tiene los $ 10.000 necesarios para comprarlas y no quiere correr el riesgo de que suban más allá de $ 1,1. Una alternativa que se le presenta es adquirir por un módico precio, alrededor de $ 1.000, la opción de comprar esas acciones dentro de dos meses a $ 1, y así asegurar su negocio contra el riesgo de suba de la cotización. Por otro lado, el que vende la opción toma el riesgo de que la acción suba a cambio de lo que le paga el inversor.

Este efecto de acercar dos partes, una que quiere seguridad y otra que asume riesgo, puede verse también con otros *instrumentos derivados* como son los *futuros*: dólar a futuro, soja a futuro, etc.

Ejemplo 10.9

Un importador planea un negocio y calcula que obtendrá una ganancia razonable si el valor del dólar, que actualmente se encuentra en $ 3,4, no pasa los $ 3,6. El necesitará U$S 10.000 para pagar los productos. Una alternativa es asegurarse comprando con $ 34.000 los dólares que necesita. Lamentablemente, espera recibir ese capital con la venta de la mercadería importada, por lo cual aún no lo posee. Se le presenta la alternativa de comprar los U$S 10.000 a futuro, a una cotización de $ 3,60, pagando una seña. De esta manera, él se asegura el negocio y quien le vende asume el riesgo de que el dólar suba más allá de los $ 3,60, recibiendo como compensación la seña entregada.

Algo similar sucede con la compra y venta de soja.

Ejemplo 10.10

Un agricultor calcula sus costos y observa que si el precio de la soja no baja de $ 500 obtendrá una ganancia conveniente. Para evitar riesgos, decide venderla a $ 500, pero como aún no la tiene lo hace a futuro. Quien le compra toma el riesgo de que el precio baje más allá de $ 500.

Las opciones tienen la propiedad de concentrar el riesgo inherente a los cambios bruscos de cotización. Por ejemplo, si invertimos en una acción que vale $ 10 y esta sube $ 1 habremos ganado un 10 %. Por el mismo dinero, $ 10, podríamos haber comprado una opción de compra de 10 acciones a $ 10, hasta dentro de dos meses. En ese lapso, si la acción sube a $ 11 ganaremos $ 10 en lugar de $ 1 como hubiera resultado si comprábamos la acción. Pero el riesgo es mayor y, en caso que no suba, perderemos los $ 10. Esto hace que de un día para otro, mientras el valor de la acción sube o baja entre uno y 5 %, el valor de la opción puede subir o bajar entre 5 y 50 %. Un punto crucial es determinar cuál sería un precio justo para el riesgo que se corre. Eso es lo que resolvieron Merton, Black y Scholes. Para dar una idea de lo que hicieron es necesario desarrollar algunos conceptos matemáticos que permiten tratar problemas de azar y riesgo.

10.4. El juego es un impuesto a quien no sabe matemática

Pensemos en un problema relativamente sencillo: decidimos participar en un juego en el que se arroja un dado que no está cargado (todas sus caras son igualmente probables) y si sale el lado *k* se recibe $ k. ¿Cuánto deberíamos pagar por participar de este juego?

Es claro que si no pagamos nada, no importa qué lado del dado salga, con seguridad ganaremos algo. De la misma forma, si pagásemos \$ 7, perderemos algo sin importar como caiga el dado. ¿Y si pagáramos un término medio, por ejemplo \$ 3,5? Recordemos que los valores que toma el dado se pueden modelar con una variable X que vale 1, 2, 3, 4, 5, 6 con igual probabilidad $p = \frac{1}{6}$.

Si tiráramos 600 veces el dado ¿cuánto recibiremos? Para resolver esto podemos considerar la variable $Z = \sum_{k=1}^{100} X_k$ donde $X_k = X$ es la variable que modela la tirada k-ésima. Esta variable Z puede tomar valores entre 600 (si sale siempre uno) y 3.600 (si sale siempre seis).

Intuitivamente, el valor más probable de Z será aquel donde cada número ocurre según su probabilidad, es decir en 600 tiradas el uno debería aparecer $600.\frac{1}{6} = 100$ veces al igual que el resto. Si esto ocurriese, el valor que obtendríamos para Z sería 2.100 = 100+200+300+400+500+600. Para que el juego fuese justo deberíamos pagar \$ 2.100 por las 600 tiradas, y así lo más probable es que terminaríamos sin ganancia ni pérdida. Como hicimos el cálculo para 600 jugadas, en cada jugada deberíamos pagar $\frac{2.100}{600} = 3{,}5$.

Definición 10.3 El *valor esperado* de una variable X que toma valores $x_k \in \mathbb{R}$ $1 \leq k \leq n$ con probabilidades p_k es el número $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

Ejemplo 10.11 Si X es la variable que modela la tirada de un dado sin sesgo se tiene:

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

Ejemplo 10.12 Un ejemplo cotidiano es el juego de la quiniela. En este juego se extrae un número de cuatro cifras, y antes de que esto ocurra uno puede apostar desde \$ 1 a que la última cifra del número será x, o que las dos últimas serán xx, o las tres últimas serán xxx, o finalmente a que el número es $xxxx$. En caso de acertar, se recibe respectivamente, 7; 70; 500 ó 3.500 veces lo apostado. ¿Cuál es el valor esperado de este juego? Consideremos el caso de una cifra: la probabilidad de que acertemos es 1/10 ya que de las diez posibles sólo una nos favorece y la de perder es 9/10. ¿Cuál es nuestra ganancia si apostamos un peso?

$$G_1 = \begin{cases} 7 - 1 & \text{con probabilidad } 1/10 \\ -1 & \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

Ahora podemos calcular el valor esperado de la ganancia.

$$\begin{aligned} EG_1 &= 6 \cdot 1/10 - 1 \cdot 9/10 \\ &= -3/10 \end{aligned}$$

Esto nos dice que se espera que perdamos el 30% de lo apostado. Concretamente, si tenemos \$ 100 y jugamos durante cien sorteos distintos, no debería sorprendernos que terminemos con algo cercano a los \$ 70.

Los otros casos son similares, mostraremos el de cuatro cifras para ver que es menos conveniente aún. En este caso tenemos:

$$G_4 = \begin{cases} 3.500 - 1 & \text{con probabilidad } 1/10.000 \\ -1 & \text{con probabilidad } 9.999/10.000 \end{cases}$$

Y el valor esperado nos queda:

$$\begin{aligned} EG_4 &= 3.499 \cdot 1/10.000 - 1 \cdot 9.999/10.000 \\ &= -6.500/10.000 \end{aligned}$$

Es decir que lo más probable es que perdamos el 65% de lo apostado.

Podemos preguntarnos ¿cuál sería el valor justo c de la apuesta a una cifra? Para esto calculamos:

$$G_1 = \begin{cases} 7 - c & \text{con probabilidad } 1/10 \\ -c & \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} EG_1 &= (7 - c) \cdot 1/10 - c \cdot 9/10 \\ &= 7/10 - c \end{aligned}$$

Si esta cantidad fuera mayor que cero, el juego sería favorable a nosotros en el sentido que a lo largo de muchos juegos sería muy probable que terminásemos con una ganancia. Asimismo, si fuese negativo lo más probable sería terminar con pérdida. Si $EG_1 = 0$ sería igualmente probable terminar con pérdida o ganancia. Esto es lo que consideramos justo.

En este caso, el juego sería justo si pagásemos sólo 70 centavos por apuesta.

10.5. Riesgo calculado

Nos planteamos el siguiente problema: queremos modelar el precio c que hay que pagar por una opción de comprar a \$ 10 dentro de un período una acción que vale ahora \$ 10 pero que al cabo de un período, cuando debamos ejercer nuestra opción, puede valer el doble \$ 20 o la mitad \$ 5. Cada una de estas posibilidades ocurre con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente. Como vimos en la primera parte, podemos representar el valor de la acción al fin de un período como:

$$V_1 = \begin{cases} 20 & \text{con probabilidad } p \\ 5 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

En tal caso, si compramos una acción hoy y la vendemos al finalizar el período el valor actual de la ganancia o pérdida queda representada por:

$$G_a = \begin{cases} 20(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } p \\ 5(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Notemos que como los \$ 10 son pagados al comienzo del período y el precio que se recibe por la venta de la acción se recibe al final, si queremos calcular el valor actual, al inicio del período, del resultado de la operación debemos tomar el valor presente de la venta. Para esto usamos una tasa de descuento r por el período.

Ahora podemos calcular cuánto se esperaría ganar con la compra de una acción al comienzo de un período y su venta al final.

$$\begin{aligned} EG_a &= (20(1+r)^{-1} - 10) \cdot p + (5(1+r)^{-1} - 10) \cdot (1-p) \\ &= (20p + 5(1-p))(1+r)^{-1} - 10 \\ &= (15p + 5)(1+r)^{-1} - 10 \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se representa el resultado que podemos obtener con la compra de la opción: si la acción sube ejercemos nuestro derecho de comprarla a \$ 10 y la vendemos por \$ 20, así obtenemos una ganancia de \$ 10 a los que hay que descontar los \$ c que pagamos por la opción. Recordemos que como los \$ 10 de ganancia son al final del período y los \$ c los pagamos al comienzo al hacer el cálculo debemos utilizar la tasa de descuento r y obtenemos $10(1+r)^{-1}-c$. Si la acción baja, no nos conviene comprarla a \$ 10, y simplemente perdemos lo que pagamos por la opción. Así, tenemos la siguiente variable que modela el resultado de la compra de la opción:

$$G_o = \begin{cases} 10(1+r)^{-1} - c & \text{con probabilidad } p \\ -c & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

El valor esperado de esta variable es:

$$\begin{aligned} EG_o &= (10(1+r)^{-1} - c) \cdot p - c \cdot (1-p) \\ &= 10p(1+r)^{-1} - c \end{aligned}$$

Así, tenemos representados los valores esperados de los resultados G_a y G_o, de comprar respectivamente una acción y una opción. Estos han quedado en términos de p, la probabilidad de que la acción suba o baje. ¿Hay alguna forma de determinar p ? Si uno supiera de antemano p, sería como jugar a los dados con un dado cargado ya que si p es tal que hace positivo el valor esperado de G_a nos conviene comprar la acción y si es negativo nos conviene venderla[1].

[1] Aunque suene raro, podemos vender acciones que no poseemos

Paradójicamente, esto permite determinar p: supondremos que p es el valor que hace que uno no pueda sacar ventajas de la suba o baja de la acción, es decir, el valor de p hace que sea cero el valor esperado de la ganancia por comprar o vender la acción. En el ejemplo de los dados, la hipótesis de que el dado no está cargado dice que ninguna cara tiene más probabilidad que otra, y esto hace que sus caras tengan igual probabilidad $p_i = 1/6$ para $1 \leq i \leq 6$.

En nuestro ejemplo el valor de p resulta de la ecuación:

$$0 = G_a = (15p + 5)(1 + r)^{-1} - 10$$

De aquí obtenemos:

$$p = \frac{10(1+r) - 5}{15} = \frac{5 + 10r}{15}$$

Entonces, en general se supondrá que mediante la compraventa de acciones no hay *arbitraje*, esto es, una forma de obtener una ganancia segura. Un resultado conocido como *teorema del arbitraje*, nos asegura que si no hay arbitraje existen probabilidades que hacen cero el valor esperado de la ganancia. Conociendo esas probabilidades, podremos calcular el correspondiente valor esperado del resultado de comprar la opción. Finalmente, un valor justo para la opción será aquel que anule al valor esperado de la ganancia G_o. En nuestro ejemplo tendremos:

$$0 = G_o = 10p(1+r)^{-1} - c = 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} - c$$

Finalmente resulta que:

$$\begin{aligned} c &= 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} \\ &= \frac{10+20r}{3(1+r)} \end{aligned}$$

Pudimos calcular un valor justo para la opción suponiendo que las probabilidades involucradas hacen que no haya arbitraje en la compraventa de acciones.

El siguiente objetivo será dar un precio justo al derecho de compra de una acción dentro de n períodos a un precio determinado.

10.6. El modelo para n períodos

Consideremos el valor, $V(i)$, de una acción a lo largo de n períodos. Supondremos que en cada período la acción puede subir un porcentaje fijo s o bajar un porcentaje fijo b. En principio, no sabemos con qué probabilidades sube o baja en cada período. También supondremos que la tasa de descuento para actualizar el valor de V es r en cada período. Tenemos la siguiente representación para $V(n)$:

$$V(n) = V(0)(1 + s)^Y (1 - b)^{n-Y}$$

En este caso Y es una variable que representa el número de subas que hubo en los n períodos. En general, no sabemos cómo son las probabilidades que gobiernan a Y, pero a partir de la hipótesis de que no hay arbitraje, puede verse que lo que ocurra en cada período será independiente de lo ocurrido en los anteriores. Más aún, la probabilidad de que la acción suba o baje es independiente del período que se considere. Así se llega a que Y deberá ser de la forma estudiada anteriormente:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde cada X_i es una variable de Bernoulli que vale 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1-p$. Podemos calcular p haciendo cero el valor esperado de la ganancia de comprar la acción y venderla al finalizar el primer período:

$$G_1 = \begin{cases} V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } p \\ V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

De aquí obtenemos el valor esperado de G_1:

$$\begin{aligned} EG_1 &= (V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0))p + (V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0))(1-p) \\ &= V(0)(1+s)(1+r)^{-1}p + V(0)(1-b)(1+r)^{-1}(1-p) - V(0) \\ &= V(0)((1+s)p + (1-b)(1-p))(1+r)^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Igualamos a 0 el valor esperado de la ganancia, simplificamos $V(0)$ y tenemos:

$$0 = \frac{EG_1}{V_0} = \frac{(1+s)p + (1-b)(1-p)}{1+r} - 1$$

Finalmente, despejamos p:

$$p = \frac{1+r-(1-b)}{1+s-(1-b)} = \frac{r+b}{s+b}$$

El siguiente paso es calcular con esta probabilidad el valor esperado del resultado de la compra de una opción. Supongamos que la opción nos cuesta \$ c y nos da derecho a comprar la acción por \$ K, dentro de n períodos. Tendremos para la ganancia G_o

$$G_o = \begin{cases} (V(n) - K)(1+r)^{-n} - c & \text{si } V(n) > K \\ -c & \text{si } V(n) \le K \end{cases}$$

Por último, calculamos el valor esperado de la ganancia. Como el costo de la opción hay que pagarlo de cualquier forma, podemos calcular primero el valor esperado de la ganancia sin contar el costo \$$c$ y luego restarle c. Para esto multiplicamos a cada valor positivo que pueda tomar $(V(n) - K)(1+r)^{-n}$ por la probabilidad de que tome ese valor, luego sumamos todos esos términos. Al resultado sin actualizar lo llamaremos $E(V(n) - K)^+$. Así llegamos a:

$$EG_o = E(V(n) - K)^+(1+r)^{-n} - c$$

Igualando a cero EG_o obtenemos

$$c = E(V(n) - K)^{+} (1 + r)^{-n}$$

Esta expresión es muy concisa pero puede ser difícil de calcular. Para esto se usan diversos métodos entre los cuales se destaca el de *programación dinámica*.

Ejemplo 10.13

Consideremos lo que sucede con una acción que vale $ 10, y en cada período su valor puede aumentar en un 50% o disminuir un tercio (33,33 %). Calculemos el valor de la opción de comprarla dentro de dos períodos a $ 10.

Como vimos en la sección 2, el valor de la acción al cabo de dos períodos lo representamos por:

$$V_2 = \begin{cases} 10(1+1/2)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ 10(1+1/2)(1-1/3) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ 10(1-1/3)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Hemos visto también que:

$$p = \frac{r+b}{s+b} = \frac{r+1/3}{1/2+1/3} = \frac{6r+2}{5}$$

Con esta probabilidad debemos calcular $E(V_2 - 10)^{+} (1 + r)^{-2}$ Ahora bien, $V_2 - 10$ puede tomar un único valor positivo $10(1 + 1/2)^2 - 10$ y lo hace con probabilidad $p^2 = (6r + 2)^2/25$, entonces tenemos:

$$E(V_2 - 10)^{+} = 10(1{,}5^2 - 1)(6r + 2)^2/25 = 18r^2 + 12r + 2$$

y finalmente:

$$c = E(V_2 - 10)^{+}(1+r)^{-2} = \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Según esta fórmula si $r = 0$ la opción debería costar $ 2. Si la tasa de descuento fuera del 1% tendríamos $c = 2{,}08$.

Ejemplo 10.14

En el ejemplo anterior, ¿cómo cambia el precio de c si queremos una opción de compra a $ 11? En tal caso no hay cambio en las probabilidades que usamos y sigue habiendo un único valor positivo de $V_2 - K = 10(1{,}5^2) - 11$.

Si vemos a K como 10 + 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(V_2 - 11)^{+} &= (10(1{,}5)^2 - 10 - 1)(6r + 2)^2/25 \\ &= E(V_2 - 10)^{+} - (6r + 2)^2/25 \\ &= (6r + 2)^2/2 - (6r + 2)^2/25 \\ &= 23(6r + 2)^2/50 \end{aligned}$$

Así llegamos a que:

$$c = E(V_2 - 11)^+(1+r)^{-2} = \frac{46}{50} \cdot \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Es decir que el valor de la opción se reduce en un 8 %. Por ejemplo, si $r = 0$ entonces $c = 1{,}84$ y si $r = 0{,}01$, $c = 1{,}91$.

10.7. Ejercicios

Ejercicio 10.1 **Si arrojamos dos dados sin sesgo, ¿cuál es la probabilidad de que sumen siete? ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea par?**

Ejercicio 10.2 **Damos vuelta una carta de un mazo francés de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una figura (J, Q ó K)?**

Ejercicio 10.3 **Si en la quiniela jugamos un peso al 48 durante 100 jugadas a dos cifras: ¿Alrededor de cuánto deberíamos perder? ¿Y si en lugar del 48 jugásemos al 348?**

Ejercicio 10.4 **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 70 pesos por acertar dos cifras?**

Ejercicio 10.5 **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 500 pesos por acertar tres cifras?**

Ejercicio 10.6 **En la ruleta se puede apostar a un número del 0 al 36. Si sale se reciben 36 veces lo apostado, y en caso contrario se pierde la apuesta. También se puede apostar a rojo o negro hay 18 números rojos, 18 negros y uno verde. Si sale el color elegido se reciben 18 veces lo apostado (o 36 si apostamos al verde). Si alguien juega en la ruleta un peso al 13 durante 100 tiradas ¿Cuál es el valor esperado de la pérdida? ¿Y si en lugar de un número jugásemos al rojo?**

Ejercicio 10.7 **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la ruleta que paga 36 pesos por acertar el número?**

Ejercicio 10.8 **¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a rojo o negro en una ruleta que paga 18 pesos por acertar el color?**

Ejercicio 10.9 **¿Cuál es el valor después de dos períodos de una acción que vale $ 10 y en cada período puede subir un 10% o bajar un 10 %, ambas posibilidades con probabilidad 1/2?**

Ejercicio 10.10

Si el 2 de enero de 2009 compramos por \$ 2 una opción de comprar el 20 de febrero a \$ 20 una acción de la compañía Telecast. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el 20 de febrero la acción vale \$ 16, \$ 20 ó \$ 23?

Ejercicio 10.11

Compramos por \$ 1,20 una opción de comprar dentro de dos meses a \$ 15 una acción del Banco de la Plaza. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el día de vencimiento de la opción la acción vale \$ 13, \$ 16 ó \$ 20?

Ejercicio 10.12

En una situación como la del ejemplo 10.13 calcular el valor de la opción de compra a \$ 9, es decir, cuando $K = 9$. Ayuda: Encuentre una fórmula para $E(V_2 - 9)^+$ en términos de $E(V_2 - 10)^+$.

Capítulo 11

El número *e* y la función exponencial

11.1. Introducción

En el Capítulo 3 El Interés, vimos que existen dos formas de aplicar interés: el simple y el compuesto. Un capital sometido a interés simple crece *linealmente*, esto es, aumenta de manera directamente proporcional al tiempo en que fue depositado. Así por ejemplo, un capital de \$ 100 depositado a un 2% de interés mensual, aumenta en \$ 2 en cualquier intervalo de un mes. Por lo tanto los montos en meses sucesivos serán: \$ 100, \$ 102, \$ 104, \$ 106, \$ 108, ...

En el caso del interés compuesto, la tasa de interés indica cómo crece porcentualmente el capital en un determinado lapso. Así, si un capital de \$ 100 es depositado al 2% mensual, significa que cada mes aumentará un 2% con respecto a su valor. Por lo tanto, los montos sucesivos serán \$ 100,00; \$ 102,00; \$ 104,04; \$ 106,12; \$ 108,24; . . . . Este tipo de crecimiento se denomina *exponencial.* Las funciones cuyo crecimiento porcentual es constante se llaman **funciones exponenciales**.

Las funciones exponenciales están íntimamente relacionadas con la constante e, que es un número irracional *trascendente* cuyas primeras cifras decimales son 2,718281828. . . . . Esta constante aparece en múltiples áreas y ramas de la ciencia, pero fue el matemático Jacob Bernoulli [1654-1705] quien lo descubrió, justamente estudiando la aplicación del interés compuesto.

11.2. El número *e*

11.2.1. Los logaritmos


John Napier

La primera referencia histórica al número *e* es en una publicación de John Napier (1550-1617), matemático, físico y astrónomo reconocido científicamente como el descubridor de los *logaritmos*. Si bien se sabe que los logaritmos ya habían sido usados en tiempos más remotos, fue Napier quien por primera vez publicó, en un apéndice de su obra, una tabla de logaritmos.

La palabra *logaritmo*, nombre dado por Napier a estos números, proviene del griego: $\lambda o \gamma o \sigma$ (razón o cociente), $\alpha \rho \iota \theta \mu o \sigma$ (número), y significan números que indican una razón, proporción o relación. La razón de esta denominación era que la serie de números dados por los logaritmos constituían una progresión aritmética que a su vez se correspondía con otra en progresión geométrica, y la diferencia entre dos logaritmos indicaba la relación entre los correspondientes números en la progresión geométrica.

Ejemplo 11.1

La siguiente tabla muestra un fragmento de dos series: una en progresión aritmética y otra en progresión geométrica.

Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	17	
Geométrica	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...	131.072	...

Los números de la primera fila (Aritmética) son los *logaritmos en base* 2 de los números de la segunda fila (Geométrica), que como puede verse son potencias del número 2. La notación utilizada es $\log_2(x) = y$ que indica que $2^y = x$. Así se tiene que $\log_2(16) = 4$, pues $2^4 = 16$.

La particularidad de estas tablas es que si se calcula la diferencia entre dos logaritmos, por ejemplo:

$$5 - 2 = 3$$

la razón o cociente entre los correspondientes números es 2^3. En efecto,

$$\frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

A su vez, si se suman dos números de la primera fila, por ejemplo $2 + 7 = 9$, el producto de los correspondientes números de la segunda fila es 2^9. En efecto, $4 \cdot 128 = 512$. Estas propiedades se resumen en las siguientes fórmulas:

$$\log_2(y) - \log_2(x) = \log_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \log_2(y) + \log_2(x) = \log_2(y \cdot x)$$

y son ciertas para los logaritmos en cualquier otra base.

Pero la gran importancia de los logaritmos fue poder utilizarlos en forma inversa, y por ello tuvo tanta relevancia el aporte de Napier. Con la tabla de logaritmos las multiplicaciones se podrían resolver mediante sumas, y las divisiones mediante restas.

Por ejemplo, multiplicar dos números de la segunda fila de la tabla puede involucrar muchos cálculos:

$$256 \cdot 512 = \ldots$$

Pero sumar sus correspondientes logaritmos es una cuenta muy sencilla: $8 + 9 = 17$. Este simple cálculo, teniendo el tabulado el número 17 permite obtener fácilmente el resultado:

$$256 \cdot 512 = 2^{17} = 131.072$$

El descubrimiento de los logaritmos fue de gran importancia para los científicos de la época, principalmente para los astrónomos que debían hacer cálculos con números muy grandes y que no contaban con calculadoras ni computadoras.

La tabla de logaritmos publicada por Napier utilizaba la base 10, probablemente porque el sistema decimal era el más difundido. Pero además, Napier estudió las propiedades de los logaritmos y si bien no menciona en su obra al número e, sí aparece implícitamente en sus logaritmos. Quien realmente descubrió esta constante fue el matemático Jacob Bernoulli, calculando aproximaciones de la fórmula

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

precisamente estudiando el interés compuesto.

11.2.2. El interés compuesto


Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli estudió una situación como la siguiente. Supongamos que un banco ofrece un interés del 100% anual. Si se depositan \$ 100, al año la suma habrá aumentado en \$ 100:

$$100 \cdot (1 + 1{,}0) = 100 \cdot 2$$

Ahora, si la capitalización se realiza semestralmente, al año el capital será de:

$$100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{2}\right)^2 = 100 \cdot 2{,}25$$

Y si se hace cada cuatro meses, dos meses o mensualmente, el monto al año será, respectivamente:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{3}\right)^3 &= 100 \cdot 2{,}3704 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{6}\right)^6 &= 100 \cdot 2{,}5216 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{12}\right)^{12} &= 100 \cdot 2{,}6130 \end{aligned}$$

Bernoulli notó que la sucesión de números 2,25; 2,3704; 2,5216; 2,6130; . . . ; obtenida a partir de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ iba aumentando, pero a su vez se aproximaba a un límite que no superaba. Si la capitalización era semanal (n = 52) o diaria (n = 360), los números obtenidos diferían en un poco más de dos centésimos: 2,692596954 y 2,714516025. Para valores de n más grandes la diferencia entre dos números consecutivos era del orden de los milésimos, luego diezmilésimos, y así siguiendo.

Así, la sucesión no se estabiliza en ningún valor, pero se aproxima o *converge* a un número. Las primeras cifras de este número son 2,71182818 . . . . Sus cifras decimales no son periódicas, por lo que no se trata de un número racional sino de un número irracional. Por esta razón, y por ser un número que aparece naturalmente en muchas situaciones, debe denotarse con una letra.

Los matemáticos Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens fueron los primeros en asignarles una letra, y eligieron la letra b. Leonhard Euler fue quien comenzó a utilizar la constante ***e***, en 1727. Se desconoce por qué se eligió tal letra: podría ser porque es la primera letra de la palabra *exponencial*, ya que este número aparece ligado a las funciones exponenciales, o porque es la segunda vocal y Euler ya había utilizado la letra a para designar otra constante; o tal vez por ser la inicial de *Euler*.


Leonhard Euler

11.2.3. Otras fórmulas para el número *e*

La constante e aparece en múltiples situaciones y contextos de la matemática, y gracias a ello hay diferentes expresiones que permiten aproximar el número e. Algunas de ellas son las siguientes sucesiones de números:

Límite de una sucesión infinita de fracciones:

$$2+\frac{2}{2+3}=2{,}4;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{4}}=2{,}82;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+6}}}=2{,}69;\quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+\frac{5}{6+7}}}}=2{,}72$$

$$\boxed{e=2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+\frac{5}{6+\frac{6}{7+\frac{7}{8+\cdots}}}}}}}$$

Como suma infinita de fracciones:

$$1+\frac{1}{1!}=2;\qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2{,}5;\qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2{,}67$$

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.}$$

Como producto infinito de números:

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}=2{,}83;\quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}=2{,}67;\quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}=2{,}59;\ldots$$

$$\boxed{e=2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots}$$

A partir de estas fórmulas, y muchas otras que aquí no se mencionan, es posible obtener con precisión los primeros decimales del número e. Existen varios trabajos de investigación a lo largo de los años en los que se ha intentado calcular el mayor número posible de dígitos. El primer ejemplo, y evidentemente con cálculos hechos a mano, es de Leonhard Euler en 1748 quien calculó 18^8 dígitos. Hasta ahora, el mayor número de decimales calculado, y por computadora, ha sido 100.000.000.000, por Shigeru Kondo y Steve Paglia [2007].

11.3. La función exponencial

Si q es un número real positivo y n es un número natural, entonces q^n denota la potencia n-ésima del número q, es decir:

$$q^n = \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{n \text{ veces}}.$$

El número q es la *base* de la potencia y n es el *exponente.* Así, para n natural la potencia es una abreviatura de la multiplicación iterada de un número por sí mismo.

Ahora bien, también puede definirse la potencia para exponentes no naturales, pero ya no puede interpretarse como una multiplicación repetida. Es decir, no tiene sentido decir que $3^{1/2}$ es multiplicar al 3 la mitad de veces. La definición que se utiliza para la potenciación con exponente negativo y fraccionario es la siguiente: Si m y n son naturales, entonces

$$q^{-n} = \frac{1}{q^n}, \qquad q^{1/n} = \sqrt[n]{q}, \qquad \text{y} \qquad q^{m/n} = \sqrt[n]{q^m} = (\sqrt[n]{q})^m$$

Así por ejemplo, $2^3 = 8$, $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$ y $27^{4/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 81$. De esta manera, queda definida la potencia para exponentes enteros y racionales, distintos de cero. Para exponente nulo se conviene $q^0 = 1$.

La potenciación cumple las siguientes propiedades. Si a, b son números racionales, entonces

$$q^{a+b} = q^a \cdot q^b, \qquad q^{a-b} = \frac{q^a}{q^b}, \qquad (q^a)^b = q^{a \cdot b}$$

Así por ejemplo, $3^6 = 3^2 \cdot 3^4$, $(2^3)^5 = 2^{15}$.

Pero también existen números reales que no son racionales. Por ejemplo, el número e, π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, son ejemplos de números *irracionales*; y en realidad existen infinitos de estos números. Dado que cualquier número irracional puede aproximarse por una sucesión de números racionales, entonces la potencia de un número real con exponente irracional se define como el número al cual se aproximan las correspondientes potencias con exponentes racionales en la sucesión.

Ejemplo 11.2

El número π es un número irracional cuyas primeras cifras son $\pi = 3{,}141592\ldots$. En particular, la sucesión de números racionales:

$$b_1 = 3{,}1 \quad b_2 = 3{,}15, \quad b_3 = 3{,}141, \quad b_4 = 3{,}1415, \quad b_5 = 3{,}14159, \quad b_6 = 3{,}141592, \ldots$$

se aproxima cada vez más a π, y así la potencia 4^π se puede calcular como el número al cual se aproximan las potencias 2^{b_n}, para $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$4^{3,1} = 73{,}5166, \quad 4^{3,14} = 77{,}7084, \quad 4^{3,141} = 77{,}8162, \quad 4^{3,1415} = 77{,}8702 \ldots$$

por lo puede verse que 4^π es un número próximo a 77,90. Cuantos más decimales se utilicen en la aproximación a π, mejor será la aproximación a 4^π.

Esta es la definición formal de potencia con exponente irracional.

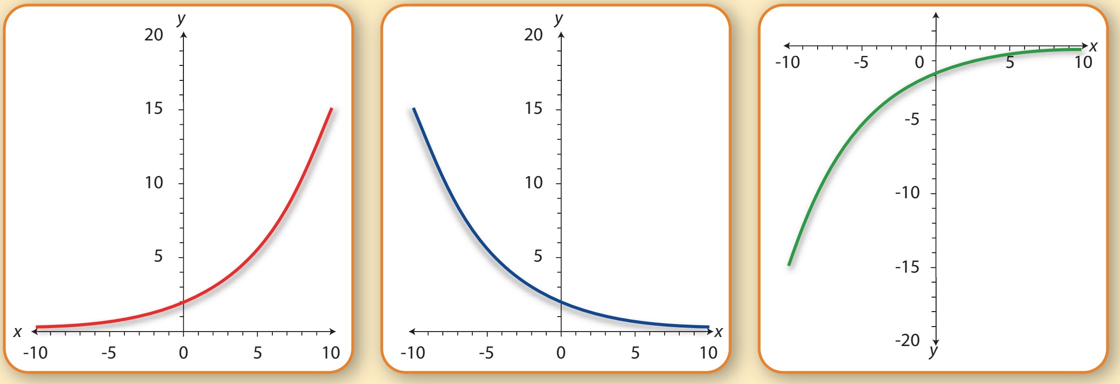
Una función exponencial es una función de la forma:

$$f(x) = a \cdot q^{rx} \qquad\qquad a \text{ real,}$$

con a, r y q reales, $q > 0$.

En la Figura 11.1, los dos primeros gráficos corresponden a las funciones $f_1(x) = 2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$ y $f_2(x) = 2 \cdot 1{,}5^{-0{,}5\,x}$, mientras que el tercer gráfico corresponde a $f_3(x) = -2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$. El signo de a determina si la función es positiva o negativa. Si $a > 0$, el gráfico queda por encima del eje x, y si $a < 0$ queda por debajo.

Si r es positivo, entonces la función se aleja del eje x a medida que x crece, y se acerca a él a medida que x decrece. Por otro lado, r está relacionado con la velocidad de crecimiento de la función.



Gráficos de funciones exponenciales

Figura 11.1

Ejemplo 11.3

Consideremos la función $f(x) = 2^{0{,}5\,x}$. Entonces:

$$f(x+1) = 2^{0{,}5\,(x+1)} = 2^{0{,}5\,x} \quad 2^{0{,}5} = 2^{0{,}5\,x} \cdot 1{,}41$$

Significa que, independientemente del valor de x, la función crece un 41% por cada unidad en x. Este 41% proviene de $2^{0{,}5} - 1$

Para cualquier función exponencial de la forma $f(x) = a \cdot q^{rx}$, se tiene que la función crece (o decrece si $a < 0$) en un $(q^r - 1)$ 100% por cada unidad en x.

11.3.1 La función $f(x) = e^x$

De todas las funciones exponenciales, hay una sola que cumple con las siguientes propiedades:

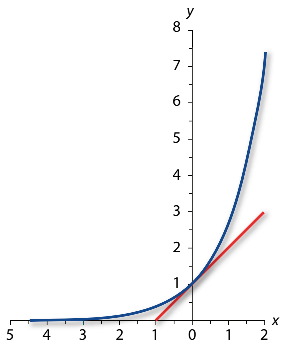
- $f(0) = 1$: es decir, pasa por el punto $(0, 1)$;
- la recta tangente al gráfico de la función por el punto $(0, 1)$ tiene pendiente 1.

Para cumplir la primera condición debe ser que $a = 1$, y para que además se cumpla la segunda debe ser $q = e$ y $r = 1$. Esto es

$$f(x) = e^x$$

donde e es el número que hemos definido como el valor límite de la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$. (Ver Figura 11.2).

Este es otro ejemplo en el cual el número e aparece naturalmente en la matemática, en este caso en el contexto del análisis matemático.



La función $f(x) = e^x$

Figura 11.2

11.3.2. Logaritmos y el logaritmo natural

El logaritmo es la función inversa a la potenciación. Ya se ha visto en el Ejemplo 11.1 la definición del logaritmo en base 2 como la inversa de la potenciación en base 2: $2^{\log_2(y)} = y$. De manera análoga se puede definir el logaritmo en cualquier base $b > 0$.

Definición 11.1

Dado un número positivo b, el logaritmo en base b del número y es el número x tal que $b^x = y$, y se escribe $\log_b(y) = x$. Esto es,

$$\log_b(y) = x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^x = y$$

Si se tienen dos bases distintas, a y b por ejemplo, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\log_a(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_a(b)}$$

Dado que $\log_a(b)$ es un número fijo, se tiene que $\log_a(y)$ y $\log_b(y)$ son proporcionales entre sí, por lo cual conociendo los valores del logaritmo para una base en particular, se pueden determinar los valores de cualquier otro logaritmo en otra base.

Cabe agregar que el logaritmo con base e se suele denominar también *logaritmo natural*, y se utiliza la notación $\log_e(x) = \ln(x)$. En particular se tiene que, para cualquier base $b > 0$,

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \qquad \text{y} \qquad b^x = e^{x\ln(b)}$$

Estas relaciones permiten calcular cualquier exponencial o logaritmo en términos de la función exponencial e^x y del logaritmo natural.

En la siguiente sección veremos el concepto de capitalización continua, que relaciona la función exponencial con el interés compuesto.

11.4. Capitalización continua

Si un capital C se deposita al 100% de interés anual, y se capitaliza cada fracción $\frac{1}{n}$ del año, al cabo de un año el capital habrá ascendido a

$$C \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A medida que n se hace más grande, puede pensarse que la capitalización se realiza en cada instante de tiempo, y este proceso se denomina *capitalización continua*.

En particular, si la tasa de interés anual es del 100%y la capitalización es continua, entonces el capital ascenderá en un año a $C \cdot e$, por lo que la tasa de interés efectiva anual será $e - 1$.

Si la T.N.A. es r, con capitalización cada n-ésima fracción del año, entonces un capital C se incrementará en un año hasta

$$C \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Esta expresión también está relacionada con el número e. En efecto, utilizando las propiedades de la potenciación, la fórmula entre paréntesis puede transformarse operando algebraicamente de la siguiente manera:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

Puesto que r es un número positivo fijo, se tiene que si n toma valores cada vez más grandes entonces lo mismo ocurre con n/r. Esto implica, aunque la demostración formal no es inmediata, que la expresión $\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}$ se aproxima al número e. Así se puede ver que:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

se aproxima al número e^r. Volviendo a la situación de un capital C sometido a una T.N.A. r con capitalización continua, lo anteriormente expuesto muestra que al cabo de un año el capital habrá aumentado a $C \cdot e^r$.

Dada una tasa de interés nominal anual r con capitalización continua, la tasa de interés efectiva anual correspondiente es $e^r - 1$.

Puesto que la T.E.A. es $i = e^r - 1$, esto indica que la capitalización de C por un período de t años está dado por

$$C \cdot (1 + i)^t = C \cdot (1 + (e^r - 1))^t = C \cdot e^{rt}$$

Un capital C sometido a una tasa de interés r con capitalización continua crece exponencialmente en el tiempo de acuerdo a la fórmula

$$C(t) = C \cdot e^{rt}$$

11.5. Ejercicios

Ejercicio 11.1

Determinar cuál es la función $f(x)$ que crece un 25% cuando x aumenta en una unidad, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0,5).

Ejercicio 11.2

Determinar cuál es la función $f(x)$ que decrece un 20% cuando x aumenta en dos unidades, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 3).

Ejercicio 11.3

Si se efectúa un depósito en un banco que ofrece una tasa de interés del 5,9% anual con capitalización continua, ¿cuál debe ser el monto a depositar para que el capital ascienda a $ 12.000 en 5 años?

Ejercicio 11.4

Una persona invierte $ 3.000 en un banco, a un interés del 6,3% con capitalización diaria. ¿Cuánto dinero tendrá en un año? ¿Cuánto tendría si la capitalización fuera continua?

Apéndice A

La planilla de cálculo

La planilla u hoja de cálculo es una herramienta muy útil que permite organizar nuestros datos y hacer las cuentas que sean necesarias para resolver los problemas que se nos presenten. Fueron unos de los primeros programas desarrollados para computadoras y existen muchas versiones, tanto comerciales como gratuitas. Entre las primeras hay una muy popular para los usuarios del sistema operativo más difundido. Incluso existe una versión de esta para fanáticos de la Manzana, quienes también pueden trabajar con Números. Entre las de distribución gratuita podemos mencionar a una desarrollada por los creadores del buscador más usado y que está disponible para todos aquellos que tengan acceso a la red de redes. Los usuarios del software libre pueden trabajar con la Oficina Abierta sin pagar. [1]

En este apéndice daremos los elementos básicos para utilizar una hoja de cálculo y ejemplificaremos con la determinación de una cuota de un préstamo hipotecario, el diseño de una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$ y el cálculo de la tasa interna de retorno de una inversión. Las instrucciones usadas valen para las planillas de cálculo más difundidas.

Una planilla de cálculo tiene la apariencia de un tablero para jugar a la batalla naval, esto es, una cuadrícula donde cada columna esta indicada por una letra y cada fila por un número y cada casilla se representa por la columna y fila a la que pertenece. Así, la casilla superior izquierda es la A1, la que le sigue a la derecha es la B1 y abajo de esta última está la B2, (ver Fig. A.1)

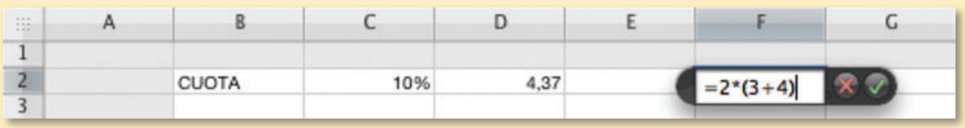


Figura A.1

Planilla de Cálculo de 3x7

Cada casilla puede contener un dato, que puede ser un texto, un número o una fórmula. En la figura A.1, vemos que la casilla B2 contiene el texto CUOTA, la C2 el número 0,1 que aparece como 10% y D2 el número 4,37. El ingreso de datos se realiza, posicionando el cursor sobre la casilla donde queremos ubicar nuestro dato, pulsando el botón (izquierdo) del ratón y luego escribiendo el texto o el número que deseamos. En el caso de una fórmula, por ejemplo $2(3 + 4)$, escribiremos $= 2 * (3 + 4)$ (ver Fig. A.1). En este caso la casilla guardará el resultado, es decir, 14.

[1] Aclaración: el párrafo anterior suena un tanto extraño debido a restricciones legales, por las que se omitió citar marcas.

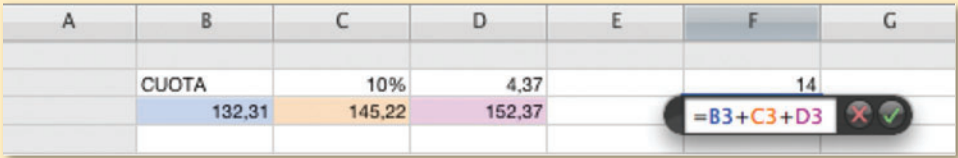
Las fórmulas pueden referir a datos que se encuentran en otras casillas.

Ejemplo A.1

Supongamos que las casillas B3, C3 y D3 contienen los intereses obtenidos en enero, febrero y marzo. Deseamos calcular el total de intereses en el trimestre y guardarlo en la casilla F3. Para esto seleccionamos la casilla F3 y escribimos $= B3+C3+D3$. Al apretar la tecla ENTER, el resultado quedará registrado en F3 (ver Fig.A.2).

Figura A.2

Ingreso de Fórmula



Las fórmulas pueden hacer uso de una gran cantidad de funciones que el programa nos proporciona.

Ejemplo A.2

Supongamos que las casillas B2, B3, ..., B13 contienen los intereses obtenidos desde enero hasta diciembre. Deseamos calcular el total de intereses en el año y guardarlo en la casilla C13. Para esto seleccionamos la casilla C13 y escribimos $= SUMA(B2 : B13)$. Al apretar la tecla ENTER, el resultado quedará registrado en C13.

En este ejemplo hemos usado la función SUMA(x; y; z; . . .) que nos da la suma $x + y + z + \ldots$. También hicimos uso de la notación B2 : B13 que permite referir a las 12 casillas B2; B3; . . . ; B13 de una manera abreviada.

Una alternativa cuando se desea ingresar una fórmula que hace uso de una función es seleccionar la celda donde deseamos ubicar el resultado y buscar **Insertar** en el menú del programa. Hacemos click en él y seleccionamos **Función** dentro de las posibilidades que se nos despliegan. Esto hace abrir la ventana que se ve en la Figura A.3. Esta consta de dos subventanas, en la de la izquierda aparecen las categorías en que se han clasificado las funciones disponibles: Usadas recientemente; Todas; Financieras; Fecha y hora; Matemáticas y trigonométricas; Estadísticas, etc.

Seleccionando cualquiera de estas, por ejemplo en la Figura A.3 se ha seleccionado Financieras, se nos presentan en la subventana derecha las funciones correspondientes a la categoría listadas alfabéticamente:

AMORT; DB; DDB; EUROCONVERT, etc

Al seleccionar una función en la subventana derecha, nos aparecen en la parte inferior de la ventana, los argumentos que utiliza la función y una breve descripción de la misma. Por ejemplo en la Figura A.3 se seleccionó AMORT y debajo de las subventanas aparece:

AMORT(tasa; nper; va; vf; tipo)

Calcula el pago de un préstamo basado en pagos y tasa de interés constante.

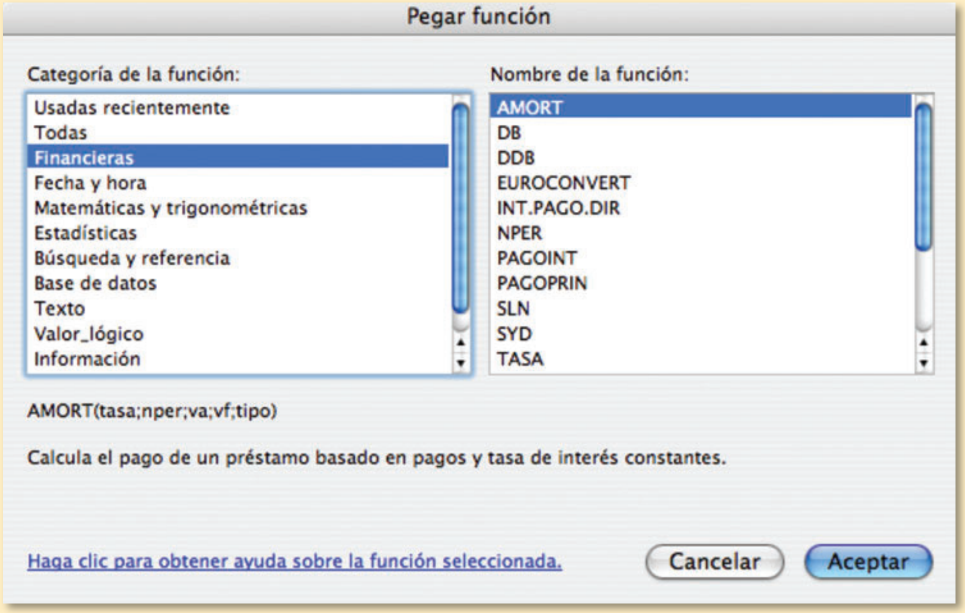


Figura A.3

Funciones financieras

A.0.1. Cálculo del valor de la cuota de un préstamo

Ejemplo A.3

Deseamos saber la cuota que corresponde pagar por un crédito mediante el sistema francés. Supongamos que se reciben \$ 100.000 al 12% anual a pagar en 120 cuotas mensuales. Guardamos estos datos en las casillas B2, B3 y B4 respectivamente. Sabemos que la cuota vendrá dada por $c = 100.000(0,01/(1 - 1,01^{-120}))$.

Entonces podemos obtener su valor de la siguiente forma: ubicamos el cursor sobre la casilla B5, hacemos click con el botón del ratón (el izquierdo si es que tiene más de un botón) y escribimos:

$$= B2 * (B3/12)(1 - (1 + B3/12) \wedge (-B4))$$

Al apretar la tecla ENTER aparecerá el valor de la cuota, 1434,71 en la casilla B5.

También podemos obtener el resultado utilizando la función AMORT(tasa; nper; va; vf; tipo). Esta función nos da el valor de una cuota de un préstamo de un monto **va**, que al cabo de **nper** cuotas deja un saldo **vf**. La tasa durante cada período del crédito es **tasa** y el **tipo** es 0 ó 1 según las cuotas sea pagadas a su vencimiento o anticipadamente. En nuestro caso

$$\text{tasa} = B3/12, \qquad \text{nper} = B4, \qquad \text{va} = B2, \qquad \text{vf} = 0, \qquad \text{tipo} = 0$$

Entonces si escribimos en la casilla B5:

$$= AMORT(B3/12;B4;B2)$$

al apretar ENTER quedará registrado en B5 el resultado -1434,71, que es el valor de la cuota con un signo menos ya que se considera que es un egreso. Notemos que no pusimos los dos últimos argumentos, los cuales no son necesarios cuando son nulos como en este caso.

Ejemplo A.4 Deseamos hacer una lista de los montos que se obtienen al depositar una suma de $ 1000 a una tasa del 1% mensual al cabo de n períodos, donde n puede variar entre 1 y 24.

El valor de n *l*o podemos ubicar en la columna A. Es usual dejar la primera fila vacía, por si se necesita rotular algunas columnas. Por ello escribimos los números del 1 al 24 a partir de la celda A2 hasta la A25. Una forma práctica de hacer esto es la siguiente:

Seleccionamos con el cursor la casilla A2, escribimos 1 y apretamos ENTER. A continuación seleccionamos la celda A3, escribimos 2 y apretamos ENTER. Ahora seleccionamos A2 y apretando la tecla SHIFT (⇑ Mayúsculas) hacemos click en A3. Esto selecciona ambas celdas. Finalmente ubicamos el cursor en el borde inferior derecho de la celda A3 y cuando este cambia de forma (se vuelve una cruz de trazo fino) apretamos el botón del ratón y lo mantenemos apretado mientras lo deslizamos hacia abajo hasta la casilla A25, donde podemos soltarlo. Al hacer esto veremos que las celdas A4 hasta A25 se van rellenando con los números consecutivos del 3 al 24.

Una vez hecho esto, hacemos doble click en B2 para ingresar la fórmula y escribimos:

$$= 1000 * (1,01) \wedge \text{A2}$$

A continuación, podemos usar nuevamente el autorrelleno para completar el resto de la lista. Seleccionamos la casilla B2 y ubicamos el cursor en el borde inferior izquierdo de B2, cuando cambia su forma a una cruz de trazo fino apretamos el botón del ratón y lo mantenemos así mientras lo deslizamos verticalmente hasta la celda B25. Cada casilla B irá mostrando el valor $1000(1,01)^{Ai}$.

Vemos en los ejemplos que cada celda puede tener dos niveles: uno visible en todo momento que corresponde al valor asentado o el resultado de una fórmula. Otro es la fórmula propiamente dicha que produce el resultado a la vista. Para poder acceder a este segundo nivel es necesario hacer un doble click en la correspondiente celda. En el ejemplo anterior en la casilla B3 vemos el valor 1020,1, pero si seleccionamos la casilla y hacemos doble click, veremos la fórmula = $1000 * (1,01) \wedge$ A3 mediante la cual se calcula el valor de B3.

A.1. Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

Deseamos realizar una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r} = (1 - (1 + r)^{-n})/r$. Supongamos que queremos que la tabla contenga los valores de n desde 1 a 30 y de r desde 0,5% a 1,5%, variando en incrementos de 0,125%.

En la columna **A** escribiremos los números del 1 al 30, comenzando con el 1 en A2 y siguiendo con el 2 en A3, etc. Ya sabemos como hacer esto de manera práctica:

Seleccionamos con el cursor la casilla A2, escribimos 1 y apretamos ENTER. Luego seleccionamos la celda A3, escribimos 2 y apretamos ENTER. A continuación seleccionamos A2 y A3 simultáneamente. Finalmente ubicamos el cursor en el borde inferior derecho de la celda A3 y cuando este se vuelve una cruz de trazo fino, apretamos el botón del ratón y lo deslizamos hacia abajo hasta la casilla A31.Así tendremos las celdas A4 hasta A31 con los números consecutivos del 3 al 30.

Esta propiedad de autorelleno funciona para cualquier progresión aritmética, ya sea de manera vertical como en este caso o también horizontalmente.

En el caso de r usaremos la primera fila para escribir los valores deseados a partir de B1. Para esto escribimos en B1 0,5% y en C1 0,625%. Luego seleccionamos ambas casillas simultáneamente, haciendo click en la primera y luego SHIFT click en la segunda. Llevamos ahora el cursor al borde inferior derecho de C1 apretamos el botón (izquierdo) del ratón, lo deslizamos horizontalmente hasta J1 y soltamos el botón. Aparecerán entonces los valores de r en incrementos de 0,125%.

El siguiente paso es escribir la fórmula correspondiente en cada casilla.

Seleccionamos B2 y escribimos:

$$= (1 - (1 + B1) \wedge (-A2))/B1$$

y apretamos ENTER.

Esto produce el valor deseado en B2 pero no nos sirve para autorrellenar ya que si intentamos rellenar verticalmente, ambos índices se irán incrementando por ejemplo en B3 aparecerá $= (1 - (1 + B2) \wedge (-A3))/B2$, en lugar de $= (1-(1+B1) \wedge (-A3))/B1$ que es lo que necesitamos. Para remediar esto se escribe \$B\$1 en lugar de B1. Esto hace que sólo se mueva el índice de Ai.

Entonces comenzamos nuevamente, seleccionamos B2 y escribimos:

$$= (1 - (1 + \$B\$1) \wedge (-A2))/\$B\$1$$

y apretamos ENTER.

Ahora seleccionamos B2 vamos a su borde inferior derecho y manteniendo apretado el botón del ratón lo deslizamos verticalmente hasta la celda B31. Así en B3 quedará registrada la fórmula $= (1 - (1+\$B\$1) \wedge (-A4))/\$B\$1$ y en la celda B31 quedará la fórmula $= (1 - (1+\$B\$1) \wedge (-A31))/\$B\$1$.

A continuación en cada celda Bi hacemos los retoques necesarios para que quede la fórmula:

$$= (1 - (1 + B1) \wedge (-\$A\$i))/B1$$

Finalmente usamos repetidas veces el autorrelleno horizontal, esto es, seleccionamos el borde inferior derecho de Bi y manteniendo apretado el botón izquierdo del ratón, lo deslizamos horizontalmente hasta la celda Ji. Obtenemos así la tabla deseada. En la Figura A.4. puede verse la tabla realizada donde cada valor calculado está escrito con una precisión de seis decimales.

Figura A.4

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	0,50%	0,63%	0,75%	0,88%	1%	1,13%	1,25%	1,38%	1,50%
1	0,995025	0,993789	0,992556	0,991326	0,990099	0,988875	0,987654	0,986436	0,985222
2	1,985099	1,981405	1,977723	1,974053	1,970395	1,966749	1,963115	1,959493	1,955883
3	2,970248	2,962887	2,955556	2,948256	2,940985	2,933745	2,926534	2,919352	2,912200
4	3,950496	3,938273	3,926110	3,914008	3,901966	3,889982	3,878058	3,866192	3,854385
5	4,925866	4,907600	4,889440	4,871384	4,853431	4,835582	4,817835	4,800190	4,782645
6	5,896384	5,870907	5,845598	5,820455	5,795476	5,770662	5,746010	5,721519	5,697187
7	6,862074	6,828231	6,794638	6,761293	6,728195	6,695339	6,662726	6,630351	6,598214
8	7,822959	7,779608	7,736613	7,693971	7,651678	7,609730	7,568124	7,526857	7,485925
9	8,779064	8,725076	8,671576	8,618559	8,566018	8,513948	8,462345	8,411203	8,360517
10	9,730412	9,664672	9,599580	9,535126	9,471305	9,408107	9,345526	9,283554	9,222185
11	10,677027	10,598432	10,520675	10,443743	10,367628	10,292318	10,217803	10,144073	10,071118
12	11,618932	11,526392	11,434913	11,344479	11,255077	11,166693	11,079312	10,992921	10,907505
13	12,556151	12,448588	12,342345	12,237402	12,133740	12,031340	11,930185	11,830255	11,731532
14	13,488708	13,365057	13,243022	13,122579	13,003703	12,886369	12,770553	12,656231	12,543382
15	14,416625	14,275833	14,136995	14,000079	13,865053	13,731885	13,600546	13,471005	13,343233
16	15,339925	15,180952	15,024313	14,869967	14,717874	14,567995	14,420292	14,274728	14,131264
17	16,258632	16,080449	15,905025	15,732309	15,562251	15,394804	15,229918	15,067549	14,907649
18	17,172768	16,974359	16,779181	16,587171	16,398269	16,212414	16,029549	15,849617	15,672561
19	18,082356	17,862717	17,646830	17,434618	17,226008	17,020928	16,819308	16,621077	16,426168
20	18,987419	18,745558	18,508020	18,274714	18,045553	17,820448	17,599316	17,382073	17,168639
21	19,887979	19,622914	19,362799	19,107524	18,856983	18,611074	18,369695	18,132748	17,900137
22	20,784059	20,494822	20,211215	19,933109	19,660379	19,392904	19,130563	18,873241	18,620824
23	21,675681	21,361314	21,053315	20,751533	20,455821	20,166036	19,882037	19,603690	19,330861
24	22,562866	22,222423	21,889146	21,562858	21,243387	20,930567	20,624235	20,324232	20,030405
25	23,445638	23,078185	22,718755	22,367145	22,023156	21,686593	21,357269	21,035001	20,719611
26	24,324018	23,928631	23,542189	23,164456	22,795204	22,434208	22,081253	21,736129	21,398632
27	25,198028	24,773795	24,359493	23,954852	23,559608	23,173506	22,796299	22,427747	22,067617
28	26,067689	25,613709	25,170713	24,738391	24,316443	23,904579	23,502518	23,109985	22,726717
29	26,933024	26,448406	25,975893	25,515133	25,065785	24,627520	24,200018	23,782969	23,376076
30	27,794054	27,277919	26,775080	26,285138	25,807708	25,342418	24,888906	24,446825	24,015838

A.2. Tasa interna de retorno

En esta sección calcularemos la tasa interna de retorno de la inversión en un título público.

Supongamos que se emite un bono a diez años que se amortizará en ocho cuotas anuales a partir del tercer año. Además tiene veinte cupones de renta semestral a una tasa del 4%. Queremos hacer una tabla con los valores de la tasa interna de retorno correspondiente a la compra de estos bonos por un valor nominal de \$10.000 a una paridad del 90% al 105% con incrementos de 1%.

Ubicaremos en la primera fila la paridad y en la segunda la tasa interna de retorno correspondiente. Para esto escribimos PARIDAD en A1 y TIR en A2. En B1 escribimos 90% y en C1 91%, Usando el autorrelleno para progresiones aritméticas ingresamos las paridades restantes desde D1 hasta Q1. En A3 escribimos el valor nominal de la inversión con signo menos, esto es, -10000.

Para resolver el problema supondremos primero que en la columna B tenemos guardado el valor de los veinte cupones de renta que paga el bono (B5:B24) y en la columna C están guardados los cupones de amortización (C5:C24), donde estos valores serán cero en los períodos que no se paga amortización. En la columna D podemos sumar los valores de B y C, de tal forma que el flujo de cobros sea (D5:D24). Para esto escribimos en D5 la fórmula =B5+C5 y usamos el autorrelleno vertical hasta la celda D24. En la fila 4 escribiremos a partir de la columna D, el monto de la inversión correspondiente a cada paridad. Para esto seleccionamos D4 y escribimos

$$= \$A\$3 * B1$$

luego usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda S4.

Como el flujo de pagos no depende de la paridad, será siempre el mismo que el de las celdas (D5:D24). Lo copiaremos a las columnas correspondientes a las distintas paridades. En E5 escribimos =D5 y usamos el autorrelleno vertical. Ahora seleccionamos la columna E desde la celda E5 hasta la E24, ubicamos el cursor en el borde inferior izquierdo de E24 y cuando cambia a la cruz de trazo fino lo arrastramos horizontalmente hasta la celda S24. Allí lo soltamos y hemos copiado el flujo de cobros.

Finalmente podemos completar la fila correspondiente a la tasa interna de retorno. Escribimos en la celda B2:

$$= \mathrm{TIR}(D4 : D24)$$

y usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda Q2. Si el programa que estamos usando no reconoce la función TIR, puede deberse a que es una versión en inglés. En tal caso debe usarse la versión inglesa IRR, escribiendo $= \mathrm{IRR}(D4 : D24)$.

Con esto hemos terminado el cálculo de la TIR en caso de tener los valores de los cupones de renta y amortización. Veamos ahora como obtener estos.

En la columna C escribiremos los cupones de amortización a partir de C5. Podemos escribir 0 desde C5 a C9 e ingresamos $= -\$A\$3 * 12{,}5/100$ en C10. Esto corresponde al primer cupón de amortización de 12,5% del valor nominal del bono. Seleccionamos a la vez las celdas C9 y C10 y copiamos su contenido (usando el menú o CTRL-c, por ejemplo). Seleccionamos simultáneamente las celdas C11 a C24 y pegamos lo que teníamos copiado. Tenemos así los cupones de amortización.

Para los de renta escribimos en B5 $= -0,04 * A3$ y en B6:

$$= 0,04 * (-\$A\$3 - SUMA(\$C\$5 : C5))$$

Notemos esto calcula el 4% del valor residual de los bonos. Luego seleccionamos la celda B6 y usamos el autorrelleno vertical hasta B24 para completar la tabla de cupones de renta. Ahora se comprende mejor la fórmula utilizada en B6. La suma va calculando el total de lo recibido en amortizaciones hasta cada nuevo período. La primera C esta entre signos $ ya que corresponde al primer período que queda fijo. La segunda C se va actualizando al avanzar las celdas.

En la Figura A.5 mostramos las columnas A hasta la F de la planilla obtenida.

Figura A.5

Tabla con los valores de TIR

PARIDAD	90%	91%	92%	93%	94%
TIR	5%	5%	5%	5%	5%
-10000					
			-9000	-9100	-9200
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	1250	1650	1650	1650
	350	0	350	350	350
	350	1250	1600	1600	1600
	300	0	300	300	300
	300	1250	1550	1550	1550
	250	0	250	250	250
	250	1250	1500	1500	1500
	200	0	200	200	200
	200	1250	1450	1450	1450
	150	0	150	150	150
	150	1250	1400	1400	1400
	100	0	100	100	100
	100	1250	1350	1350	1350
	50	0	50	50	50
	50	1250	1300	1300	1300

A.3. Ejercicios

Ejercicio A.1

¿Cómo se suman diez números ubicados en las casillas B2, C2,. . . , K2?

Ejercicio A.2

Realizar una tabla de valores de $A^{-1}_{\overline{n}|r}$, para $r = 0,005 + j\,0,00125$, con $0 \leq j \leq 10$ y $1 \leq n \leq 30$.

Ejercicio A.3

Se decide invertir en un bono a 8 años, de $10.000 de valor nominal, que paga un cupón semestral de interés a una tasa del 7% anual y se amortiza en un sólo pago final. Realizar una tabla con los valores de la tasa interna de retorno de la inversión para cada valor de compra del bono entre $ 9.000 y $ 10.500 con intervalos de $ 100.

Apéndice B

La calculadora financiera

Las calculadoras permiten hacer cuentas. Las hay desde muy elementales que sólo realizan las operaciones básicas, hasta las más sofisticadas que pueden graficar funciones. Entre ambos extremos las más usadas son las llamadas científicas que no sólo permiten hacer sumas, multiplicaciones y divisiones sino que también pueden evaluar logaritmos, exponenciales y funciones trigonométricas como seno y coseno.

La llamada calculadora financiera permite hacer todas las operaciones de una científica y le agrega facilidades para el cálculo de estadísticos como el promedio o la varianza y para obtener los valores de una cuota de un préstamo con sistema francés o el valor actual de un flujo de caja.

El costo de una calculadora financiera suele triplicar o cuadruplicar el de una científica y su uso es mucho más específico, lo cual hace que no esté tan extendido. Más aún su manejo no es tan intuitivo como el de una calculadora científica lo cual dificulta su uso. Esto se debe en gran parte a que las funciones con que trata son de varias variables y requieren el ingreso de varios argumentos antes de proceder a su cálculo.

En este apéndice mostraremos en algunos ejemplos el uso de una de las calculadoras financieras más usadas. Casi omitiremos mencionar la marca, pero se trata del modelo FC 100V. Esta calculadora cuenta con varias teclas especiales. Una de ellas es la tecla redonda que posee cuatro triángulos apuntando al sur, norte, este y oeste. A esta tecla la llamaremos navegador, ya que ella nos permite cambiar de línea en el visor hacia arriba o hacia abajo y mover el cursor dentro de una línea para editarla. Notaremos con ▽ o △ cuando se oprima el navegador para bajar o subir una línea respectivamente.

En los ejemplos supondremos que no nos equivocamos. Si en la realidad esto ocurriera, muchas veces uno puede corregir el error usando la tecla DEL para borrar el carácter mal ingresado. Hay que prestar atención al hecho que en la notación norteamericana el punto es nuestra coma decimal, así si ingresamos 10.000; la calculadora lo interpreta como diez y no diez mil. Del mismo modo cuando nos da como resultado 10.350 significa 10 con 350 milésimos. En los ejemplos escribiremos esto último como 10,350.

Otra dificultad con la cual nos podemos encontrar es que un cálculo no sea correcto debido a que está usando valores que nosotros no ingresamos sino que ya estaban en la memoria. Esto se debe a que la calculadora tiene distintos espacios de memoria para registrar los valores de diversas variables. Al encenderla estas variables poseen el último valor asignado a ellas o si nunca fueron usadas, el valor asignado por defecto. Se puede borrar el contenido de las variables, encendiendo y apretando las teclas SHIFT y 9 simultáneamente. Con el cursor se va a la línea [Vars:EXE] y se aprieta EXE AC. Esto deja las variables con su valor por defecto

Ejemplo B.1

Como primera práctica queremos calcular el valor actual del flujo de caja (−10.000; −2.000; 2.000; 3.000; 4.000; 5.000) con una tasa de descuento del 6% anual. Suponemos que los pagos y cobros se realizan en períodos de un año.

Para resolver esto con la calculadora primero la encendemos con la tecla ON en la parte superior derecha, y a continuación ingresamos en el modo **Flujo de Caja** (Cash Flow) presionando la tecla CASH. Esto hace aparecer en el visor lo que se ve en la Figura B.1. Notamos que la segunda línea está ensombrecida y en la Figura B.1 se ve marcada en negro. Esto quiere decir que es la línea activa, lo que hagamos en este momento afectará su contenido. Este se refiere al valor de la tasa de interés. En nuestro caso ingresaremos la tasa de descuento del 6 %, para esto apretamos 6 y luego EXE. Con esto veremos que la segunda linea de la pantalla cambio a [I %=6]. Hemos usado los corchetes para delimitar la línea, estos no aparecen en el visor. El siguiente paso es ingresar el flujo, para ello nos fijamos que la línea ensombrecida diga [CSH=D. editor x] y apretamos la tecla EXE. Esto nos hace aparecer el Editor de Datos con una columna donde se ingresarán uno a uno los datos del flujo de caja. Comenzamos con el primero que por ser negativo requiere el uso de la tecla (-) para ingresarlo. Ojo, no confundir esta tecla (-) con la - de la resta. Así escribimos (-)10.000 y apretamos la tecla EXE. Repetimos esto con los siguientes períodos:

Figura B.1

Modo Flujo de Caja

(-)2.000 EXE   2.000 EXE   3.000 EXE   4.000 EXE   5.000 EXE

Una vez ingresados los datos del flujo salimos del editor con la tecla ESC. Esto nos devuelve a la pantalla del modo Flujo de caja. para obtener el resultado nos ubicamos sobre la línea [NPV:Solve] y apretamos la tecla SOLVE. Así obtenemos el resultado -683,276204. Esto quiere decir que el valor actual (Net Present Value) es negativo y por lo tanto la inversión no es redituable.

Resumimos lo realizado en la siguiente secuencia:

ON CASH 6 EXE ▽ EXE (-)10.000 EXE (-)2.000 EXE 2.000 EXE 3.000 EXE 4.000 EXE 5.000 EXE ESC ▽▽ SOLVE

El modo flujo de caja nos permite también calcular la tasa interna de retorno de un flujo.

Ejemplo B.2

Deseamos saber la tasa interna de retorno que resulta de invertir $ 9.000 en un bono de tipo bullet (es decir que se amortiza en un único pago al final) a 8 años que tiene un valor nominal de $10.000 y paga anualmente un interés del 6 %.

Este bono genera el flujo (-9.000, 600,600, 600,600, 600,600, 600,10.600), para calcular la TIR, procedemos como en el ejemplo anterior: apretamos la tecla CASH para entrar al modo flujo caja, no hace falta ingresar una tasa de interés así que vamos directamente al editor de datos [CSH=D. editor x] y apretamos EXE. A continuación ingresamos el flujo: (-)9.000 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 10.600 EXE

Salimos del editor con ESC y manejamos el cursor hasta ubicar la línea [IRR:Solve] (IRR viene de Internal Rate of Return). Una vez allí apretamos la tecla SOLVE esperamos unos 10 segundos obtenemos el resultado: 7,721821067, así obtenemos que la tasa interna de retorno de la inversión es aproximadamente 7,21% anual. Al volver al modo flujo de caja con la tecla CASH notaremos que la segunda línea a cambiado a [I %=7,721821067] esto es porque la calculadora tiene una memoria dedicada exclusivamente a la variable I% y le ha asignado el valor obtenido para la TIR. En síntesis la sucesión empleada ha sido la siguiente:

ON CASH ▽ EXE (-)9.000 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 10.600 EXE ESC ▽▽▽ SOLVE

Ejemplo B.3

Queremos calcular la cuota mensual de un préstamo de $ 200.000 a 20 años de plazo con una tasa de interés del 12% anual.

Para resolver esto se ingresa en el modo **Interés Compuesto** presionando la tecla CMPD (del inglés CoMPounD interest= interés compuesto). En el visor aparecerán las variables principales de este modo.

La primera línea que debemos editar es [Set:end], la dejamos con el valor *end* ya que indica que los pagos se hacen al vencer el período. En caso de necesitar cambiarla a su otro valor *begin* se aprieta EXE y luego 1. Con el navegador pasamos a la siguiente línea que determina el número de períodos **n**. Como el plazo es 20 años ingresamos 240 EXE. Continuamos con la variable **I%** que guarda el interés anual del préstamo escribimos 12 EXE. Luego le toca el turno a la variable **PV** que es el monto del préstamo (viene del inglés Principal Value), en nuestro caso ingresamos 200.000 EXE. La siguiente variable es **PMT** que es el valor de la cuota (del inglés PayMenT=pago), como este es el valor que se quiere calcular, se oprime ▽ y consideramos la siguiente variable **FV** que es el valor al finalizar los pagos (del inglés Future Value). En nuestro caso se requiere que al cumplir con las 240 cuotas no quede deuda, por lo tanto escribimos 0 EXE. Quedan sólo dos variables: **P/Y** que guarda el número de pagos al año y **C/Y** que contiene el número de veces que el interés se compone al año. Escribimos 12 EXE en ambas.

Una vez fijados los valores de las variables con los datos del problema volvemos con el navegador a la línea con la variable **PMT** y apretamos la tecla **SOLVE**. Aparecerá entonces el valor de la cuota (con un sino menos ya que es un egreso): [**PMT**=-2.202,172267]

Como resumen se escribe a continuación la secuencia de teclas ingresadas:

CMPD ▽ 240 EXE 12 EXE 200.000 EXE ▽ 0 EXE 12 EXE 12 EXE △△△ SOLVE

Ejemplo B.4

Se desea saber la tasa máxima que puede tener un préstamo de $ 200.000 a 20 años si requerimos que la cuota mensual sea de $ 2.000.

Para obtener la solución, ingresamos al modo CMPD y nos dirigimos con el navegador a la línea [PMT=-2.202,172267] (el valor de la cuota quedó guardado desde el ejemplo anterior) allí escribimos (-)2.000 que es el nuevo valor de la cuota. Se tuvo en cuenta que es negativo por ser un egreso y por lo tanto se usó la tecla (-). A continuación volvemos a la línea de la variable tasa [I %=12] y apretamos la tecla SOLVE, en un instante aparece 10,52411087 en el lugar que ocupaba el 12. Es decir la tasa máxima es de un 10,52% anual.

La sucesión de teclas usadas para obtener el resultado, luego de encender la calculadora fue:

CMPD ▽▽▽▽ (-)2000 EXE △△ SOLVE

Ejemplo B.5

Se ha tomado un préstamo de $ 100.000 a 20 años a una tasa del 10,5241% anual por el que se pagan cuotas de $ 1.000. Deseamos calcular el valor que resta pagar del préstamo después de haber pagado la sexagésima cuota.

Para esto conviene usar el modo **Amortización** al cual se ingresa mediante la tecla AMRT. Una vez en este modo ingresamos los siguientes datos: Set:end PM1=1 PM2=60 n=0 I %=10.5241 PV=100000 PMT=(-)1000 V=0 P/Y=12 C/Y=12. A continuación nos ubicamos sobre la línea [BAL=Solve] apretamos la tecla SOLVE y obtendremos BAL=90.342,80723. Esto nos dice que al pagar la cuota 60 nos restan pagar $ 90.342,80723 del capital recibido. Si nos resulta un tanto extraño que después de cinco años, aún debamos el 90% del capital, podemos hacer la siguiente prueba: ver que ocurre si cambiamos la cuota 60 por la 120, 180 o 240. Para ello volvemos a entrar en el modo Amortización y nos dirigimos con el navegador a la línea [PM2=60] e ingresamos 120 EXE. Luego bajamos hasta [BAL:Solve] y apretamos SOLVE. Repetimos estos pasos con 180 y 240 y obtendremos respectivamente: [BAL=74.035,48905], [BAL=46.498,64349] y [BAL=-0,594199902]. Esto nos muestra que a los 10 años aún debemos 74% del préstamo, a los 15 años el 46% y al pagar la última cuota hemos pagado 60 centavos de más.

A continuación va un resumen de las teclas empleadas después que se enciende la calculadora:

AMRT EXE 2 ▽ 1 EXE 60 EXE 0 EXE 10.5241 EXE 100000 EXE (-)1000 EXE 0 EXE 12 EXE 12 EXE SOLVE AMRT▽▽120 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE AMRT ▽▽ 180 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE AMRT ▽▽ 240 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE

El modo amortización permite calcular cuál es la parte de interés y cuál es la de amortización que se abona en la cuota **PM1**, como así también cuánto se pagó de interés y cuánto de amortización entre la cuota **PM1** y la **PM2**.

Ejemplo B.6

Bajo las hipótesis del ejemplo anterior deseamos saber cuánto se paga de interés y cuanto de amortización en la sexagésima cuota y cuanto se lleva pagado de interés desde el comienzo del préstamo hasta la misma.

Para lo primero sólo tenemos que cambiar el valor de PM1 a 60 y luego ir a la línea [INT:Solve] y apretar SOLVE. Así obtenemos INT=-794,1195368, esto es, en la cuota 60 se pagan $ 794,12 de interés. Apretamos nuevamente AMRT y 12 veces ▽ hasta llegar a la línea [PRN:Solve] apretamos SOLVE y obtenemos PRN=-205,8804632, el valor del capital amortizado en la cuota 60. Naturalmente la suma de ambos valores obtenidos debe dar el valor de la cuota $1000. Para contestar las últimas dos preguntas debemos cambiar primero PM1 a 1 y PM2 a 60 luego bajamos 10 líneas hasta [∑INT:Solve], apretamos SOLVE y nos aparece: ∑INT=-50.342,80723. Esto nos dice que hemos pagado $ 50.342,81 de intereses. Finalmente volvemos al modo AMRT bajamos 14 líneas hasta [∑PR:Solve] y apretando SOLVE obtenemos ∑PR=-9.657,192773. Notemos que esta cantidad más la calculada en el ejemplo anterior nos da el monto del préstamo con signo menos: -9.657,19277 -90.342,80723 =-100.000. Esto es así porque sumamos lo ya amortizado más lo que resta pagar.

El siguiente es el resumen de teclas apretadas:

AMRT ▽60 EXE ▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽1 EXE 60 EXE ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE

B.1. Ejercicios

Escribir la sucesión de teclas que deben usarse para calcular la cuota mensual de un préstamo de $ 100.000 a 10 años de plazo con una tasa de interés del 11% anual. | **Ejercicio B.1**

Apéndice C
Tablas

En esta sección se presentan seis tablas de valores que son de utilidad en la resolución de los ejercicios planteados.

La primera contiene los valores de $A_{\overline{n|}r}$ para r = 0,005 + j0,0025, con $0 \leq j \leq 6$ y $1 \leq n \leq 36$ aproximados con 8 decimales. Recordemos la definición:

$$A_{\overline{n|}r} = \frac{(1-(1+r)^{-n})}{r}$$

esto nos da el valor actual de una anualidad de \$ 1.

Ejemplo C.1 Si deseamos saber el valor presente de una sucesión de 24 pagos de un peso con una tasa de descuento por período del 1 %, buscamos en la fila 24 de la tercera columna $A_{\overline{24|}0,01}$ = 21, 243387.

La segunda tabla contiene los valores inversos de $A_{\overline{n|}r}$ para r = 0, 005 + j0, 00125, con $0 \leq j \leq 8$ y $1 \leq n \leq 36$. Estos valores nos dan la cuota de un préstamo de un peso a una tasa r, a devolver en n períodos.

Ejemplo C.2 Para calcular la cuota de un préstamo \$10.000 al 18% anual en 36 cuotas iguales, multiplicamos 10.000 por el coeficiente de la última fila y la última columna.

$$c = 10.000A^{-1}_{\overline{36|}18/1200} = 10.000 \times 0,036152 = 361,52$$

En la tercera tabla tenemos los coeficientes $((1+r)^n - 1)/r$, para valores de r = 0,005 + j0,0025, con $0 \leq j \leq 6$ y $1 \leq n \leq 36$. Representan lo que recibiremos si depositamos un peso por período a tasa r durante n períodos.

Ejemplo C.3 Si ahorramos \$ 10 por mes a una tasa del 1% mensual, al cabo de un año tendremos el valor de la fila 12 y tercera columna, multiplicado por 10.

Esto es:

$$C = 10\frac{((1+0,01)^{12}-1)}{0,01} = 10 \times 12,68250301 \sim 126,83$$

La cuarta tabla contiene los valores $\frac{r}{((1+r)^n-1)}$ que son inversos de los de la anterior.

Estos coeficientes representan cuánto se debe depositar por período para obtener un peso al cabo de n periodos si la tasa de interés es r.

Ejemplo C.4 Para ahorrar $ 1.000 al cabo de dos años a una tasa del 0,75% mensual, buscamos el coeficiente de la fila 24 y segunda columna.

Calculamos:

$$D = 1.000 \frac{0,0075}{((1+0{,}0075)^{24}-1)} = 1.000 \times 0,03818474 = 38,18474$$

Quiere decir que debemos ahorrar cada mes $ 38,18.

Las tablas 5 y 6 contienen los valores de $(1 + r)^n$ y $(1 + r)^{-n}$ respectivamente, y son de mucho uso en el cálculo de interés compuesto y valor presente. En la última fila de cada una se han tabulado $\ln(1 + r)$ y $\log_{10}(1 + r)$ respectivamente.

Cuadro C.1

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	0,9950249	0,9925558	0,990099	0,9876543	0,9852217	0,982801	0,9803922
2	1,9850994	1,9777229	1,9703951	1,9631154	1,9558834	1,9486988	1,9415609
3	2,9702481	2,9555562	2,9409852	2,9265337	2,9122004	2,897984	2,8838833
4	3,9504957	3,9261104	3,9019656	3,878058	3,8543847	3,8309425	3,8077287
5	4,9258663	4,8894396	4,8534312	4,817835	4,782645	4,7478551	4,7134595
6	5,8963844	5,8455976	5,7954765	5,7460099	5,6971872	5,6489976	5,6014309
7	6,862074	6,7946379	6,7281945	6,6627259	6,598214	6,5346414	6,4719911
8	7,8229592	7,7366133	7,6516778	7,5681243	7,4859251	7,405053	7,3254814
9	8,7790639	8,6715764	8,5660176	8,462345	8,3605173	8,2604943	8,1622367
10	9,7304119	9,5995796	9,4713045	9,3455259	9,2221846	9,1012229	8,982585
11	10,677027	10,520675	10,367628	10,217803	10,071118	9,9274918	9,7868481
12	11,618932	11,434913	11,255077	11,079312	10,907505	10,73955	10,575341
13	12,556151	12,342345	12,13374	11,930185	11,731532	11,537641	11,348374
14	13,488708	13,243022	13,003703	12,770553	12,543382	12,322006	12,106249
15	14,416625	14,136995	13,865053	13,600546	13,343233	13,09288	12,849264
16	15,339925	15,024313	14,717874	14,420292	14,131264	13,850497	13,577709
17	16,258632	15,905025	15,562251	15,229918	14,907649	14,595083	14,291872
18	17,172768	16,779181	16,398269	16,029549	15,672561	15,326863	14,992031
19	18,082356	17,64683	17,226009	16,819308	16,426168	16,046057	15,678462
20	18,987419	18,50802	18,045553	17,599316	17,168639	16,752881	16,351433
21	19,887979	19,362799	18,856983	18,369695	17,900137	17,447549	17,011209
22	20,784059	20,211215	19,660379	19,130563	18,620824	18,130269	17,658048
23	21,675681	21,053315	20,455821	19,882037	19,330861	18,801248	18,292204
24	22,562866	21,889146	21,243387	20,624235	20,030405	19,460686	18,913926
25	23,445638	22,718755	22,023156	21,357269	20,719611	20,108782	19,523456
26	24,324018	23,542189	22,795204	22,081253	21,398632	20,745732	20,121036
27	25,198028	24,359493	23,559608	22,796299	22,067617	21,371726	20,706898
28	26,067689	25,170713	24,316443	23,502518	22,726717	21,986955	21,281272
29	26,933024	25,975893	25,065785	24,200018	23,376076	22,591602	21,844385
30	27,794054	26,77508	25,807708	24,888906	24,015838	23,185849	22,396456
31	28,6508	27,568318	26,542285	25,56929	24,646146	23,769877	22,937702
32	29,503284	28,35565	27,269589	26,241274	25,267139	24,343859	23,468335
33	30,351526	29,137122	27,989693	26,904962	25,878954	24,90797	23,988564
34	31,195548	29,912776	28,702666	27,560456	26,481728	25,462378	24,498592
35	32,035371	30,682656	29,40858	28,207858	27,075595	26,007251	24,998619
36	32,871016	31,446805	30,107505	28,847267	27,660684	26,542753	25,488842

Cuadro C.2

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}^{-1}$

n	0,50%	0,625%	0,75%	0,875%	1%	1,125%	1,25%	1,375%	1,50%
1	1,005000	1,006250	1,007500	1,008750	1,010000	1,011250	1,012500	1,013750	1,015000
2	0,503753	0,504692	0,505632	0,506572	0,507512	0,508453	0,509394	0,510336	0,511278
3	0,336672	0,337509	0,338346	0,339184	0,340022	0,340861	0,341701	0,342542	0,343383
4	0,253133	0,253918	0,254705	0,255493	0,256281	0,257071	0,257861	0,258652	0,259445
5	0,203010	0,203766	0,204522	0,20528	0,20604	0,2068	0,207562	0,208325	0,209089
6	0,169595	0,170331	0,171069	0,171808	0,172548	0,17329	0,174034	0,174779	0,175525
7	0,145729	0,146451	0,147175	0,147901	0,148628	0,149358	0,150089	0,150822	0,151556
8	0,127829	0,128541	0,129256	0,129972	0,13069	0,131411	0,132133	0,132858	0,133584
9	0,113907	0,114612	0,115319	0,116029	0,11674	0,117454	0,118171	0,118889	0,119610
10	0,102771	0,10347	0,104171	0,104875	0,105582	0,106291	0,107003	0,107717	0,108434
11	0,093659	0,094354	0,095051	0,095751	0,096454	0,09716	0,097868	0,098580	0,099294
12	0,086066	0,086757	0,087451	0,088149	0,088849	0,089552	0,090258	0,090968	0,091680
13	0,079642	0,08033	0,081022	0,081717	0,082415	0,083116	0,083821	0,084529	0,085240
14	0,074136	0,074822	0,075511	0,076205	0,076901	0,077601	0,078305	0,079012	0,079723
15	0,069364	0,070048	0,070736	0,071428	0,072124	0,072823	0,073526	0,074234	0,074944
16	0,065189	0,065872	0,066559	0,06725	0,067945	0,068644	0,069347	0,070054	0,070765
17	0,061506	0,062187	0,062873	0,063563	0,064258	0,064957	0,065660	0,066368	0,067080
18	0,058232	0,058912	0,059598	0,060288	0,060982	0,061681	0,062385	0,063093	0,063806
19	0,055303	0,055983	0,056667	0,057357	0,058052	0,058751	0,059455	0,060165	0,060878
20	0,052666	0,053346	0,054031	0,05472	0,055415	0,056115	0,05682	0,057531	0,058246
21	0,050282	0,050961	0,051645	0,052335	0,053031	0,053731	0,054437	0,055149	0,055865
22	0,048114	0,048793	0,049477	0,050168	0,050864	0,051565	0,052272	0,052985	0,053703
23	0,046135	0,046814	0,047498	0,048189	0,048886	0,049588	0,050297	0,051011	0,051731
24	0,044321	0,045000	0,045685	0,046376	0,047073	0,047777	0,048487	0,049202	0,049924
25	0,042652	0,043331	0,044016	0,044708	0,045407	0,046111	0,046822	0,047540	0,048263
26	0,041112	0,041791	0,042477	0,04317	0,043869	0,044575	0,045287	0,046006	0,046732
27	0,039686	0,040365	0,041052	0,041745	0,042446	0,043153	0,043867	0,044588	0,045315
28	0,038362	0,039042	0,039729	0,040423	0,041124	0,041833	0,042549	0,043271	0,044001
29	0,037129	0,037809	0,038497	0,039192	0,039895	0,040605	0,041322	0,042047	0,042779
30	0,035979	0,03666	0,037348	0,038044	0,038748	0,039460	0,040179	0,040905	0,041639
31	0,034903	0,035584	0,036274	0,036971	0,037676	0,038389	0,039109	0,039838	0,040574
32	0,033895	0,034576	0,035266	0,035965	0,036671	0,037385	0,038108	0,038839	0,039577
33	0,032947	0,033630	0,034320	0,035020	0,035727	0,036443	0,037168	0,037901	0,038641
34	0,032056	0,032739	0,033431	0,034131	0,03484	0,035558	0,036284	0,037019	0,037762
35	0,031215	0,031899	0,032592	0,033293	0,034004	0,034723	0,035451	0,036188	0,036934
36	0,030422	0,031106	0,0318	0,032502	0,033214	0,033935	0,034665	0,035404	0,036152

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,005000	2,007500	2,010000	2,012500	2,015000	2,017500	2,020000
3	3,015025	3,022556	3,030100	3,037656	3,045225	3,052806	3,060400
4	4,030100	4,045225	4,060401	4,075627	4,090903	4,106230	4,121608
5	5,050251	5,075565	5,101005	5,126572	5,152267	5,178089	5,204040
6	6,075502	6,113631	6,152015	6,190654	6,229551	6,268706	6,308121
7	7,105879	7,159484	7,213535	7,268038	7,322994	7,378408	7,434283
8	8,141409	8,213180	8,285671	8,358888	8,432839	8,507530	8,582969
9	9,182116	9,274779	9,368527	9,463374	9,559332	9,656412	9,754628
10	10,228026	10,344339	10,462213	10,581666	10,702722	10,825399	10,949721
11	11,279167	11,421922	11,566835	11,713937	11,863262	12,014844	12,168715
12	12,335562	12,507586	12,682503	12,860361	13,041211	13,225104	13,412090
13	13,397240	13,601393	13,809328	14,021116	14,236830	14,456543	14,680332
14	14,464226	14,703404	14,947421	15,196380	15,450382	15,709533	15,973938
15	15,536548	15,813679	16,096896	16,386335	16,682138	16,984449	17,293417
16	16,614230	16,932282	17,257864	17,591164	17,932370	18,281677	18,639285
17	17,697301	18,059274	18,430443	18,811053	19,201355	19,601607	20,012071
18	18,785788	19,194718	19,614748	20,046192	20,489376	20,944635	21,412312
19	19,879717	20,338679	20,810895	21,296769	21,796716	22,311166	22,840559
20	20,979115	21,491219	22,019004	22,562979	23,123667	23,701611	24,297370
21	22,084011	22,652403	23,239194	23,845016	24,470522	25,116389	25,783317
22	23,194431	23,822296	24,471586	25,143078	25,837580	26,555926	27,298984
23	24,310403	25,000963	25,716302	26,457367	27,225144	28,020655	28,844963
24	25,431955	26,188471	26,973465	27,788084	28,633521	29,511016	30,421862
25	26,559115	27,384884	28,243200	29,135435	30,063024	31,027459	32,030300
26	27,691911	28,590271	29,525632	30,499628	31,513969	32,570440	33,670906
27	28,830370	29,804698	30,820888	31,880873	32,986679	34,140422	35,344324
28	29,974522	31,028233	32,129097	33,279384	34,481479	35,737880	37,051210
29	31,124395	32,260945	33,450388	34,695377	35,998701	37,363293	38,792235
30	32,280017	33,502902	34,784892	36,129069	37,538681	39,017150	40,568079
31	33,441417	34,754174	36,132740	37,580682	39,101762	40,699950	42,379441
32	34,608624	36,014830	37,494068	39,050441	40,688288	42,412200	44,227030
33	35,781667	37,284941	38,869009	40,538571	42,298612	44,154413	46,111570
34	36,960575	38,564578	40,257699	42,045303	43,933092	45,927115	48,033802
35	38,145378	39,853813	41,660276	43,570870	45,592088	47,730840	49,994478
36	39,336105	41,152716	43,076878	45,115506	47,275969	49,566129	51,994367

Cuadro C.3

Tabla de valores de $((1 + r)^n - 1) / r$

Cuadro C.4

Tabla de valores de $r / ((1 + r)^n - 1) / r$

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,498753	0,498132	0,497512	0,496894	0,496278	0,495663	0,495050
3	0,331672	0,330846	0,330022	0,329201	0,328383	0,327567	0,326755
4	0,248133	0,247205	0,246281	0,245361	0,244445	0,243532	0,242624
5	0,198010	0,197022	0,196040	0,195062	0,194089	0,193121	0,192158
6	0,164595	0,163569	0,162548	0,161534	0,160525	0,159523	0,158526
7	0,140729	0,139675	0,138628	0,137589	0,136556	0,135531	0,134512
8	0,122829	0,121756	0,120690	0,119633	0,118584	0,117543	0,116510
9	0,108907	0,107819	0,106740	0,105671	0,104610	0,103558	0,102515
10	0,097771	0,096671	0,095582	0,094503	0,093434	0,092375	0,091327
11	0,088659	0,087551	0,086454	0,085368	0,084294	0,083230	0,082178
12	0,081066	0,079951	0,078849	0,077758	0,076680	0,075614	0,074560
13	0,074642	0,073522	0,072415	0,071321	0,070240	0,069173	0,068118
14	0,069136	0,068011	0,066901	0,065805	0,064723	0,063656	0,062602
15	0,064364	0,063236	0,062124	0,061026	0,059944	0,058877	0,057825
16	0,060189	0,059059	0,057945	0,056847	0,055765	0,054700	0,053650
17	0,056506	0,055373	0,054258	0,053160	0,052080	0,051016	0,049970
18	0,053232	0,052098	0,050982	0,049885	0,048806	0,047745	0,046702
19	0,050303	0,049167	0,048052	0,046955	0,045878	0,044821	0,043782
20	0,047666	0,046531	0,045415	0,044320	0,043246	0,042191	0,041157
21	0,045282	0,044145	0,043031	0,041937	0,040866	0,039815	0,038785
22	0,043114	0,041977	0,040864	0,039772	0,038703	0,037656	0,036631
23	0,041135	0,039998	0,038886	0,037797	0,036731	0,035688	0,034668
24	0,039321	0,038185	0,037073	0,035987	0,034924	0,033886	0,032871
25	0,037652	0,036517	0,035407	0,034322	0,033263	0,032230	0,031220
26	0,036112	0,034977	0,033869	0,032787	0,031732	0,030703	0,029699
27	0,034686	0,033552	0,032446	0,031367	0,030315	0,029291	0,028293
28	0,033362	0,032229	0,031124	0,030049	0,029001	0,027982	0,026990
29	0,032129	0,030997	0,029895	0,028822	0,027779	0,026764	0,025778
30	0,030979	0,029848	0,028748	0,027679	0,026639	0,025630	0,024650
31	0,029903	0,028774	0,027676	0,026609	0,025574	0,024570	0,023596
32	0,028895	0,027766	0,026671	0,025608	0,024577	0,023578	0,022611
33	0,027947	0,026820	0,025727	0,024668	0,023641	0,022648	0,021687
34	0,027056	0,025931	0,024840	0,023784	0,022762	0,021774	0,020819
35	0,026216	0,025092	0,024004	0,022951	0,021934	0,020951	0,020002
36	0,025422	0,024300	0,023214	0,022165	0,021152	0,020175	0,019233

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,005000	1,007500	1,010000	1,012500	1,015000	1,017500	1,020000
2	1,010025	1,015056	1,020100	1,025156	1,030225	1,035306	1,040400
3	1,015075	1,022669	1,030301	1,037971	1,045678	1,053424	1,061208
4	1,020151	1,030339	1,040604	1,050945	1,061364	1,071859	1,082432
5	1,025251	1,038067	1,051010	1,064082	1,077284	1,090617	1,104081
6	1,030378	1,045852	1,061520	1,077383	1,093443	1,109702	1,126162
7	1,035529	1,053696	1,072135	1,090850	1,109845	1,129122	1,148686
8	1,040707	1,061599	1,082857	1,104486	1,126493	1,148882	1,171659
9	1,045911	1,069561	1,093685	1,118292	1,143390	1,168987	1,195093
10	1,051140	1,077583	1,104622	1,132271	1,160541	1,189444	1,218994
11	1,056396	1,085664	1,115668	1,146424	1,177949	1,210260	1,243374
12	1,061678	1,093807	1,126825	1,160755	1,195618	1,231439	1,268242
20	1,104896	1,161184	1,220190	1,282037	1,346855	1,414778	1,485947
30	1,161400	1,251272	1,347849	1,451613	1,563080	1,682800	1,811362
40	1,220794	1,348349	1,488864	1,643619	1,814018	2,001597	2,208040
50	1,283226	1,452957	1,644632	1,861022	2,105242	2,380789	2,691588
60	1,348850	1,565681	1,816697	2,107181	2,443220	2,831816	3,281031
70	1,417831	1,687151	2,006763	2,385900	2,835456	3,368288	3,999558
80	1,490339	1,818044	2,216715	2,701485	3,290663	4,006392	4,875439
90	1,566555	1,959092	2,448633	3,058813	3,818949	4,765381	5,943133
100	1,646668	2,111084	2,704814	3,463404	4,432046	5,668156	7,244646
110	1,730879	2,274867	2,987797	3,921512	5,143570	6,741957	8,831183
120	1,819397	2,451357	3,300387	4,440213	5,969323	8,019183	10,765163
130	1,912441	2,641540	3,645680	5,027524	6,927643	9,538374	13,122674
140	2,010243	2,846477	4,027099	5,692519	8,039812	11,345366	15,996466
150	2,113048	3,067314	4,448423	6,445473	9,330531	13,494683	19,499603
160	2,221109	3,305284	4,913826	7,298021	10,828462	16,051176	23,769907
170	2,334697	3,561716	5,427921	8,263336	12,566872	19,091983	28,975384
180	2,454094	3,838043	5,995802	9,356334	14,584368	22,708854	35,320831
190	2,579596	4,135808	6,623096	10,593905	16,925754	27,010921	43,055896
200	2,711517	4,456675	7,316018	11,995169	19,643029	32,127992	52,484897
210	2,850184	4,802435	8,081435	13,581780	22,796537	38,214463	63,978797
220	2,995943	5,175020	8,926932	15,378253	26,456311	45,453982	77,989797
230	3,149156	5,576512	9,860887	17,412348	30,703630	54,064989	95,069127
240	3,310204	6,009152	10,892554	19,715494	35,632816	64,307303	115,888735
Ln	0,004988	0,007472	0,009950	0,012423	0,014889	0,017349	0,019803

Cuadro C.5

Tabla de valores de $(1 + r)^n$

Cuadro C.6

Tabla de valores de $(1 + r)^{-n}$

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	0,995025	0,992556	0,990099	0,987654	0,985222	0,982801	0,980392
2	0,990075	0,985167	0,980296	0,975461	0,970662	0,965898	0,961169
3	0,985149	0,977833	0,970590	0,963418	0,956317	0,949285	0,942322
4	0,980248	0,970554	0,960980	0,951524	0,942184	0,932959	0,923845
5	0,975371	0,963329	0,951466	0,939777	0,928260	0,916913	0,905731
6	0,970518	0,956158	0,942045	0,928175	0,914542	0,901143	0,887971
7	0,965690	0,949040	0,932718	0,916716	0,901027	0,885644	0,870560
8	0,960885	0,941975	0,923483	0,905398	0,887711	0,870412	0,853490
9	0,956105	0,934963	0,914340	0,894221	0,874592	0,855441	0,836755
10	0,951348	0,928003	0,905287	0,883181	0,861667	0,840729	0,820348
11	0,946615	0,921095	0,896324	0,872277	0,848933	0,826269	0,804263
12	0,941905	0,914238	0,887449	0,861509	0,836387	0,812058	0,788493
20	0,905063	0,861190	0,819544	0,780009	0,742470	0,706825	0,672971
30	0,861030	0,799187	0,741923	0,688889	0,639762	0,594248	0,552071
40	0,819139	0,741648	0,671653	0,608413	0,551262	0,499601	0,452890
50	0,779286	0,688252	0,608039	0,537339	0,475005	0,420029	0,371528
60	0,741372	0,638700	0,550450	0,474568	0,409296	0,353130	0,304782
70	0,705303	0,592715	0,498315	0,419129	0,352677	0,296887	0,250028
80	0,670988	0,550042	0,451118	0,370167	0,303890	0,249601	0,205110
90	0,638344	0,510440	0,408391	0,326924	0,261852	0,209847	0,168261
100	0,607287	0,473690	0,369711	0,288733	0,225629	0,176424	0,138033
110	0,577741	0,439586	0,334695	0,255004	0,194418	0,148325	0,113235
120	0,549633	0,407937	0,302995	0,225214	0,167523	0,124701	0,092892
130	0,522892	0,378567	0,274297	0,198905	0,144349	0,104840	0,076204
140	0,497452	0,351311	0,248318	0,175669	0,124381	0,088142	0,062514
150	0,473250	0,326018	0,224799	0,155148	0,107175	0,074103	0,051283
160	0,450226	0,302546	0,203507	0,137023	0,092349	0,062301	0,042070
170	0,428321	0,280764	0,184233	0,121017	0,079574	0,052378	0,034512
180	0,407482	0,260549	0,166783	0,106879	0,068567	0,044036	0,028312
190	0,387658	0,241791	0,150987	0,094394	0,059082	0,037022	0,023226
200	0,368797	0,224383	0,136686	0,083367	0,050909	0,031126	0,019053
210	0,350854	0,208228	0,123740	0,073628	0,043866	0,026168	0,015630
220	0,333785	0,193236	0,112021	0,065027	0,037798	0,022000	0,012822
230	0,317545	0,179324	0,101411	0,057431	0,032569	0,018496	0,010519
240	0,302096	0,166413	0,091806	0,050722	0,028064	0,015550	0,008629
-Log	0,002166	0,003245	0,004321	0,005395	0,006466	0,007534	0,008600

Solución de los ejercicios

Capítulo 2

Ejercicio 2.1

Usamos la fórmula $a_n = a_1+(n-1)R$. El enunciado nos dice que $7 = a_3 = a_1+(3-1)R$ y $27 = a_7 = a_1 + (7 - 1)R$. Luego $27 - 7 = a_7 - a_3 = (6 - 2)R$. Así tenemos que $20 = 4R$, es decir $R = 5$, por lo cual $7 = a_1 + 2 \times 5$ y se tiene que $a_1 = -3$. Finalmente, $a_{10} = a_1 + 9R = -3 + 9 \times 5 = 42$.

Ejercicio 2.2

Dada una progresión aritmética $\{a_n\}$, la sucesión que se obtiene descartando los primeros k términos, también forma una progresión aritmética. Entonces podemos suponer en este caso que $a_1 = 13$ y $a_5 = 25$, luego $25 - 13 = a_5 - a_1 = 4R$, de donde obtenemos que la razón debe ser $R = 12/4 = 3$.

Ejercicio 2.3

Calculamos como en el ejercicio anterior y obtenemos la razón $R = 7$. Luego el promedio será: $P = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4 = (7 + 14 + 21 + 28)/4 = 35/2$.

Ejercicio 2.4

Primero calculamos el promedio P en términos de a_1 y R:

$$P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_1 + (j-1)R) = \frac{1}{n}(na_1 + \frac{n(n-1)}{2}R) = a_1 + \frac{n-1}{2}R$$

De las hipótesis obtenemos que $a_1 = p$ y $R = (f-p)/(n-1)$. Reemplazamos y simplificamos.

Entonces $P = p + (f - p)/2 = (p + f)/2$. Observemos que es independiente de n.

Verifiquemos que usando esta fórmula en el ejercicio anterior obtenemos el mismo resultado:

$$p = 7, f = 28 \text{ luego, } P = (7 + 28)/2 = 35/2$$

Ejercicio 2.5

Vemos que el primer múltiplo de 13 que es mayor que 20 es 26 = 13 × 2 y el mayor múltiplo de 13 que es menor que 400 es 390 = 13 × 30. Debemos calcular entonces la suma S de 13 × 2, 13 × 3, . . . , 13 × 30:

$$S = \sum_{j=2}^{30} 13j = 13(\frac{30(30+1)}{2} - 1) = 6.032$$

Ejercicio 2.6

Para demostrar la afirmación notemos que los números de n dígitos están comprendidos entre el $10^{n\text{-}1}$ y el $10^n - 1$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j=10^{n-1}}^{10^n-1} j &= \frac{(10^n-1)10^n}{2} - \frac{(10^{n-1}-1)10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^n}{2} - \frac{10^{2n-2}-10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^{2n-2}}{2} - \frac{10^n-10^{n-1}}{2} \\
&= 10^{2n-3}(\frac{10^3-10}{2}) - 10^{n-2}(\frac{10^2-10}{2}) \\
&= 10^{2n-3}495 - 10^{n-2}45
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.7

Los únicos factores de 10^6, son productos de potencias de 2 y potencias de 5. Cada vez que usamos un dos y un cinco aparecerá un factor diez y por lo tanto un cero. Por lo tanto la única combinación que no produce ceros es: $10^6 = 5^6 \times 2^6 = 15.625 \times 64$

Ejercicio 2.8

a) Dividimos por 4 y tenemos 2009 = 4×502+1 y 2999 = 4×749+3, de donde vemos que los años bisiestos serán: 4 × 503, 4 × 504, . . . , 4 × 749 menos los 7 que son divisibles por 100 pero no por 400. Así tenemos 749 − 502 − 7 = 240 años bisiestos.

b) Como 365 = 7×52+1 y 366 = 7×52+2, cada año que pasa, el día se corre en dos o uno según sea o no bisiesto. Así, en 808 años se correrá en 808 más la cantidad de bisiestos entre 2009 y 2816 (2008 no cuenta pues julio viene después de febrero). Tenemos así un corrimiento de 808 + 196 = 1.004 = 7 × 143 + 3. Quiere decir que se correrá en tres días.

El 9 de julio de 2816 será entonces sábado.

Ejercicio 2.9

La hipótesis nos dice que se trata de dos progresiones aritméticas de razón $R = 2$. Podemos tomar, por ejemplo, $\{a_n\}$ la sucesión de los números pares y $\{b_n\}$ la de los impares.

Ejercicio 2.10

En este caso tenemos $a'_n = a_{n+1} - a_n$, por lo tanto $a_{n+1} = 2a_n$. Podemos tomar, por ejemplo, $a_n = 2^n$.

Ejercicio 2.11

$$\begin{aligned} P_n = \sum_{j=1}^{n}(3j+1) &= 3n(n+1)/2 + n \\ &= n(3n+5)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n = \sum_{j=1}^{n}(4j+1) &= 4n(n+1)/2 + n \\ &= n(2n+3) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.12

Tenemos en total $10T_n/60 = 10(2^{65} - 1)/60 = (2^{65} - 1)/6$ minutos.

Ejercicio 2.13

De \$ 100 en mercadería pagamos \$ 85 y el banco nos devuelve \$ 8,5. Por lo tanto pagamos \$ 76,5 en lugar de \$ 100, es decir un 23,5% de descuento.

Ejercicio 2.14

Si el artículo nos costase \$ 121 serían \$ 100 más 21% de IVA y el gobierno nos devolvería \$ 5 de los \$ 121 pagados. Esto es, pagaríamos \$ 116 de los 121 abonados en el comercio, lo cual da un 95,87% .

Ejercicio 2.15

Si ganaban \$ 100 en marzo ganarán \$ 110 y en setiembre \$ 110 + \$ 9,9, es decir, \$ 119,9. Esto da un aumento total del 19,9 %.

Ejercicio 2.16

Probaremos la fórmula por inducción. La fórmula es verdadera para $n = 1$:

$$a_1 = a_1(\frac{a_2}{a_1})^{(1-1)}$$

Asumiendo que vale para $n = k$ veamos que vale para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = qa_k = qa_1(\frac{a_2}{a_1})^{(k-1)} = a_1(\frac{a_2}{a_1})^{(k+1-1)}$$

donde en la última igualdad usamos que $q = a_2/a_1$.

Ejercicio 2.17

a) Los cocientes deben ser potencias de q : $12/2 = 6 = q^k$ y $20/2 = 10 = q^j$ como q divide a ambos, debería ser $q = 2$ pero 6 no es potencia de 2, por lo tanto la terna no puede formar parte de una progresión geométrica de enteros.

b) Aquí $12/3 = 4 = q^k$ y $24/12 = 2 = q^j$, podemos tomar $q = 2$, $k = 2$, $j = 1$ y la terna forma parte de $\{3, 6, 12, 24, \ldots\}$.

Ejercicio 2.18

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, 232, 375, 607

b) $\varphi^{11}/\sqrt{5} \sim 88,997755$

Ejercicio 2.19

La longitud de los lados, $a < a\sqrt{\varphi} < a\varphi$, expresada en decímetros puede ser: $(1, \sqrt{\varphi}, \varphi)$; $(1/\sqrt{\varphi}, 1, \sqrt{\varphi})$ o $(1/\varphi, 1/\sqrt{\varphi}, 1)$. Los tres casos se obtienen tomando $a = 1$, $a\sqrt{\varphi} = 1$ y $a\varphi = 1$ respectivamente.

Ejercicio 2.20

Aquiles tardará 10 segundos en hacer los primeros 10 metros, en ese lapso la tortuga recorrió medio metro, que Aquiles recorrerá en 0,5 segundos. Así tardará en alcanzarla $10 + 0,5 + 0,025 + \cdots = 10(1/(1 - 1/20)$ segundos. Esto es 10,526316 segundos.

Ejercicio 2.21

Debemos resolver la ecuación $2 = (1,12)^n$. Es decir $n = \log 2/ \log(1,12) = 6{,}1162$. Aproximadamente seis años y un mes.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1

a) En este caso la tasa interés aplicada es mensual e igual a $r = 0{,}05 = 5\%$. Puesto que 1 año = 12 meses, se tiene que $m = 12$ y la tasa equivalente anual es entonces T.E.A.= $(1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}79585\%$.

b) La unidad de tiempo es el bimestre, y puesto que 1 año = 6 bimestres se tiene que la tasa interés bimestral aplicada es $r = 0{,}10 = 10\%$. La tasa equivalente anual es T.E.A.= $(1{,}10)^6 - 1 = 0{,}77156\%$.

Ejercicio 3.2

Dado que el interés periódico o real aplicado es trimestral, y que un año equivale a 4 trimestres, se denotará $r^{(4)}$ a la tasa nominal anual. La tasa trimestral aplicada es $r = r^{(4)}/4$.

La tasa de interés anual equivalente a r es del 15 %. Esto significa que

$$(1 + \frac{r^{(4)}}{4})^4 = 1 + 0{,}15$$

de donde puede despejarse el valor de la tasa nominal anual: $r^{(4)} = 0{,}1422 = 14{,}22\%$. La tasa trimestral equivalente a 0,15 que rige la operación es entonces $r = r^{(4)}/4 = 0{,}034 = 3{,}4\%$.

Ejercicio 3.3

El interés aplicado es del 0,25 %, es decir, $r = 0{,}0025$. Según las diferentes opciones, el capital final es:

Opción 1. $1.000\ (1{,}0025)^2\ (1 + 0{,}0025/2) = 1.006{,}26251$
Opción 2. $1.000\ (1{,}0025)^{2{,}5} = 1.006{,}26172$
Opción 3. $1.000\ (1{,}0025)^2 = 1.005{,}00625$

Ejercicio 3.4

Los elementos a tener en cuenta son $C_I = 2.500$, $C_F = 2.550$, $n = 5$. La tasa mensual r relaciona estas cantidades según la fórmula de interés simple:

$$2.550 = 2.500\ (1 + 5.\ r)$$

Por lo tanto

$$5\,.r = \frac{2.550}{2.500} - 1 \qquad \text{es decir} \qquad \boxed{r = 0{,}004 = 0{,}4\%}$$

Para determinar el capital final al cabo de los 8 meses, se aplica la fórmula

$$C_F = 2.500\ (1 + 8 \cdot 0{,}004)$$

que arroja un resultado de \$ 2.580.

Ejercicio 3.5

Salvo que se exprese lo contrario, se asumirá un tipo de interés compuesto. En este caso los datos son C_I=20.000, $r = 0{,}15\%$ y $n = 2$. La fórmula a aplicar es $C_F = C_I\ (1 + r)^2$.

El capital final así obtenido es de \$ 20.060.045.

Ejercicio 3.6

Si r es la tasa semestral, entonces la T.N.A. es $r^{(2)} = 0{,}1$, por lo que $r = r^{(2)}/2 = 0{,}05 = 5\%$. La capitalización durante tres años arroja un capital final en pesos igual a

$$C_F = 59.500\ (1{,}05)^3 = 68.878{,}6875$$

por lo que el interés obtenido es de \$ 9.378,69. Se han redondeado los decimales a dos dígitos, considerando que la unidad monetaria mínima es el centavo.

Ejercicio 3.7
La tasa trimestral r es del 2,5 %, es decir, r = 0,025. Los elementos a tener en cuenta son C_F = 105.600, n = 26 (26 trimestres), y la fórmula que relaciona los datos y incógnita es la del interés compuesto.

La solución al problema es que debe depositarse un capital de $ 55.570,39.

Ejercicio 3.8
Dado que un mes equivale a 30 días, la fórmula aplicada es

$$5.304{,}50 = 5.000\,(1 + r)^2$$

De aquí se obtiene que r = 0,03, lo que corresponde a una tasa del 3% mensual.

Ejercicio 3.9
Este problema es similar al del Ejemplo 3.16. La solución es 25 meses, es decir, 2 años y un mes.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1
El plazo de la operación, esto es, el tiempo que transcurre desde el 4 de setiembre al 22 de octubre, es de 48 días. El equivalente en meses es 1,6 meses. La tasa mensual de descuento es d = 2% = 0,02, por lo que el valor efectivo E, calculado según el descuento simple racional es

$$E = \frac{N}{1+dt} = \frac{2.730}{1+0{,}02\cdot(1{,}6)} \simeq \$\ 2.645{,}35.$$

y si se calcula según el descuento comercial es

$$E = N\,(1-dt) = 2.730\,(1-0{,}02\cdot(1{,}6)) = \$\ 2.642{,}64$$

Nótese que el valor descontado según el descuento racional es mayor que por el descuento comercial.

Ejercicio 4.2
En esta situación se considera que la unidad de tiempo es 90 días. Por lo tanto, la tasa de descuento es

$$d = \frac{d^{(4)}}{4} = \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675 = 6{,}75\%$$

Entonces, el descuento sobre el documento es por 10 752 · 0,0675 = 725,76, y el efectivo a cobrar es 10.752 − 725,76 = $ 10.026,24.

La tasa de interés para los 90 días es

$$r = \frac{d}{1-d} = 0{,}0724 = 7{,}24\%$$

por lo que la T.E.A. es igual a

$$r_4 = (1{,}0724)^4 - 1 = 0{,}322 = 32{,}2\%$$

La tasa de descuento equivalente anual está dada por

$$d_4 = 1 - (1-d)^4 = 0{,}244 = 24{,}4\%$$

que también podría calcularse a partir de la T.E.A.: $d_4 = \frac{r_4}{1+r_4} = \frac{0{,}322}{1{,}322} = 0{,}244 = 24{,}4\%$.

Si la tasa nominal anual fuera del 23%, entonces la tasa de interés para 90 días sería del 6.25 %. Esto equivale a una tasa de descuento para 90 días de

$$d = \frac{0{,}0625}{0{,}9375} = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

Para obtener un valor efectivo de $ 10.026,24 para esta tasa de descuento, el valor nominal N deberá cumplir

$$N \cdot (1 - 0{,}067) = 10.026{,}24 \qquad \text{es decir} \qquad N = \frac{10.026{,}24}{0{,}933} = \$\ 10.746{,}24$$

Ejercicio 4.3

Si el descuento es simple comercial, entonces el valor efectivo se obtiene restando al valor nominal el proporcional a 78 días. Como la tasa es trimestral, se debe expresar el tiempo en términos de trimestres: 78 días = $\frac{78}{90}$ = 0,87 trimestres. Luego el valor nominal cumple que:

$$890 = N \cdot (1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

de donde sale que

$$N = \frac{890}{1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 957{,}47$$

Si el descuento es simple racional, entonces la fórmula a aplicar es

$$890 = N \cdot (1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

por lo cual

$$N = \frac{890}{1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 831{,}41.$$

Ejercicio 4.4

Sea N el valor nominal del cheque. Se sabe que el descuento D cumple $D = N/6$, y por lo tanto el valor efectivo es $E = 5/6N$. Como el tipo de descuento es racional se tiene que

$$\frac{5}{6}N = \frac{N}{1+8\,d}$$

Por lo tanto, la tasa de descuento mensual cumple

$$1+8\,d = 1{,}2 \qquad \text{que implica } d = \frac{0{,}2}{8} = 0{,}025 = 2{,}5\%.$$

Capítulo 5

Ejercicio 5.1

Los distintos elementos que aparecen en el cheque son:

- SuBanco: banco en el que radica la cuenta bancaria.
- Domicilio del banco.
- 31 de mayo: fecha en la que se libra el cheque.
- 26 de noviembre de 2007: fecha a partir de la cual puede cobrarse el cheque. Este campo no aparece en un cheque común, ya que el mismo puede cobrarse inmediatamente.
- María Susana del Valle: nombre del portador del cheque.
- Juan Carlos Gonzalez: titular de la cuenta. También se indica su número de cuenta corriente, dirección y número de CUIT: 20-00000000-5.
- $ 1.256.71: monto del cheque, escrito en números. También el cheque posee un espacio para escribirlo en letras: mil doscientos cincuenta y seis con 70/100.
- Dorso del cheque: nombre, DNI, domicilio y firma del beneficiario del cheque.

Ejercicio 5.2

El cheque debe completarse según muestra la siguiente figura:

Ejercicio 5.2

Ejercicio 5.3

Los datos que pueden identificarse son:

- fecha y hora de emisión del comprobante: 2 de mayo de 2009, a las 10:12:42.
- denominación de la tarjeta de débito: MAESTRO.
- denominación de la entidad en la que se ha efectuado la compra: TIENDAS S.A., junto con su dirección y CUIL.
- importe de la compra: $ 156,86
- tipo de cuenta: C.A. $, (Caja de Ahorro en pesos).
- número de factura a la que corresponde la transacción: 0000-00000000

Ejercicio 5.4

Pueden identificarse los siguientes elementos.

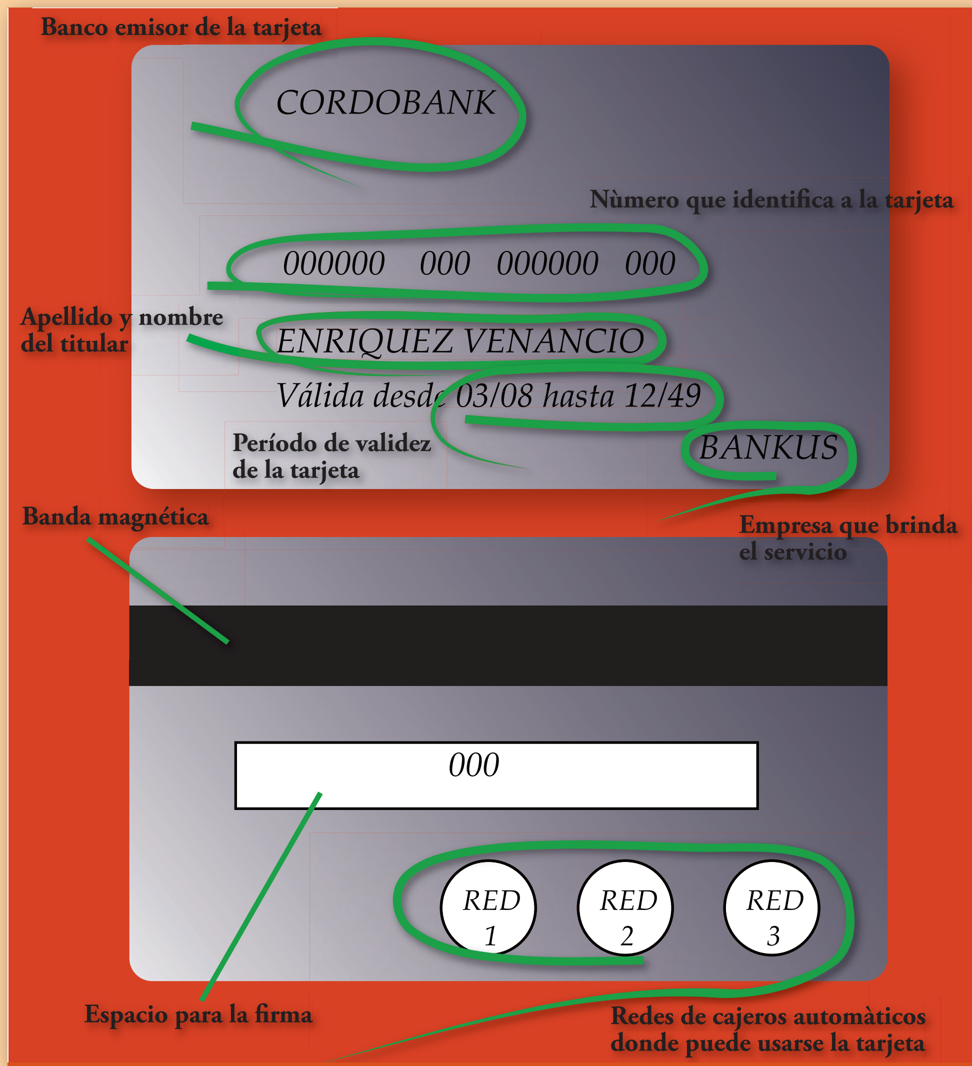


Figura 5.4

Datos en una tarjeta de débito

Capítulo 6

Ejercicio 6.1
La fórmula aplicar es $V_F = 3.000 \cdot s_{\overline{7}|r}$, para $r = 0{,}08$, $r = 0{,}1075$ y $r = 0{,}1729$. Las soluciones son, respectivamente: (a) \$ 26.768,41, (b) \$ 29.125,07 y (c) \$ 35.633,96.

Ejercicio 6.2
La situación de Juan es equivalente a tener que pagar el capital acumulado por una renta de 5 cuotas vencidas, iguales a c = \$ 250, sujetas a una tasa de interés $r = 0{,}144/12 = 0{,}012 = 1{,}2\%$. Por lo tanto, Juan deberá pagar en el siguiente mes un total en pesos de:

$$250\, s_{\overline{5}|,012} = 250\frac{(1{,}012)^5 - 1}{0{,}012} = 1.280{,}36$$

es decir \$ 1.280,36.

Ejercicio 6.3
En este caso se enuncia una tasa nominal anual del 8% con capitalización trimestral. Esto significa que la tasa real aplicada es del 2% trimestral. Dado que cada año es de 4 trimestres, el número total de cuotas al cabo de 10 años es 40. La fórmula a aplicar es

$$10.000 = c \cdot s_{\overline{40}|0{,}02}$$

de donde puede despejarse el valor de c: c = 165,56, aproximadamente.

Si al cabo de 4 años el banco cambia su tasa al 6%, entonces la tasa trimestral será del 1,5%. Ahora bien, al cabo de los 4 años se ha formado un capital V_1 igual a

$$V_1 = 165{,}56 \cdot s_{\overline{16}|0{,}02} = \$\ 3.085{,}92$$

Este capital, capitalizado durante 6 años más arroja un valor final igual a $V_2 = 3.085{,}92 \cdot (1{,}015)^{24} = 4411{,}33$, es decir que faltan 10.000 − 4411,33 = \$ 5. 588,67.

Por lo tanto, la renta de los últimos 6 años deberá ser tal que capitalizada, a una tasa de interés de 0,015 trimestral arroje un valor final de \$ 5.588,67. La fórmula a plantear es la siguiente:

$$5.588{,}67 = c_1 \cdot s_{\overline{24}|,0{,}015}$$

que da como resultado una cuota de \$ 195,18. Claramente, la cuota debe ascender puesto que la tasa de interés es menor.

Resumiendo, el Sr. Martínez deberá pagar 16 cuotas de \$ 165.56 y luego 24 cuotas iguales a \$ 195,18.

Ejercicio 6.4

En este caso se desconoce el número n de cuotas y la tasa de interés r a la que está sujeta la renta. Los datos se relacionan según las fórmulas:

$$5.000 \cdot a_{\overline{n}|r} = 62.311,05171 \qquad \text{y} \qquad 5.000 \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r} = 65.425,50430$$

siendo $a_{\overline{n}|r} = \dfrac{1-\nu^n}{r}$.

Despejando de ambas fórmulas $a_{\overline{n}|r}$ e igualando las expresiones resultantes, se tiene:

$$\frac{62.311,05171}{5.000} = \frac{65.425,50430}{5.000 \cdot (1+r)}$$

de donde resulta $r = 0{,}05 = 5\%$, aproximadamente, y $a_{\overline{n}|r} = 12{,}46221034$. Así,

$$\frac{1-(1{,}05)^{-n}}{0{,}05} = 12{,}46221034 \qquad \text{es decir} \qquad n = 20$$

En resumen, la tasa es del 5% anual y la renta es de 20 cuotas.

Ejercicio 6.5

Se tiene una renta de cuotas constantes y vencidas de valor c = \$ 1.000. La tasa de interés mensual es del 3 %, es decir, $r = 0{,}03$. El valor final V_F se obtiene aplicando la fórmula $V_F = c \cdot s_{\overline{6}|0,03}$.

El cálculo a efectuar es:

$$1.000 \cdot s_{\overline{6}|0,03} = 1.000 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} = 1.000 \cdot 6{,}46841 = \$\ 6.468{,}41$$

es decir que el valor acumulado es de \$ 6.468,41.

Ejercicio 6.6

El valor del electrodoméstico es igual al valor del pago inicial sumado al valor actual de la renta. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}27/12 = 0{,}0225 = 2{,}25\%$. La renta es de 8 cuotas vencidas, y la última cuota difiere de las siete primeras. Así, el valor actual de esta renta está dada por:

$$V_A = 160 \cdot a_{\overline{7}|0,0225} + 230 \cdot \frac{1}{1{,}0225^8} = 1218{,}14$$

Luego, el valor del electrodoméstico es \$ 1.400 + \$ 1.218,15, es decir \$ 1.618,14.

Ejercicio 6.7

Para comparar las tres ofertas se debe calcular el valor de cada una en un determinado momento, y elegir la de menor valor. Una posibilidad es calcular el valor al momento de hacer la compra.

Para el caso (a), el valor es \$ 40.000.

Para el caso (b), el valor en pesos es 19.000 + 5.000 · $a_{\overline{5}|0,04}$ = \$ 41.259,11162, es decir que es menos conveniente que (a).

Para (c) hay una renta de cuotas anticipadas más un último pago. La tasa sobre la renta es del 2% trimestral, por lo que el valor del auto según esta oferta es 2.000 · 1,02·$a_{\overline{9}|0,02}$+25. 000· $\frac{1}{1,02^4}$ = \$ 39.747,10.

Por lo tanto, la opción más conveniente es la (c).

Ejercicio 6.8

Para que las rentas sean equivalentes, el valor final al primer año de la renta de cuotas mensuales anticipadas debe ser de \$ 8.000. La ecuación a plantear es entonces

$$8.000 = c \cdot 1{,}09 \cdot s_{\overline{12}|0,09}$$

donde c es el valor de la cuota mensual. Despejando c se obtiene c = \$ 364,41

Ejercicio 6.9

Se trata de una renta de cuotas anuales vencidas de \$ 20.000, diferida en 5 años. El valor presente está dado por:

$$V_A = \frac{1}{1{,}06^5} \cdot 20.000 \cdot a_{\overline{25}|0,06} = 191.049{,}3473$$

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

El sistema de amortización aplicado es el francés, puesto que todas las cuotas son iguales. En primer lugar, se debe calcular el número de cuotas. Puesto que $V = c\ a_{\overline{n}|r}$, se tiene que

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{1.000.000}{162.745{,}40} = 6{,}1445669$$

que corresponde a n = 10.

Si el préstamo fue concedido hace 5 años, para cancelar la deuda el deudor deberá pagar la quinta cuota conjuntamente con el valor actual de las cinco cuotas restantes. Este último es igual a:

$$V_A^{(5)} = 162.745{,}40 \cdot a_{\overline{5}|0,1} = 616.933{,}11$$

<u>Conclusión</u>

El deudor deberá pagar \$ 616.933,11 + \$ 162.745,40 = \$ 779.678,51.

Ejercicio 7.2

Para resolver este ejercicio no es necesario construir toda la tabla de amortización, aunque sí es una forma posible. Las soluciones son las siguientes:

1. Se obtiene resolviendo $c = V/a_{\overline{n}|r}$, para $V = 1.000.000$, $n = 4$ y $r = 0{,}1$. La respuesta es $c = 315.470{,}8037$.

2. Al comenzar el tercer año, se paga la segunda cuota, y se adeudan la tercera y cuarta cuota. Por lo tanto, el monto adeudado está dado por:

$$V_A^{(2)} = 315.470{,}8037 \cdot a_{\overline{2}|0,1} = \$\ 547.511{,}3122$$

3. Las cuotas de amortización reales están dadas por $v_i = c \cdot \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}}$. Por lo tanto, la tercera cuota de amortización real es:

$$v_3 = 315.470{,}8037 \cdot \frac{1}{(1{,}1)^2} = \$\ 260.719{,}6725$$

4. Las cuotas de interés son iguales a $s_i = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}})$. Por lo tanto, la cuarta cuota de interés es igual a:

$$s_4 = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)}) = \$\ 28.679{,}16$$

5. El capital amortizado en los tres primeros años es igual al monto del préstamo menos la cuarta cuota de amortización. Dado que $v_4 = c - s_4$, entonces

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1.000.000 - (315.470{,}8037 - 28.679{,}16) = \$\ 713.208{,}3563.$$

Ejercicio 7.3

Se tiene que el valor de la i-ésima cuota de amortización es $v_i = c\,\nu^{\,n+i-1}$, con $\nu = 1/1{,}1$, donde n es el número de cuotas y c es el valor de la cuota total. Por lo tanto, la última cuota de amortización está dada por $v_n = c \cdot \nu$. Conocido el valor de v_n, es posible obtener el valor de c :

$$c = \frac{v_n}{\nu} = 1.479{,}504 \cdot 1{,}1 = \$\ 1.627{,}4544$$

El valor del préstamo se relaciona con el valor de la cuota por la fórmula $V = c \cdot a_{\overline{n}|r}$, de donde puede despejarse el valor de $a_{\overline{n}|r}$:

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{10.000}{1.627{,}4544} = 6{,}1445$$

Esto dice que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{(1{,}1)^n}}{0{,}1} &= 6{,}1445 \\ 1 - 0{,}61445 &= \frac{1}{(1{,}1)^n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1{,}1)^n &= \frac{1}{0{,}38555} \\
n\log(1{,}1) &= -\log(0{,}38555)
\end{aligned}
$$

A este punto, puede utilizarse un logaritmo de cualquier base. Para el caso del logaritmo natural se obtiene $c = \frac{-0{,}9530}{0{,}0953} = 10$. Es decir que el número de cuotas de la anualidad es $n = 10$.

Ejercicio 7.4

Para resolver este ejercicio puede confeccionarse el cuadro de amortización y buscar los datos pedidos en el problema, o bien utilizar las fórmulas correspondientes que se derivaron en este capítulo. Es conveniente utilizar la segunda alternativa ya que implica menor número de cálculos y en consecuencia es menor el tiempo de resolución y disminuye la probabilidad de error en las cuentas.

Se trata de un sistema de amortización alemán, ya que las cuotas de amortización son constantes.

Esto indica que cada cuota de amortización es igual a la décima parte del préstamo: $v_i = 1.000$, para $i = 1, 2, \ldots, 10$. La capitalización es semestral, por lo que la tasa de interés por semestre es

$$
r = \frac{r^{(2)}}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 = 5\%
$$

El pago del octavo semestre es la suma de la cuota de amortización más los intereses sobre el saldo adeudado. Con la séptima cuota se habrán pagado \$ 7.000 del préstamo, por lo que el saldo es de \$ 3.000. Esto implica que en el octavo semestre se pagará una cuota de interés igual a $s_8 = 3.000 \cdot 0{,}05 = 1.500$. Por lo tanto el pago será de \$ 1.000 + \$ 1.500 = \$ 2.500.

El capital adeudado luego de pagar la segunda cuota es 8/10 del préstamo, es decir \$ 8.000.

Ejercicio 7.5

En este caso se trata de un sistema de amortización francés con tasa mensual del 1,25 %. Cada cuota tiene un valor $c = 85.000/a_{\overline{18}|0{,}0125} = \$\ 5.302{,}71$.

a) El Sr. Domínguez no ha pagado la cuota 10, y de la cuota 11 sólo paga los intereses. Eso significa que al momento del pago de la cuota 12 adeuda:

1. una cuota $c = v_{10} + s_{10}$, correspondiente a la cuota 10, de dos meses atrás,
2. la cuota v_{11} de un mes atrás,
3. la cuota 12.

Lo adeudado en las cuotas 10 y 11 debe ser capitalizado dos meses y un mes, respectivamente;por lo que se deberá pagar sobre esta deuda la cantidad $c \cdot 1{,}0125^2 + v_{11} \cdot 1{,}0125$. Usando que $v_i = c \cdot \nu^{\,n+1-i}$, siendo n el número de cuotas y $\nu = 1/1{,}0125$, se tiene que la deuda es de

$$5.302{,}71 \cdot (1{,}0125^2) + 5.302{,}71 \cdot \frac{1}{1{,}0125^{16-11}} = 10.352{,}46$$

es decir de \$ 10.352,46.

Por otro lado, corresponde pagar también la cuota 12, cantidad que debe sumarse a lo anterior.

Así, para regularizar su deuda, el Sr. Domínguez debe pagar 10.352,46 + 5.302,71 = \$ 15.655,17.

b) Si en cambio el Sr. Domínguez desea disminuir el valor de las cuotas 10 a 18 en un 10 %, entonces junto con la cuota 9 deberá pagar el valor actual del 10% de la anualidad restante, o lo que es lo mismo, el 10% de dicho valor actual. Como restan pagar 9 cuotas, el valor actual de la anualidad restante es $V^{(9)} = 5.302{,}71 \cdot a_{\overline{9}|0{,}0125} = 44.873{,}36$, por lo cual el Sr. Domínguez deberá hacer un pago extraordinario de \$ 4.487,34.

Ejercicio 7.6

Dado que las cuotas decrecen en progresión aritmética, se trata de un sistema de amortización alemán. La razón de la progresión es $h = -200$, y a su vez $h = -r \cdot X/n$, donde $r = 0{,}08$ y $n = 10$. Por lo tanto

$$X = \frac{10 \cdot 200}{0{,}08} = \$\ 25.000$$

Las componentes del cuadro de amortización en el séptimo año son:

1. cuota de amortización: $v_7 = 25.000/10 = \$\ 2.500$;
2. cuota de intereses: $s_7 = 4 \cdot 2.500 \cdot 0{,}08 = \$\ 800$;
3. cuota total: $c_7 = v_7 + s_7 = \$\ 3.300$;
4. saldo adeudado: $V^{(7)} = 3 \cdot 2.500 = \$\ 7.500$.

Ejercicio 7.7

Este caso tiene la particularidad de no tener cuotas equiespaciadas en el tiempo. Por lo tanto no pueden emplearse las fórmulas que se derivaron para el sistema alemán, y conviene entonces construir un cuadro de amortización.

Las cuotas de amortización son de \$ 1.000, así que las cuotas de intereses serán sobre \$ 3.000 la primera, sobre \$ 2.000 la segunda y sobre \$ 1.000 la tercera.

Las tasas equivalentes al 2% cada 30 días son: a) del $(1{,}02)^3 - 1 = 0{,}061$ a 90 días, b) del $(1{,}02)^{31/30} - 1 = 0{,}0206$ a 31 días y c) $(1{,}02)^{32/30} - 1 = 0{,}0213$ a 32 días. Estas tasas serán las que se aplicarán sobre el saldo adeudado a lo largo de los tres períodos, respectivamente:

Cuadro C.4

Tabla de valores de $r / ((1+r)^n - 1) / r$

Pago a los	Capital adeudado a l comienzo del período	Intereses a pagar	Amortizació real a pagar	Cuota a pagar
90 días	\$ 3.000	3.000 · 0,061 = 183	\$ 1.000	\$ 1.183
121 días	\$ 2.000	2.000 · 0,0206 = 41,20	\$ 1.000	\$ 1.041,20
153 días	\$ 1.000	1.000 · 0,0213 = 21,30	\$ 1.000	\$ 1.021,30

Capítulo 8

Ejercicio 8.1

a) Para comparar debemos calcular el valor actual de ambas posibilidades: en el caso del pago al contado su valor actual es \$ 10.000. En la segunda opción tenemos que la tasa de descuento semestral es del 7,5 %, entonces:

$$VA = 5.000 + 2.500(1{,}075)^{-1} + 2.500(1{,}075)^{-2} + 2.500(1{,}075)^{-3} = \$\ 11.501{,}31$$

Vemos que la segunda opción será preferible ya que nos da un mayor valor actual.

b) En este caso la tasa de descuento semestral es del 12% y debemos recalcular el valor de la segunda opción:

$$VA = 5.000 + 2.500(1{,}12)^{-1} + 2.500(1{,}12)^{-2} + 2.500(1{,}12)^{-3} = \$\ 11.004{,}58$$

En este caso seguimos prefiriendo la segunda opción.

Ejercicio 8.2

a) Si llamamos r a la tasa de descuento semestral que hace equivalentes a ambas ofertas, tenemos la ecuación:

$$10.000 = 5.000 + 2.500(1 + r)^{-1} + 2.500(1 + r)^{-2} + 2.500(1 + r)^{-3}$$

Vemos entonces que r corresponde a la TIR del flujo (—5.000, 2.500, 2.500, 2.500), esto es, 23,3752% .

b) En este caso si llamamos P al pago inicial tenemos la ecuación:

$$10.000 = P + 2.500(1{,}12)^{-1} + 2.500(1{,}12)^{-2} + 2.500(1{,}12)^{-3} = P - 5.000 + 11.004{,}58$$

De donde obtenemos: $P = \$\ 3.995{,}42$

Ejercicio 8.3

Un bono de \$ 100 como en el ejemplo, cuando es comprado por su valor nominal produce el flujo (—100, 7, 7, 107). Si lo compramos al 50% tendremos el flujo (—50, 7, 7, 107). Debemos calcular la TIR de este flujo y eso nos da $r = 37{,}45\%$

Ejercicio 8.4

a) El cálculo de la TIR no cambiará si dividimos todos los términos del flujo de caja de la inversión por 100. Así basta calcular la TIR del flujo:

$$(-100, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

Que da como resultado 5% semestral.

b) En este caso tenemos el flujo:

$$(-90, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

que tiene una tasa interna de retorno de 5,8621 %.

c) Aquí calculamos la TIR del flujo:

$$(-105, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

que da 4,6112 %.

Ejercicio 8.5

a) Podemos calcular la cuota con la fórmula: $c = 100.000 / ((1 - 1{,}05^{-20}) / 0{,}05)$. Esto nos da $c = 8024{,}26$

b) Si usamos la ecuación $R_k = c(1 - (1 + r)^{k-n})/r$ que fue desarrollada en el texto, tenemos:

$$R_6 = 8.024{,}26(1 - 1{,}05^{-14})/0{,}05 = 79.429{,}26$$

por lo tanto después de pagar la sexta cuota debemos aún \$ 79.429,26.

c) Para obtener el usufructo U_6 usaremos las ecuaciones desarrolladas en el texto:

$$\begin{aligned} U_6 + N_6 &= c \sum_{j=1}^{20-6} (1 + 0,03)^{-j} \\ \frac{0,03}{0,05} U_6 + N_6 &= R_6 \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que la tasa semestral de mercado es de 3 %. Reemplazamos c y R_6 por los valores obtenidos en el inciso anterior y restamos miembro a miembro las igualdades y obtenemos:

$$(1-\frac{0,03}{0,05})U_6 = 8024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,03)^{-j} - 79.429,26$$

Así tenemos que U_6 = 2,5(8024,26 × 11,296 − 79.429,26) = \$ 28.033,40 es el usufructo buscado.

d) En este caso, consideramos la fórmula usada en el inciso anterior y realizamos el cambio de 0,03 por 0,075% :

$$(1-\frac{0,075}{0,05})U_6 = 8.024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,075)^{-j} - 79.429,26$$

Entonces tenemos que U_6 = −2(8.024,26 × 8,49 − 79.429,26) = \$ 22.620,18 es el usufructo buscado.

Ejercicio 8.6

Si desarrollamos una suma del tipo de la tratada, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-k}(a_{j-1}-a_j)b^{-j} &= a_0b^{-1}+a_1(b^{-2}-b^{-1})+a_2(b^{-3}-b^{-2})+\cdots-a_{n-k}b^{k-n}\\ &= a_0b^{-1}+a_1b^{-2}(1-b)+a_2b^{-3}(1-b)+\cdots-a_{n-k}b^{k-n}\\ &= a_0b^{-1}-(b-1)(a_1b^{-2}+a_2b^{-3}+\cdots+a_{n-k-1}b^{k-n})-a_{n-k}b^{k-n}\\ &= a_0b^{-1}-(b-1)\sum_{j=2}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n}\\ &= a_0b^{-1}b-a_0b^{-1}b+a_0b^{-1}-(b-1)\sum_{j=2}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n}\\ &= a_0-(b-1)\sum_{j=1}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n}\end{aligned}$$

Ahora usamos $a_l = R_{k+l}$ y $b = 1 + r_m$ y tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - r_m\sum_{j=1}^{n-k}R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j} - R_n(1+r_m)^{k-n}$$

Usando que $R_n = 0$ se tiene el primer resultado. Por otra parte usando la igualdad $A_{k+j} = R_{k+j-1} - R_{k+j}$ y la definición de N_k tenemos:

$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k}A_{k+j}(1+r_m))^{-j} = \sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - \frac{r_m}{r}\sum_{j=1}^{n-k}rR_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$$

así obtenemos la ecuación $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$.

Ejercicio 8.7

Primero usamos la fórmula para la nuda propiedad con n = 84, k = 24, c = 100, r = 0,01, r_m = 0,005:

$$\begin{aligned} N_{24} &= 100(1,01)^{-61}\sum_{j=1}^{60}(\frac{1,01}{1,005})^{j} \\ &= \$\,3.818,45 \end{aligned}$$

Con la ayuda podemos calcular $R_{24} = \frac{100(1-(1+0,01)^{24-84})}{0,01} = 4.495,50$. De la fórmula $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$, , probada en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\frac{0,005}{0,01}U_{24} = R_{24} - N_{24} = 4.495,50 - 3.818,45 = \$\ 677,05$$

Luego U_{24} = \$ 1.354,10 es el usufructo.

Ejercicio 8.8

Sabemos que el número de cuotas pagadas k cumple $3252,13 = R_k = \frac{100(1-1,0125^{k-60})}{0,0125}$. Luego, $1 - 1,0125^{k-60} = 3.252,13/8000$, es decir, $1,0125^{k-60} = 1 - 3.252,13/8.000$. Entonces $k - 60 = \log(1 - 3.252,13/8.000)/\log(1,0125) = -42$.

Por lo tanto $k = 60 - 42 = 18$ y nos quedan por pagar 42 cuotas.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1

Como vimos en el ejemplo 9.1 la tasa buscada es independiente del valor del crédito. En este caso la tasa de interés mensual es de $r_m = 20/12\%$ y la correspondiente tasa anual será:

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/60)^{12} - 1 = 21,94\%$$

Ejercicio 9.2

Este casos es similar al anterior con $r_m = 15/12\%$. Entonces la tasa anual será:

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/80)^{12} - 1 = 16,08\%$$

Ejercicio 9.3

El interés total que pagaremos es $12 \times 2.000/100 = 240$. Este se suma al monto del crédito y se reparte en 12 cuotas iguales de $c = (2,000 + 240)/12 = \$\ 186,67$.

Sabemos que en el sistema francés con tasa mensual r tenemos $cA_{\overline{12}|r} = 2.000$. Luego debemos resolver la ecuación

$$A_{\overline{12}|r} = 2.000/186,67$$

de la cual resulta $r = 1,79\%$ que corresponde a una tasa anual de 21,45 %.

Ejercicio 9.4
En este caso pagamos un interés total de \$ 100 y al repartirlo en diez cuotas estas tendrán un valor de c = 1.100/10 = 110. Para ver la tasa equivalente resolvemos la ecuación

$$A_{\overline{10}|r} = 1.000/110$$

de donde r = 1,77% que corresponde a una tasa anual de 21,26 %.

Ejercicio 9.5
Un rápido cálculo nos indica que si depositamos \$ 500.000 al 12% anual obtendremos una renta de \$ 5.000 por mes y al cabo de 200 meses seguiremos siendo dueños de los \$ 500.000 de capital. Luego nos conviene la oferta contado.

Ejercicio 9.6
En realidad recibimos \$ 2.000 − \$ 200 = \$ 1.800 a pagar en 10 cuotas de \$ 200. para calcular la tasa mensual equivalente resolvemos:

$$A_{\overline{10}|r} = 1.800/200$$

lo cual da r = 1,96% y la tasa anual correspondiente será de 23,55 %.

Ejercicio 9.7
El interés que nos descuentan es 1.000 × 12/100 = \$ 120. Entonces recibimos \$ 880 y lo pagamos en cuotas iguales de \$ 83,33. Resolvemos entonces $A_{\overline{12}|r} = 880/83,33$, de donde obtenemos una tasa mensual r = 2,02% que corresponde a una tasa anual del 24,24 %.

Ejercicio 9.8
Calculamos el valor de la cuota $c = 1.000/A_{\overline{12}|0,01} = 88,85$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de \$ 1.000 − \$ 88,85 = \$ 911,15 pagadero en 11 cuotas de \$ 88,85. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{11}|r} = 911,15/88,85$, lo cual da 1,18% mensual o 14,25% anual.

Ejercicio 9.9
Calculamos el valor de la cuota $c = 3.000/A_{\overline{24}|(1/120)} = \$\ 138,43$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de 3.000 − 138,43 = \$ 2.861,57 pagadero en 23 cuotas de 138,43. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{23}|r} = 2.861,57/138,43$, lo cual da 0,90% mensual o 10,90% anual.

Ejercicio 9.10
El pago p que realizamos es

$$p = 1.000.000(1 + 10/1200)^{-240} = \text{U\$S } 136.461,51$$

Ejercicio 9.11

El estudiante recibe $p = 1,5 - (10/100)1{,}5 = 1{,}35$ y deberá devolver 1,5 rublos. Por lo tanto el interés mensual r satisface la ecuación $(1 + r)1{,}35 = 1{,}5$, de donde

$$r = 1,5/1,35 - 1 = 0,1111$$

es decir un 11,11% mensual.

Ejercicio 9.12

Nos acreditarán 300(5/121) = $ 12,40.

Ejercicio 9.13

Recordemos que si gastamos $ 100 en enero, $ 2 correspondieron a pan y $ 1 a leche fluida. En febrero gastamos $ 4 en pan y $ 1,50 en leche. Si el resto se mantuvo igual, el total del gasto fue $ 102,5 ($ 2 más en pan y 50 ctvs. más en leche). El valor del índice de febrero es entonces 102,5.

Capítulo 10

Ejercicio 10.1

Para calcular la probabilidad de que sumen 7, listamos los casos favorables:

(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)

esto da un total de 7 casos favorables sobre un total de 36 posibles. Entonces tenemos una probabilidad $p = 7/36$ de obtener el 7.

Para calcular la probabilidad de obtener un número par, en lugar de listar todos los casos favorables, razonamos que tenemos las siguientes posibilidades para los dos dados: (par, par); (impar, impar); (impar, par) y (par, impar). De estas, sólo las dos primeras producen resultado par. Como cada dado tiene tres caras pares y tres impares, el número de casos favorables es de $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$. Entonces, tenemos una probabilidad de $18/36 = 0{,}5$ de obtener un resultado par.

Ejercicio 10.2

Tenemos 12 figuras, 3 por cada uno de los cuatro palos. Luego la probabilidad de dar vuelta una figura será de $12/52 \sim 0,23$

Ejercicio 10.3

Si sale el 48 obtenemos una ganancia de $69 = 70 - 1$ y esto ocurre con una probabilidad de 1/100. Si no sale perdemos un peso, y esto ocurre con probabilidad 99/100. El resultado esperado en 100 veces es ganar una vez 69 y perder 1 las restantes 99. Así terminaríamos con: $69 - 99 = -30$, es decir, una pérdida de \$ 30 es lo que esperamos. En el caso de tres cifras tenemos una probabilidad de 1/1.000 de ganar 499 y 999/1.000 de perder un peso. En 100 juegos tenemos un valor esperado de $100(499 \times 1/1.000 + (-1)999/1.000) = -50$, esto es, esperamos una pérdida de \$ 50.

Ejercicio 10.4

Si la apuesta tiene un costo de $\$c$, obtenemos $70 - c$ con una probabilidad de 1/100 y perdemos c con probabilidad 99/100. El valor esperado es entonces $V = (70 - c)/100 - c\,99/100 = 70/100 - c$. El valor justo es el que hace cero a V, por lo tanto $c = 70/100$ o 70 centavos.

Ejercicio 10.5

En este caso obtenemos $500 - c$ con una probabilidad de 1/1.000 y perdemos c con una probabilidad de 999/1.000. Así el valor esperado V es $(500 - c)/1.000 - c\,999/1.000 = 500/1.000 - c$. De aquí obtenemos que $c = 0{,}5$ es el valor justo que anula el valor esperado de la ganancia.

Ejercicio 10.6

Si jugamos un peso al 13 ganamos 35 pesos si sale, lo cual tiene una probabilidad de 1/37 y perdemos un peso con probabilidad 36/37. Por lo tanto el valor esperado de la apuesta es:

$$V = 35 \times 1/37 - 1 \times 36/37 = -1/37$$

Por lo tanto en 100 jugadas esperamos una pérdida de alrededor de \$ 100/37.

En el caso de jugar a rojo tenemos una ganancia de un peso con probabilidad 18/37 y una pérdida de un peso con probabilidad 19/37, así tenemos:

$$V = 1 \times 18/37 - 1 \times 19/37 = -1/37$$

de donde la pérdida esperada en 100 jugadas es igual a la anterior: $100/37 \sim 2,70$.

Ejercicio 10.7

Planteamos la ecuación:

$$(36 - c) \times 1/37 - c \times 36/37 = 0$$

de donde $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.8

En este caso la ecuación a resolver es:

$$(2 - c) \times 18/37 - c \times 19/37 = 0$$

por lo tanto $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.10
Si el 20 de febrero la acción vale \$ 16 o \$ 20, perdemos los \$ 2 pagados por la opción. Si la acción vale \$ 23 utilizamos la opción la compramos a \$ 20 y la vendemos a \$ 23 con lo cual ganamos \$ 3, pero hay que restar los dos pesos pagados por la opción y se tiene una ganancia neta de \$ 1.

Ejercicio 10.11
Si la acción vale \$ 13, perdemos \$ 1,20 pagados por la opción. Si vale \$ 16 ganamos un peso pero al restarle \$ 1,20 el resultado neto es una pérdida de 20 centavos. En el caso que la acción valga \$ 20 tendremos una ganancia de \$ 5 al hacer uso de la opción y una ganancia neta de \$ 3,80 al restar el costo de la opción.

Ejercicio 10.12
Definamos $E(V_2 - K)^- = E(V_2 - K) - E(V_2 - K)^+$ y recordemos que $E(V_2 - K) = E(V_2) - K$. Observemos que al igual que en el ejemplo 10.13

$$E(V_2-9)^- = (10(1-p)^2-9)(1-p)^2 = (10(1-p)^2-10)(1-p)^2+(1-p)^2 = E(V_2-10)^-+(1-p)^2$$

Luego

$$E(V_2-9)^+ = E(V_2-9) - E(V_2-9)^- = E(V_2-10)+1-E(V_2-10)^- - (1-p)^2 = E(V_2-10)^+ + p(2-p)$$

En el ejemplo citado se obtuvieron los valores: $E(V_2 - 10)^+ = (6r + 2)^2/2$ y $p = \frac{6r+2}{5}$, así:

$$\begin{aligned} E(V_2-9)^+ &= \frac{(6r+2)^2}{2} + (\frac{6r+2}{5})(2 - \frac{6r+2}{5}) \\ &= (6r+2)(\frac{(6r+2)}{2} + \frac{1}{5}(2 - \frac{6r+2}{5})) \\ &= (6r+2)(\frac{23(3r+1)}{25} + \frac{2}{5}) \\ &= \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11) \end{aligned}$$

Por lo tanto $c = \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11)(1+r)^{-2}$.

Capítulo 11

Ejercicio 11.1
Toda función cuyo crecimiento porcentual por unidad en x es constante, es una función exponencial. Como además $q^s = e^{s\ln(q)}$, entonces cualquier función exponencial se puede escribir de la forma

$$f(x) = a\, e^{r\, x}$$

para algún a y algún $r > 0$, ambos positivos puesto que $f(0)$ es positivo y además $f(x)$ es creciente.

Como $f(x+1) = a\, e^{r\,(x+1)} = f(x)\, e^r$, y $f(x)$ crece un 25% por unidad en x, debe cumplirse

$$e^r = 1{,}25$$

es decir, $r = \ln(1{,}25) = 0{,}2231$.

El valor de a puede calcularse a partir del dato $f(0) = 0{,}5$, y usando que $f(0) = a$. Por lo tanto la solución es

$$f(x) = 0{,}5\ e^{0;2231\,x}$$

Ejercicio 11.2

Este caso es similar al del Ejercicio 11.1, sólo que se trata de una exponencial decreciente. Por lo tanto $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = a\ e^{r\,x}$$

con $a = 3$ pues $f(0) = 3$, y $r < 0$ ya que $f(x)$ es decreciente; decrece un 20% cada dos unidades. Esto indica que $f(x + 2) = 0{,}80\ f(x)$ y también $f(x + 2) = f(x)\ e^{2\,r}$, luego debe ser $e^{2\,r} = 0{,}80$, es decir

$$r = \frac{\ln(0{,}8)}{2} = -0{,}1115$$

La solución es entonces:

$$f(x) = 3\ e^{-0{,}1115\,x}$$

Ejercicio 11.3

La tasa de interés nominal anual es $r = 0{,}059$. Por lo tanto, si se deposita un capital inicial C, el monto obtenido en t años será $C(t) = C\, e^{0{,}059\,t}$. En este caso, la incógnita es C, la cantidad de años es $t = 5$ y el monto final es $C(5) = 12.\,000$. Por lo tanto

$$C = \frac{12.000}{e^{0{,}059\,5}} = \$\ 8.934{,}38$$

es decir que se deberá realizar un depósito inicial de \$ 8.934,38.

Ejercicio 11.4

Si la capitalización es diaria y con un año de 360 días, entonces la tasa equivalente anual está dada por

$$(1 + \frac{0{,}063}{360})^{360} - 1 = 0{,}065021$$

Si la capitalización es continua, entonces la tasa equivalente anual es $e^{0{,}063} - 1 = 0{,}065026$.

Como puede observarse, una capitalización diaria produce un interés muy cercano al de una capitalización continua, y por lo tanto el monto al cabo de un año por un capital de 3.000 será muy similar. En efecto:

para la capitalización diaria:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065021 = 3.195{,}063$$

para la capitalización continua:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065026 = \$\ 3.195{,}078$$

Apéndice A

Ejercicio A.1

Se ubica en un casillero distinto de los que se pretende sumar y se escribe $= SUMA(B2 : K2)$

Ejercicio A.2

Para escribir una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}^{-1}$, para $r = 0{,}005+j0{,}00125$, con $0 \le j \le 10$ y $1 \le n \le 30$ podemos efectuar los mismos pasos que en la sección 1 y a continuación escribimos el valor 1,625 en la celda K1 y el 1,75 en la celda L1. Una vez hecho esto podemos usar la función de autorrelleno horizontal para rellenar las celdas K2 y L2 partiendo desde la J2 y repetir esto para todas las filas hasta la 31 donde llenamos K31 y L31 a partir de J31. Así obtenemos la tabla requerida.

Ejercicio A.3

Llenamos la fila 1 desde A1 hasta Q1 y la fila 2 desde A2 hasta Q2 de la misma forma que en el ejemplo de la sección 2. También en C3 escribimos el valor nominal con un signo menos, es decir −10.000. A continuación en la columna B desde la celda B5 hasta la celda B12 escribimos el flujo de pagos del bono: 700; 700; 700; 700; 700; 700; 700; 10.700. Usando el autorrelleno horizontal lo extendemos hasta la columna Q. En la celda B4 ponemos la fórmula $= \$A\$3 * B1$ y usando autorrelleno horizontal la extendemos hasta la columna Q.

Finalmente podemos completar la fila correspondiente a la tasa interna de retorno. Escribimos en la celda B2:

$$= \mathrm{TIR}(B4 : B12)$$

y usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda Q2.

Apéndice B

Ejercicio B.1

Seguimos los pasos del Ejemplo B.3 y obtenemos la siguiente sucesión:

CMPD ▽ 120 EXE 11 EXE 100000 EXE ▽ 0 EXE 12 EXE 12 EXE ΔΔΔ SOLVE